

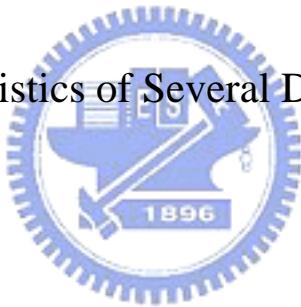
國立交通大學

光電工程研究所

碩士論文

多種特殊設計之金屬孔洞陣列於兆赫波之穿透特性

THz Transmittance characteristics of Several Designs of Metallic Hole Arrays



研究 生：彭彥毓

指 導 教 授：潘犀靈 教 授

中華民國九十六年七月

多種特殊設計之金屬孔洞陣列於兆赫波之穿透特性  
THz transmittance characteristics of Several Designs of Metallic Hole Arrays

研究 生：彭彥毓

Student : Yan-Yu Peng

指導 教授：潘犀靈 教授

Advisor : Prof. Ci-Ling Pan



Submitted to Department of Photonics &  
Institute of Electro-Optical Engineering

College of Electrical Engineering

National Chiao Tung University

In partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Electro-Optical Engineering

July 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

學生：彭彥毓

指導教授：潘犀靈 教授

國立交通大學光電工程所 碩士班

## 摘要

我們量測數種金屬孔洞陣列在兆赫波段之穿透率，並且利用特徵模態展開法與時域有限差分法分析其特性。在量測樣品中，主要有兩個明顯的分界。其中一個部份的樣品，厚度與兆赫波波長相近。而另一部份之樣品則考慮表面電漿的衰減長度後，設計其厚度為 150 奈米。除此之外，在兆赫波段之金屬孔洞陣列其穿透峰值會隨著孔洞陣列之週期和孔洞形狀的改變而不同。單一孔洞的截止頻率和表面電漿態的最低模態對於穿透率峰值的頻率，都具有非常重要影響。其中對於單一矩形孔洞，其穿透率將隨著矩形孔洞的長寬比增加而上升，而這個現象與矩形金屬孔洞陣列的結果是一致的。當表面電漿態的耦合頻率大於單一孔洞之截止頻率時，穿透率的頻寬隨著表面電漿態之耦合頻率增加而持續的增加；當表面電漿態的耦合頻率小於單一孔洞之截止頻率時，則穿透率的頻寬大致上為定值。接著，當我們旋轉孔洞陣列時並且觀察其穿透率對於角度變化的影響時發現當表面電漿態的耦合頻率和波導共振態相近時，兩個效應會互相耦合，使得穿透峰值出現紅移現象；當表面電漿態的耦合頻率和波導共振態彼此遠離時，則隨著角度的旋轉將會看到波導共振態的穿透率峰值並不會改變，而表面電漿的耦合頻率則會出現紅移現象。藉由觀察到這些現象，我們可以將金屬孔洞陣列應用於濾波器的製作，透過改變孔洞的形狀和週期的大小，我們可以設計出適合的帶通濾波器。

Student : Yan-Yu Peng

Advisors : Dr.Ci-Ling Pan

Institute of Electro-Optical Engineering  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

We present the characterization of several designed metallic hole arrays in THz transmission and validate the observations by using the eigen-mode expansion method theoretically and finite-difference time domain (FDTD) method numerically. Extraordinary transmission is obtained as the thickness of metallic plate varies, either approximately close to the incident wavelength or within the skin depths of the metal, i.e. several hundreds of nanometers. In addition, the peak frequency of this extraordinary transmission depends on the periodicities of the arrays and on the shapes of the metallic holes. Cutoff frequencies of the guided modes in the metallic holes and the lowest frequencies of surface plasmonic modes in the hole arrays determine the peak transmission frequency of the metallic hole arrays. The normalized transmittance is enhanced as the shapes of the metallic holes are rectangular, and the enhancement increases as the ratio of length to width increases, similar to the results in the single metallic hole. The bandwidth of this extraordinary peak increases as the surface plasmon frequency is larger than the cutoff frequency and nearly remains as the surface plasmon frequency is smaller than the cutoff frequency. As the incident angle changes by tilting the metallic plates, we observes the interaction between surface plasmon mode and localized waveguide mode as the frequencies of these two modes are approaching, and the transmission peak shifts to shorter frequency as incident angle increases. Almost unvaried transmission performance is achieved as these two modes are decoupled. These observations can be applied to the multi-functionality bandpass filter designs in THz region by using metallic hole arrays with different shapes and cutoff frequencies of metallic holes and various periodicities and lattice structures of the hole arrays.

## 誌謝

時光如箭，歲月如梭。想到剛剛踏入實驗室畏畏縮縮的青澀模樣，經過兩年的淬鍊，終於可以昂首向人生的下個里程碑邁進。這中間的轉變首先需要感謝的對像是我的指導教授潘犀靈老師。每次的循循善誘，讓我在學習的過程中獲益良。接著非常感謝卓帆學長在我剛進入實驗室時仔細耐心的教導實驗技巧與知識以及各種人生道理和人際關係的進退。也因為學長悉心的引領使我更容易融入這陌生的環境。而 Mika 學長除了教導我雷射的相關知識，在休閒時也化身為古代人物一起暢遊在三國演義的歷史故事中。Moya 學長在這兩年中總是不厭其煩地幫助我解決雷射系統的問題；閒暇之餘也不忘叮嚀我們緣分來了記得一定要努力爭取。除此之外也非常懷念阿達、宇泰和家任學長輕鬆閒聊的快樂時光和一起在球場上揮汗奔馳的日子。在這二年的時間也特別感謝我的戰友們。仰賴韋文學長實驗及理論上過人的天份幫我解決許多問題，許 Jerry 和韋文學長的雙簧更是讓我在苦悶生活中得到許多捧腹大笑的機會。而猴子在駕馭車子的天份和技往更是每每讓我驚嘆不已。在奮鬥的日子中，莊 GG 這最「忠誠」的隊友也使得我在前線努力時無「後顧之憂」。雖然何大人已經出國追尋自己的夢想，但是這兩年中在你身上所發生的天兵事蹟總是在莫名的想起時令我會心一笑。在升上碩二的這段時間中也非常感謝學弟們，輝哥、撲大師、艾斯佛和阿 Ken 的幫忙，使我在煩忙的碩二生活中可以專心於實驗而不受雜務影響。自大學到研穿所的六年之中，特別感謝家人的支持，雖然你嘴上不說，但是我可以感受到你們滿滿的關心，真的非常謝謝你。而文靜在這六年中總是為我加油打氣，陪我渡過各種難關，承擔我的脾氣。最後尤其感謝陳瓊華老師在碩二下義務的協務我完成碩士論文。若不是有您們這每一個人，我一定沒有辦法順利完成學業，誠心的感謝你們~~~

Thanks a lot

## 目 錄

中文提要	.....	i
英文提要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
圖目錄	.....	v
表目錄	.....	viii
符號說明	.....	ix
一、	緒論	1
二、	理論與分析方法	9
2.1	兆赫波的輻射與機收理論	9
2.1.1	兆赫波輻射理論	10
2.1.2	兆赫波時域光譜技術	15
2.2	金屬孔洞陣列	17
2.2.1	表面電漿子	17
2.2.2	圓形及方形波導理論	22
2.2.3	局部波導共振	24
2.2.4	弗洛凱定理	27
2.3	時域有限差分法	35
三、	實驗架構	38
四、	實驗數據與分析	42
五、	結論	65

## 圖表目錄

Fig1-1：電磁波之頻譜圖及其在各個波段之應用

1

Fig1-2：各種不同雷射其脈衝寬度的演進史	3
Fig1-3(a)電磁波與金屬表面電子共振形成表面電漿子之示意圖	5
Fig1-3(b)電磁波遠離金屬界面時，電場快速的衰減	5
Fig2-1：平行極化波於介電質與金屬中 $k$ 分量之示意圖	18
Fig2-2：表面電漿子模態之色散曲線與真空中電磁波之色散曲線	20
Fig2-3：圓形波導管	22
Fig2-4：矩形波導管	23
Fig2-5：矩形金屬單一孔洞示意圖	25
Fig2-6：單一矩形孔洞之長寬比對穿透率作圖	27
Fig2-7(a)： $f(x)$ 經傅立葉轉換在 $k$ 空間的頻譜分佈	28
Fig2-7(b)： $g(x)$ 經傅立葉轉換在 $k$ 空間的頻譜分佈	28
Fig2-8： $h(x)$ 之振幅與相位對 $x$ 作圖	29
Fig2-9(a)： $g(x)$ 經傅立葉轉換在 $k$ 空間的頻譜分佈	30
Fig2-9(b)： $h(x)$ 經傅立葉轉換在 $k$ 空間的頻譜分佈	30
Fig2-10：孔洞陣列之幾何結構示意圖	31
Fig2-11：電場和磁場在 Yee 晶格之示意圖	37
Fig3-1：鈦藍寶石晶體的吸收光譜與放射光譜	38

Fig3-2：超快雷射系統圖	40
Fig3-3：兆赫波時域光譜技術系統圖	41
Fig3-4：樣品擺放示意圖	41
Fig4-1：樣品 a 的孔洞陣列穿透率特性	43
Fig4-2：樣品 b 的孔洞陣列穿透率特性	44
Fig4-3：樣品 c 的孔洞陣列穿透率特性	45
Fig4-4：樣品 d 的孔洞陣列穿透率特性	46
Fig4-5：樣品 e 穿透率特性	48
Fig4-6：樣品 f 的孔洞陣列穿透率特性	49
Fig4-7：矩形孔洞陣列穿透率特性	50
Fig4-8：量測孔洞陣列的界面貼上石英的穿透率特性	51
Fig4-9：量測單一孔洞和孔洞陣列的穿透率特性	52
Fig4-10：改變圓形孔洞之週期對穿透率作圖	53
Fig4-11：改變方形孔洞之週期對穿透率作圖	54
Fig4-12：改變矩形孔洞之週期對穿透率作圖	55
Fig4-13：穿透率峰值頻率對週期變化之作圖	56
Fig4-14：穿透率峰值對週期變化之作圖	56

Fig4-15：增強因子對週期變化之作圖	57
Fig4-16：頻寬對週期變化之作圖	58
Fig4-17：垂直旋轉 a 矩形孔洞對穿透率變化作圖	60
Fig4-18：平行旋轉 a 矩形孔洞對穿透率變化作圖	60
Fig4-19：垂直旋轉 b 矩形孔洞對穿透率變化作圖	61
Fig4-20：平行旋轉 b 矩形孔洞對穿透率變化作圖	61
Fig4-21(a)：a 矩形孔洞之峰值穿透率頻率對角度變化作圖	62
Fig4-21(b)：a 矩形孔洞之穿透率峰值對角度變化作圖	62
Fig4-22(a)：a 矩形孔洞之峰值穿透率頻率對角度變化作圖	62
Fig4-22(b)：a 矩形孔洞之穿透率峰值對角度變化作圖	62
Fig4-23：薄樣品之孔洞陣列穿透率	63
Fig4-24：單一圓形孔洞穿透率(理論計算)	64

## 表格目錄

Table1：不同參數之孔洞陣列穿透率比

47



## 符 號 說 明

E : 電場強度

B : 磁通密度

H : 磁場強度

D : 電通密度

A : 向量磁位

$\mu$  : 導磁係數

$\epsilon$  : 介電係數



# 第一章 緒論

## 1.1 兆赫波

自科學發展至今，電磁波的應用從微波至超短波長的 $\gamma$ 射線，其研究的範圍幾乎已涵蓋了全部的頻率(參考Fig1-1)。而兆赫波 (Terahertz wave, THz) 指的是頻率範圍處在  $10^{11}\sim 10^{13}$  赫茲(0.1~10 THz)的電磁波。此波段的電磁波對應之波長為3000~30 微米。

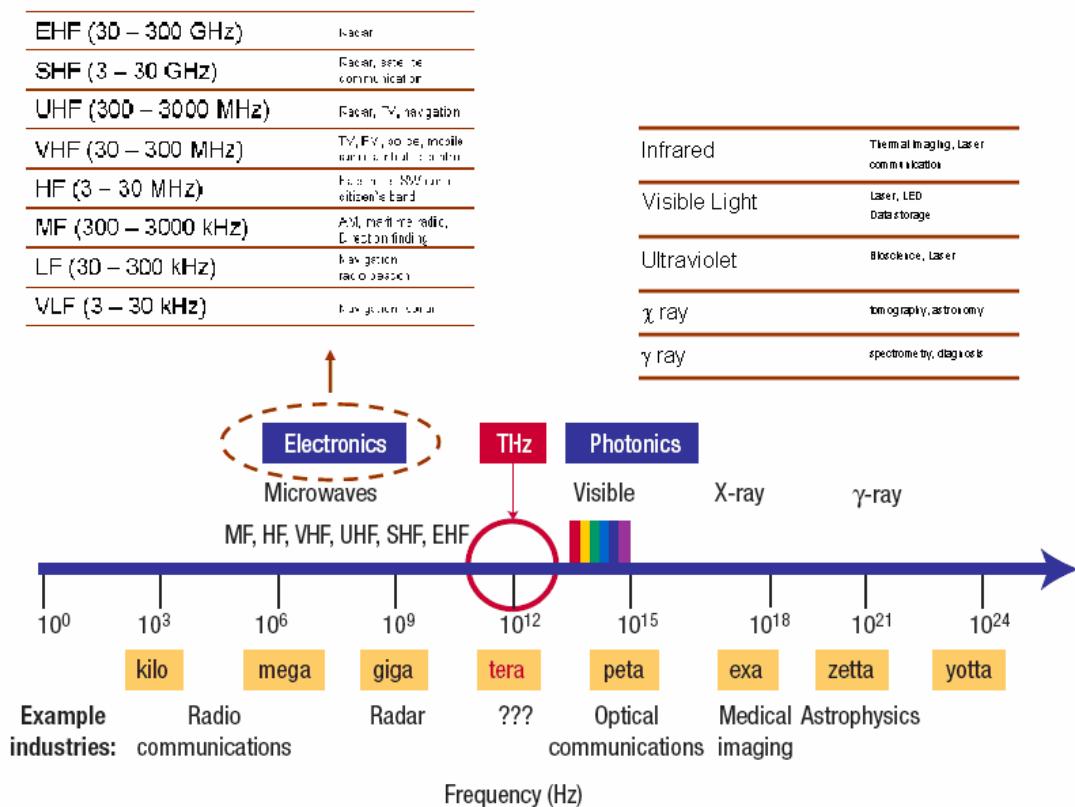


Fig1-1：電磁波之頻譜圖及其在各個波段之應用

由於侷限於當時之科技技術，於 1980 年代以前兆赫波段之電磁波並沒有發展出良好的發射源和偵測技術。在較短兆赫波的微波區段尚可利用電子儀器和天線產

生與接收，然而不巧地，限於電子儀器之反應速度只有奈秒等級，無法使用此方法來產生兆赫波。紅外光和可見光區之發射源可利用電子從高能階躍遷至低能階時，經由激發輻射(stimulated emission)產生良好的同調光源。然而，利用此方式所產生的兆赫波長的光子能量非常低，甚至低於室溫熱輻射電磁波之光子能量，故在正常的環境下無法產生有效的兆赫波光源(在 2002 年，有研究人員在非常低溫的環境下，產生兆赫波雷射[1])。正因為良好的光源和偵測技術缺乏，兆赫波段電磁波的研究因此在 1980 年代以前非常稀少。很幸運的，自 1970 年代以降，超快雷射技術的發展漸趨於完備。利用超快雷射龐大的瞬間短脈衝能量，透過外加電場來激發於天線上載子，並且輻射出高能之兆赫波光源。



本文兆赫波光源則為利用超快雷射之方式產生，首先在此我們簡單介紹超快雷射的演進史。西元 1960 年，Maiman 首先架設了世界上第一套紅寶石連續波雷射 [reference]。1963 年，Gures 和 Mueller 利用鎖模機制產生脈衝雷射後[reference]，並且於接下的三十年，各種不同種類的雷射透過鎖模技術達成超短脈衝研究陸續地發展。於 Fig1-2 顯示各種不同雷射種類及其脈衝寬度的演進發展的過程。透過 Fig 1-2，相異雷射透過壓縮技術或是鎖模技術[2]後，脈衝寬度急速變窄，脈衝速度也因此變得更快。即使至今，世界上仍有許多尖端研究室投入了大量的心血在超快雷射的領域並且使用許多方式來產生飛秒(femto-second)級脈衝寬度的超快雷射。雖然有許多不同雷射系統都具備產生兆赫波之需求，但經由鈦藍寶石 (Ti : Sapphire)所產生的超短脈衝雷射是目前最容易架設之系統，加上操作容易的

優點，所以於本論文的實驗之光源架設主要採用此套系統。在我們實驗室，利用鈦藍寶石雷射經克爾效應(Kerr Lens Mode Lock)產生脈衝寬度為 100 飛秒的超快雷射系統，然後將如此龐大之瞬間能量雷射脈衝射至光導天線[3,4]，大量的載子被激發後，受到外加電場加速而輻射出兆赫頻率的電磁波。

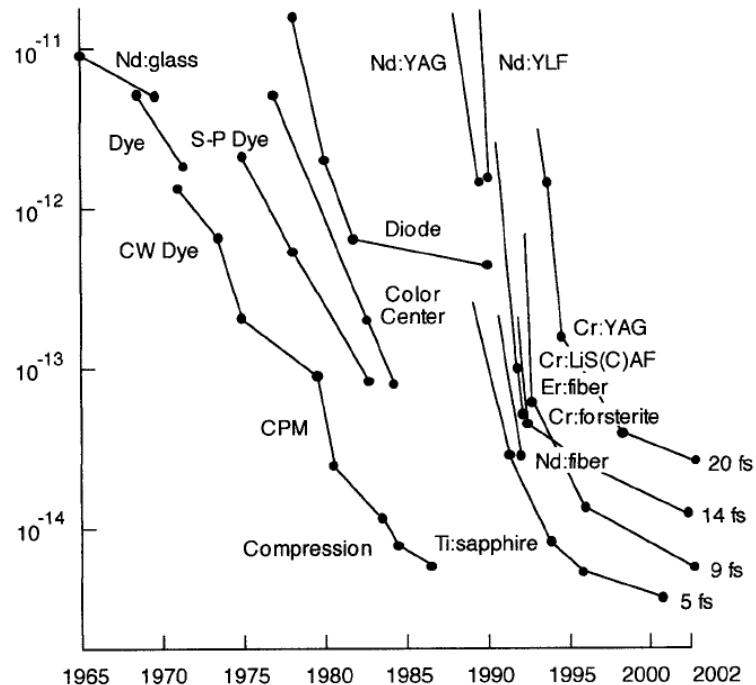


Fig1-2：各種不同雷射與其脈衝寬度的演進史。其中橫軸為年代，縱軸為脈衝寬度，單位為秒(s)

另一方面，在偵測兆赫波的技術上，主要為利用光導天線或是帕克爾效應(Pocket Effect)的電光取樣技術[8](EO sampling technique)兩種的方式偵測兆赫波輻射。這兩種不同的偵測技術目前都被廣泛的使用，且具備良好的訊噪比(SNR)的優點。然而，由於許多晶體的聲子(phonon)吸收頻率位於兆赫波的區段，帕克爾效應電光取樣技術並不適用於我們的偵測架構系統，故我們使用光導天線接收兆赫波輻射。

結合上述偵測技術及科學家藉由可見光的泵-探技術(pump-probe technique)之想法將其應用到兆赫波的量測，進而發展出「兆赫波時域光譜技術」(Terahertz Time Domain Spectroscopy technique)[9,10]。稱其為「時域」光譜技術的原因在於兆赫波脈衝與近紅外光的脈衝寬度相差將近 100 倍，利用光導天線或是電光取樣技術，可以因此達成兆赫波的同調量測(coherence detection)。舉例來說，在可見光與近紅外光之光源，電場的振盪頻率位在  $10^{14}\sim10^{15}$  赫茲的範圍，一般偵測儀器的反應速率沒有辦法量測到如此快速的變動量，所以我們只能得到光源的平均強度(Intensity)。然而，同調量測是一種可以偵測到電場(electric field)變化之量測技術。經由偵測兆赫波電場的變化，我們可以因此同時得到電場的振幅和相位兩項資訊，透過這兩項資訊，我們不需使用克拉瑪-克朗尼關係式(Kramers-Kronig relations)便可得到待測物質的折射率和吸收係數。



由於「兆赫波時域光譜技術」具備如此優異的能力，目前有許多團隊利用此技術研究物質的特性[11,12]。除此之外，對於半導體的載子動力學之研究也由傳統的可見光泵-探技術改變成「光激發-兆赫波探測時域解析光譜法」(optical pump-THz probe Time Domain Spectroscopy)的新型泵-探技術[13]。在 2007 年，張系成教授團隊透過「光激發-兆赫波探測時域解析光譜法」，直接觀測到表面電漿態的形成[14]。

## 1.2 表面電漿

「光子晶體(photonic crystals)」為一種折射率在空間上具週期性的變化的人工材

質。最早在 1887 年由瑞利(Lord Rayleigh)所提出，其研究為一維週期性光子晶體的特性。而後，光子晶體的相關研究如雨後春筍般並且數量非常龐大的研究文章被發表。在兆赫波問世後，由於此波段之研究正處於新興階段，故兆赫波段的微結構裝置也開始受到大家的注目[15,16,17]。西元 1998 年，Ebbesen 團隊研究二維次波長金屬孔洞陣列時，發現了此結構具備異常的穿透特性(Extraordinary Transmission)[18]。Ebbesen 發現當可見光通過次波長結構的二維金屬孔洞陣列後，在某些特定波長其穿透率甚至超過「1」(將穿透率經開口率歸一化)。而 Ebbesen 團隊也發現在旋轉金屬孔洞陣列後，穿透率特性與光子晶體般具有能帶結構(band structure)。自此之後，科學家投入大量的心力研究此現象的物理機制。

雖然直到目前為止，其物理機制還是不太明確，也沒有適用的數學模型可以良好解釋此現象，不過大部份的研究結果認為這異常的穿透現象主要來自於表面電漿子 (Surface Plasmon Polaritons)與透過周期性結構的入射光相耦合後[19]所造成的。

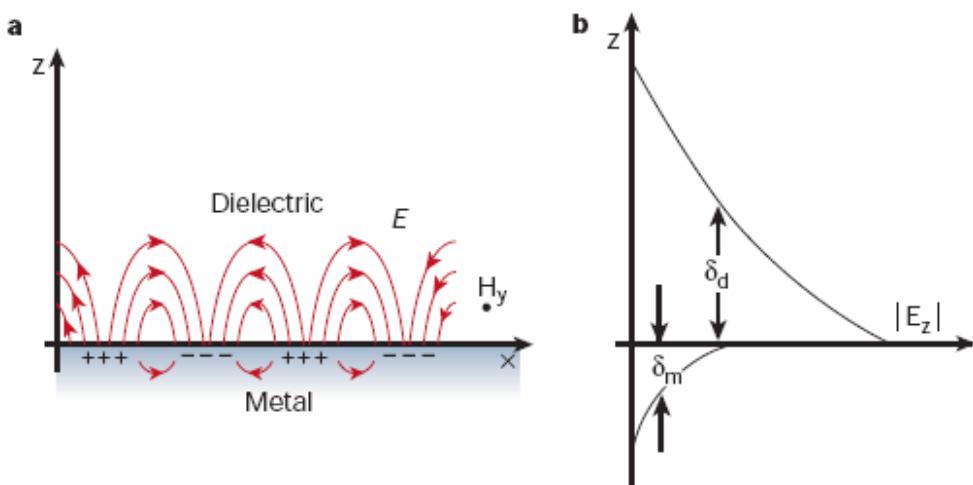


Fig1-3 : (a)電磁波與金屬表面電子共振形成表面電漿子之示意圖；(b)電磁波遠離金屬界面時，電場快速的衰減，為一種瞬逝波型態存在

表面電漿子效應是一個非常有趣(???)的現象，自從 1968 年，便已經有成果發表在國際期刊。根據馬克士威爾方程式(Maxwell's Equations)，當電磁波入射至金屬與介電質界面時，電磁波會與金屬表面電子耦合形成表面波的行進模態(參考 Fig1-3)。當電場與金屬表面電子耦合後，表面電漿態電磁波在界面處具有非常強的電場，因此對於金屬界面的介質變化非常靈敏。圖 1-3(a) 顯示電磁波與金屬表面電子耦合示意圖，而 Fig1-3(b) 則為此一電磁耦合波之磁場波縱向之分部，於介電材質與金屬裡皆為一種瞬逝波(evanescent wave)，電磁波離界面越遠能量則以指數型態快速衰減。因為上述一些特性，目前具有許多相關的應用：

