# 第二章　光子晶體理論與光子晶體光纖

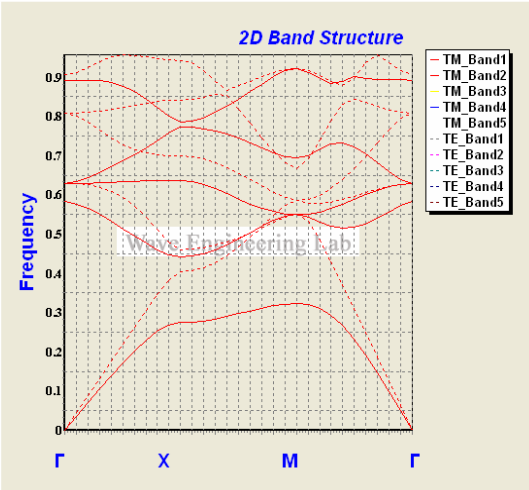
本章主要是探討光子晶體的基礎理論，以及光子晶體光纖特性。為了瞭解電磁波在光子晶體中的傳播情形，必須先由光子晶體的基礎理論出發，它係從馬克斯威爾方程式開始推導。為了簡化推導過程，以方便計算，推導過程中做了一些假設。最後，再以推導出的光子晶體基礎公式作更多方面應用與研究。

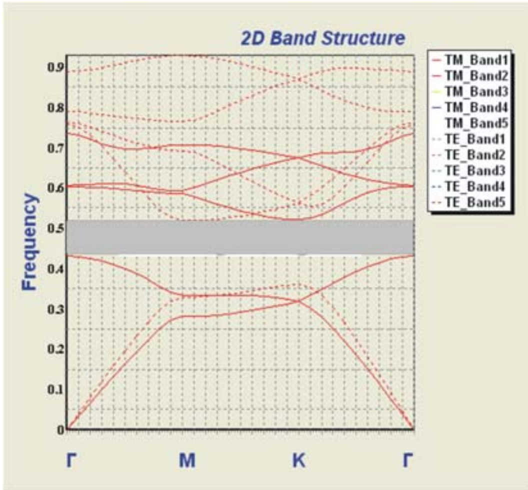
## 2.1 光子晶體的基礎理論

光子晶體是折射率在空間周期性變化的介電結構，其變化週期是光波長的數量級，它具有光子能隙，相對應於光子能隙區域那些頻率的光波不能在光子晶體中傳播，而被全部反射回去。這是由於折射率的週期性變化產生光柵的作用。由於布拉格散射使光的傳播方向產生偏離，類似於x射線通過一般晶體，光波被散射的光譜區域相應於光子晶體能隙的光譜寬度。而光子晶體能隙的寬度是由光子晶體結構的對稱性決定，並隨折射率調制深度的增加而增加。

我們由電子能隙理論可知，能隙是指在能量(或頻率)E與波向量k的的關係在布里淵區的邊界上發生變化。這裡的波向量含有兩個含量，光波波長與光波方向，意思也就是光子能隙不但與光子能量有關，還與光波的方向和極化性有關。光子晶體可由此再劃分為兩種不同的能隙：一為完全能隙；二為不完全能隙，也就是在特定方向上存在的能隙。圖2-1、2-2是針對正方晶格與三角晶格所畫出的頻帶結構，由規一化頻率(Normalized Frequency)對波向量k的關係畫出。圖2-1的光子晶體是由介電質圓柱介電常數$\varepsilon$=8.9，背景介電常數$\varepsilon$=1，圓柱半徑r=0.2a由正方晶格所構成，而a是晶格常數。圖2-2的光子晶體是由空氣圓柱介電常數$\varepsilon$=1，背景介電常數$\varepsilon$=13，圓柱半徑r=0.48a由三角晶格所構成，而a是晶格常數。圖中實線代表TM波頻帶結構，虛線代表TE波頻帶結構。凡是沒有曲線通

