

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

垂直通道內振動對高溫面熱傳增益之研究

**Enhancement of heat convection by an oscillating heat
surface in a vertical channel**



研究生：黃建平

指導教授：傅武雄 博士

中華民國九十六年六月

垂直通道內振動對高溫面熱傳增益之研究

Enhancement of heat convection by an oscillating heat surface in a
vertical channel

研究生：黃建平

Student : Chien-Ping Huang

指導教授：傅武雄

Advisor : Wu-Shung Fu

國立交通大學
機械工程學系
博士論文



A Dissertation
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Doctor of Philosophy
in
Mechanical Engineering
June 2007
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

垂直通道內振動對高溫面熱傳增益之研究

研究生：黃建平

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

摘 要

本研究利用數值方法分析垂直管道內高溫面加入水平振動的因子後，對高溫面散熱效率的影響。又採用的數值模擬為 Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) 座標描述系統，配合葛拉金有限元素法 (FEM)，處理此種流體與固體介面間相互影響的問題。首先探討在垂直管道內振動高溫面於自然對流領域內提升高溫面熱傳效率的機制，並且針對不同的振幅與雷利數求得加入振動條件後，高溫面散熱效果可以優於穩態非振動高溫面散熱效果的臨界振動頻率；進而探討當垂直管道流進入混合對流與強制對流範圍時，在不同的振幅與葛瑞秀夫數下，亦可發現加入振動條件後，振動高溫面之散熱效果可以優於穩態非振動高溫面散熱效果的臨界振動頻率。

雖然一般的觀念大都認為存在振動的熱表面其熱傳的效果會比沒有振動的情形下要好，但是由研究結果得知，在不同的振幅與雷利數或葛瑞秀夫數搭配時，加入振動後的熱傳現象仍可能比沒有振動時的熱傳效率差，也因此可以定義且找出臨界振動頻率以提供研究振動熱傳者之參考。最後，有關臨界振動頻率的經驗公式在強制對流、混合對流以至於自然對流的形式皆不相同，本文皆已分別推導出來，且在三種的對流形式中都有相當平滑的曲線可以獲得。

Enhancement of heat convection by an oscillating heat surface in a vertical channel

Student : Chien-Ping Huang

Advisor : Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The study investigates the heat transfer enhancement by a oscillation motion of heat surface in a vertical channel flow. In the numerical simulation analysis, a Galerkin finite element method (FEM) with arbitrary Langrangian-Eulerian coordinate (ALE) is adopted to solve the flow and thermal fields for moving boundary problem. Firstly, the mechanism of heat transfer enhancement by oscillation heat surface is discussed in natural convection scene. For different oscillation amplitude and Rayleigh number, the frequency that the heat transfer rate of oscillation heat surface is higher than non-oscillation condition is found and called critical oscillation frequency. The limitation enhancement of similar physical model is still researched by this study in mixed and forced convection scenes for different amplitude and Grashof number.

Generally, that a heat surface subject to a oscillation motion is advantageous to convective heat transfer is a well-known tuition. However, based upon the results indicated above the heat transfer rates with certain combinations of the oscillation amplitude and Rayleigh number or Grashof number are possibly smaller than that of the stationary condition. Then the critical oscillation frequency could be regarded as a criterion of whether the heat transfer rate of the heat surface subject to a oscillation motion being larger than that of the stationary state or not . Finally, the so called critical oscillation frequency can be expressed as a function of oscillation amplitude and Grashof number in all the natural, mixed, and forced convection scenes.

誌謝

衷心的感謝指導教授傅武雄博士多年來在學業、工作與論文上的悉心指導，以及在為人處事方面的諄諄教誨，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也要感謝機械系諸師長在課業上的教導，使本研究得以順利完成。