- 
- 生醫量測：因為表面電漿子對於鄰近介質的變化非常靈敏，目前在生物醫學上利用「表面電漿共振」(Surface Plasmon Resonance)[20]效應可以即時監控化學或生物反應的特性。
  - 顯影技術：利用表面電漿態的特性，可以具備超解析光點(Super-Resolution)的能力。而超解析光點的能力除了在顯影技術[21]具有非常好的應用性，還可以使用在光碟讀寫頭上，利用其突破繞射極限的特性提高光碟片儲存資訊的能力。
  - 非線性光學：由於表面電漿態在界面具有很強的電場，故可以利用此特性產生非線性光學過程的研究。像是二倍頻(Second Harmonic Generation)，表面

增強拉曼散射(Surface enhanced Raman Scattering)，甚至最近有人利用飛秒脈衝雷射入射在一維的週期金屬陣列經過光整流效應產生兆赫波[22]。除了上述幾項應用，表面電漿效應還有許多發展潛力，如增強太陽能電池的吸收效率[23]及發光二極體之(LEDs)發光效率[24]，甚至可以利用此效應做為癌症治療的媒介[25]。當然目前還沒有一個適用的數學模型可以良好的解釋其物理現象也使得表面電漿效應的研究仍然持續的發展中。

在兆赫波光源問世之前，便有許多研究金屬表面電子與可見光波段電磁波的藕合機制[26,27]。不過在那個時代，因為製程技術的限制，所以只能量測反射光的特性。直到近代，製程技術的突飛猛進，Ebbesen 團隊首先量測穿透光的特性。之後，研究電磁波與金屬表面電子耦合後其穿透光特性的文章也開始大量的發表[28-36]。最近，因為兆赫波的研究受到大家的注目，且兆赫波的波長非常長(相比於可見光)，所以在製程技術要達到次波長結構的孔洞陣列是非常容易的，於是許多人投入這方面的研究[37-44]。但是在兆赫波段下，金屬特性接近完美導體，所以有許多現象與可見光波段的結果具有明顯的差異。而這金屬特性的不同使得表面電漿子效應在兆赫波段下變得更錯綜複雜。目前有許多在兆赫波段下的相關文章，其穿透率特性的解釋是利用表面電漿理論。不同於可見光，金屬的介電係數非常大，對於表面電漿態之耦合效率也不比可見光波段。也為了這個目的，我們冀望在兆赫波段下，可以客觀的區別表面電漿子效應在不同條件下對於穿透率影響的程度及以表面電漿態和波導共振態的耦合效應。除此之外，目前並

沒有太多於此波段的應用元件，像是兆赫波濾波器(filter) [45]的缺點其穿透率較差。現在我們可以利用金屬孔洞陣列，有效的製做良好的濾波器，對於我們設計的頻率，其穿透率甚至可以達到近乎 100%；而欲消除的頻率，穿透率也可以低於 10%。雖然此濾波器的頻寬(bandwidth)較窄，但是反過來利用此特性，可以藉由此元件達成似單頻(quasi-frequency)的兆赫波。

### 1.3 論文概要

全書總共分為五個章節，除了於此章的摘要與簡介部份，第二章將會介紹簡述整個實驗內容所需之理論，包括兆赫波的產生與偵測技術，及孔洞陣列的物理圖像。第三章介紹此篇論文實驗所使用的系統架構，包含超快雷射系統和兆赫波時域光譜系統。第四章則展示利用上章所用之架構量測不同孔洞金屬片的穿透特性結果並且分析，其中量測樣品有不同孔洞形狀及晶格結構之陣列與單一孔洞。最後，第五章總結上述的內容和實驗的結論，以及提供未來繼續深入的研究之方向。



- [1]. R. Kohler, A. Tredicucci, and F. Beltram, Terahertz semiconductor heterostructer laser, *Nature*, vol.417, pp.156-159, 2002
- [2]. P. C. Yeh and A. Yariv, *Photonics*, New York, Oxford University Press, , 2006
- [3]. G. Mourou, C. V. Stancampiano, and D. Blumenthal, Picosecond microwave pulse generation, *Appl. Phys. Lett.*, vol.38, pp.470-472, 1981
- [4]. D. H. Auston, K. P. Cheung, and P. R. Smith, Picosecond photoconducting Hertzian dipoles, *Appl. Phys. Lett.*, vol.45, pp.284-286, 1984
- [5]. K. H. Yang, P. L. Richards, and Y. R. Shen, Generation of Far-Infrared Radiation by Picosecond Light Pulses in LiNbO<sub>3</sub>, *Appl. Phys. Lett.*, vol.19, pp.320-323, 1971
- [6]. D. W. Faries, P. L. Richards, and Y. R. Shen, Tunable Far-Infrared Radiation Generated from the Difference Frequency between Two Ruby Laser, *Phys. Rev. A*, vol.13, pp.2148-2150, 1971
- [7]. K. H. Yang, P. L. Richards, and Y. R. Shen, Phase-matched far-infrared generation by optical mixing of dye laser beams, *Appl. Phys. Lett.*, vol.23, pp.669-671, 1973
- [8]. Q. Wu, and X. C. Zhang, Ultrafast electro-optic field sensors, *Appl. Phys. Lett.*, vol.68, pp.1604-1606, 1996
- [9]. D. H. Auston, K. P. Cheung, and J. A. Valdmanis, Cherenkov Radiation from Femtosecond Optical Pulses in Electro-Optic Media, *Phys. Rev. Lett.*, vol.53, pp.1555-1558, 1984
- [10]. Ch. Fattinger, and D. Grischkowsky, Point source terahertz optics, *Appl. Phys. Lett.*, vol.53, pp.1480-1482, 1988
- [11]. M. Brucherseifer, M. Nagel, and P. H. Bolivar, Label-free probing of the binding state of DNA by time-domain terahertz sensing, *Appl. Phys. Lett.*, vol.77, pp.4049-4051, 2000

- [12].R. A. Kaindl, M. A. Carnahan, and J. Orenstein, Far-Infrared Optical Conductivity Gap in Superconducting MgB<sub>2</sub> Films, Phys. Rev. Lett., vol.88, pp.27003-27006, 2001
- [13].J. Zielbauer, and M. Wegener, Ultrafast optical pump THz-probe spectroscopy on silicon, Appl. Phys. Lett., vol.68, pp.1223-1225, 1996
- [14].W. Zhang, A. K. Azad, and Z.-C. Zhang, Direct Observation of a Transition of a Surface Plasmon Resonance from Photonic Crystal Effect, Phys. Rev. Lett., vol.98, pp.183901, 2007
- [15].C. Winnewisser, Characterization and Application of Dichroic Filters in the 0.1-3 THz Region, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.48, pp.744-749, 2000
- [16].J. S. Li, Terahertz modulator using photonic crystals, Opt. Comm., vol.269, pp.98-101, 2007
- [17].K. Takagi, K. Seno, and A. Kawasaki, Fabrication of a three-dimensional terahertz photonic crystal using monosized spherical particles, Appl. Phys. Lett., vol.85, pp.3681-3683, 2004
- [18].T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, and H. F. Ghaemi, Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays, Nature, vol.391, pp.667-669, 1998
- [19].H. Raether, Surface Plasmons on Smooth and Rough Surfaces and on Gratings, Berlin, Springer-Verlag, , 1988
- [20].K. Matsubara, S. Kawata, and S. Minami, Optical chemical sensor based on surface plasmon measurement, Appl. Opt., vol.27, pp.1160-1163, 1988
- [21].S. Kawata, Near-Field Optics and Surface Plasmon Polaritons, Berlin, Springer-Verlag, , 1998

- [22].G. H. Welsh, N. T. Hunt, and K. Wynne, Terahertz-Pulse Emission Through Laser Excitation of Surface Plasmons in a Metal Grating, Phys. Rev. Lett., vol.98, pp.026803, 2007
- [23].J. R. Cole, and N. J. Halas, Optimized plasmonic nanoparticle distributions for solar spectrum harvesting, Appl. Phys. Lett., vol.89, pp.153120, 2006
- [24].F. Tam, G. P. Goodrich, and N. J. Halas, Plasmonic Enhancement of Molecular Fluorescence, Nano. Lett., vol.7, pp.496-501, 2007
- [25].C. M. Aguirre, C. E. Moran, and N. J. Halas, Laser-Induced Reshaping of Metallodielectric Nanoshells under Femtosecond and Nanosecond Plasmon Resonant Illumination, J. Phys. Chem. B, vol.108, pp.7040-7045, 2004
- [26].R. H. Ritchie, E. T. Arakawa, and J. J. Cowan, Surface-Plasmon Resonance Effect in Grating Diffraction, Phys. Rev. Lett., vol.21, pp.1530-1533, 1968
- [27].J. Moreland, A. Adams, and P. K. Hansma, Efficiency of light emission from surface plasmons, Phys. Rev. B, vol.25, pp.2297-2300, 1982
- [28].T. J. Kim, T. Thio, and T. W. Ebbesen, Control of optical transmission through metals perforated with subwavelength hole arrays, Opt. Lett., vol.24, pp.256-258, 1999
- [29].D. E. Grupp, H. J. Lezec, and T. W. Ebbesen, Crucial role of metal surface in enhanced transmission through subwavelength apertures, Appl. Phys. Lett., vol.77, pp.1569-1571, 2000
- [30].T. Thio, K. M. Pellerin, and R. A. Kinke, Enhanced light transmission through a single subwavelength aperture, Opt. Lett., vol.26, pp.1972-1974, 2001
- [31].H. J. Lezec, and W. L. Barnes, Effects of hole depth on enhanced light transmission through subwavelength hole arrays, Appl. Phys. Lett., vol.81, pp.4327-4329, 2002

- [32]. W. L. Barnes, A. Dereux, and T. W. Ebbesen, Surface plasmon subwavelength optics, *Nature*, vol.424, pp.824-830, 2003
- [33]. T. W. Ebbesen, Analysis of the transmission process through single apertures surrounded by periodic corrugations, *Opt. Express*, vol.12, pp.3694-3700, 2004
- [34]. S. I. Bozhevolnyi, V. S. Volkov, and E. Devaux, Channel Plasmon-Polariton Guiding by Subwavelength Metal Grooves, *Phys. Rev. Lett.*, vol.95, pp.46802, 2005
- [35]. F. Przybilla, C. Genet, and T. W. Ebbesen, Enhanced transmission through Penrose subwavelength hole arrays, *Appl. Phys. Lett.*, vol.89, pp.121115, 2006
- [36]. C. Genet, and T. W. Ebbesen, Light in tiny holes, *Nature*, vol.445, pp.39-46, 2007
- [37]. Z. Jian, and D. M. Mittleman, Characterization of guided resonances in photonic crystal slabs using terahertz time-domain spectroscopy, *J. Appl. Phys.*, vol.100, pp.123113, 2006
- [38]. Y. Zhao, and W. Zhang, Effect of dielectric properties of metals on terahertz transmission subwavelength hole arrays, *Opt. Lett.*, vol.31, pp.2637-2639, 2006
- [39]. Q. Xing, S. Li, and Z. Tian, Enhanced zero-order transmission of terahertz radiation pulses through very deep metallic gratings with subwavelength slits, *Appl. Phys. Lett.*, vol.89, pp.41107, 2006
- [40]. J. W. Lee, M. A. Seo, and D. S. Kim, Fabry-Perot effects in THz time-domain spectroscopy of plasmonic band-gap structures, *Appl. Phys. Lett.*, vol.88, pp.71114, 2006
- [41]. M. Beruete, and M. Sorolla, Increase of the Transmission in Cut-Off Metallic Hole Arrays, *IEEE Microwave and Wireless Components Lett.*, vol.15, pp.116-118, 2005

- [42]. W. Zhang, Resonant terahertz transmission in subwavelength metallic hole arrays of sub-skin-depth thickness, Opt. Lett., vol.30, pp.2945-2947, 2005
- [43]. H. Cao, and A. Nahata, Resonantly enhanced transmission of terahertz radiation through a periodic array of subwavelength apertures, Opt. Express, vol.12, pp.1004-1010, 2004
- [44]. M. Tanaka, F. Miyamaru, and M. Hangyo, Effect of a thin dielectric layer on terahertz transmission characteristics for metal hole arrays, Opt. Lett., vol.30, pp.1210-1212, 2005
- [45]. C. Y. Chen, Liquid-crystal-based terahertz tunable Lyot filter, Appl. Phys. Lett., vol.88, pp.101107-101109, 2006



## 第二章 理論

在此章節中，我們將會分為三個段落：(1) 兆赫波的輻射及接收機制，(2) 金屬孔洞陣列的物理機制及(3) 「有限時域差分法」之電磁場模擬系統。首先於 2-1.1 簡單地利用電衝模型(Current-surge model)介紹的兆赫波的輻射機制，且於 2-1.2 簡述量測兆赫波之量測技術-時域光譜技術。於 2-2 敘述金屬孔洞陣列的物理模型之穿透機制，其中包括於 2-2.1 介紹特徵模態延展數值演算法(Eigenmode expansion method)來解釋於單一孔洞結構的金屬孔洞中所造成之局部波導共振 (Localized waveguide resonance) 之穿透的特性、2-2.2 弗洛凱定理(Floquet theory) 以理解孔洞陣列周期性結構的穿透率特性、2-2.3 孔洞陣列針對於不同晶格週期性結構之穿透率的公式及 2-2.4 表面電漿子的基本理論及其數學模型。最後，2-3 會簡短的介紹我們的數值模擬程式「有限時域差分法」以模擬電磁波之孔洞穿透率。



### 2-1 兆赫波的輻射及接收機制

最近，相關於兆赫波脈衝的研究蓬勃發展，透過超短脈衝雷射，可以很輕易地產生皮秒級脈衝寬度的兆赫波脈衝。目前為止，兩種產生兆赫波的方法較為人熟知：第一是將超短脈衝雷射入射至非線性晶體經光整流效應(optical rectification) 產生兆赫波輻射，利用這種方法所產生的兆赫波通常其頻寬較大且具有較高的能量。第二種是將超快雷射入射至半導體表面，經由激發的電子-電洞對產生兆赫波輻射。於下小節我們會著重於利用電衝模型(current-surge model)簡述第二種的

兆赫波的輻射機制。而於 2-1.2 則會介紹接收兆赫波之量測技術-時域光譜技術。

### 2-1.1：光導天線(photoconductive antenna)產生兆赫波

當超短脈衝雷射入射至光導天線，會激發電子-電洞對，而此電子-電洞對經由外加偏壓加速後，產生表面電流，時變的表面電流會經由天線輻射出兆赫波。透過電衝模型(current-surge model)[1]，我們接下來解釋上述的物理機制。

電衝模型(current-surge model)：

當脈衝雷射做為激發光源入射至半導體，其表面因為雷射的激發會產生時變載子

$\rho(x, y, z, t)$ 、電流  $\vec{J}(x, y, z, t)$ 、電場和磁場。

根據馬克士威爾方程式(Maxwell's Equations)，

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Eq.2-1.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{Eq.2-1.2})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Eq.2-1.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Eq.2-1.4})$$

$$\vec{B} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{Eq.2-1.5})$$

將(Eq.2-1.5)代入(Eq.2-1.1)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\text{故可得 } \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{Eq.2-1.6})$$

根據向量恆等式，我們可以改寫電位  $V$  為

$$-\nabla V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{Eq.2-1.7})$$

再將(Eq.2-1.7)代入(Eq.2-1.3)，我們可以得到

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left( \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{Eq.2-1.8})$$

接下來，再將(Eq.2-1.7)代入(Eq.2-1.8)，得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \left( \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu \left[ \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right]$$

經整理：

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (\text{Eq.2-1.9})$$

同理，將(Eq.2-1.9)和(Eq.2-1.5)代入(Eq.2-1.1)，可得

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{Eq.2-1.10})$$

根據羅倫茲規範(Lorentz gauge)，我們得知

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} V = 0 \quad (\text{Eq.2-1.11})$$

將(Eq.2-1.11)代入(Eq.2-1.9)和(Eq.2-1.10)，我們可得兩個普瓦松方程式(Poisson's

Equations)：

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (\text{Eq.2-1.12})$$

$$\nabla^2 V + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{Eq.2-1.13})$$

藉由(Eq.2-1.12)和(Eq.2-1.13)，我們得到經由半導體表面輻射之電場的時變方程式。

當半導體表面受到超短脈衝激發後，會產生時變的載子和電流。根據(Eq.2-1.3)

和向量恆等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ ，其中  $\vec{A}$  為任意向量，我們可以得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{Eq.2-1.14})$$

實際上，電流只存在於半導體的表面，故  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 。根據(Eq.2-1.14)顯示得到載子的密度並不會隨著時間而變動。換句話說，因為超短脈衝所激發的載子和電流並不會對電場有貢獻。也因為如此，根據(Eq.2-1.7)我們可以斷定兆赫波是來自於時變的向量磁位。故我們假設

$$\vec{E}_{rad}(t) = -\frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t} \quad (\text{Eq.2-1.15})$$

根據格林函數法(Green Functions method)解波方程式(wave equations)[2]

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi \cdot f(\vec{r}, t) \quad (\text{Eq.2-1.16})$$

其中  $f(\vec{r}, t)$  為源的分佈函數， $\Psi$  為場的分佈函數。經由格林函數法，可以解得場

分佈函數為

$$\Psi = \int \frac{f\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \quad (\text{Eq.2-1.17})$$

我們將(Eq.2-1.17)之式子以此類推代入至(Eq.2-1.12)，可以得到

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{J}_s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad (\text{Eq.2-1.18})$$

再將(Eq.2-1.18)代入(Eq.2-1.15)，我們得到

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{J}_s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad (\text{Eq.2-1.19})$$

其中  $\vec{J}_s$  為光導天線表面受光激發之電流，而  $\vec{r}'$  為源座標系， $\vec{r}$  為場座標系。考慮遠場的效應，則

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \sqrt{1 - 2\vec{a}_r \cdot \vec{r}' + \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}} \approx r \left(1 - \frac{\vec{a}_r \cdot \vec{r}'}{r}\right) \approx r \quad (\text{Eq.2-1.20})$$

接下來，我們假設光導天線的電極受到超短脈衝激發時，在空間上的表面電流為常數。將(Eq2-1.21)代入(Eq.2-1.19)，我們可得

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{d}{dt} \vec{J}_s \left( t - \frac{\vec{r}}{c} \right) \quad (\text{Eq.2-1.21})$$

其中， $A$  為光導天線照光的區域。接下來，我們再假設我們所量測兆赫波的偵測

器是置放於  $z$  軸上，則  $x = y = 0$ ，且  $t' \rightarrow t - \frac{z}{c}$ 。

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{A}{z} \cdot \frac{d}{dt'} \vec{J}_s(t') \quad (\text{Eq.2-1.22})$$

為了方便，我們再將  $t' \rightarrow t$ 。參考[3]，可得

$$\vec{J}_s = \frac{\sigma_s(t) \vec{E}_b}{\frac{\sigma_s(t) \eta_0}{1+n} + 1} \quad (\text{Eq.2-1.23})$$

其中  $\eta_0$  為自由空間之本質阻抗(intrinsic impedance of the free space)， $n$  為光導天線在兆赫波段的折射率， $\sigma_s(t)$  為光導天線的表面導電率， $\vec{E}_b$  為外加偏壓的電場大小。根據[4]，可得

$$\sigma_s(t) = \frac{e(1-R)}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' m(t, t') I_{opt}(t') \exp\left[-\frac{(t-t')}{\tau_{car}}\right] \quad (\text{Eq.2-1.24})$$

其中  $e$  為電荷量， $R$  為光導天線於超短脈衝波段的反射率， $\hbar\omega$  激發光的光子能量， $m(t, t')$  為載子在時間  $t$  的遷移率(mobility)，而且載子是在時間  $t'$  受到脈衝激

發產生。 $\tau_{car}$  為受激發載子的生命期(carrier lifetime)。為了簡化，我們假設載子

遷移率為常數  $m(t, t') = m$ ，也因為這個假設，我們也不需要考慮  $\exp\left(\frac{-(t-t')}{\tau_{car}}\right)$ 。

現在再次假設激發光在時域上的波形變化為高斯(Gaussian)脈衝

$$I_{opt} = I_0 \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) \quad (\text{Eq.2-1.25})$$

將上述假設代入(Eq.2-1.24)，我們可得

$$\sigma_s(t) = \frac{e(1-R)}{\hbar\omega} I_0 \int_{-\infty}^t dt' m \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) \quad (\text{Eq.2-1.26})$$

綜合(Eq.2-1.22)、(Eq.2-1.23)和(Eq.2-1.26)，我們可以得到  $\vec{E}_{rad}$  的數學表示

$$\vec{E}_{rad}(r, t) = -\frac{\vec{E}_b}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{A}{z} \frac{e(1-R)}{\hbar\omega} I_0 m \cdot \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) \times \left[ I + \frac{\eta_0 e(1-R) I_0 m}{(n+1)\hbar\omega} \int_{-\infty}^{t'/\tau} \tau \cdot \exp(-x^2) dx \right]^{-2} \quad (\text{Eq.2-1.27})$$

現在，我們假設激發光的光通量(light fluence)為

$$F_{opt} = \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) dt = \sqrt{\pi} I_0 \tau \equiv \frac{E_{opt}}{A} \quad (\text{Eq.2-1.28})$$

其中  $E_{opt}$  為偵測器上所量到激發光之平均能量，而  $A$  為激發光之光束大小(beam size)。為了在計算上簡化式的表示，我們再假設兩個參數

$$B = \frac{Ae(1-R)m}{4\pi\epsilon_0 c^2 z \hbar\omega \sqrt{\pi}} \quad (\text{單位: m}^2\text{s/J}) \quad (\text{Eq.2-1.29})$$

$$D = \frac{\eta_0 e(1-R)m}{(n+1)\hbar\omega \sqrt{\pi}} \quad (\text{單位: m}^2\text{/J}) \quad (\text{Eq.2-1.30})$$

現在再將(Eq.2-1.29)和(Eq.2-1.30)代入(Eq.2-1.27)，我們可以得到簡化後之  $\vec{E}_{rad}$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -B\vec{E}_b \frac{F_{opt}}{\tau} \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \left[ 1 + DF_{opt} \int_{-\infty}^{t/\tau} \tau \cdot \exp(-x^2) dx \right]^{-2}$$

(Eq.2-1.31)