過的頻帶區域就是帶隙。而圖2-2中灰色的區域，是一個完全帶隙，因其是TE與TM帶隙的共同區域。



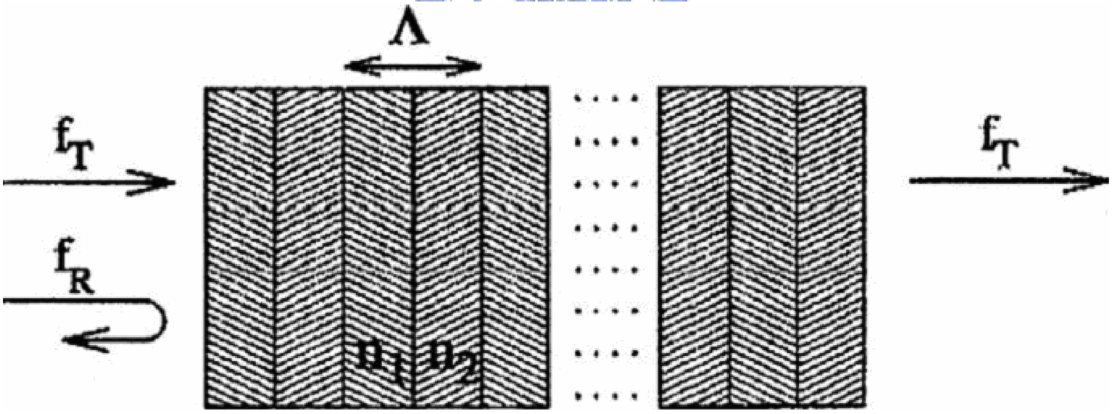

【圖2-1 正方晶格光子晶體頻帶結構】 【圖2-2 三角晶格光子晶體頻帶結構】

出現帶隙的原因一般而言可分成兩種方式解釋。第一種有關多重散射，當波在週期性的結構（或位能）中傳播時，會經歷多重散射。多重散射後的的各分波會與未散射的波疊加而形成總波場。這些分波疊加後會在空間形成建設性與破壞性干涉區域。當建設性干涉的區域彼此互不通連時，波能量將無法傳遞，使得傳播模態無法建立。此段無法建立傳播模態的區域的頻率範圍就形成帶隙。第二種則關於邊界條件，若以二維光子晶體為例，通常是由許多的介電質柱或柱孔構成的二元性介質。若我們考慮介質中的總電磁場時，在這些柱體邊界上的電磁場必須滿足邊界條件的方式連接起來。當柱體有無窮多個時，就有無窮多個邊界條件必須被滿足。若是在一整段頻率範圍內任何波形都無法滿足邊界條件，則此段頻率就是帶隙。事實上，在帶隙的頻段內，布洛赫波向量k會變成虛數，導致波振幅沿著k方向作指數遞減，這也同時意味著波振幅沿著-k方向作指數遞增。當考慮一個完全週期性的無窮大光子晶體結構時，虛數k的解不能符合「波函數處處有限」的條件，因此虛數k的解並不是解，亦即這種模態不存在。但若考慮的是「半邊無窮大」的光子晶體系統時，波振幅由表面向介質內遞減的波是可以存在