根據上述的理論，我們可以了解如何結合超快雷射與光導天線產生兆赫波。接下來，我們將會介紹如何利用光導天線和超快雷射達成同調偵測。

## 2-1.2 兆赫波時域光譜技術(THz-TDS)

當光導天線受到超短脈衝激發時，其導電率  $\sigma_d$  是隨著時間而變化的。而同一時間，兆赫波的電場會加速載子產生電流。現在，我們假設經由時間  $t_p$  後兆赫波抵達偵測端的光導天線，而我們在電腦上看到的電流實際是經由卷積(convolution)效應所得到的訊號



$$j(t_p) = \int_{t_p}^{\infty} E_{rad}(t') \cdot \sigma_d(t' - t_p) dt' \quad (\text{Eq.2-1.32})$$

現在，我們假設偵測端的光導天線其導電率對時間的變化為

$$\sigma_d(t' - t_p) = \begin{cases} 0 & \text{if } t_p > t' \\ \frac{\sigma_0}{\tau_d} \exp\left[-\frac{(t' - t_p)}{\tau_d}\right] & \text{if } t_p \leq t' \end{cases} \quad (\text{Eq.2-1.33})$$

其中  $\sigma_0$  為超短脈衝入射至偵測器瞬間的最大導電率。我們假設兆赫波的脈衝寬度小於 1 皮秒(ps)，而通常經由超短脈衝入射至光導天線所產生的載子，其生命期  $\tau_d$  較長，於是我們可以假設當  $t_p \leq t'$  的條件時，指數項約略為 1，故

$$\sigma_d(t' - t_p) = \begin{cases} 0 & \text{if } t_p > t' \\ \frac{\sigma_0}{\tau_d} & \text{if } t_p \leq t' \end{cases} \quad (\text{Eq.2-1.34})$$

現在再將(Eq.2-1.34)代入(Eq.2-1.32)，可得

$$j(t_p) = \frac{\sigma_0}{\tau_d} \int_{t_p}^{\infty} E_{rad}(t') dt' \quad (\text{Eq.2-1.35})$$

根據(Eq.2-1.31)，我們可以很容易的發現  $E_{rad}$  在時間上為對稱函數，故可以改寫

為

$$j = \frac{\sigma_0}{2\tau_d} \int_{-\infty}^{\infty} E_{rad}(t') dt' \quad (\text{Eq.2-1.36})$$

將(Eq.2-1.31)代入上式，我們可以得到電流對時間的關係為

$$j = -\frac{\sigma_0}{2\tau_d} \frac{BE_b F_{opt}}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) \times \left[1 + DF_{opt} \int_{-\infty}^{t'/\tau} \exp(-x^2) dx\right] dt' \quad (\text{Eq.2-1.37})$$

其中  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau^2}\right) \times \left[1 + DF_{opt} \int_{-\infty}^{t'/\tau} \exp(-x^2) dx\right] dt' = \frac{\sqrt{\pi}\tau}{1 + \sqrt{\pi}DF_{opt}}$ ，而上述的推導並

沒有考慮到兆赫波在輻射和接受時，會經過介質(substrate)。當兆赫波在經過介

質時，會因為菲涅耳損失(Fresnel loss)而使得量測到的訊號比理論推導還要小。

現在，我們考慮菲涅耳損失造成的影響，並且將(Eq.2-1.37)簡化後，可得

$$j = -\sigma_0 CE_b \frac{F/F_s}{1 + \left(\frac{F}{F_s}\right)} \quad (\text{Eq.2-1.38})$$

其中

$$F_s = \frac{(n+1)\hbar\omega}{\eta_0 e(1-R)m} \quad (\text{Eq.2-1.39})$$

$$C = \frac{A\sqrt{n}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \eta_0 z \tau_d}$$

(Eq.2-1.40)

綜合上述的內容，我們可以了解兆赫波的產生機制與如何結合超快雷射與光導天線達成同調量測。

## 2-2 金屬孔洞陣列(Metallic Hole Arrays)

在 1998 年，Ebbesen 團隊首先量測次波長結構金屬孔洞陣列之穿透率，並發現在某些特定的頻率具有異常的穿透峰值，而這異常的穿透現象目前大部分的研究認為主因電磁波與金屬表面電子(Surface Plasmon Polaritons)耦合共振後所造成的，其中包括了電磁波於孔洞中的傳遞共振以及與表面電漿透過周期性結構的共振與耦合。因此，於此節首先簡介表面電漿子的物理特性，接著建立理論模型來解釋此周期性孔洞的穿透特性，其中包括理想金屬孔洞之波導模態分析、透過單孔孔洞的模型來探討波導共振理論(Localized Waveguide Resonance)[5]、周期性結構所造成之繞射的特性[6]及弗洛凱理論(Floquet Theory)[7] 及使用特徵模展開法(Eigen-Mode Expansion Method)來解釋周期性金屬孔洞陣列之穿透現象。

### 2-2.1 表面電漿子(Surface Plasmon Polaritons)

現在我們考慮平行極化(p-wave)入射至金屬表面(如圖 Fig2-1)，其中電場方向垂

直  $y$  軸,  $z = 0$  的位置定義為金屬與介電質的界面。其中, 金屬的介電常數  $\epsilon_2 < 0$ 。

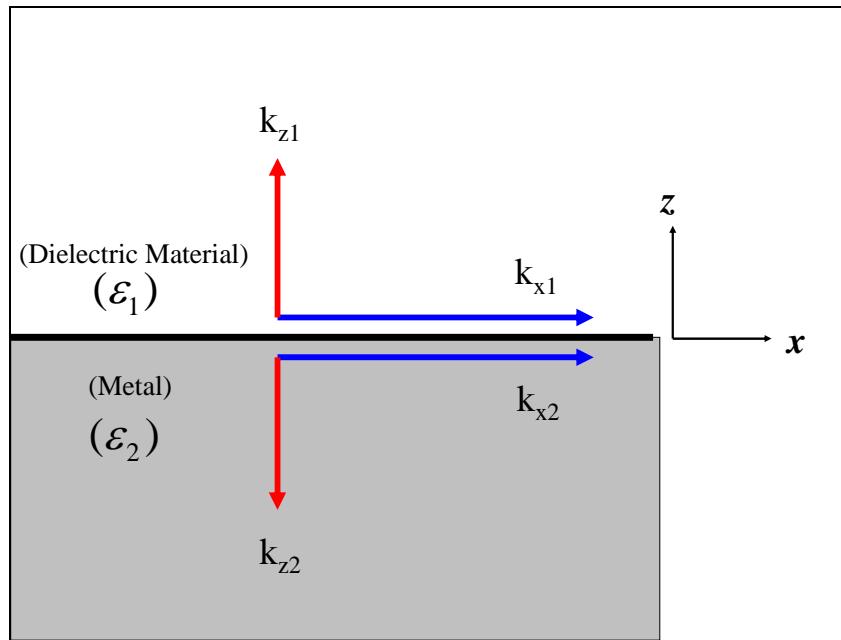


Fig2-1：平行極化波於介電質與金屬中  $k$  分量之示意圖，其中  $z < 0$  處為金屬， $z > 0$  為介電質

現在我們假設在  $z > 0$ ，其電場  $E_1$  與磁場  $H_1$  分別為

$$\vec{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{y1} \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega \cdot t)] \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 1})$$

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{x1} \\ 0 \\ E_{z1} \end{pmatrix} \exp[i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega \cdot t)] \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 2})$$

而在  $z < 0$  處，則電場  $E_2$  與磁場  $H_2$  分別為

$$\vec{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{y2} \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(k_{x2}x - k_{z2}z - \omega \cdot t)] \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 3})$$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{x2} \\ 0 \\ E_{z2} \end{pmatrix} \exp[i(k_{x2}x - k_{z2}z - \omega \cdot t)] \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 4)}$$

切線電場和切線磁場在界面處需連續，故在  $z = 0$  處，必需滿足

$$E_{x1} = E_{x2} , H_{y1} = H_{y2} , \varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2} \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 5)}$$

利用  $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ，我們可以得到

$$k_{z1} H_{y1} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_1 E_{x1} \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 6)}$$

$$k_{z2} H_{y2} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_2 E_{x2} \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 7)}$$

將(Eq. 2-2. 6)與(Eq. 2-2. 7)相加，再利用(Eq. 2-2. 5)，我們可以得到

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} & \frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{y1} \\ H_{y2} \end{bmatrix} = \vec{D}_0 \begin{bmatrix} H_{y1} \\ H_{y2} \end{bmatrix} = 0 \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 8)}$$

為了得到有意義的解，則需滿足  $\det[\vec{D}_0] = 0$ ，故我們得到

$$\vec{D}_0 = \frac{k_{z1}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{z2}}{\varepsilon_2} = 0 \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 9)}$$

接著再利用  $k_x^2 + k_{zi}^2 = \varepsilon_i \left( \frac{\omega}{c} \right)^2$ ，可解得

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 10)}$$

$$k_{zi} = \sqrt{\varepsilon_i \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2} \quad i = 1, 2 \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 11)}$$

由於金屬的介電係數  $\varepsilon_2 < 0$ ，我們可以知道  $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} > \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$ 。Fig2-2 顯示電磁波於空氣及與空氣與金屬所產生之表面電漿子模太之色散曲線。如圖 Fig2-2 所顯示表面電漿子模態的色散曲線永遠比正常電磁波的色散曲線大，故我們用電磁波入射至金屬表面時，因為動量不匹配，無法使電磁波與金屬表面電子耦合產生表面電漿子。

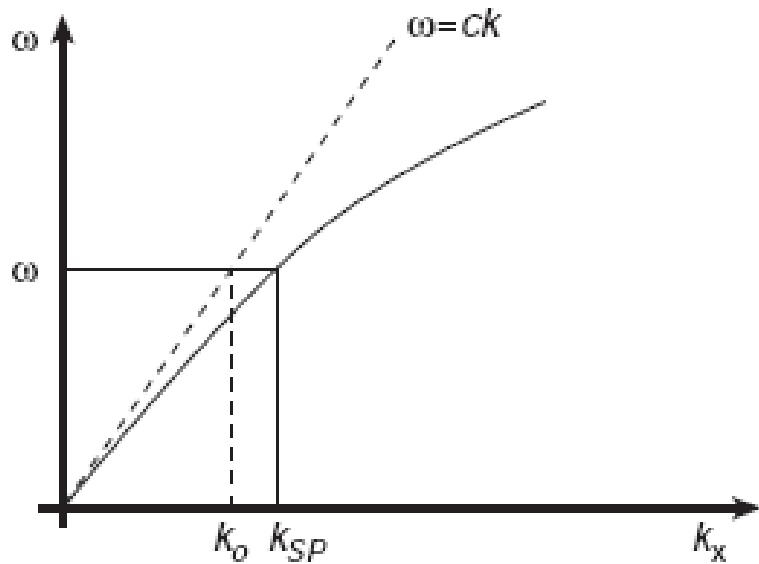


Fig2-2：表面電漿子模態 (實線)與真空中電磁波之色散曲線(虛線)

為了激發表面電漿模態，目前比較常用的方式有兩種，一種為稜鏡耦合法(Prism Coupler)，而另一種即是光柵耦合(Grating Coupler)法。光柵耦合法是利用陣列周期性結構，提供額外的  $k_x$  空間動量，使得入射電磁波透過周期性結構而與表面電漿模態滿足動量守恆之定理，達成相位匹配(Phase Matching)。故當  $\vec{k}_{sp} = \vec{k}_x + n\vec{G}$  時，電磁波便可以激發出表面電漿模態，其中  $\vec{k}_x$  為電磁波傳播常數在  $x$  方向的分量(參考 Fig2-1)，而  $\vec{G}$  為陣列結構的倒晶格動量。

假設介電質的介電常數為  $\epsilon_d$  、金屬的介電常數為  $\epsilon_m = \epsilon_{mr} + i\epsilon_{mi}$  、且表面電子態的傳播常數(Propagation Constant)為  $k_{spr} = k_{spr} + ik_{spi}$  。將  $\epsilon_m = \epsilon_{mr} + i\epsilon_{mi}$  代入(Eq.2-2.10) ，表面電漿子的傳播常數為

$$k_{spr} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_d}{(\epsilon_{mr} + \epsilon_d)^2 + \epsilon_{mi}^2}} \sqrt{\frac{(\epsilon_{mr}^2 + \epsilon_{mi}^2 + \epsilon_d \epsilon_{mr}) + \sqrt{(\epsilon_{mr}^2 + \epsilon_{mi}^2 + \epsilon_d \epsilon_{mr})^2 + \epsilon_d^2 \epsilon_{mi}^2}}{2}} = \frac{\omega}{c} n_{sp} \dots\dots (Eq. 2-2. 12)$$

$$k_{spr} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_d}{(\epsilon_{mr} + \epsilon_d)^2 + \epsilon_{mi}^2}} \frac{\epsilon_d \epsilon_{mi}}{\sqrt{2(\epsilon_{mr}^2 + \epsilon_{mi}^2 + \epsilon_d \epsilon_{mr}) + \sqrt{(\epsilon_{mr}^2 + \epsilon_{mi}^2 + \epsilon_d \epsilon_{mr})^2 + \epsilon_d^2 \epsilon_{mi}^2}}} \dots\dots (Eq. 2-2. 13)$$

在兆赫波的區段中，  $|\epsilon_{mi}| > |\epsilon_{mr}|$  且  $|\epsilon_{mr}|, \epsilon_{mi} \gg \epsilon_d$  。故將(Eq.2-2.12)及(Eq.2-2.13)簡化後，表面電漿子的傳播常數的實部及虛部部分的表達分別為

$$k_{spr} = \frac{\omega}{c} n_{sp} \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_d} \dots\dots (Eq. 2-2. 14)$$

$$k_{spi} = \frac{\omega}{c} \frac{\sqrt{\epsilon_d^3}}{2\epsilon_{mi}} \dots\dots (Eq. 2-2. 15)$$

假設電磁波為垂直入射於介面，  $\vec{k}_x = 0$  。為了滿足相位匹配(Phase Matching)的條件，於透過不同的周期性結構將電磁波耦合至表面電漿模態的頻率分別為

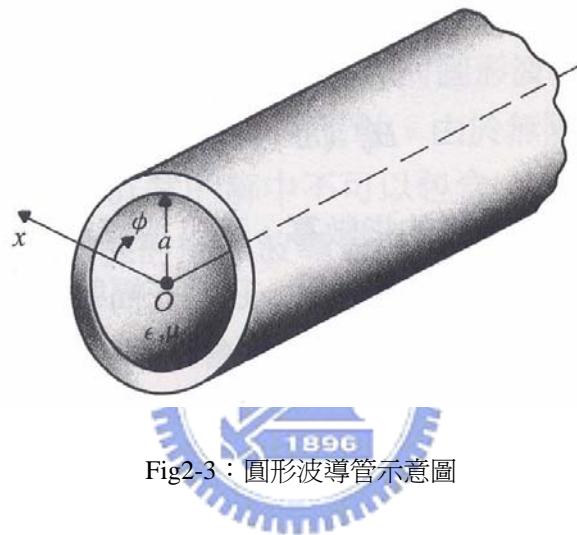
(1)晶格結構為四角晶格

$$f = \frac{c}{a_0} \sqrt{\frac{i^2 + j^2}{\epsilon_d}} \dots\dots (Eq. 2-2. 16)$$

(2)晶格結構為六角晶格

## 2-2.2 圓形及方形孔洞波導特性

參考 Fig2-3，考慮圓形孔洞波導，被完全導體所包圍，經由漢姆荷茲方程式 (Helmholtz's Equations)[8]我們可以獲得其波導之各個模態之場效分布方程式



對於 TE 波而言，於傳輸方向  $z$  沒有電場分量值，所以  $E_z = 0$ 。假設

$H_z(r, \phi, z) = H_z^0(r, \phi) \cdot e^{-r \cdot z}$  且代入(Eq2-2.19)，可以獲得其各個模態之特徵方程式

爲

$$H_z^0 = C_n \cdot J_n(hr) \cos(n\phi) \dots \quad \text{(Eq. 2-2. 20)}$$

$$H_r^0 = -\frac{j\beta}{h} C_n \cdot J'_n(hr) \cos(n\phi) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 21})$$

$$H_{\phi}^0 = \frac{jn\beta}{h^2 r} C_n \cdot J_n(hr) \sin(n\phi) \quad \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 22})$$

$$E_r^0 = \frac{jn\omega\mu}{h^2 r} C_n \cdot J_n(hr) \sin(n\phi) \quad \text{..... (Eq. 2-2. 23)}$$

$$E_\phi^0 = \frac{j\omega\mu}{h} C_n \cdot J'_n(hr) \cos(n\phi) \quad \text{..... (Eq. 2-2. 24)}$$

$$E_z^0 = 0 \quad \text{..... (Eq. 2-2. 25)}$$

其中  $C_n$  為常數， $\gamma = j\beta$ ， $\beta$  為傳播常數(propagation constant)， $k$  為波數(wavenumber)，且  $h$  則定義為  $h^2 = \gamma^2 + k^2$ 。為了滿足邊界條件(即電場於完全導體值為 0)，圓形波導的最低模態的截止值為

$$(h)_{TE_{11}} = \frac{1.841}{a} \quad \text{..... (Eq. 2-2. 26)}$$

其中  $a$  為圓形孔洞的半徑。令  $d = 2a$ ，由(Eq.2-2.26)，此圓形波導的截止頻率為

$$(f_c)_{TE_{11}} = \frac{(h)_{TE_{11}}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{0.293}{a\sqrt{\mu\epsilon}} = 1.841 \frac{c}{\pi \cdot d} \quad \text{..... (Eq. 2-2. 27)}$$

現在考慮矩形孔洞(參考 Fig2-4)的情形。與圓形孔洞相似，在考慮 TE 模態的情況下

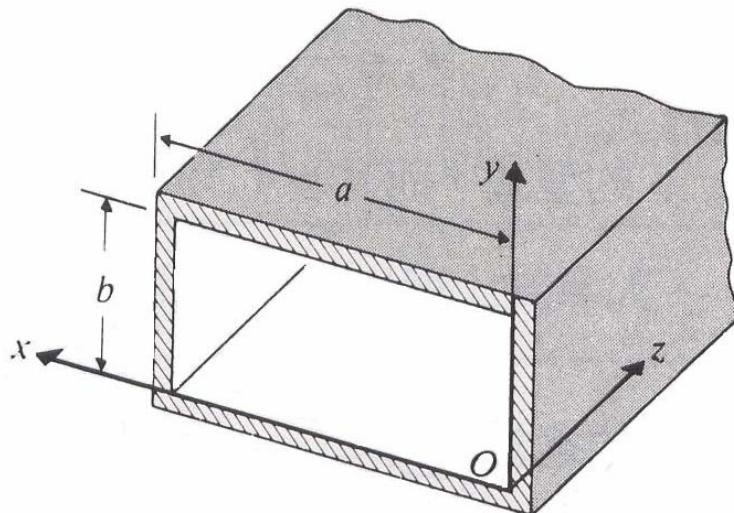


Fig2-4：矩形波導示意圖

令  $E_z = 0$ ， $H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y) \cdot e^{-\gamma z}$  代入(Eq2-2.19)，可得特徵模態分佈爲

$$E_x^0(x, y) = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos\left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin\left( \frac{n\pi}{b} y \right) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 28})$$

$$E_y^0(x, y) = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) H_0 \sin\left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos\left( \frac{n\pi}{b} y \right) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 29})$$

$$E_z^0 = 0 \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 30})$$

$$H_x^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) H_0 \sin\left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos\left( \frac{n\pi}{b} y \right) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 31})$$

$$H_y^0(x, y) = \frac{\gamma}{h^2} \left( \frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos\left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin\left( \frac{n\pi}{b} y \right) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 32})$$

$$H_z^0(x, y) = H_0 \cos\left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos\left( \frac{n\pi}{b} y \right) \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 33})$$

矩形孔洞的最低傳播模態爲  $TE_{10}$  (假設  $a > b$ ) 且其截止頻率爲

$$(f_c)_{TE_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{2a} \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 34})$$



### 2-2.3 局部波導共振(Localized Waveguide Resonance)

現在我們考慮電磁波於單孔矩形金屬波導片之電磁場分布，其中此孔洞之邊長和厚度都在次波長的範圍。於上述之波導特性得知，當金屬厚度爲無限長時，對於頻率低於截止頻率的電磁波無法在金屬波導中傳遞能量。然而，當金屬厚度爲次波長的厚度時且輻射模態的消減常數遠大於金屬厚度時，在低於截止頻率的電磁波能可穿透此單一孔洞裡並且在瀕於截止頻率具有極高穿透率特性[5]，此現象稱爲局部波導共振，而這些特性則可透過特徵模展開法來分析此結構系統現象。

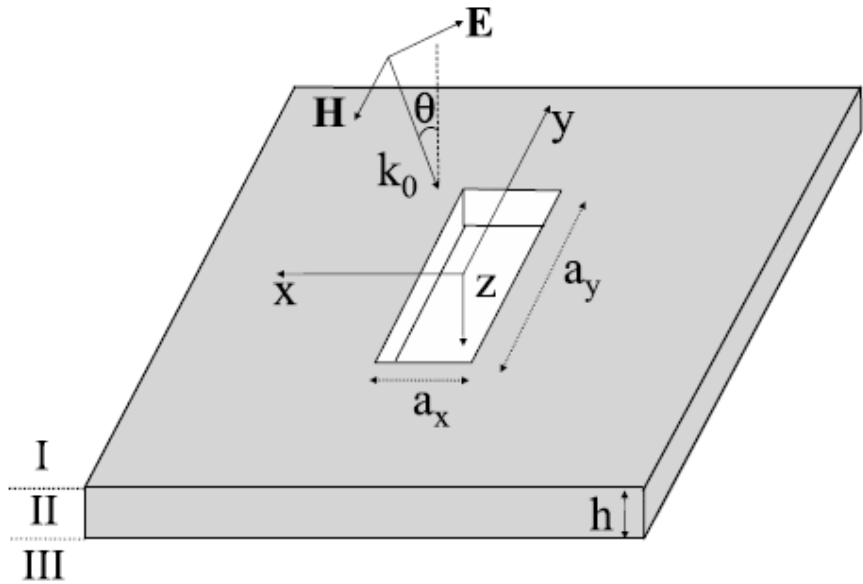


Fig2-5：矩形金屬單一孔洞示意圖

如圖 Fig2-5 顯示單一矩形孔洞的長寬分別為  $a_y$ ， $a_x$ ；此金屬片的厚度為  $h$ ，且假設電磁波的偏振方向在  $x$  方向。將金屬孔洞區分成三個區域，並且在各自區域的磁場為

$$H_y^I(r) = H_y^{inc}(r) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \rho(k) \exp[i(k_x x + k_y y - k_z z)] \quad (\text{Eq. 2-2. 35})$$

$$H_y^{II}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \exp(i\beta_m z) + B_m \exp(-i\beta_m z)] \phi_m(x, y) \quad (\text{Eq. 2-2. 36})$$

$$H_y^{III}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tau(k) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad (\text{Eq. 2-2. 37})$$

其中  $\rho(k)$  為反射的磁場，而  $\tau(k)$  為出射的磁場； $H_y^I(r)$ ， $H_y^{II}(r)$ ， $H_y^{III}(r)$  分別表示為 I，II，III 區磁場。透過電磁波在界面處的邊界條件並假設只有最低模態允許傳遞於孔洞裡，我們可以解得此金屬孔洞之穿透率為

$$T = \frac{|t_1 e^{j\beta_{00}h}| \operatorname{Re}\{t_2\}}{\left|1 - r^2 e^{-j\beta_{00}h}\right|^2} \quad \text{(Eq. 2-2. 38)}$$

其中  $r = \frac{G_{00} - \beta_{00}}{G_{00} + \beta_{00}}$  ,  $t_1 = \frac{2\beta_{00}}{G_{00} + \beta_{00}}$  ,  $t_2 = \frac{2G_{00}}{G_{00} + \beta_{00}}$  。其中  $G_{00}$  為最低模態

與平面波耦合之係數且  $\beta_{00}$  為孔洞裡最低模態之傳輸速度。

Eq.2-2.40 顯示出類似於 Fabry-Perot 共振腔裡的穿透係數公式，因此波導共振態實際上是來自於電磁波在次波長結構的矩形孔洞由於最低模態與平面波形的截面分布的不相同所產生之反射係數並且於金屬片孔洞中來回傳遞產生 Fabry-Perot 共振之效應。於 Fig2-6 顯示不同長寬比的矩形孔洞的穿透率與頻率之變化，橫軸為除上截止頻率的歸一化頻率且縱軸則除上孔洞的開口率歸一化之穿透率值(在計算其穿透率時，我們固定孔洞面積)。於圖中可以很明顯的觀察到當長寬比變大時，最大之穿透率也跟著變大，而且其共振峰值約略位在截止頻率的左方，即小於截止頻率。這顯現即使只有輻射模態存在於孔洞之中，仍可藉由局部波導共振之現象獲得較高之穿透。

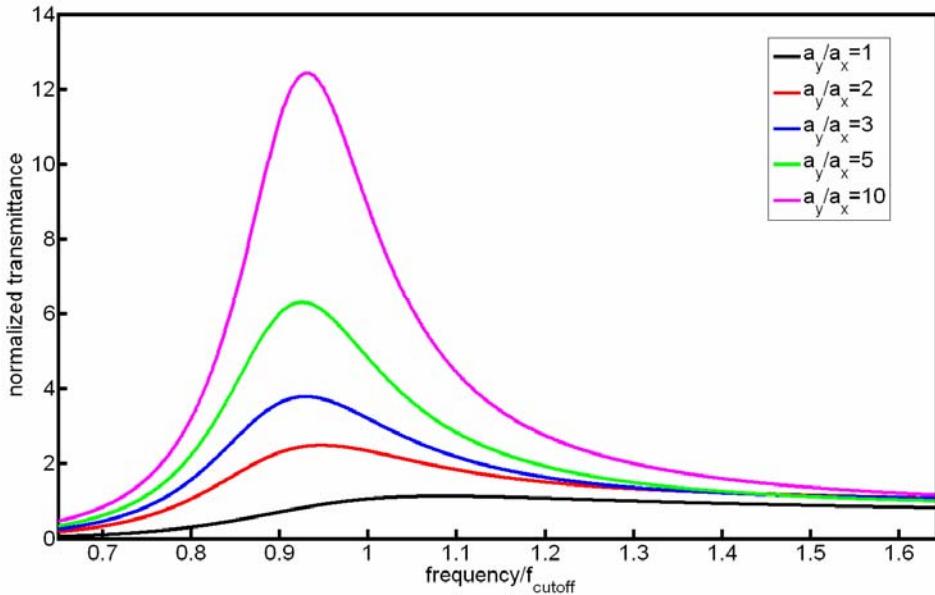


Fig2-6：單一矩形孔洞之長寬比對穿透率作圖



#### 2-2.4 弗洛凱定理(Floquet Theory)

弗洛凱定理 (Floquet Theory) :

在週期介質中，對任一傳播模態，其電場與磁場的任一分量都具有

$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  的形式，其中  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$  是一個空間週期函數，而  $\mathbf{k}$  是一

個波向量。也就是說， $\psi_{\mathbf{k}}$  是週期函數  $u_{\mathbf{k}}$  再乘以一個相位因子  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  。

在此小節，我們先介紹傅立葉定理，接著經由傅立葉定理導引出弗洛凱模型，並

且提出兩者的差異性。傅立葉展開在數學上和物理上是個非常有用的工具，週期

性函數可藉由傅立葉函數來表達。然而，當若函數的振幅週期與相位週期不同

時，我們無法利用傅立葉函數來表達以獲得解析解，可是，經由弗洛凱定理，我

們可以簡易的表達出此函數之周期性特質。

假設函數  $g(x)$  為週期函數，以  $f(x)$  為基底函數且  $a$  為其週期。

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-na) \dots \dots \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 39})$$

利用傅立葉展開，我們可以得到於  $k_x$  空間之係數值

$$\tilde{g}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(jk_x x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-na) \exp(jk_x x) dx = \tilde{f}(k_x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(jnk_x a) \dots \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 40})$$

再利用恆等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(jnk_x a) = \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x - \frac{2n\pi}{a}\right) \dots \dots \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 41})$$

將(Eq.2-2.41)和(Eq.2-2.42)代入(Eq.2-2.43)，我們可以得到

$$\tilde{g}(x) = \frac{2\pi}{a} \tilde{f}(k_x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x - \frac{2n\pi}{a}\right) \dots \dots \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 42})$$

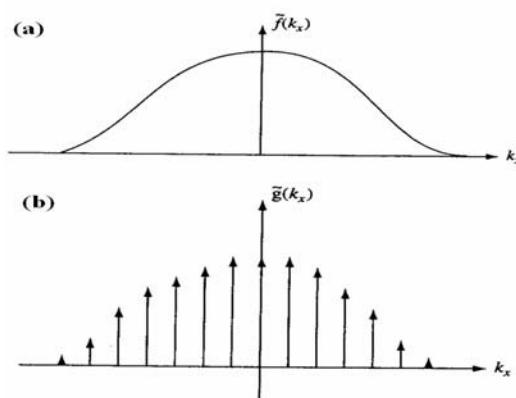


Fig2-7 : (a)  $f(x)$  經傅立葉轉換在  $k$  空間的頻譜分佈且(b)為  $g(x)$  經傅立葉轉換在  $k$  空間的頻譜分佈

圖Fig2-7(a)為基底函數  $f(x)$  經傅立葉轉換後之  $k_x$  空間之頻譜分布，而(b)為周期性函數  $g(x)$  經傅立葉轉換在  $k_x$  空間的頻譜。我們可以於圖上看出  $\tilde{g}(k_x)$  與  $\tilde{f}(k_x)$  其包絡面(envelope)是相同的，然而由於  $g(x)$  是以  $f(x)$  為基底、 $a$  為週期之函數，因此其

$\tilde{g}(k_x)$  則為在  $\tilde{f}(k_x)$  上以取樣頻率  $2\pi/a$  來獲得，如(Eq.2-2.44)所顯示。

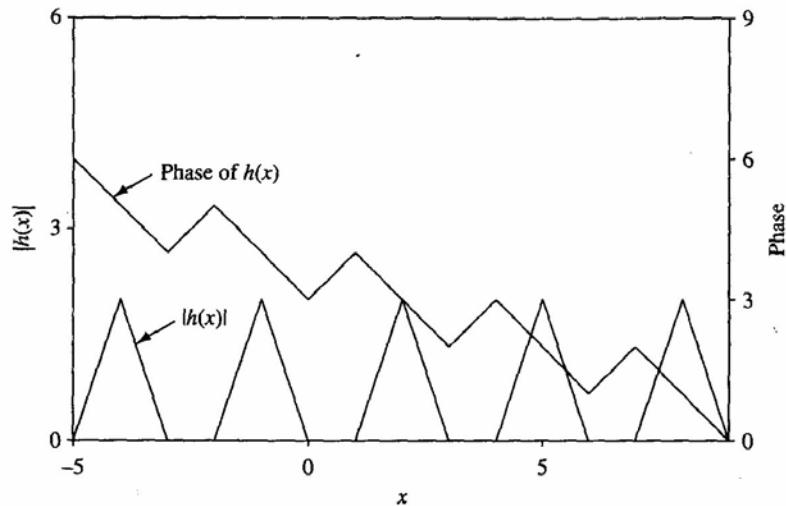


Fig2-8 :  $h(x)$  之振幅與相位對  $x$  作圖

現在假設一個週期函數  $h(x)$ ，其相位隨著週期改變將有額外的偏移量，如圖

Fig2-8 所顯示



將  $h(x)$  做傅立葉轉換，我們可得

$$\tilde{h}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-jn\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x-na) \exp(jk_x x) dx = \frac{2\pi}{a} \tilde{f}(k_x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k_x - \frac{2n\pi}{a} - \frac{\varphi}{a}\right) \quad (\text{Eq. 2-2. 44})$$

比較(Eq.2-2.42)和(Eq.2-2.44)，我們知道  $\tilde{h}(k_x)$  在  $k$  空間的分佈比  $\tilde{g}(x)$  多了一個位移量，而此位移量與相位  $\varphi$  和週期相關。從 Fig2-7 我們可以更容易的觀察到兩者之間的差異

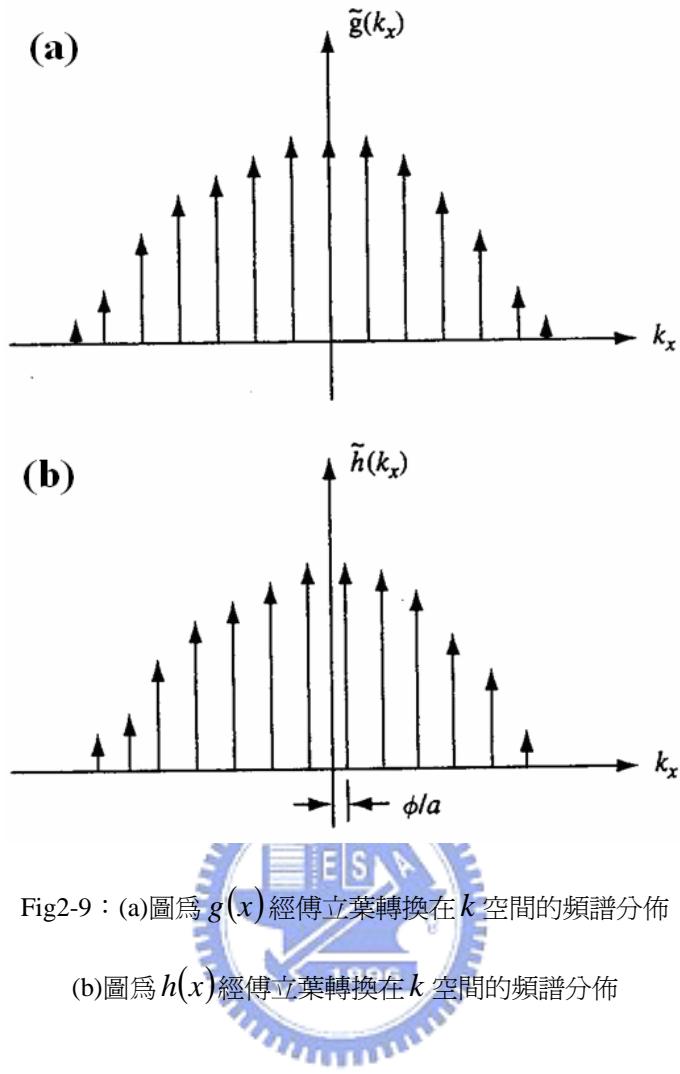


Fig2-9 : (a)圖為  $g(x)$  經傅立葉轉換在  $k$  空間的頻譜分佈

(b)圖為  $h(x)$  經傅立葉轉換在  $k$  空間的頻譜分佈

## 2-2.5 金屬孔洞陣列之穿透

由於孔洞陣列為周期性之結構，故根據弗洛凱定理，電磁場於此材料的分佈可以用週期波來表達，即  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ 。因此，利用特徵模展開法我們表達於入射區域、金屬片及接收區域之電磁場分布。假設週期結構如 Fig. 2-10 所顯示，因此於均勻介質之平面，電磁波可由平面波來展開，其第  $pq$  級之波函數為  $\psi_{pq}$

$$\psi_{pq} = \exp[-j(u_{pq}x + v_{pq}y + \gamma_{pq}z)] \quad \text{(Eq. 2-2. 45)}$$

$$u_{pq} = k \sin \theta \cos \phi + \frac{2\pi \cdot p}{d_x} \quad \text{(Eq. 2-2. 46)}$$

$$u_{pq} = k \sin \theta \sin \phi + \frac{2\pi \cdot q}{d_y} - \frac{2\pi \cdot p}{d_x \tan \alpha} \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 47)}$$

其中  $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ ，而  $d_x, d_y$  和  $\alpha$  Fig2-10 所示， $\theta, \phi$  則為入射光之角度。

而於行進方向  $z$  之傳播常數為

$$\gamma_{pq} = \sqrt{k^2 - t_{pq}^2} \quad \text{for } k^2 > t_{pq}^2 \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 48)}$$

$$= -j\sqrt{k^2 - t_{pq}^2} \quad \text{for } k^2 < t_{pq}^2 \dots \dots \dots \text{(Eq. 2-2. 49)}$$

其中  $t_{pq}^2 = u_{pq}^2 + v_{pq}^2$

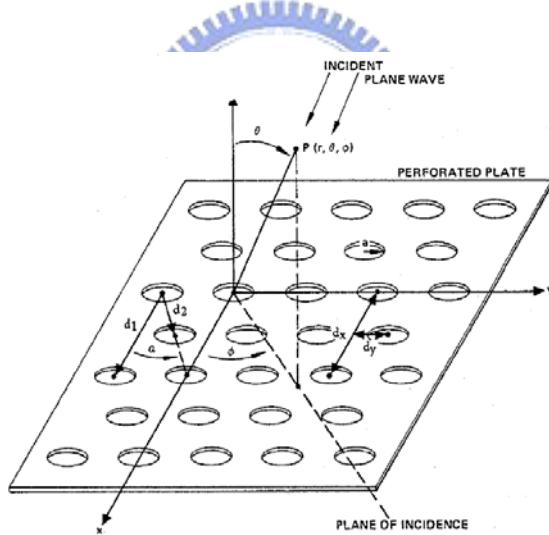


Fig. 1. Geometry of a perforated conducting plate.

Fig2-10：孔洞陣列之幾何結構示意圖

由(Eq.2-2.50)及(Eq.2-2.51)，若  $k^2 > t_{pq}^2$ ，傳播常數  $\gamma_{pq}$  為實數，故  $\psi_{pq}$  為平面波，可於平面中傳遞而能量不消滅。反之，則  $\gamma_{pq}$  為虛數，則此波則隨著行進  $z$  增長而能量消滅，則為消散波(evanescent wave)。而空氣中之電磁場可將其分成 TE 和 TM 兩個互相正交的模態

$$\vec{\Phi}_{pq}^{TE} = \frac{1}{\sqrt{d_x d_y}} \left( \frac{v_{pq}}{t_{pq}} \hat{x} - \frac{u_{pq}}{t_{pq}} \hat{y} \right) \psi_{pq} \quad \text{for TE 電磁場} \dots \dots \dots \text{ (Eq. 2-2. 50)}$$

$$\vec{\Phi}_{pq}^{TM} = \frac{1}{\sqrt{d_x d_y}} \left( \frac{u_{pq}}{t_{pq}} \hat{x} + \frac{v_{pq}}{t_{pq}} \hat{y} \right) \psi_{pq} \quad \text{for TM 電磁場} \dots \dots \dots \text{ (Eq. 2-2. 51)}$$

假設有一平面波入射至金屬孔洞陣列，則於入射區域之電磁場可為

$$\vec{E}_t = \sum_{r=1}^2 A_{00r} \vec{\Phi}_{00r} + \sum_p \sum_q \sum_{r=1}^2 R_{pqr} \vec{\Phi}_{pqr} \quad \dots \quad (\text{Eq. 2-2. 52})$$

其於第  $pq$  電場與不同偏振方向  $r$  之反射率為  $R_{pqr}$ ,  $r=1$  為 TE 場及  $r=2$  為 TM 場。

於金屬孔洞陣列中其場可分成兩區域:(1)於洞中，電磁場可由存在於孔洞裡的各

個模態來組合而成及(2)於洞外，假設為完全導體，其電磁場值為 0。所以，其場

$$\text{表達為 } \sum_{r=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mnr} \Psi_{mnr}$$



於接收區域之電磁場則可以表達為  $\sum_p \sum_q \sum_{r=1}^2 B_{pqr} \vec{\Phi}_{pqr}$

並且令反射率為  $R_{pqr}$ ，穿透率為  $B_{pqr}$ 。考慮電磁波的切線分量  $\vec{E}_t$  與  $\vec{H}_t$  要滿足邊

界條件，我們可得到

$$\vec{E}_t = \sum_{r=1}^2 A_{00r} \vec{\Phi}_{00r} + \sum_p \sum_a \sum_{r=1}^2 R_{pqr} \vec{\Phi}_{pqr} = \sum_p \sum_a \sum_{r=1}^2 B_{pqr} \vec{\Phi}_{pqr} \dots \text{ (Eq.2-2.24a)}$$

$$\vec{E}_t = 0 \quad \text{over the conductor in a unit cell} \quad \dots \dots \dots \quad (\text{Eq.2-2.24b})$$

經由一連串的推導(參考[9], [10]), 我們可得

$$T = \frac{1}{1 - j[A + B \tanh(\beta \cdot l)]} - \frac{1}{1 - j[A + B \coth(\beta \cdot l)]} \dots \dots \dots \text{(Eq.2-2.25)}$$

其中，對於六角晶格之圓形孔洞陣列而言

$$A = 12 \sqrt{\left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1 \right]} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{4\pi \cdot a}{\sqrt{3}d} \right)}{1 - \left( \frac{4\pi \cdot a}{1.841\sqrt{3}d} \right)^2} \right]^2 - \frac{12}{\sqrt{\left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1 \right]}} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{4\pi \cdot a}{\sqrt{3}d} \right)}{\frac{4\pi \cdot a}{\sqrt{3}d}} \right]^2 \quad \text{(Eq.2-2.26a)}$$

$$B = 0.33 \left( \frac{d}{a} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{0.293\lambda}{a} \right)^2 - 1} \quad \text{(Eq.2-2.26b)}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left( \frac{0.293\lambda}{d} \right)^2 - 1} \quad \text{(Eq.2-2.26c)}$$

而對於四方晶格之圓形孔洞陣列而言



$$A = 8 \sqrt{\left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{2\pi \cdot a}{d} \right)}{1 - \left( \frac{2\pi \cdot a}{1.841d} \right)^2} \right]^2 + 8 \sqrt{2 \left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{2\pi\sqrt{2}a}{d} \right)}{1 - \left( \frac{2\pi\sqrt{2}a}{1.841d} \right)^2} \right]^2 \quad \text{Eq.2-2.27a}$$

$$- \frac{8}{\sqrt{\left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1}} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{2\pi}{d}a \right)}{\frac{2\pi}{d}a} \right]^2 - \frac{8}{\sqrt{2 \left( \frac{\lambda}{d} \right)^2 - 1}} \left[ \frac{J'_1 \left( \frac{2\pi}{d}\sqrt{2}a \right)}{\frac{2\pi}{d}\sqrt{2}a} \right]^2$$

$$B = \frac{1.2}{\pi} \left( \frac{d}{a} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{0.293\lambda}{a} \right)^2 - 1} \quad \text{(Eq.2-2.27b)}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left( \frac{0.293\lambda}{d} \right)^2 - 1} \quad \text{(Eq.2-2.27c)}$$

對於六角晶格之方洞而言

$$A = \left[ 3\sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1}} \right] \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{d}\right)}{1 - \left(\frac{2a}{d}\right)^2} \right]^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\sqrt{3}d}\right)}{\frac{\pi a}{\sqrt{3}d}} \right]^2 - \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1}} \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}d}a\right)}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}d}a} \right]^2 \quad (\text{Eq.2-2.28a})$$

$$B = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{16} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - 1} \quad (\text{Eq.2-2.28b})$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - 1} \quad (\text{Eq.2-2.28c})$$

對於四方晶格之方洞而言



$$A = 2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{d}\right)}{1 - \left(\frac{2a}{d}\right)^2} \right]^2 - \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1}} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)}{\frac{\pi a}{d}} \right]^2 + \left[ 2\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1} - \frac{2}{\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1}} \right] \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{d}\right)}{1 - \left(\frac{2a}{d}\right)^2} \right]^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)}{\frac{\pi a}{d}} \right]^2 \quad (\text{Eq.2-2.29a})$$

$$B = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - 1} \quad (\text{Eq.2-2.29b})$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - 1} \quad (\text{Eq.2-2.29c})$$

其中  $a$  在圓形孔洞為半徑，在方形孔洞為邊長， $d$  為週期而  $\lambda$  為波長。經由上述公式，我們可以計算出不同孔洞陣列的穿透率。

### 2-3 時域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain Algorithm)

約 1870 年代，馬克士威爾推導出馬克士威爾方程式後，電磁波的物理特性便已經廣為世人所了解。直到現代，電磁波的問題越來越複雜，想要經由馬克士威爾方程式得到一解析解(Exact Solution)已經是不可能的事情了。而目前都已經使用數值方法來解決電磁波的問題，像是矩量法、單矩法、傳輸線矩陣法和時域有限差分法。此小節，我們將會為讀者介紹時域有限差分法的特點和其基本原理。希望讀者在看完此章節後，對於數值分析法有更進一步的了解。



如同前面所提及，目前電磁波的問題已經複雜到我們無法經由計算馬克士威爾方程式得到一解析解，而值方法是唯一可以得到解答的方式。但是這麼多種數值方法，我們選擇時域有限差分法(下面的章節將簡寫成「**FDTD**」)的原因在於以下幾點優勢：

- **FDTD** 不需要使用矩陣代數：如果需要使用矩數代數，其計算量是非常驚人的。即使是在電腦運算非常快速的現代，這龐大的計算量，並不是一般電腦可以處理的。故不需使用矩陣代數，將可以大大的節省計算資源，增加運算速度。
- **FDTD** 在時域處理問題：有一些數值方法是在頻域上處理問題，而此方法無

法模擬脈衝光源的特性，而此劣勢對於處理寬頻的問題，需要重覆的代入不同的頻率求解，這是非常浪費時間的。而 **FDTD** 不論是脈衝光源或著是連續光源，都可以良好的模擬其特性。而在時域的訊號，我們可以經由快速傅立葉轉換(Fast Fourier Transform)得到其頻域的響影。

● **FDTD** 可處理非線性問題：**FDTD** 可以直接在時域上處理非線性過程的問題，而其他的數值方法對於這方面的處理是非常煩雜

最初將馬克士威爾旋度方程式經由離散化求解的想法，是在 1966 年由 Yee 發表於 IEEE[11]的期刊中。當時的模型其實只是 **FDTD** 雛形，不能處理非均勻性介質(Anisotropic)且對於邊界條件的假設非常粗糙。經過了 40 年的演進，**FDTD** 已經成為一套非常完備的數值方法，甚至現在都已經有套件軟體可以使用。



根據馬克士威爾旋度方程式，我們可以知道電場和磁場是密不可分。現在我們考慮  $E_x$  和  $H_x$ ，則

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{Eq.2-3.1a})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (\text{Eq.2-3.1b})$$

根據(Eq.2-3.1a)與(Eq.2-3.1b)，可以知道電場(磁場)在空間的變化與磁場(電磁)在時間的變化互相影響，而 **FDTD** 便是利用這種特性計算電磁波的問題。首先我

們將上述兩式離散化，並且假設空間網格間距(grid)分別為  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ，則根