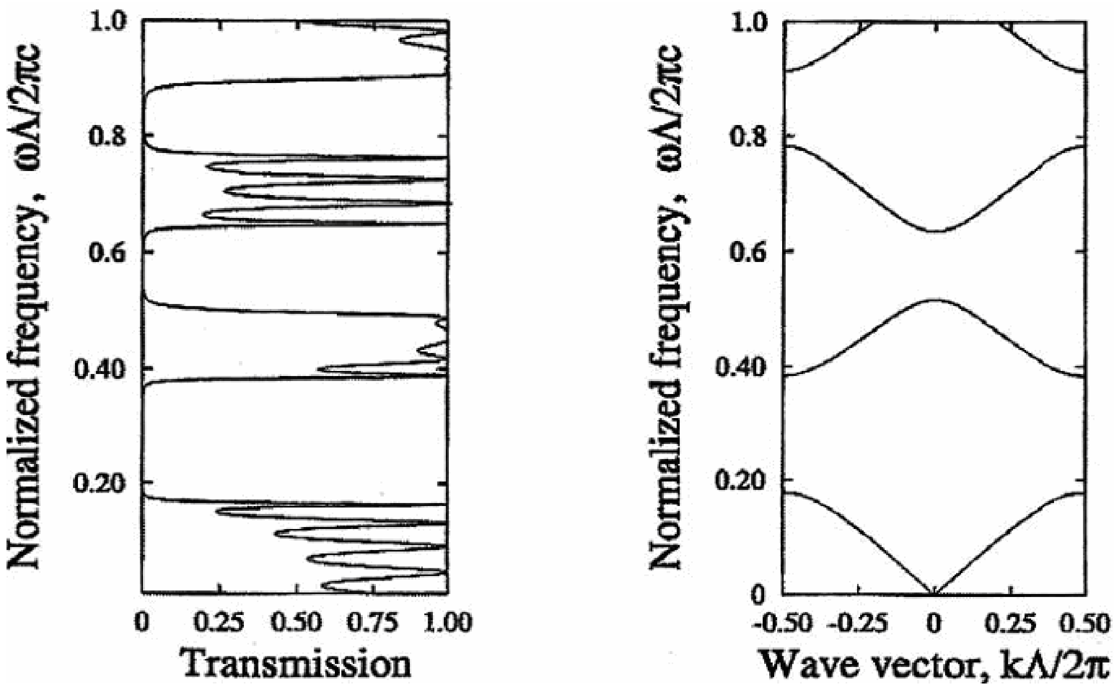
的，亦即「表面波」(surface wave)。

我們之所以可以稱這種材料為光子晶體，是因為它與一般晶體的類似性。一般的晶體是由原子規則有序地排列而組成的，而光子晶體也是由有序排列的微結構所組成。但是一般的晶體，晶格常數是由電子德布洛依波(de Broglie)波長的數量級約1埃；而光子晶體有序的周期性長度則是與其相關波長的數量級(微米、次微米數量級)。

圖2-3所示是一維的光子晶體結構，其折射率$n_1$、$n_2$的材料呈週期性的排列所形成，如圖每個週期的厚度稱為Λ；若電磁波垂直入射如圖結構，對不同波長的電磁波會有不同的穿透率，如圖2-4左方的穿透譜線可知，若材料厚度為五個週期(5Λ)後，某些特定波段的電磁波幾乎無法通過；此外，由於電磁波傳導特性是由馬克士威方程式所推導，且方程式本身不具基本長度因子，因此圖2-4中的縱軸頻率，是以c/Λ正規化之後的值，其中c是真空中的光速。



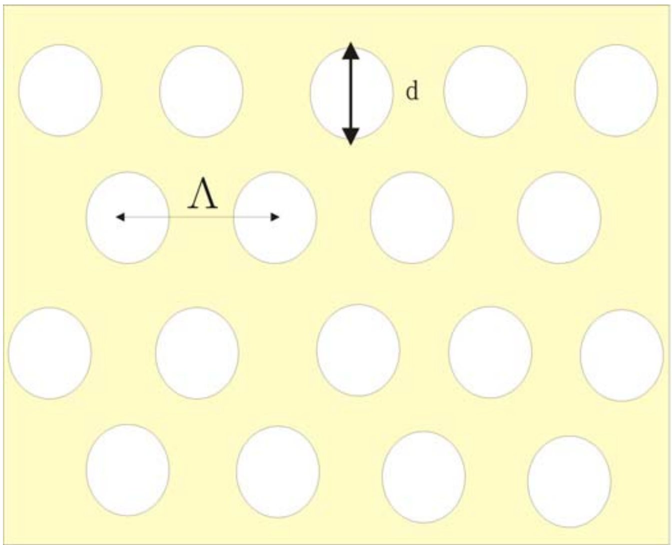

【圖2-3 由布拉格堆疊形成的一維光子晶體結構】




【圖2-4 堆疊五個週期後的穿透頻譜與能帶圖($n_1$=1，$n_2$=3.6)】

圖2-4右方的能帶圖是利用平面波展開法[37]計算五個週期的一維光子晶體得，可看出能帶圖中有某些區域沒有電磁波的模態解存在，亦即電磁波無法在這些區域傳導，並且這些頻率範圍與圖2-4左方有極低穿透率的範圍相符合，這些不存在模態解的頻率區域，稱之為光子晶體能隙(Photonic bandgap; PBG)。

圖2-5的結構為二維光子晶體圖例，如圖所示白色圓圈的是低折射率的週期性排列圓柱，而周圍的淺黃色是高折射率材料，這些低折射率圓柱體稱為孔洞(Holes)，若圓柱體折射率較周圍材料高，則稱之為圓棒(Rods)；圖中孔洞排列成晶格常數為Λ的六角晶格，在垂直圖中平面的方向是無變化的。




【圖2-5 二維光子晶體圖例】

對於一維的光子晶體而言，任何的材料折射率比值皆能夠產生光子晶體能隙，但對二維光子晶體而言，必需有足夠的折射率比值與空氣填充比(Air-Filling fraction)才有可能產生光子晶體能隙，而三角晶格的光子晶體空氣填充比計算方式如(2.1)所示，$f_{air}$為空氣填充比，Λ為晶格常數，且d為孔洞直徑。

$$f_{air} = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3}\Lambda^2} \tag{2.1}$$

光子晶體的基礎數學架構是由Maxwell equation開始的，如(2.2)所示為C.G.S.制的Maxwell eq.。

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ &\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \\ &\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{aligned} \tag{2.2}$$