據 Fig2-11，我們可以明顯看到電場和磁場在空間上的分佈狀況為互相交錯的。

現在假設計電場  $E$  的計算時間為  $t = n\Delta t$  則磁場  $H$  的計算時間  $t = (n + 1)\Delta t$  會互相影響。故離散化的結果為

$$H_{x(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}} = H_{x(i,j,k)}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta z} [E_{y(i,j,k)}^n - E_{y(i,j,k-1)}^n] - \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} [E_{z(i,j,k)}^n - E_{z(i,j-1,k)}^n] \quad (\text{Eq.2-3.2a})$$

$$E_{x(i,j,k)}^{n+1} = E_{x(i,j,k)}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta y} [H_{z(i,j+1,k)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}}] - \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta z} [H_{y(i,j,k+1)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y(i,j,k)}^{n+\frac{1}{2}}] \quad (\text{Eq.2-3.2b})$$

根據連續的疊代運算，我們便可以得到在任何時間任何位置的電磁與磁場大小。

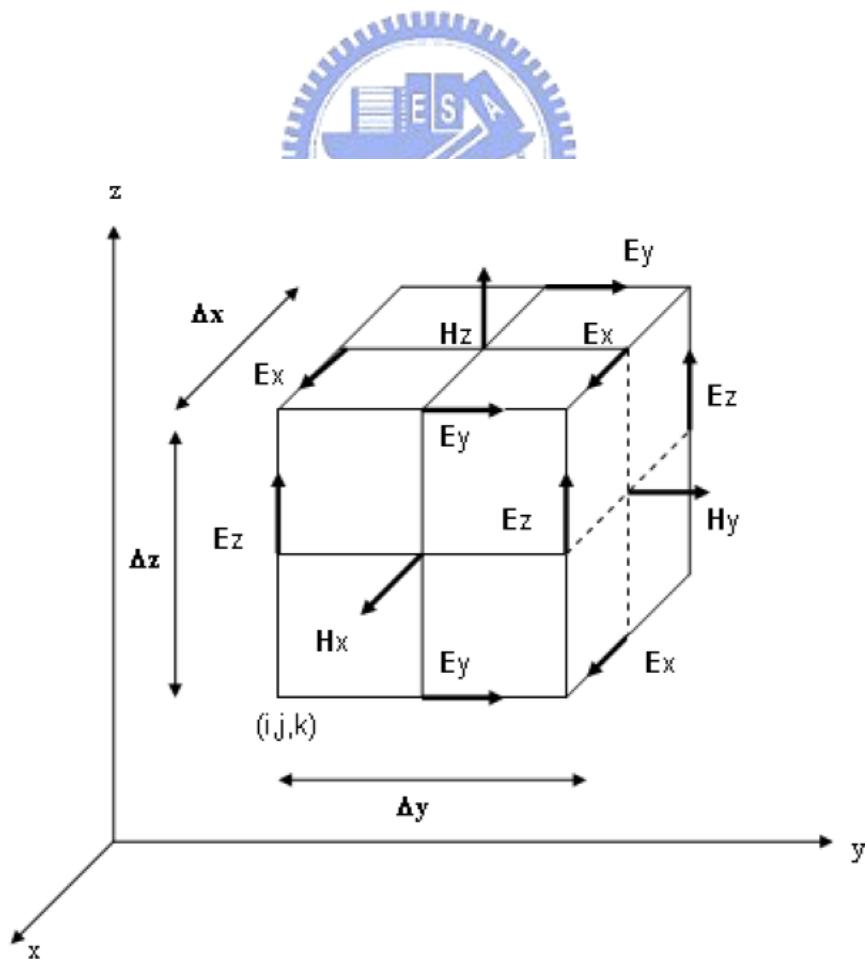


Fig2-11：電場和磁場在 Yee 晶格中的示意圖

- [1]. P. K. Benicewicz, Scaling of terahertz radiation from large-aperture biased photoconductors, *J. Opt. Soc. Am B*, vol.11, pp.2533-2546, 1994
- [2]. J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, New York, Wiley, 1999
- [3]. J. T. Darrow, X. C. Zhang, and D. H. Auston, Saturation Properties of Large-Aperture Photoconducting Antennas, *IEEE J. Quantum Electronics*, vol.28, pp.1607-1616, 1992
- [4]. B. B. Hu, J. T. Darrow, and X. C. Zhang, Optically steerable photoconducting antennas, *Appl. Phys. Lett.*, vol.56, pp.886-888, 1990
- [5]. F. J. Garcia-Vidal, E. Moreno, and J. A. Porto, Transmission of Light through a Single Rectangular Hole, *Phys. Rev. Lett.*, vol.95, pp.103901, 2005
- [6]. C. Winnewisser, Characterization and Application of Dichroic Filters in the 0.1-3 THz Region, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol.48, pp.744-749, 2000
- [7]. A. K. Bhattacharyya, *Phased Array Antennas : Floquet Analysis, Synthesis, BFNs, and Active Array Systems*, Hoboken, N. J., John Wiley&Sons, 2006
- [8]. D. K. Cheng, *Field and wave electromagnetics*, Mass., Addison-Wesley, 1989
- [9]. C. C. Chen, Transmission Through a Conducting Screen Perforated Periodically with Apertures, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-18, pp.627-632, 1970
- [10]. C. C. Chen, Transmission of Microwave Through Perforated Flat Plates of Finite Thickness, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-21, pp.1-6, 1973
- [11]. K. S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp.302, 1966

### 第三章 實驗架構

這一章節的內容將會介紹超快雷射(參考 Fig3-2)系統與兆赫波時域光譜分析法的系統架構圖(參考 Fig3-3)。

首先我們利用波長為 532 奈米(nm)，能量為 4.5 瓦特(Watt)的綠光雷射經由透鏡聚焦至鈦藍寶石晶體(Ti : Sapphire)。根據測不準原理(Uncertainty Principle) ，

$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$ ，我們知道若要產生超短脈衝雷射，則增益介質必需包含非常廣的放射頻譜。而鈦藍寶石除了具備非常廣的放射頻譜，對於 532 奈米波長的雷射，又具非常大的吸收係數(參考 Fig3-1)。所以大部份的研究室都以鈦藍寶石作為增益介質。

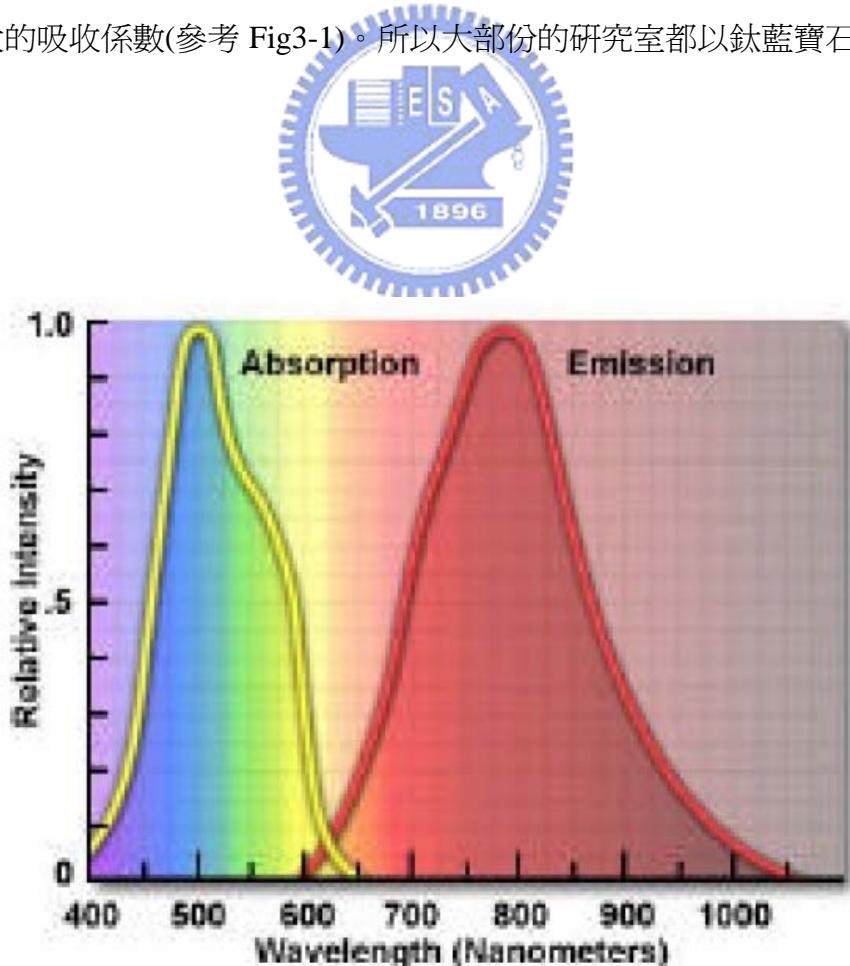


Fig3-1：鈦藍寶石晶體的吸收光譜與放射光譜

當增益介質輻射許多頻率的螢光後，經由克爾鎖模機制(Kerr Lens Mode Lock)便可產生脈衝雷射。在雷射光的路徑中具有介質(鈦藍寶石)，當雷射光通過介質後，各頻率的電磁波在介質中的相速度不同，會導致色散(dispersion)現象，而此現象會使得脈衝被展寬。為了減少色散效應，我們在共振腔內放置稜鏡對(Prime Pair)壓縮脈衝。接著超短脈衝經過輸出耦合鏡(output coupler)後，會再次出現色散現象，於是我們在腔外再度放置一對稜鏡(稱為外腔補償)。最後，產生的超短脈衝光源為中心波長(center wavelength)800 奈米，脈衝寬度(pulse width)100 飛秒(femto-second)，重覆率(repetition rate)82 百萬赫茲(82 MHz)之脈衝雷射。

在兆赫波時域光譜法的系統架構中，超短脈衝雷射先通過二分之一波片(half-wave plate)再經由偏振分光稜鏡(Polarizing Beam Splitter)分成兩道光線，一道為激發光(pump beam)，另一道為探測光(probe beam)。在實驗室中，我們使用低溫砷化鎵(Low-Temperature-Grown GaAs)製成的光導天線(photo-conductive antenna)做為兆赫波的發射源。因為低溫成長砷化鎵製成的天線具有高載子漂移速度(high carrier mobility)和高暗電阻(high dark resistivity)及次皮秒級的載子生命期(subpico-second carrier lifetimes)等優點可以增強兆赫波發射的效率和兆赫波的頻寬。當紅外光脈衝雷射入射至光導天線後會激發出電子-電洞對(electron-hole pairs)，而電子-電洞對經由外加偏壓加速輻射出脈衝寬度為皮秒級的兆赫波。而我們再利用超半球(hyper-hemispherical)矽透鏡(silicon lens)收集兆赫波，並且利用超半球透鏡的幾何結構特性消除二次反射的訊號。在接收端我們也使用光導天線

接收兆赫波。不同於發射端，在接收端我們直接利用兆赫波的電場做為外加偏壓以加速載子，接著經由鎖相放大器(lock-in amplifier)記錄電流訊號。最後，再掃描步進馬達記錄不同時間延遲的電流訊號，我們便可以得到兆赫波在時域的完整波形。將時域的兆赫波訊號經由傅立葉轉換可以得到兆赫波在頻域的訊號強度與相位資訊。

在量測金屬孔洞陣列時，我們將兆赫波通過空氣時的訊號做為參考光源，再將兆赫波通過孔洞陣列後的訊號做為樣品光源(參考 Fig3-4)，最後將兩個不同的時域訊號經傅立葉轉換相除後，便可以得到孔洞陣列在頻域上穿透率的特性。實驗中的孔洞陣列樣品大部份是經由「鑄鋼科技有限公司」委托製作以及「東部微型電機公司」提供。

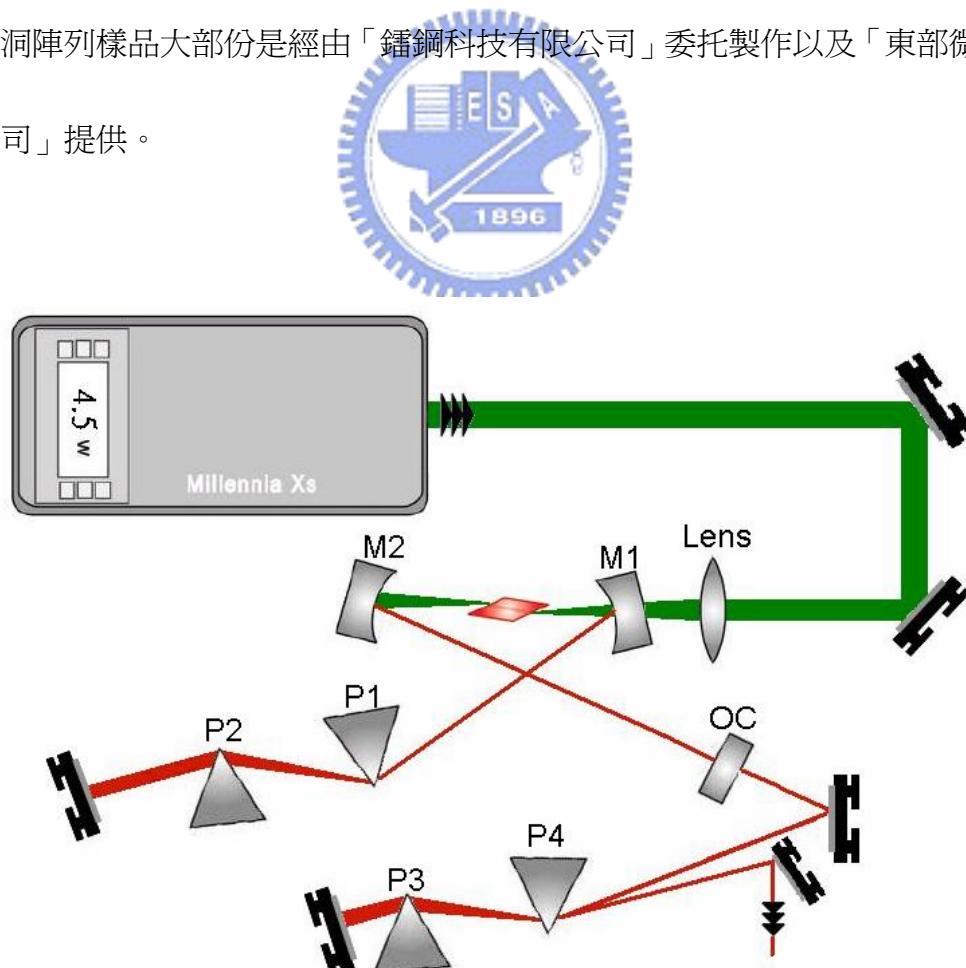


Fig3-2：M1，M2 為高反射凹面鏡；P1，P2，P3，P4 為石英稜鏡；OC 為輸出耦合鏡

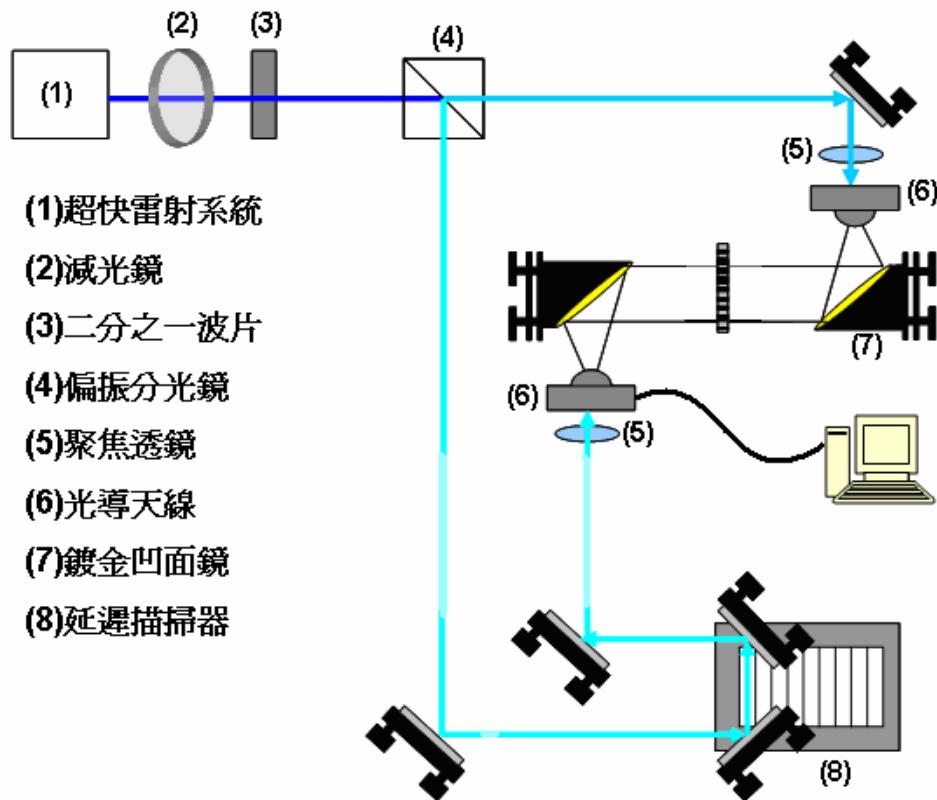


Fig3-3：兆赫波時域光譜技術系統圖

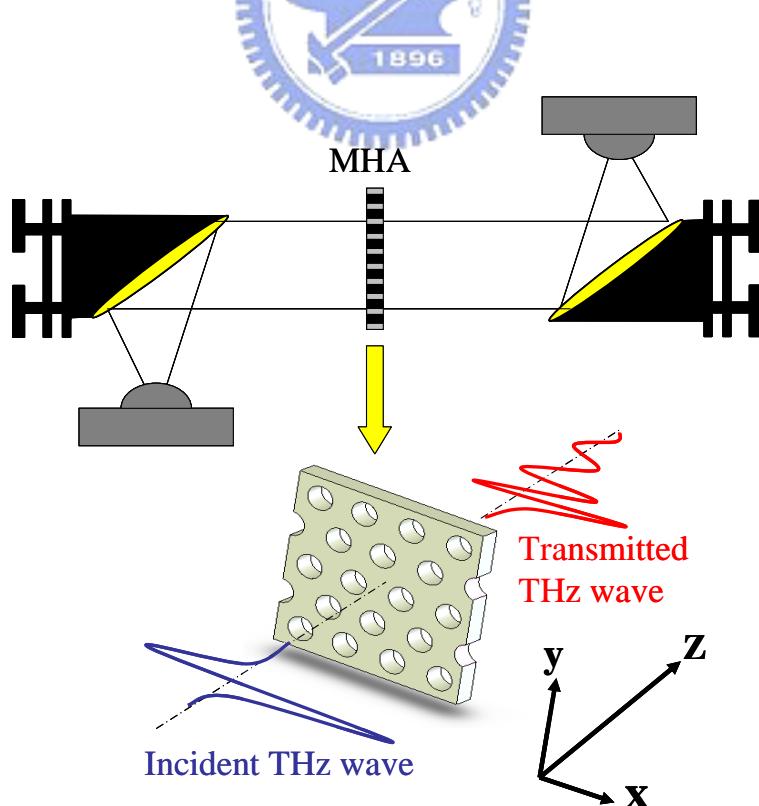


Fig3-4：樣品擺放示意圖

## 第四章 實驗數據與分析

我們會將實驗與模擬數據分成五個部份。前面四個部份，其孔洞陣列的厚度大約與兆赫波之波長(wavelength of THz wave)相近；而最後一個部份，樣品的厚度為奈米尺度，厚度的大小是由金屬的集膚深度(skin depth)與表面電漿子之衰減係數所決定的。

首先在此章節的第一部分數據是一系列六角晶格的孔洞陣列數據。而這六角晶格的孔洞陣列包含了方形、圓形孔洞。而第二部份的數據是由一系列的四角晶格的孔洞陣列數據組成，而這部份的孔洞也是有圓洞、方洞以及矩形孔洞。第三部份的數據則是將孔洞陣列做成三明治結構以及量測單一的矩形孔洞，藉以觀察當孔洞的截止頻率與表面電漿頻率遠離時，孔洞陣列之穿透率特性是源自何處。接下來的部份，我們會獨立出一組數據，藉以觀察波導模態和表面電漿態之耦合影響並且旋轉孔洞陣列的角度，觀察不同入射角對於穿透率的特性有什麼改變。最後一個部份的數據，其最大的差別是樣品的厚度為 150 奈米。

### Part 1：六角晶格(Triangular Lattice)

樣品 a：圓形孔洞，直徑為  $401 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $811.8 \mu\text{m}$ ，厚度為  $401 \mu\text{m}$ 。量測結果顯示穿透頻率峰值為  $0.4043 \text{ THz}$ ，穿透率為  $0.638943$ 。根據(Eq.2-2.38b)，可預測頻率為  $0.427 \text{ THz}$  的電磁波可以耦合表面電漿態；而根據(Eq.2-2.5)，可以

計算圓形孔洞的截止頻率為  $0.438 \text{ THz}$ 。由於孔洞週期所耦合之弗洛凱模態之頻率比截止頻率還低，故即使弗洛凱模態的增強效應也會受到截止頻率的抑制。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

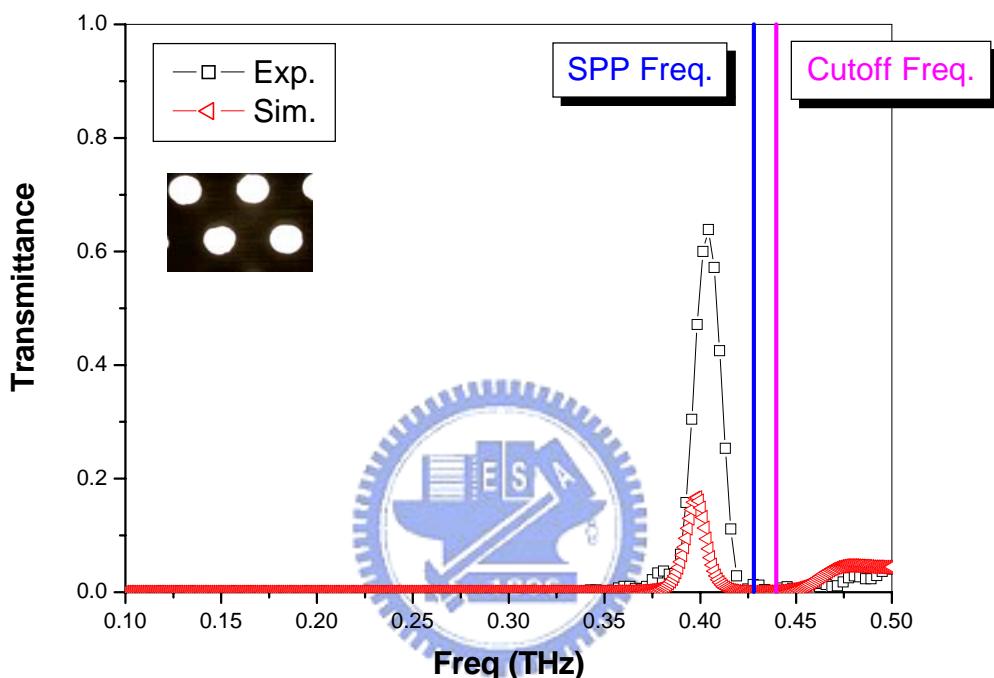


Fig4-1：樣品 a 的孔洞陣列穿透率特性。孔洞直徑為  $401 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $811.8 \mu\text{m}$ ，樣品的厚度為  $401 \mu\text{m}$ 。而 Fig1-1 的插圖是樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。（—□—為實驗數據；—◀—為模擬數據）