此處$\vec{E}$與$\vec{H}$分別為電場及磁場強度，$\vec{D}$與$\vec{B}$分別是電通密度以及磁通密度。$\rho$為空間中的自由電荷，$\vec{J}$為電流密度。此時我們做出第一個假設來簡化，假設光在介質中傳播沒有其他光源存在，即 $\rho$ = J = 0。則Maxwell eq.變成

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{D}=0\\
&\nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

接著我們將 $\vec{D}$ 與 $\vec{E}$ 及 $\vec{B}$ 與 $\vec{H}$ 關連起來。其關係式如下所示

$$
\begin{aligned}
&\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\
&\vec{B}=\mu\vec{H}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中 $\varepsilon$ 為介電係數(dielectric constant)，$\mu$ 為導磁係數(permeability)。第二個假設，假設材料為等向性(isotropic)的，即 $\vec{E}(r,\omega)$ 與 $\vec{D}(r,\omega)$ 的關係為純量場的比例關係，其比例常數為介電係數 $\varepsilon(r,\omega)$。接著第三個假設為介電係數與頻率無關，所以此時介電係數變為 ε(r)，只與空間位置相關。最後再假設材料為低損耗或是無損耗的(loss-less)，即為 ε(r)是個純的實數，無虛部項。

當以上假設都成立時，可得到 $\vec{D}(r)=\varepsilon(r)\cdot\vec{E}(r)$。而 $\vec{B}$ 與 $\vec{H}$ 的關係，由於大部分在使用的材料為無磁性的均勻介質，其導磁係數 $\mu=1$，所以 $\vec{B}=\mu\vec{H}=\vec{H}$。於是Maxwell eq.變成

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\varepsilon(r)\vec{E}(r,t)=0\\
&\nabla\cdot\vec{H}(r,t)=0\\
&\nabla\times\vec{E}(r,t)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(r,t)=0\\
&\nabla\times\vec{H}=\frac{\varepsilon(r)}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(r,t)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

通常電場強度 $\vec{E}$ 與磁場強度 $\vec{H}$ 為時間與空間的複雜方程式，但在這裡我們使用的Maxwell eq.為線性的，所以我們可以將時間與空間兩項簡單的拆開成兩項相乘的形式。而且，Maxwell eq.為一個調和函數，所以將含複數的指數項分離出來，我們可以得到

$$\overrightarrow{H}(r,t)=\overrightarrow{H}(r)\cdot e^{i\omega t}$$
$$\vec{E}(r,t)=\vec{E}(r)\cdot e^{i\omega t} \tag{2.6}$$

由於大部份的光子晶體屬於非磁性材料，所以我們可以直接讓磁導率等於真空磁導率(permeability of free space) $\mu_0$，我們以 $\varepsilon_0$代表真空電導率(permittivity of free space)，$\varepsilon(\vec{r},\omega)$ 代表介電函數(dielectric function)，若 $\varepsilon(\vec{r},\omega)$ 隨頻率變化不大，則磁通量密度和電通量密度可表示如下：

$$\vec{B}(\vec{r},\omega)=\mu_0\overrightarrow{H}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{D}(\vec{r},\omega)=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega) \tag{2.7}$$

將方程式(2.6)與(2.7)代入方程式(2.5)中，並作整理後，可得到兩條分別只含電場或磁場的主方程式(master equation)

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}\nabla\times\{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\}=\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{r})$$
$$\nabla\times[\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}\nabla\times\overrightarrow{H}(\vec{r})]=\frac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{H}(\vec{r}) \tag{2.8}$$

## 2.2 週期性介電分佈

由於光子晶體的介電分佈具有空間上的週期性，即

$$\varepsilon(\vec{r}+\vec{T})=\varepsilon(\vec{r})$$

其中，$\vec{T}=u_1\vec{a}_1+u_2\vec{a}_2+u_3\vec{a}_3$稱為平移向量(translation vector)，$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$稱為基本晶格向量(elementary lattice vectors)或原始平移向量(primitive translation vectors)，$u_i$則為任意整數，相對介電函數的倒數為週期函數，即

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r}+\vec{T})}=\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}$$

若以平面波展開法(vector wave expansion method)計算光子能帶結構，我們將

主方程式中的$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}$作傅立葉展開(Fourier Expansion)，可得到

$$\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}=\sum_{\vec{G}}\kappa(\vec{G})e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \tag{2.9}$$

其中，$\vec{G}=v_1\vec{b}_1+v_2\vec{b}_2+v_3\vec{b}_3$稱為倒晶格向量(reciprocal lattice vector)，而