**樣品 b：**圓形孔洞，直徑為  $431 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $801 \mu\text{m}$ ，厚度為  $400 \mu\text{m}$ 。經由量測後，穿透峰值在  $0.395 \text{ THz}$ ，穿透率為  $0.7$ 。經計算得表面電漿態之頻率為  $0.432 \text{ THz}$ ；截止頻率為  $0.408 \text{ THz}$ 。由於弗洛凱模態較靠近截止頻率，故其穿透率比樣品 a 大，而兩者的差異性可以比較兩圖的模擬曲線了解。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

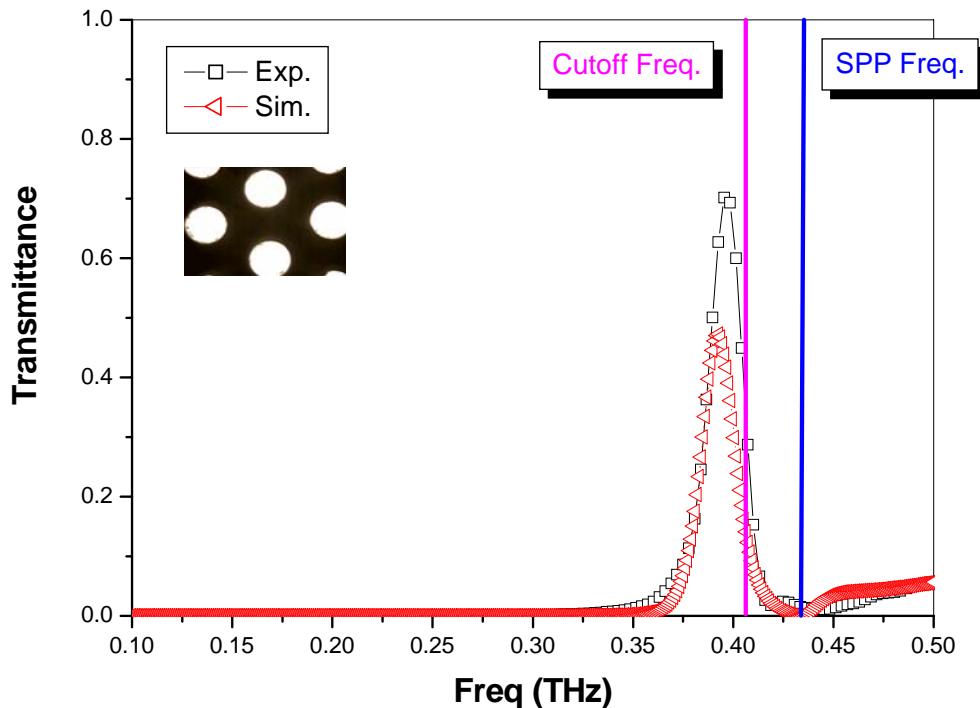


Fig4-2：樣品 b 的孔洞陣列穿透率特性。孔洞的直徑為  $431\text{ }\mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $801\text{ }\mu\text{m}$ ，厚度為  $400\text{ }\mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。（—□—為實驗數據；—△—為模擬數據）

樣品 c：圓形孔洞，直徑為  $570\text{ }\mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $985\text{ }\mu\text{m}$ ，樣品厚度為  $498\text{ }\mu\text{m}$ 。

量測後之穿透峰值頻率為  $0.3149\text{ THz}$ ，而穿透率為  $0.9936$ 。經計算可以得到表面電漿態之頻率為  $0.352\text{ THz}$ ；截止頻率為  $0.308\text{ THz}$ 。比較樣品 a，b 和 c，我們可以發現當弗洛凱態增強的頻率落在截止頻率的右方時，穿透率幾乎接近 1。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

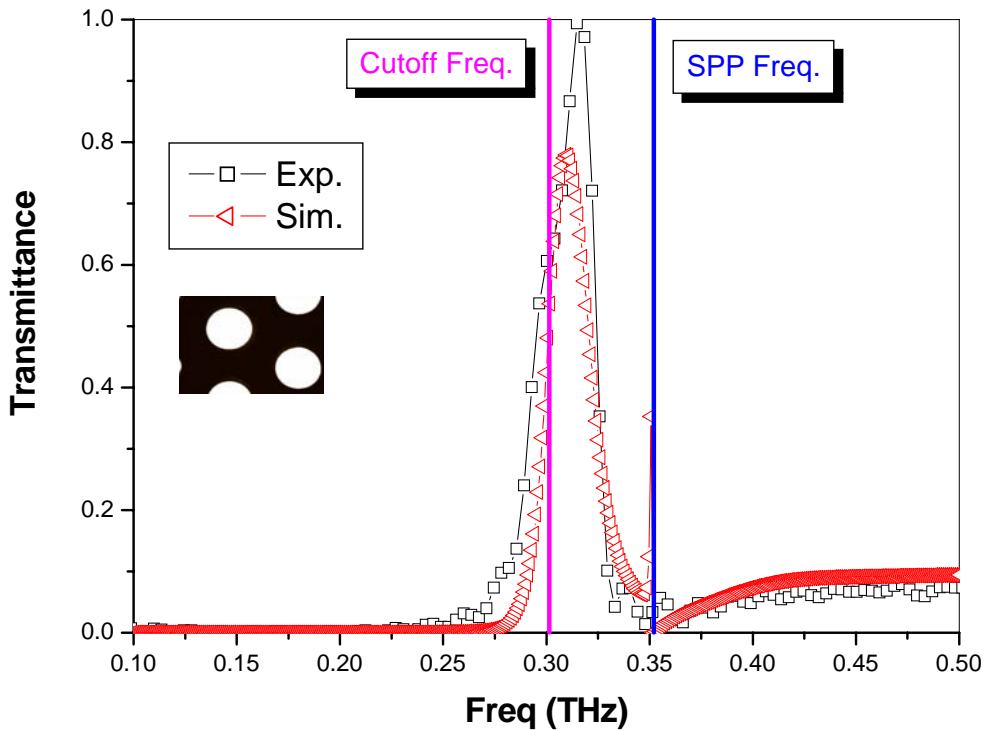


Fig4-3：樣品 c 的孔洞陣列穿透率特性。孔洞的直徑為  $570\text{ }\mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $985\text{ }\mu\text{m}$ ，厚度為  $498\text{ }\mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。（—□—為實驗數據；—△—為模擬數據）



**樣品 d：**方形孔洞，其中邊長為  $520\text{ }\mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1019\text{ }\mu\text{m}$ ，樣品厚度為  $200\text{ }\mu\text{m}$ 。量測結果之穿透峰值頻率為  $0.3002\text{ THz}$ ，穿透率為  $0.7019$ 。經計算得表面電漿頻率為  $0.34\text{ THz}$ ；根據(Eq.2-2.7)可計算得截止頻率為  $0.288\text{ THz}$ 。比較樣品 a、b、c 和 d，可以發現方形孔洞的頻寬較寬，但是相對的穿透率就比較小，但增強因子還是很大。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

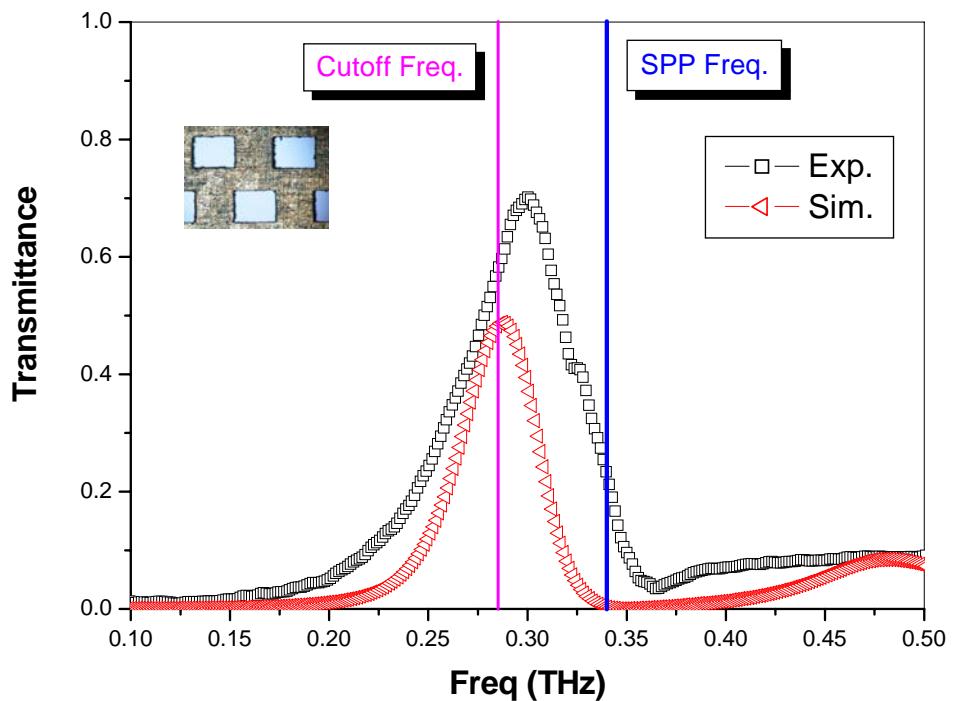


Fig4-4：樣品 d 的孔洞陣列穿透率特性。孔洞的邊長為  $520\text{ }\mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1019\text{ }\mu\text{m}$ ，厚度為  $200\text{ }\mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。（—□—為實驗數據；—△—為模擬數據）



## 比較(Comparison)：

Table1：頻寬(bandwidth)的定義為半高全寬(FWHM)。而增強因子(enhance factor)的定義為峰值穿透率/穿孔率(porosity)。

	樣品 a	樣品 b	樣品 c	樣品 d
*截止頻率 (THz)	0.438	0.408	0.308	0.288
*SPP 頻率 (THz)	0.427	0.432	0.352	0.340
峰值頻率 (THz)	0.4043	0.3955	0.3149	0.3002
穿透率	0.6389	0.7018	0.9936	0.7019
頻寬(THz)	0.0162	0.0186	0.0286	0.0677
增強因子	2.887	2.673	3.272	2.182

\*：代表為計算值，其餘為量測值

除了樣品 a 因為表面電漿頻率位在截止頻率的左方，所以情況特殊。其餘樣品可以很明顯的發現表面電漿頻率與峰值頻率的差值為 0.04 THz。接著比較頻寬，可以觀察到方形孔洞明顯頻寬較大。

## Part 2-1：四方晶格(square lattice)

樣品 e：圓形孔洞，直徑為  $1092 \mu\text{m}$ ，週期為  $1505 \mu\text{m}$ ，厚度為  $518 \mu\text{m}$ 。量測結果顯示穿透率峰值位在  $0.1758 \text{ THz}$ ，穿透率為  $0.9999$ ；頻寬為  $0.0310 \text{ THz}$ ；增強因子(enhance factor)為  $2.41821$ 。經由計算可得截止頻率為  $0.160 \text{ THz}$ ；表面電漿頻率為  $0.200 \text{ THz}$ 。比較六角晶格之孔洞陣列，四方晶格之孔洞陣列在高頻處的穿透率明顯較大。不過從模擬數據中，可以看出在  $0.15\sim0.2 \text{ THz}$  處，具有兩個穿透峰值。根據[1]，這兩個穿透峰值的來源是因為電磁波在金屬的兩面耦合與去耦後的結果，不過在實驗上是沒有觀察到這個現象。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

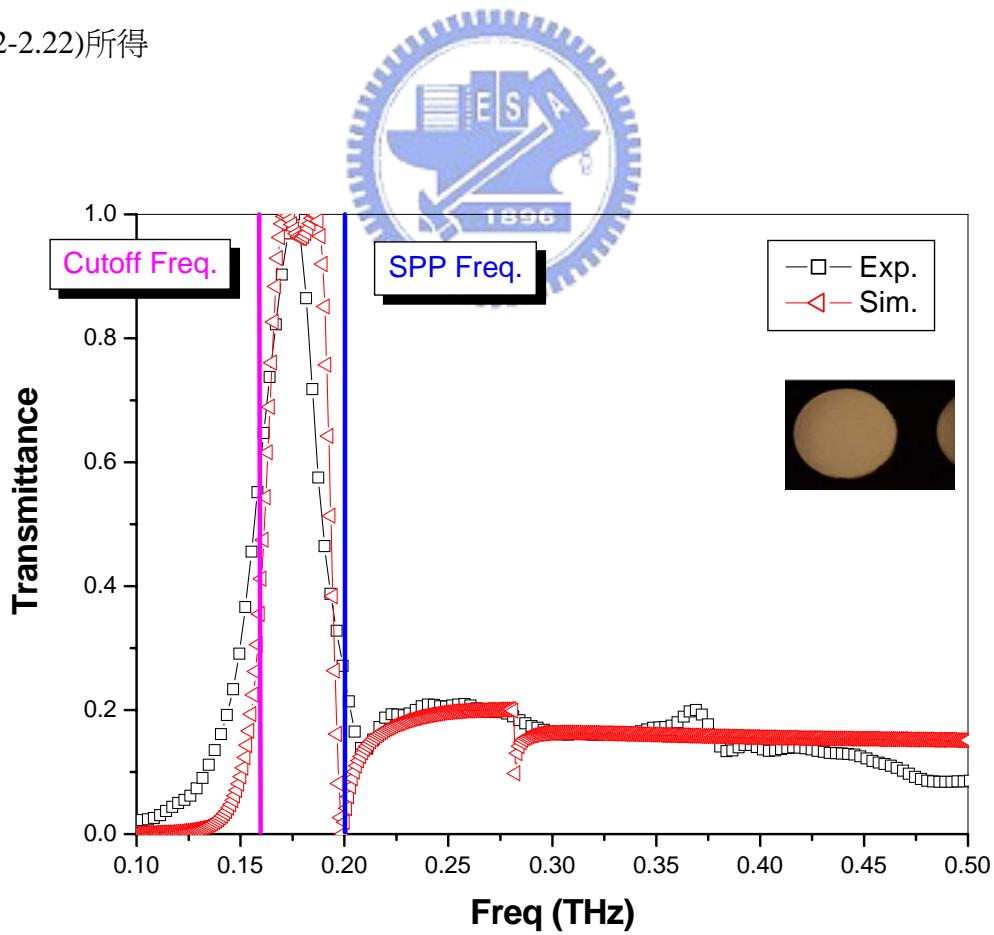


Fig4-5：樣品 e 穿透率特性。孔洞的直徑為  $1092 \mu\text{m}$ ，週期為  $1505 \mu\text{m}$ ，厚度為  $518 \mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。(-□-為實驗數據；-△-為模擬數據)

樣品 f：方形孔洞，孔洞邊長為  $592 \times 510 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1019 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。量測結果得到穿透率峰值位在  $0.2753 \text{ THz}$ ，穿透率為  $0.7763$ ；頻寬為  $0.0295 \text{ THz}$ ；增強因子為  $2.66985$ 。經由計算，可得截止頻率為  $0.300 \text{ THz}$ ；表面電漿頻率為  $0.302 \text{ THz}$ 。從模擬的數據，我們發現有兩個穿透峰值(因為符號的原因，在圖上看不出來)，原因在上一頁有提到。而在方形孔洞的實驗上，我們也觀察到同樣的現象。不過實驗的數據很明顯的看到第二個峰值的穿透率不強，穿透率峰值位在  $0.2943 \text{ THz}$ ，穿透率也只有  $0.2927$ 。若計算其增強因子則為  $1.0067$ 。其中，模擬之數據是利用(Eq2-2.22)所得

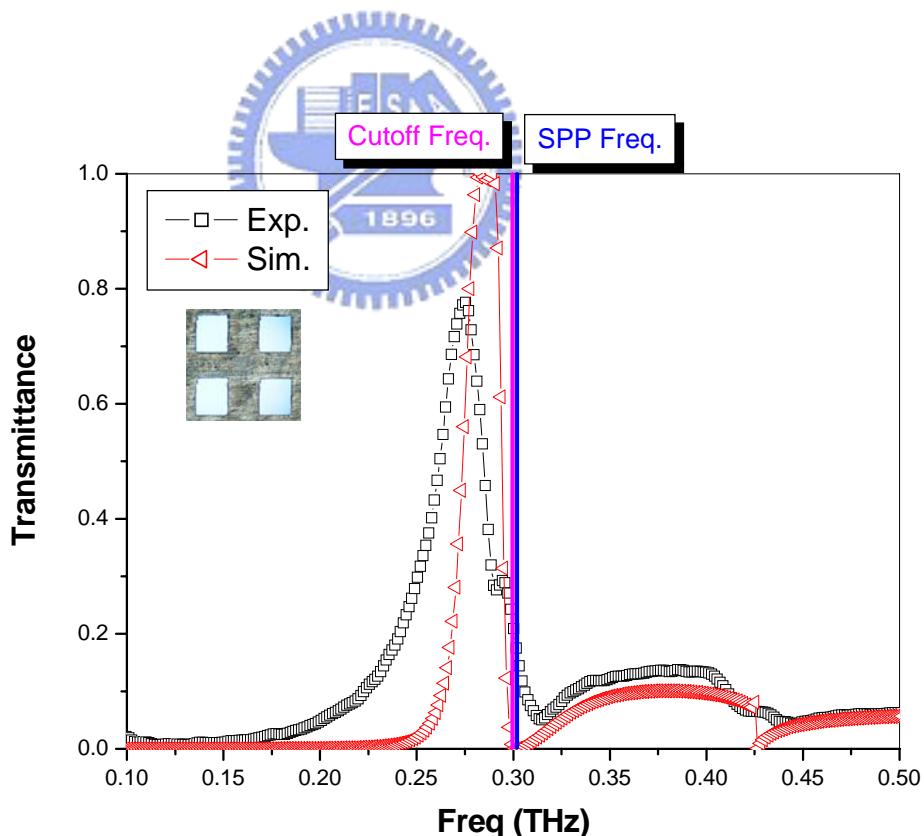


Fig4-6：樣品 f 的孔洞陣列穿透率特性。其中孔洞的邊長為  $592 \times 510 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1019 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片。(-□-為實驗數據；-△-為模擬數據)

## Part 2-2：矩形孔洞(rectangular hole)

樣品 g：矩形孔洞，長寬分別為  $827 \times 186 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1012 \mu\text{m}$ ，樣品厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。經由量測得知穿透率峰值位在  $0.187 \text{ THz}$ ，穿透率為  $0.887$ 。而頻寬為  $0.032 \text{ THz}$ ，增強因子則高達  $5.91$ 。而經由計算，可以得到截止頻率為  $0.181 \text{ THz}$ ，表面電漿頻率為  $0.302 \text{ THz}$ 。

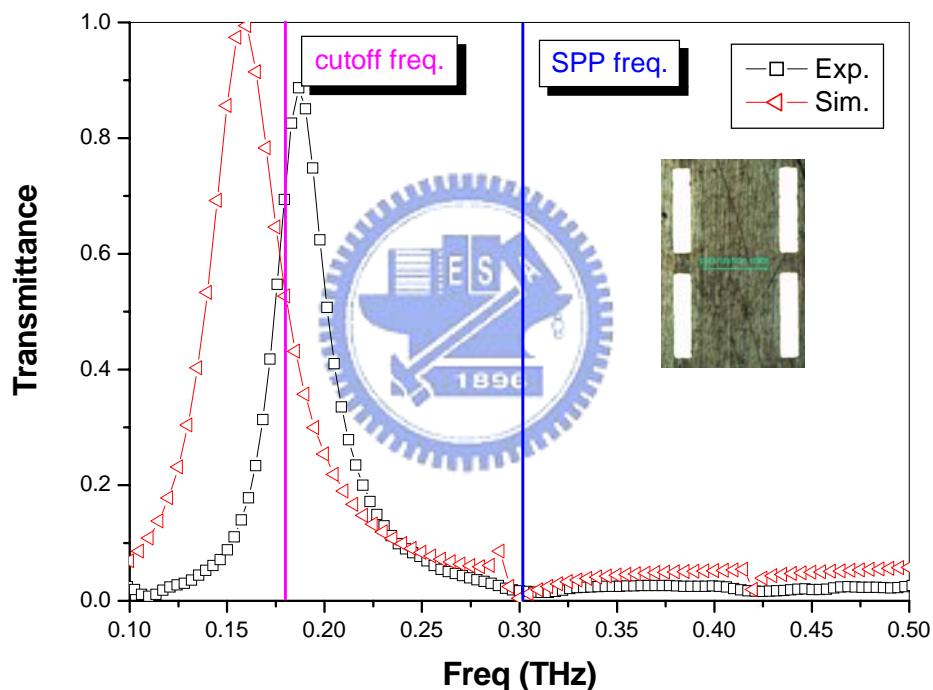


Fig4-7：矩形孔洞陣列穿透率特性。其中孔洞的邊長為  $827 \times 186 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1012 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。其中的小插圖為樣品在顯微鏡下所拍攝的照片，而 THz 的極化方向是平行矩形的短邊。(-□-為實驗數據；-△-為模擬數據)

## Part 3-1：三明治結構(Sandwich Structure)

我們使用樣品 c 的金屬孔洞陣列做三明治結構，根據(Eq.2-2.38b)，當鄰近金屬的介質折射率越大，則表面電漿頻率會往低頻位移。不過在我們的實驗中卻沒有看

到這個現象。更甚者當金屬的兩面都貼上介質時，其穿透峰值反而趨向高頻，這與表面電漿態的趨勢不太相同。而參考[2]，作者發現當金屬表面的鄰近介質越來越厚時，其穿透率會漸漸往低頻偏移。

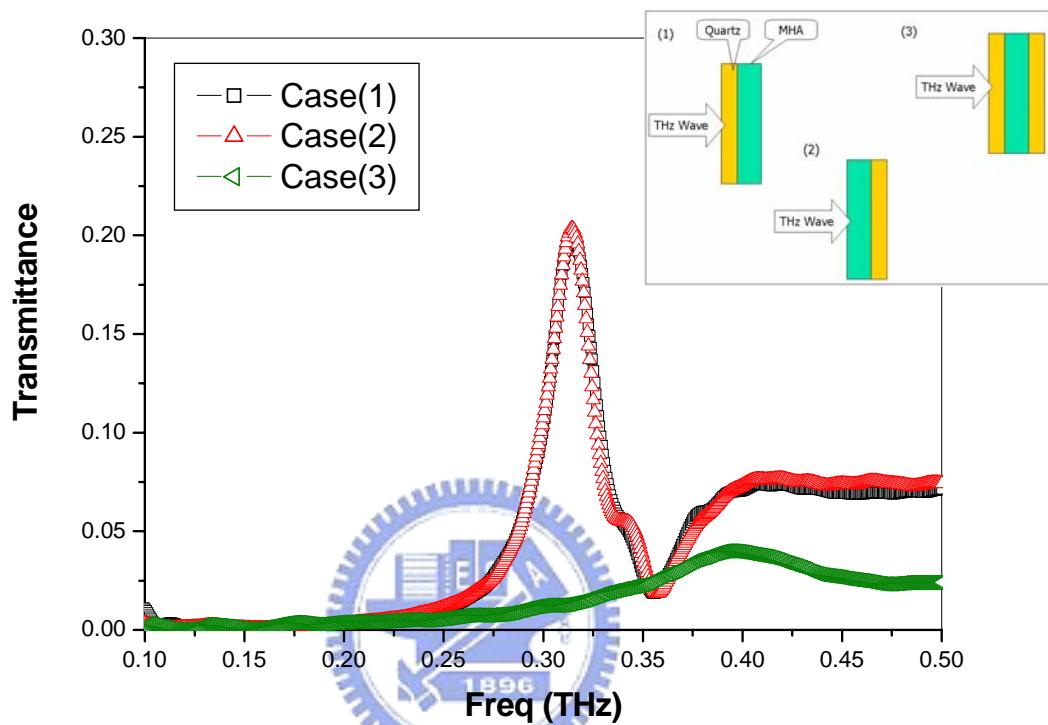


Fig4-8：量測孔洞陣列的界面貼上quartz( $n_{\text{THz}}=1.95$ )的穿透率特性。其中插圖為表示THz入射方向與孔洞陣列和quartz擺放的幾何結構。其中case (1)為THz先入射至quartz，再穿透至孔洞陣列。而case (2)和case (3)以此類推。