$\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$稱為基本倒晶格向量(elementary reciprocal lattice vectors)，可由下列方程式決定

$$\begin{cases}\vec{b}_1=2\pi\dfrac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\times\vec{a}_3}\\ \vec{b}_2=2\pi\dfrac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\times\vec{a}_3}\\ \vec{b}_3=2\pi\dfrac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\times\vec{a}_3}\end{cases} \tag{2.10}$$

$\vec{a}_j$和$\vec{b}_i$滿足以下關係式

$$\vec{b}_i\cdot\vec{a}_j=2\pi\delta_{ij} \tag{2.11}$$

其中$\delta_{ij}$爲Kronecker delta function：$\delta_{ij}\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$。

(2.9)中的係數$\kappa(\vec{G})$可利用傅立葉的逆轉換找出

$$\kappa(\vec{G})=\frac{1}{V_0}\int_{V_0}\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}\exp(-i\vec{G}\cdot\vec{r})d\vec{r} \tag{2.12}$$

其中$V_0$代表由基本晶格向量所包圍成的空間，及單位晶格之體積。由(2.14)式可看出，$\kappa(\vec{G})$取決於介電數之分佈及倒晶格向量之大小，和倒晶格的結構有很大的關聯性，故被稱為結構係數(structure factor)。

## 2.3 布洛赫原理[51]

歷史上，布洛赫定理最早是由布洛赫(F. Bloch)在研究電子於晶體物質內部的運動如何受到晶體中的週期性位能影響而發現的。布洛赫是藉由研究一個具

有週期性位能的量子系統的波函數而發現了這個定理。

雖然人們很早就知道布洛赫定理，但由這個定理所引出的頻帶結構概念在過去很長一段時間都是用於解釋電子在晶體中的傳導行為，因此它很自然的被認為是一種量子效應(quantum effect)。最近十幾年間，人們才漸漸了解頻帶結構的形成是一種波效應(wave effect)，並不一定要與量子系統有關，因此這個效應也可以在古典系統(classical systems)中實現。

簡單而言，頻帶結構的成因是波在週期性環境(periodic environment)中傳播時，受環境調制(modulate)後產生建設性(constructive)與破壞性(destructive)干涉(interference)的結果。這樣的認知激勵了這數十年來關於光子晶體相關的研究工作。

根據布洛赫定理[38]，電子的物質波受到晶格的散射，利用薛丁格方程式(Schrödinger equation)的解必然可表示為

$$\varphi(\vec{r}) = u(\vec{r})\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$$

其中 $u(\vec{r})$ 稱為布洛赫函數，具有與晶格相同的週期性，即

$$u(\vec{r}) = u(\vec{r}+\vec{T})$$

光在光子晶體中傳播也有類似的情況發生，電磁場被呈週期性變化介電係數散射，同樣可根據布拉赫原理將電磁場表示為

$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r})\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$，且 $u(\vec{r}) = u(\vec{r}+\vec{T})$，$\vec{F}(\vec{r})$ 為 $\vec{E}(\vec{r})$ 或 $\vec{H}(\vec{r})$。詳細過程見[38]。

為了得到色散曲線，我們將 $\vec{u}(\vec{r})$ 作平面波展開(Plane Wave Expansion)，由於 $\vec{u}(\vec{r})$ 具有和 $\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}$ 一樣的週期性，只有符合傅利葉級數(Fourier Series)形式的平面波才有貢獻，因此可以寫成

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{E}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \tag{2.13}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \vec{H}(\vec{G}) e^{i(\vec{k}+\vec{G})\cdot\vec{r}} \tag{2.14}$$

將(2.9)、(2.13)及(2.14)代入(2.8)並加以整理可得到

$$-\sum_{\vec{G}'}\kappa(\vec{G}-\vec{G}')(\vec{k}+\vec{G}')\times\{(\vec{k}+\vec{G}')\times\vec{E}_{\vec{k}n}(\vec{G}')\}=\frac{\omega_{kn}^2}{c^2}\vec{E}_{\vec{k}n}(\vec{G}') \tag{2.15}$$

$$-\sum_{\vec{G}'}\kappa(\vec{G}-\vec{G}')(\vec{k}+\vec{G}')\times\{(\vec{k}+\vec{G}')\times\vec{H}_{\vec{k}n}(\vec{G}')\}=\frac{\omega_{kn}^2}{c^2}\vec{H}_{\vec{k}n}(\vec{G}') \tag{2.16}$$