### Part 3-2：單一矩形孔洞

在上述的實驗中，我們發現若是孔洞陣列的單一孔洞截止頻率遠離表面電漿頻率時，穿透率的峰值無法利用表面電漿頻率做預測，於是我們希望藉由觀察單一孔洞穿透率的特性，可以明瞭在不同條件下，金屬孔洞陣列穿透特性的來源。現在我們考慮一矩形孔洞，長寬分別為  $800\mu\text{m}$  和  $160\mu\text{m}$ ；金屬的厚度是  $200\mu\text{m}$ ，兆赫波的偏振態是平行短邊。觀察 Fig4-9，我們可以很明顯的觀察到單一矩形孔洞

的穿透率在截止頻率附近具非常大的穿透率。其中模擬圖是透過 FDTD 的方式得到。

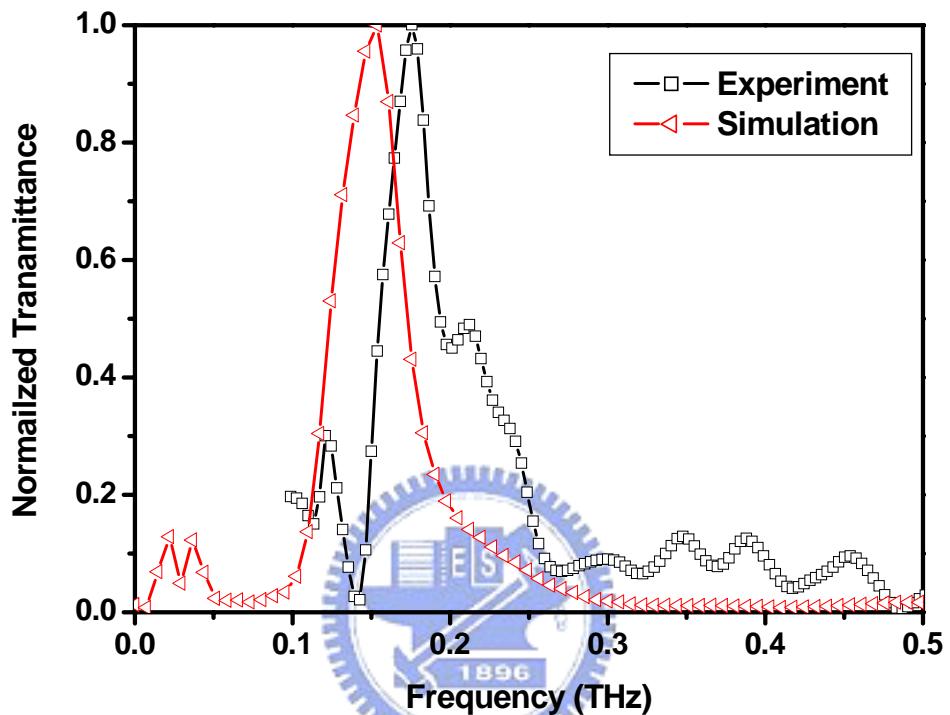


Fig4-9：單一矩形孔洞穿透率示意圖。其中孔洞長寬分別為  $800\mu\text{m}$  和  $160\mu\text{m}$ ，金屬厚度  $200\mu\text{m}$ ，兆赫波偏振態平行短邊(—□—為實驗數據；—△—為模擬數據)

#### Part4：改變孔洞形狀和陣列週期

為了能理解單一孔洞之波導模態與表面電漿態之耦合效應，我們試著改變孔洞形狀觀察波導模態的變化，再藉由改變陣列週期觀察表面電漿態之耦合效果。

其中，我們先量測圓形孔洞對於週期變化後，穿透率之影響。其中圓形孔洞之直徑為  $400\mu\text{m}$ ，而樣品厚度為  $200\mu\text{m}$ 。經由計算，我們可以得到對於單一圓洞其截止頻率為  $0.44\text{ THz}$ 。週期從  $1045\mu\text{m}$  持續變化至  $695\mu\text{m}$ 。其中 Fig4-10 為改變

週期後，其穿透率特性之改變。很明顯的我們看到隨著週期變小，穿透率峰值持續往高頻移動，而且穿透率也越來越高，這樣的結果與[3]對於單一孔洞的穿透率預測是一樣的。

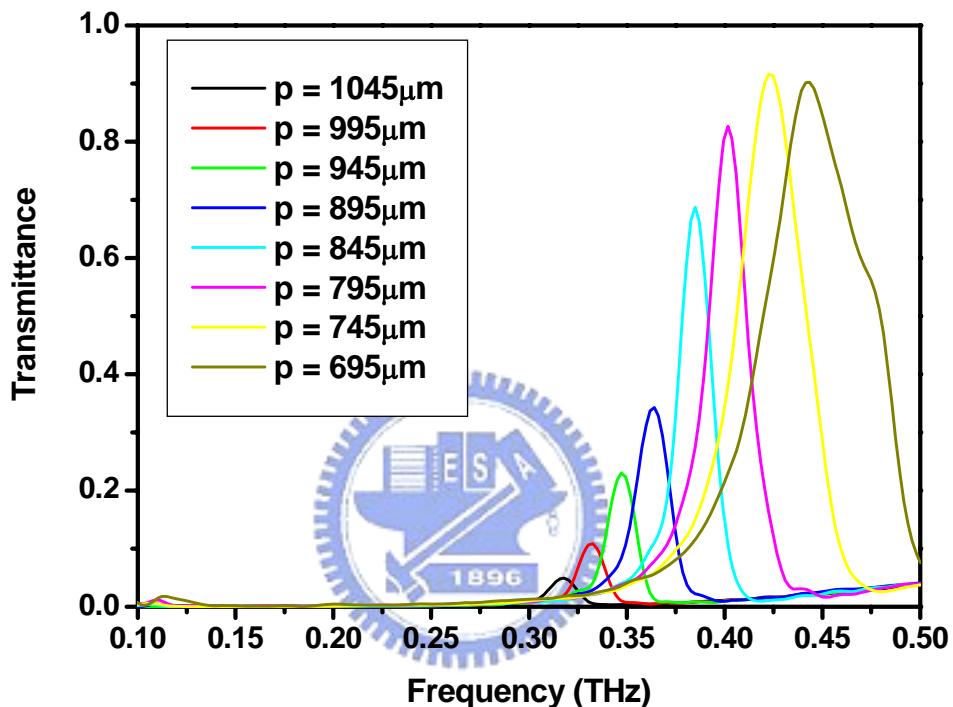


Fig4-10：改變圓形孔洞陣列週期之穿透率特性，其中週期從  $1045\mu\text{m}$  每  $50\mu\text{m}$  遞減至  $695\mu\text{m}$

接著量測方形的孔洞陣列，其中方形孔洞的邊長為  $360\mu\text{m}$ ，截止頻率為  $0.417\text{THz}$ 。隨著週期的改變，穿透率峰值也有明顯的變化，其中 Fig4-11 為方形孔洞經改變週期後，穿透率變化的趨勢。

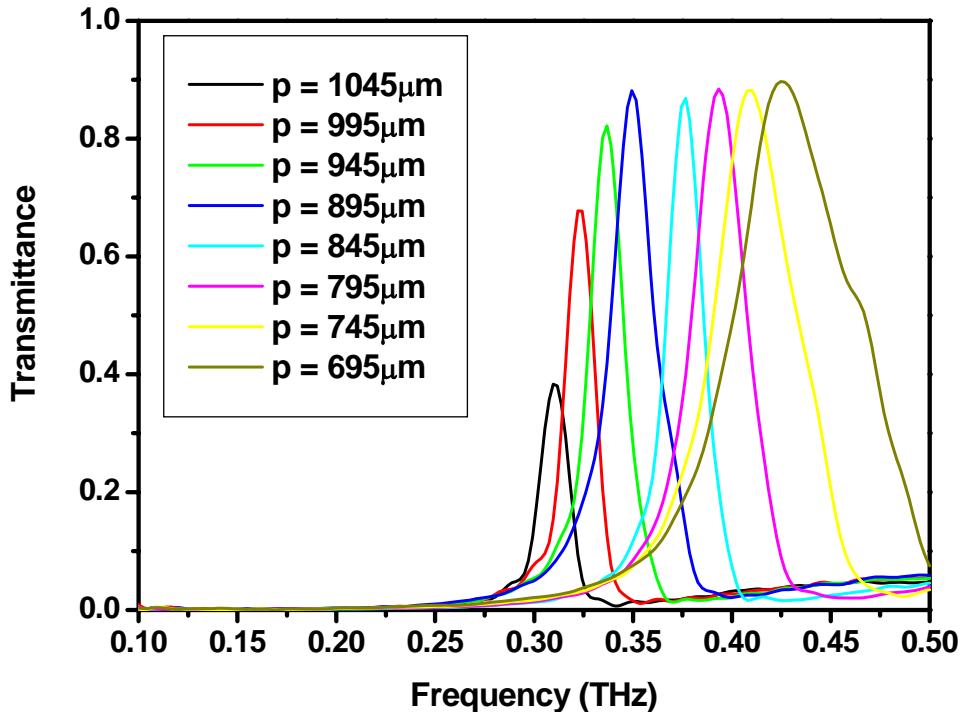


Fig4-11：改變方形孔洞陣列週期之穿透率特性，其中週期從  $1045\mu\text{m}$  每  $50\mu\text{m}$  遞減至  $695\mu\text{m}$

為了和波導共振模態比較，我們量測矩形孔洞陣列之穿透率。其中矩形孔洞的長寬分別為  $360 \times 160\mu\text{m}^2$ ，其中矩形孔洞之截止頻率為  $0.417\text{THz}$ (參考Fig4-12)。藉由改變週期量測其穿透率，我們發現矩形孔洞的穿透率似乎比方形和圓形孔洞還要來得差。但是透過面積比的歸一化後，我們發現矩形孔洞的增強因子是最強的，結果與第二章推導的結果非常吻合。

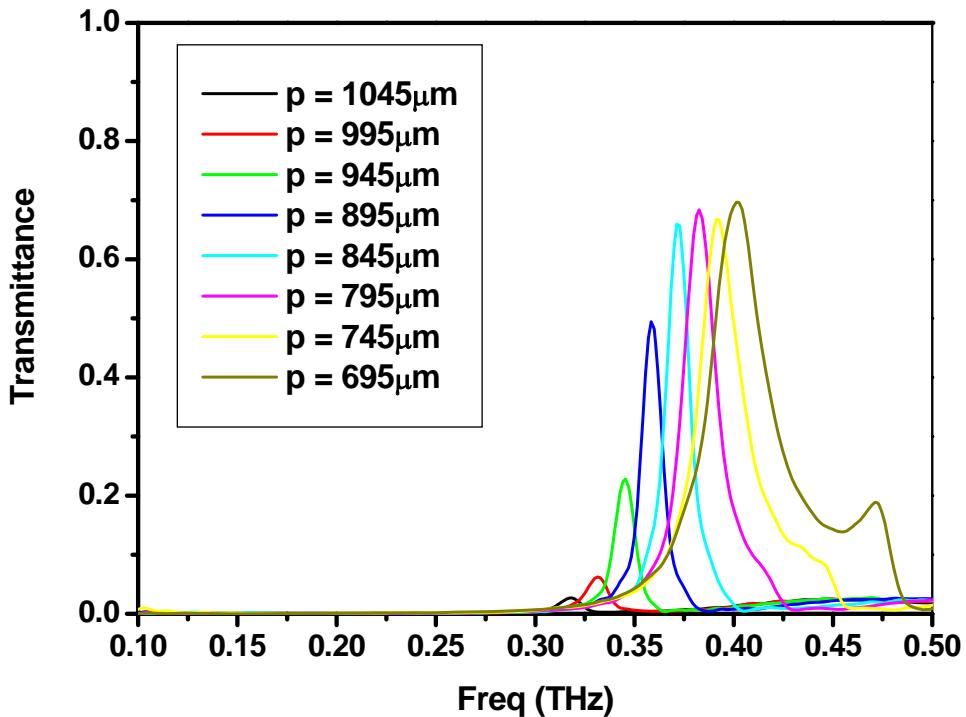


Fig4-12：改變矩形孔洞陣列週期之穿透率特性，其中週期從  $1045\mu\text{m}$  每  $50\mu\text{m}$  遞減至  $695\mu\text{m}$



比較：

為了可以更清楚觀察出波導共振和表面電漿態之關係，我們整理上述的數據，並將其結果做成圖表。

首先，我們將整理對於不同孔洞改變週期後，其穿透率峰值的變化，並且與表面電漿耦合頻率做比較(參考 Fig4-13)。雖然實驗上之穿透率峰值與表面電漿的耦合頻率有一小段差距，但是在趨勢上是非常吻合。其中表面電漿耦合頻率是根據(Eq.2-2.38b)所得。從實驗中所觀察到的現象，我們發現當表面電漿態之耦合頻率等於單一孔洞的截止頻率時，其穿透率會達到最高值。而這現象可以從 Fig4-14

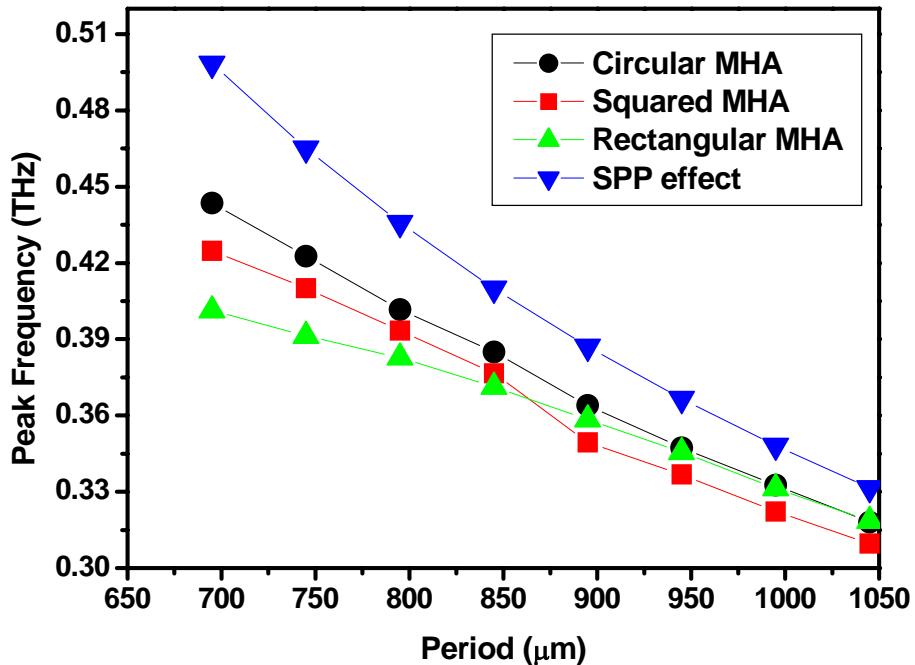


Fig4-13 : 穿透峰值頻率對週期變化之作圖

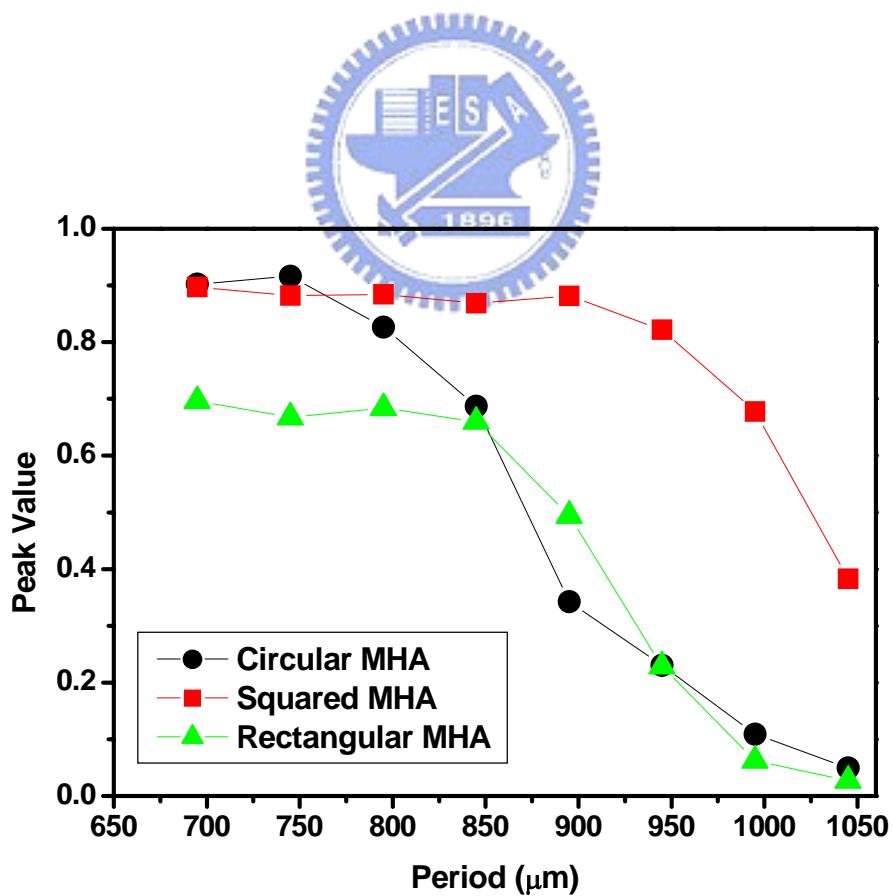


Fig4-14 : 穿透率峰值對週期變化之作圖

中觀察得到。而此現象主要便是因為波導共振在截止頻率有最高的穿透率，再經由表面電漿互相耦合後，得到最大的穿透率。而其中比較有趣的是當表面電漿耦合頻率大於孔洞之截止頻率後，穿透率峰值便會趨近於定值。接著我們再比較增強因子，可以很明顯的看到雖然在穿透率上矩形孔洞陣列是最小的，但是考慮其孔洞之開口率後，矩形孔洞陣列具有最強的增強因子，接著是方形，最差的是圓形孔洞，這與波導共振的結果是一致。

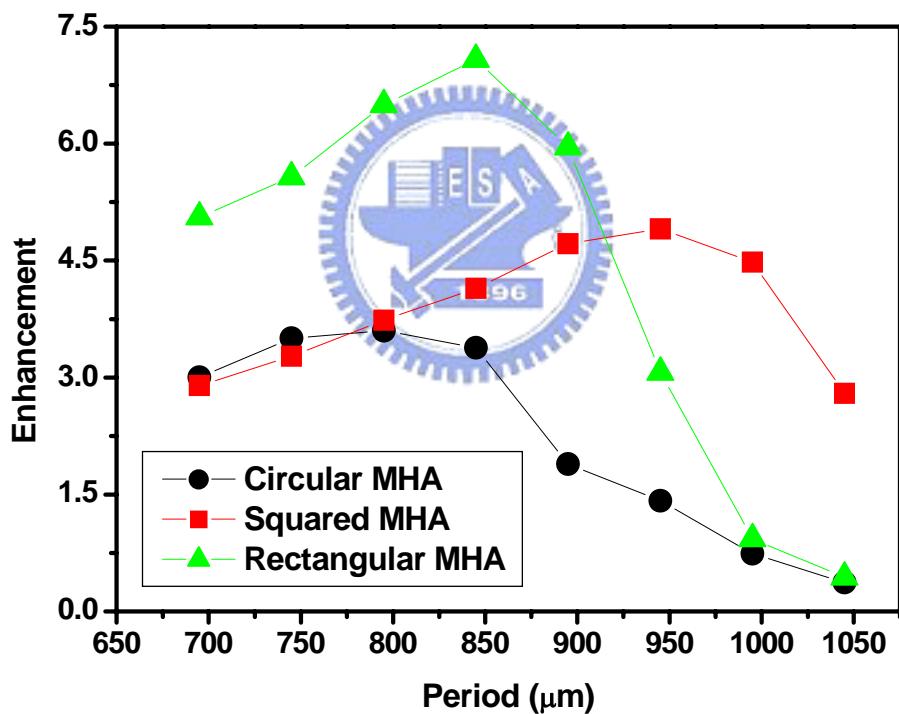
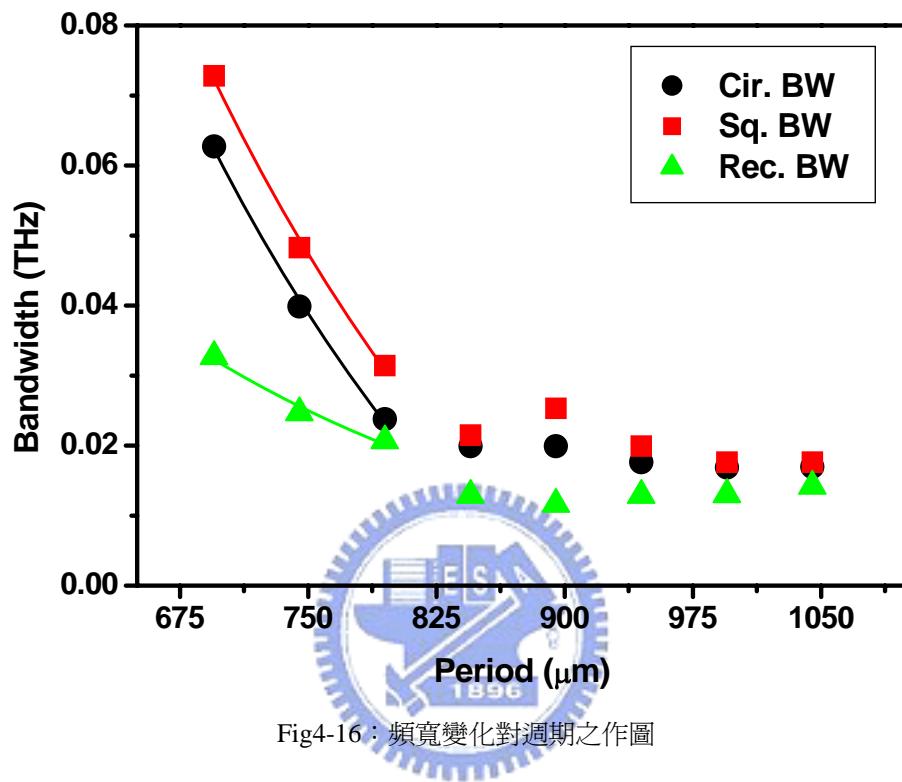


Fig4-15：增強因子對週期變化之作圖

由於金屬孔洞陣列之帶通特性，未來可以將其設計在兆赫波段之帶通濾波器。即然是要設計成濾波器，除了其穿透率峰值是我們有興趣的事物，穿透率的頻寬資訊也是一項重要的訊息。藉由 Fig4-16 中，我們可以觀察到頻寬的變化分成兩個

區域，其中一個區域是表面電漿耦合頻率大於截止頻率時，頻率會隨著週期變小而持續增加；反之，當表面電漿耦合頻率小於截止頻率時，頻寬幾乎是唯持定值。



## Part 3-2.1：旋轉孔洞陣列

現在，我們將旋轉兩個不同長寬比的矩形孔洞，其中 a 矩形孔洞之長寬分別為  $360 \times 160\mu\text{m}^2$ ；b 矩形孔洞之長寬分別為  $800 \times 160\mu\text{m}^2$ 。

參考 Fig4-17，我們旋轉 a 矩形孔洞陣列，而其中旋轉軸是垂直兆赫波的極化方向(垂直旋轉)，從圖中，我們可以看出穿透率峰值持續的往低頻偏移，而穿透峰值也一直下降。當旋轉軸平行兆赫波的極化方向時(平行旋轉)，雖然穿透峰值也會往低頻偏移，但是偏移的量並沒有如此明顯，而且對於其它角度的穿透特性，似乎是延著 0 度角的穿透率波包而變化(參考 Fig4-18)，這是在垂直旋轉中無法看到的



接著旋轉 b 矩形孔洞陣列，我們觀察到非常特殊的現象。不論角度如何旋轉，其穿透峰值的位置幾乎是持續不變(參考 Fig4-19, Fig4-20)，這是在 a 矩形孔洞無法觀察到的。雖然對於 b 矩形孔洞而言，垂直旋轉和平行旋轉還是具有差異性，但是其結果還是令人非常的訝異。

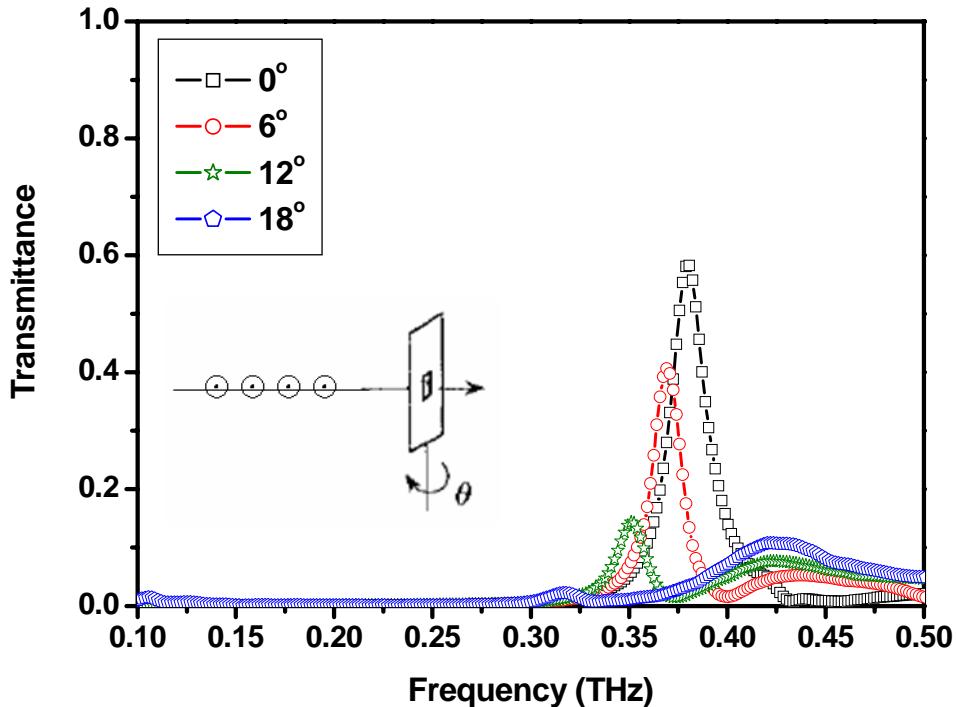


Fig4-17：垂直旋轉 a 矩形孔洞陣列後，穿透率對角度變化之作圖。其中孔洞的邊長為  $360 \times 160 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $795 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$

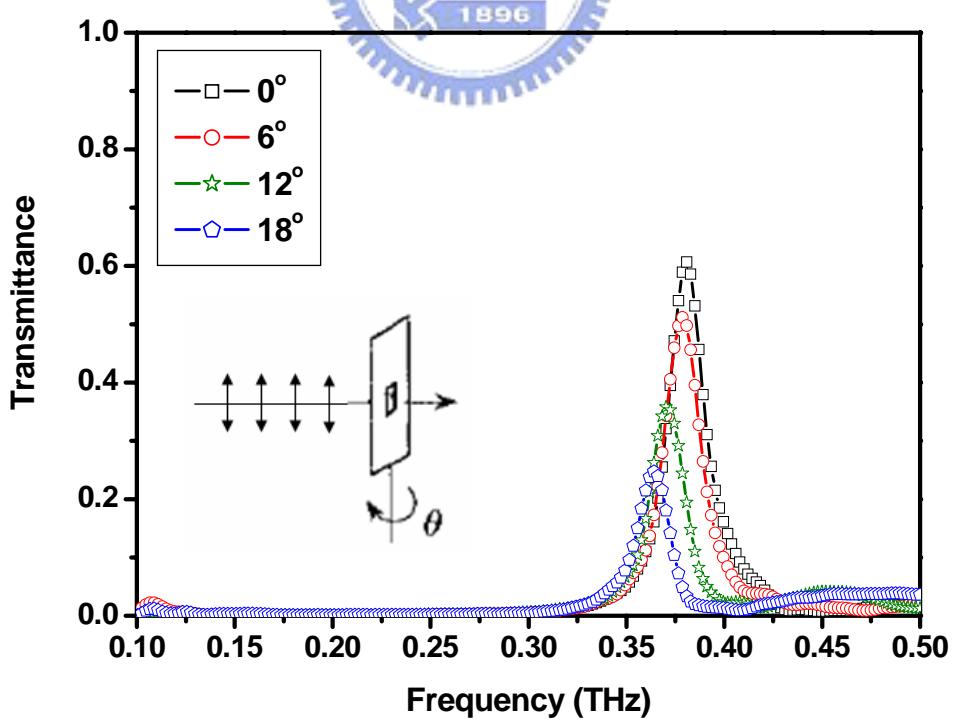


Fig4-18：平行旋轉 a 矩形孔洞陣列後，穿透率對角度變化之作圖。其中孔洞的邊長為  $360 \times 160 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $795 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$

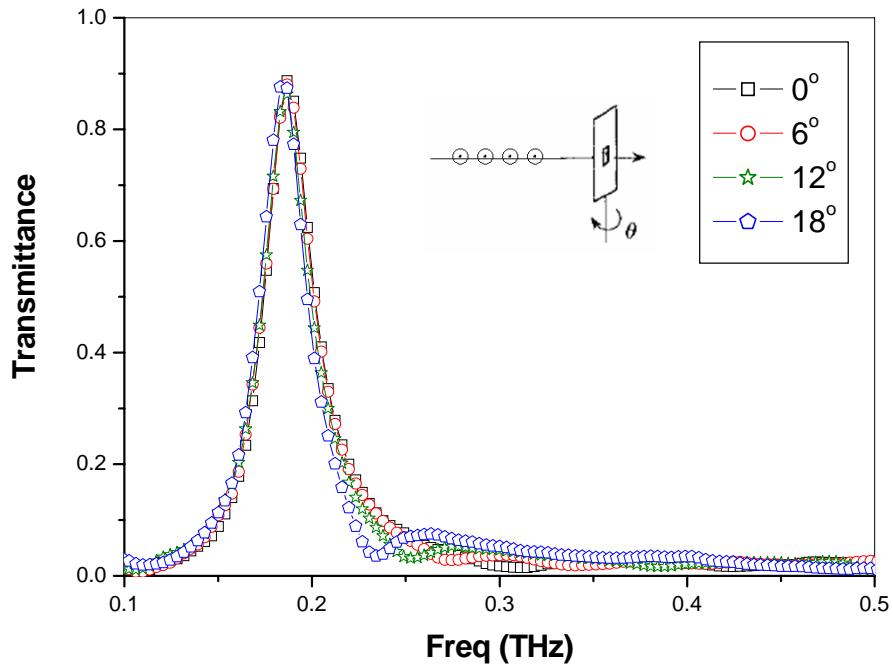


Fig4-19 垂直旋轉 b 矩形孔洞陣列，量測其穿透率特性。其中孔洞的邊長為  $827 \times 186 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1012 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。

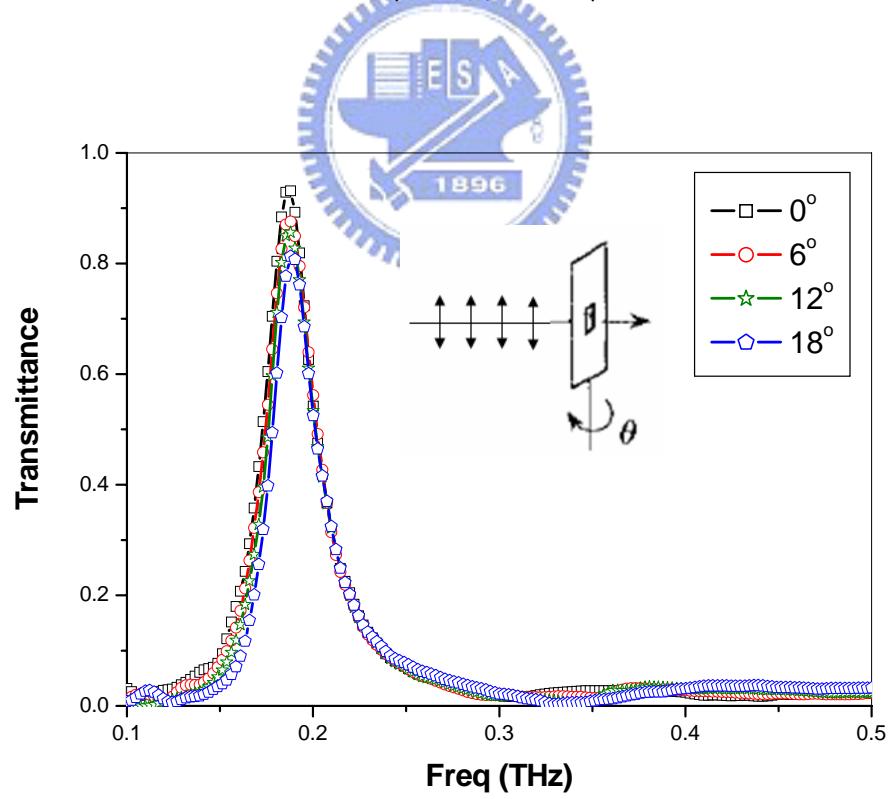


Fig4-20：平行旋轉 b 孔洞陣列，量測其穿透率特性。其中孔洞的邊長為  $827 \times 186 \mu\text{m}$ ，孔洞週期為  $1012 \mu\text{m}$ ，厚度為  $200 \mu\text{m}$ 。插圖顯示的為旋轉軸平行 THz 的極化方向。而 THz 的極化方向平行矩形的短邊。

為了可以明顯的比較出兩者的差異，我們將 a 矩形孔洞與 b 矩形孔洞之陣列穿透率峰值頻率和穿透率做圖比較。根據上述，我們發現對於 a 矩形孔洞陣列，其穿透峰值頻率變化與表面電漿模態的趨勢非常的吻合，雖然在數值上是有一些差距（參考 Fig4-21(a)）。但是，從這邊我們可以看到若是波導共振態和表面電漿態的頻率互相接近時，可以很明顯的觀察到兩個模態的耦合現象。反之，當兩者的頻率互相遠離時，兩者的耦合現象無法觀察到，於是穿透率峰值頻率對於角度的變化並不會有太明顯的差別（參考 Fig4-22(a)）。再比較穿透率的變化（參考 Fig4-21(b)，Fig4-22(b)），我們知道若是表面電漿態和波導共振態沒有互相耦合時，其穿透率峰值的變化並不明顯，而這有趣的現象對於我們未來要應用在兆赫波的濾波器上是一項非常重要的資訊，尤其是矩形的孔洞具有極化選擇性，相信在應用上是有很大的潛力。

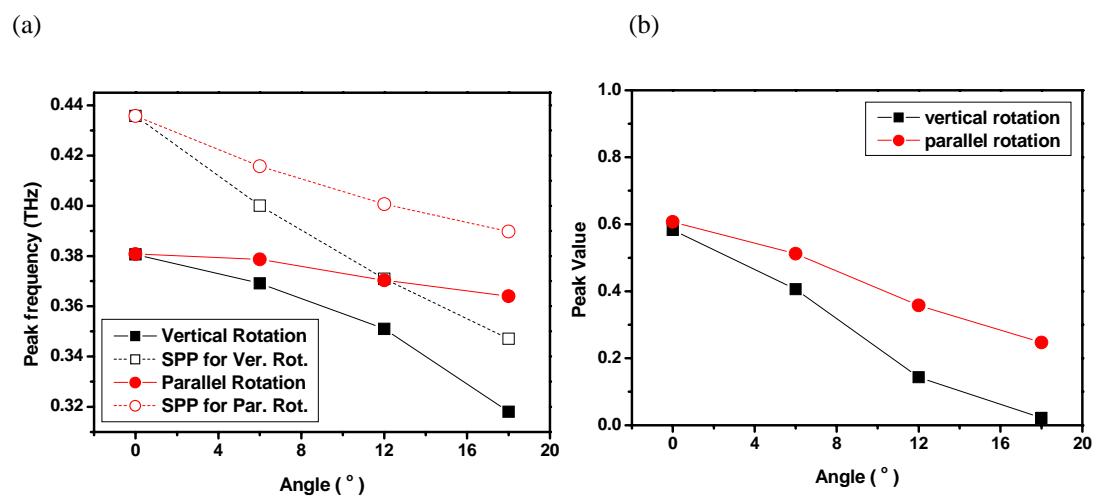


Fig4-21(a)：旋轉 a 樣品後，量測穿透率峰值頻率隨著角度變化的數據；(b)：穿透率峰值對角度變化之作圖

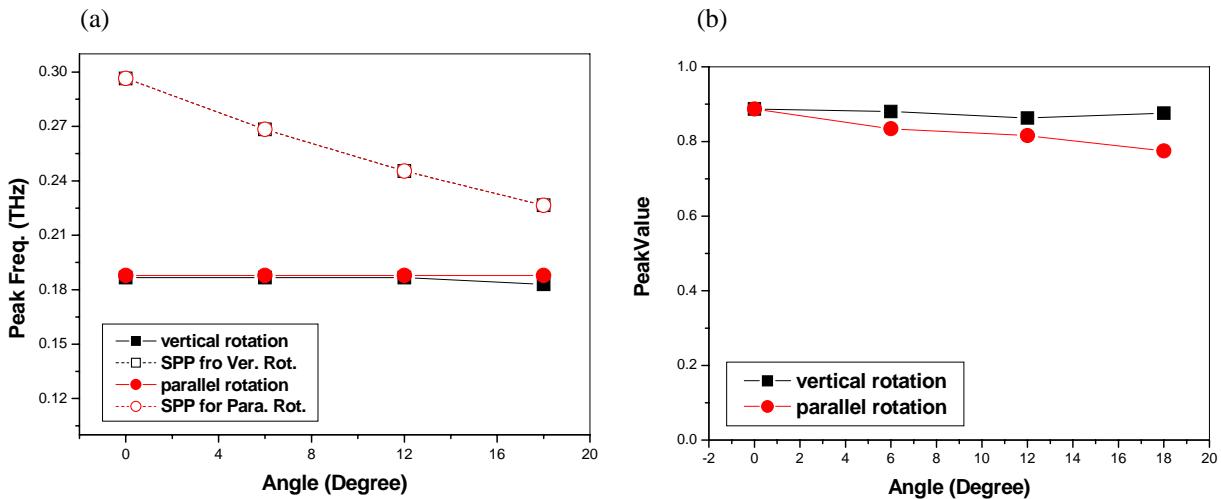


Fig4-22(a)：旋轉 b 樣品後，量測穿透率峰值隨著角度變化的數據；(b)：穿透率峰值對角度變化之作圖

## Part 5：薄樣品(thin film)

參考 Fig4-23，我們改變樣品厚度，得到

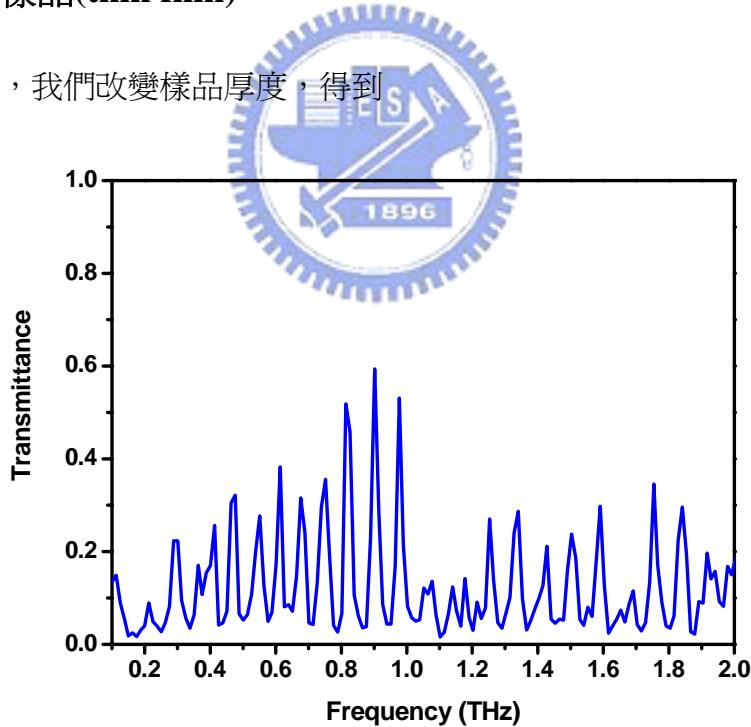


Fig4-23：量測孔洞陣列的穿透率。其中孔洞直徑為  $104 \mu\text{m}$ ，週期為  $292.6 \mu\text{m}$ ，厚度為  $0.15 \mu\text{m}$ 。

綜合 part5 的實驗數據，我們確實看到在厚度很薄的條件下，其穿透率與厚度較厚的樣品有明顯的不同。但是因為基板不夠厚，導致時域上的二次反射訊號沒有辦法扣除。這二次反射的訊號在頻域上的反應就造成 Fabry-Perot effect，故我們

可以在穿透率的特性上看到許多穿透峰值。現在，我們再透過單一圓形孔洞其穿透率的變化觀察薄樣品孔洞陣列的特性。透過 Fig4-24，我們發現穿透率的趨勢大致符合單一孔洞的結果。但是實驗數據在 0.3THz 具有較高的穿透率，我們初步猜測這結果是來自於兆赫波和金屬孔洞陣列耦合的表面電漿態使得有更多能量的兆赫波可以通過孔洞陣列。

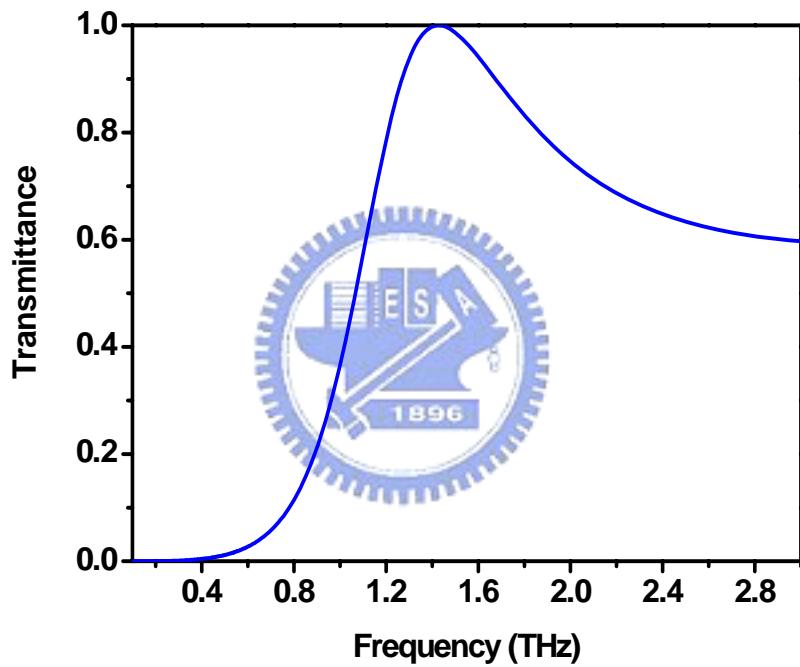
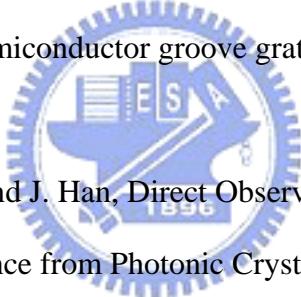


Fig4-24：單一圓形孔洞之穿透率(理論計算)。其中孔洞直徑為  $104\mu\text{m}$ ，厚度為  $150\text{nm}$

- [1]. J. B. Abad, L. M. Moreno, and F. J. Vidal, Resonant Transmission of Light Through Subwavelength Holes in Thick Metal Films, IEEE J. Quantum Electron., vol.12, pp.1221-1227, 2006
- [2]. M. Tanaka, F. Miyamaru, and M. Hangyo, Effect of a thin dielectirc layer on terahertz transmission characteristics for metal hole arrays, Opt. Lett., vol.30, pp.1210-1212, 2005
- [3]. M. V. Exter, Ch. Fattinger, and D. Grischkowsky, Terahertz time-domain spectroscopy of water vapor, Opt. Lett., vol.14, pp.1128-1130, 1989
- [4]. J. G. Rivas, M. Kuttge, and H. Kurz, Low-Frequency active surface plasmon optics on semiconductors, Appl. Phys. Lett., vol.88, pp.82106, 2006
- [5]. M. Kuttge, and H. Kurz, Analysis of the propagation of terahertz surface plasmon polaritons on semiconductor groove gratings, J. Appl. Phys., vol.101, pp.23707, 2007
- [6]. W. Zhang, A. K. Azad, and J. Han, Direct Observation of a Transition of a Surface Plasmon Resonance from Photonic Crystal Effect, Phys. Rev. Lett., vol.98, pp.183901, 2007



## 第五章 結論

經由上述的實驗，我們發現當金屬孔洞陣列的厚度與兆赫波之波長相近時，由於兆赫波段之金屬幾乎是趨近於完美導體，所以對於其穿透率的特性不能只單純的考慮表面電漿所造成的影響，還必需考慮波導共振態的效應。透過改變金屬孔洞形狀和陣列週期的實驗，我們觀察到金屬孔洞陣列的穿透特性有主要的兩個來源，第一個是源自於波導共振態的影響，另一個是週期性結構所耦合出的表面波態。藉由改變孔洞的形狀，我們可以知道波導共振態對於矩形結構具有最好的增強效應。這現象與理論的假設是非常吻合。而對於不同形狀的孔洞，透過改變週期，我們觀察到波導共振態與表面電漿態的互相耦合。當孔洞的截止頻率大於表面電漿耦合頻率時，隨著差距越大，除了穿透峰值會越來越小之外，穿透率的頻寬也大致為定值；反之當孔洞的截止頻率小於表面電漿耦合頻率時，穿透峰值會呈現持平的狀態，而頻寬也隨著週期的遞減而增加。但是當兩個模態的頻率互相遠離至無法耦合時，我們可以從旋轉角度的實驗中觀察到彼此之間就好像是個獨立的模態而對穿透率的特性並不會有耦合的現象。最後，我們觀察厚度為 150 奈米的金屬孔洞陣列時，發現其穿透頻率遠遠的低於孔洞的截止頻率。若是考慮在兆赫波範圍以及波導共振態理論時，這是一件非常有趣的現象。在厚度為 150 奈米的金屬孔洞陣列中，表面電漿態的耦合效率也因為樣品厚度的減少而更容易被我們觀察到。