其中$\vec{k}$是第一階布里淵區(first Brillouin zone)的波向量，n 是能帶數(band index)。對於平面波展開的係數$\vec{E}_{\vec{k}n}(\vec{G}')$及$\vec{H}_{\vec{k}n}(\vec{G}')$而言，(2.15)式和(2.16)式這兩條方程式是等價的(equivalent)本徵值方程式，$\vec{E}_{\vec{k}n}(\vec{G}')$及$\vec{H}_{\vec{k}n}(\vec{G}')$分別為它們的本徵向量，而$\frac{\omega_{kn}^2}{c^2}$則為共同的本徵值(eigenvalue)，我們只需要解其中一條方程式，求出本徵值，就可以換算出色散關係$\omega(\vec{k})$；根據布里淵區的邊界，改變$\vec{k}$的方向，重複上述步驟，就可以得到完整的光子能帶結構圖。

## 2.4 光子晶體光纖

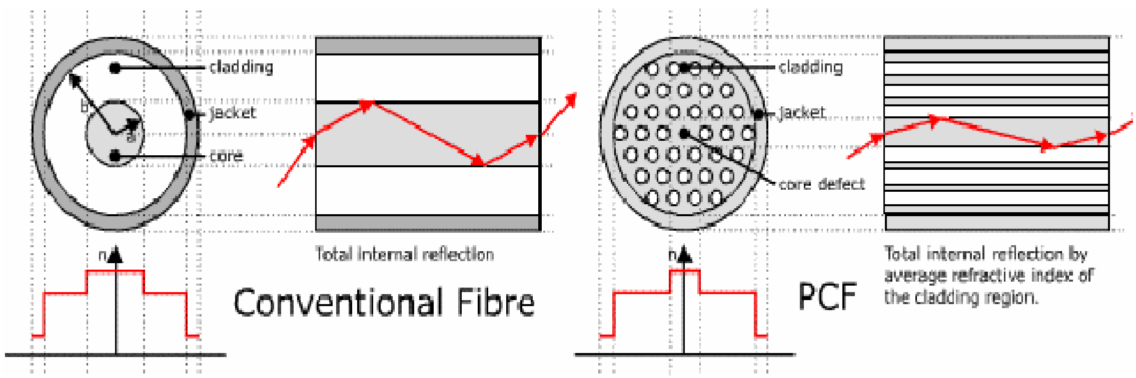
對光子晶體的應用或研究而言，光子晶體中的缺陷(Defects)是非常重的；如果在週期性排列的光子晶體當中，置入晶體缺陷，則光子晶體會形同電磁波的反射邊界一般，使光侷限在缺陷當中，而缺陷的形式可以是點缺陷、線缺陷、或面缺陷。如果在二維光子晶體當中置入線缺陷，並且其線缺陷中的電磁波波向量又落在二維光子晶體中的光子晶體能隙時，電磁波便因為缺陷周圍的能隙所侷限，只能在缺陷當中傳導；此時波向量在出平面方向的分量，便等同於光纖中的傳遞常數(Propagation constant)；而以此原理傳遞電磁波的光纖，稱之為能隙傳導光子晶體光纖(PBG-guiding PCFs)。

傳統光纖的導光機制是以全反射的傳導光波，如圖 2-6 所示。因此，它要求

光纖的纖芯必須具有高於周圍纖覆的折射率，這種光纖已經在光通信中起了重要的作用，但目前仍存在的主要問題為光能損耗與色散。光纖的長距離傳輸中，要求盡可能的降低其傳輸損耗，而光纖的的傳輸損耗主要來自於吸收損耗與散射損耗。吸收損耗主要是材料本身對光能量的吸收；而散射損耗包括瑞利散射(Rayleigh Scattering)、光纖結構不完善和材料中缺陷引起的散射。常見的光通訊波長為 1.3$\mu$m和 1.55$\mu$m，主要是因為這兩處光源波長在$SiO_2$材料傳導的損耗較小。

光纖內的色散又可分為模態色散、材料色散和結構色散。模態色散可由單模光纖作改善，而結構色散比前兩種色散約小一個數量級。因此，在單模光纖中，主要的色散是來自於材料色散。光通訊中光信號是由許多光脈衝組成的，如果不同波長的光波具有不同的傳播速度，會導致光脈寬被拉大，而漏失部份的訊息，但若光纖纖芯材料是無色散材料，那麼材料色散對光傳播的影響就不存在。隨著科技的進步與發展，光纖所需承載的信息量日漸增大，因此需要提高輸入功率，但若輸入的功率過高會產生光纖纖芯的非線性現象。若我們可以加大纖芯面積，又能保證單模傳輸，這樣不僅可以提高功率，又不會產生模態色散。

近年來，在光子晶體研究的基礎上，相關研究者提出了光子晶體光纖的想法得到了證明。光子晶體光纖的基本概念是，在二維的光子晶體中引入缺陷作為光纖導光的纖芯，其光學性質不同於光纖纖覆的光子晶體材料，其主要目的是傳導光的模態有效的侷限於光纖纖芯之中，以降低光能量的損耗，如圖 2-6 所示。




【圖 2-6 傳統光纖與光子晶體光纖的導光機制】

光子晶體光纖是由未掺雜的單一材料（例如$SiO_2$）與空氣孔構成，在其纖覆中沿軸向分佈著規則或不規則排列的空氣孔，圓空氣孔在纖芯的位置其週期性被破壞形成缺陷，光便可沿缺陷傳播。這種類型的光子晶體光纖基本上可分為兩類[15]：一是折射率傳導光子晶體光纖(index-guiding PCF)[11]，一是光子帶隙效應[16-17]。折射率傳導光子晶體光纖，其導模(guide mode)機制為全反射[11]，一般不要求纖衣層中的空氣洞呈週期性排列 [18]，本文即是對此類光纖的雙折射性質進行研究。光子晶體帶隙導模光子晶體光纖，其導模機制為光子帶隙效應，一般要求纖衣層中的空氣洞呈週期性排列 [19-20]。光子晶體光纖在應用上有許多優秀的光學性質，像是單模特性、零色散與雙折射等特性。分述如下：

I. 單模特性：

考慮光子晶體光纖纖芯半徑為$\rho$，纖芯和纖衣折射率分別為$n_{co}$和$n_{cl}$，導模的數目由 *V-number* 決定，*V*的方程式如式(2.17)

$$V=(2\pi\rho/\lambda)(n_{co}^2-n_{cl}^2)^{1/2} \tag{2.17}$$

當 *V* 值小於 2.405 時，光纖維持單模特性。根據(2.17)式，為了使 *V* 值夠小，可以減小$\rho$，或減小纖芯和纖衣間的折射率差值。一般而言，$\rho$已經在$\mu$m 量級，可以減小的空間有限，而且會增加光纖的非線性係數和耦合程度，而大的光纖非線性係數往往是需要避免的。因此要增加光纖的單模波長範圍應設法減小纖芯和纖衣折射率的折射率差值。對於應用全反射機制的光子晶體光纖而言，改變光纖纖衣的空氣孔比例就可以使纖芯和纖衣的折射率值差變小。為了表示纖衣的有效折射率，首先考慮波長為$\lambda$的波，傳播常數為$\beta$，則有

$$kn_0>\beta>\beta_{FSM} \tag{2.18}$$

其中，$k=2\pi/\lambda$是真空中波數；$n_o$是二氧化矽的折射率；$\beta_{FSM}$是在沒有纖芯的情況下無限光子晶體纖衣所能允許的最大傳播常數。纖衣有效折射率定義為

$$n_{eff}=\beta_{FSM}/k \tag{2.19}$$

我們可以進一步定義光子晶體光纖的有效 *V* 值為

$$V_{eff}=(2\pi\Lambda/\lambda)(n_{co}^2-n_{cl}^2)^{1/2} \tag{2.20}$$

其中Λ是光纖纖衣的孔間距離，與(2.17)相似，它決定了光子晶體光纖的單模條件。

與普通光纖在λ→0時V→∞而導致多模不同。在短波長條件下，光子晶體光纖中光場集中在以空氣孔為邊界的纖芯區，若光波沿z軸傳播，給定孔徑和孔間距比，光場對於x/Λ和y/Λ是不變的函數。式(2.20)表示，$V_{eff}$ 的值是有限的，在短波長的情況下，它的值不直接與λ和Λ相關，而是依賴空氣孔直徑相對尺寸(Λ/λ)，只要空氣孔直徑相對尺寸夠小就可以維持單模。在長波長的情況下，$V_{eff}$ 的極限值為

$$V_{eff}=k\Lambda F^{1/2}(n_{co}^2-n_a^2)^{1/2} \tag{2.21}$$

其中，$n_a$是空氣折射率，F是空氣填充比，即纖衣之中空氣孔所占面積的比例。所以，長波方向隨波長增大$V$值減小，短波方向存在$V$值有限值極限，而極限值小於2.405，由理論上而言就應該全波段的單模特性。

II. 色散特性

光子晶體光纖的另一項特性就是零色散點可以大大的向短波推進。就傳統折射率漸變光纖而言，零色散值的位移是由調制波導色散$D_{waveguide}$實現。波導色散$D_{waveguide}$與$V$值相關[39]，可表示為

$$D_{waveguide}=-\tau_g\frac{n_g}{n_o\lambda}[V^2\frac{\partial^2}{\partial V^2}(\frac{\beta_Z}{\beta_1})+2V\frac{\partial}{\partial V}(\frac{\beta_Z}{\beta_1})] \tag{2.22}$$

其中，$\tau_g$是單位長度的傳輸延遲；$n_g$是纖芯的群折射率；$\beta_z$是光波在z軸方向的傳播常數，$\beta_1$是纖芯材料的傳播常數。考慮到光纖材料色散$D_{material}$在波長大於1.27μm時為負，為了在小於 1.27μm的某波長處得到零色散值，根據(2.22)式要使相應的波導色散值$D_{waveguide}$為正，中括號內的部份必須為負。

由於 $V$值增大會產生多模傳輸，且多模區的波導色散比材料色散小很多，所以普通光纖無法將零色散點移至短波區。由於光子晶體光纖在短波區有 $V$值極限

存在，由式(2.20)可以推測其短波段的纖衣有效折射率隨波長減小而增大。我們可以透過有效折射率和 *V-number* 常數的概念對纖衣色散特性作近似分析，可把式(2.20)改寫成

$$n_{eff}^2 = n_0^2 - (V_{eff}/2\pi\Lambda)^2\lambda^2 \tag{2.23}$$

假設在短波長區 $V_{eff}$ 等於極限值 $V_{\lim}$ 則對應於(2.23)可近似為

$$n_{eff}^2 = n_0^2 - f\lambda^2 \tag{2.24}$$

其中 $f = (V_{\lim}/2\pi\Lambda)^2$ 為常數。(2.24)式兩側對 λ 求二階導數得

$$\frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} = -\frac{1}{n_{eff}}[f + (\frac{dn_{eff}}{d\lambda})^2] < 0 \tag{2.25}$$

利用(2.19)式的定義，並對傳播常數 $\beta$ 作泰勒展開，可以得到光子晶體纖衣的群速度色散參數為

$$\beta_2 = \frac{1}{c}[2\frac{dn_{eff}}{d\omega} + \omega\frac{d^2 n_{rff}}{d\omega^2}] \approx \frac{\lambda^3}{2\pi c^2}\frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \tag{2.26}$$

及色散參數

$$D = \frac{dB_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2 \approx -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \tag{2.27}$$

由(2.26)與(2.27)式，$\beta_2$與D值符號相反，將(2.25)式代入，顯然$\beta_2$為負，D值為正。這表示在短波長處，纖衣的色散為正色散D>0(反常色散$\beta_2$<0)，而纖芯的材料色散在短波長區為剛好相反，因此可以抵消材料色散，使零色散點向短波偏移。

III.雙折射特性

與傳統光纖相較，通過改變光纖的結構參數可以設計具有高雙折射效應的光子晶體光纖。保偏光纖的概念和製造方法是由 Kaminow 等人首先提出 [21]，經由人為的方式刻意在光纖中引入雙折射，研製出熊貓型、領結型、橢圓包層與橢圓纖芯型等多種保偏光纖。由於傳統單模光纖具有兩個正交方向的偏振模態，這兩個偏振模態幾乎是簡併（degeneracy）的，只要產生很小的微擾，光纖中的場

便很容易從一個偏振模態轉換到另一個偏振模態。如果偏振態因簡併被移去，偏振模之間場的轉換將大大減小，光纖便成為雙折射光纖。雙折射效應特別是在光纖纖芯與纖衣產生高折射率對比的情況下更為明顯。設計高雙折射的光子晶體光纖最普遍的方法，是破壞光纖結構上的對稱性，使光纖產生 x-y 兩個方向的結構非對稱性。在先前的文獻中，提出許多產生結構非對稱性的方法，例如在纖芯附近製作直徑較大的空氣孔，產生纖芯的非對稱性，或是在光纖纖衣製作不同孔徑的空氣孔產生纖衣的非對稱性，此外，也有研究文獻提出利用橢圓空氣孔增加結構上的非對稱性，造成高的雙折射。相關的研究成果並已應用在偏振器、相干光通訊系統及其他感測器的設計上 [22]。隨著光纖通訊的發展，目前的保偏光纖難以滿足高速發展的需求，因此研究高性能的保偏光纖已成國內外相關領域研究的重點。

IV. 低損失

相較於傳統光纖，由於光子晶體光纖的纖衣具有完美週期性的光子晶體結構，因此更能有效將光場侷限於纖芯之中，光纖纖衣的等效折射率$n_J$定義為

$$n_J = n_e + i\delta \tag{2.28}$$

式中，虛部$\delta$項為光纖的損失，我們針對纖衣空氣孔的圈數及其相依關係作計算，並在第四章作更深入的討論。