更要感謝父母含辛茹苦的養育之恩，內人張憶如與岳父母的鼓勵與支持，還有眾多長官、同事與朋友的關懷，今日方能順利完成學業。最後，謹將此喜悅與所有關心我的人共同分享。



目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號說明	x
第一章 緒論	1
第二章 ALE 法之運動學理論與數學模式	8
2.1 網格描述與座標系統	8
2.2 座標定義域	8
2.3 速度定義	9
2.4 座標轉換	10
2.5 ALE 統御方程式	12
2.5.1 強制對流於濃度擴散之移動邊界問題	12
2.5.2 強制對流於熱傳增益之移動邊界問題	13
2.5.3 自然與混合對流於熱傳增益之移動邊界問題	13
2.5.4 加入多孔性介質於熱傳增益之移動邊界問題	14
2.6 格點速度	15
第三章 自然對流垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之研究	22
3.1 前言	22
3.2 物理模式	23
3.3 統御方程式與邊界條件	23
3.4 數值方法	25
3.5 結果與討論	25
3.5.1 格點與時間步進測試	26
3.5.2 振動高溫面對流場與溫度場之影響	26

3.5.3 振動頻率及雷利數對熱傳之影響	28
3.5.4 振動幅度對熱傳之影響	29
3.5.5 臨界振動頻率與經驗公式	29
3.6 結論	30
第四章 混合與強制對流垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之研究	54
4-1 前言	54
4-2 物理模式	55
4.3 統御方程式與邊界條件	55
4.4 數值方法	57
4.5 結果與討論	57
4.5.1 格點與時間步進測試	57
4.5.2 振動高溫面對流場與溫度場之影響	58
4.5.3 振動頻率對熱傳之影響	59
4.5.4 葛瑞秀夫數對熱傳之影響	60
4.5.5 臨界振動頻率	61
4.5.6 經驗公式	62
4.5.7 熱傳增益原因之探討	63
4.5.8 實際應用範圍	63
4.6 結論	64
第五章 結論與建議	95
5.1 總結	95
5.2 建議	95
參考文獻	97
附錄一. 自然對流模式之有限元素法離散化推導程序	102
附錄二. 混合對流模式之有限元素法離散化推導程序	108
作者簡介	112

表目錄

表 1-1 主要冷卻方法比較表 [1].....	5
表 1-2 各種熱傳增益技術文獻數目統計表 [8]	6
表 3-1 設計參數組合表.....	31
表 3-2 穩態非振動高溫面平均紐塞數與雷利數之關係表.....	32
表 4-1 設計參數組合表.....	65
表 4-2 穩態非振動高溫面平均紐塞數與葛瑞秀夫數之關係表.....	66
表 4-3 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.1$)	67
表 4-4 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.2$)	68
表 4-5 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.4$)	69



圖目錄

圖 1-1 各種熱傳模式與冷卻流體之熱傳量與可達成溫度差關係圖 [5].....	7
圖 2-1 ALE 座標系統關係圖	17
圖 2-2 網格變化圖	18
圖 2-3 網格變化研究之物理模式圖[30].....	19
圖 2-4 兩組網格示意圖[30].....	20
圖 2-5 兩組網格速度之等相對誤差線與局部紐塞數分佈圖[30]	21
圖 3-1 物理模式圖	33
圖 3-2 計算流程圖	34
圖 3-3 網格測試($Ra = 10^3$)	35
圖 3-4 時間步進測試($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$).....	36
圖 3-5 本研究與 McAdams [45]、Churchill 和 Chu[46]研究結果比較圖	37
圖 3-6 第 11 振動週期之流線與等溫線變化($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$).....	38
圖 3-7 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.1$)	41
圖 3-8 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.1$).....	42
圖 3-9 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^4, L_c = 0.1$).....	43
圖 3-10 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^5, L_c = 0.1$).....	44
圖 3-11 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.2$)	45
圖 3-12 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.2$).....	46
圖 3-13 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^4, L_c = 0.2$).....	47
圖 3-14 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^5, L_c = 0.2$).....	48
圖 3-15 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.4$)	49
圖 3-16 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^3, L_c = 0.4$).....	50
圖 3-17 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^4, L_c = 0.4$).....	51
圖 3-18 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Ra = 10^5, L_c = 0.4$).....	52

圖 3-19 臨界振動頻率 F_{cc} 隨雷利數 Ra 變化關係圖	53
圖 4-1 物理模式圖	70
圖 4-2 網格測試($Gr = 10^4, Re = 10^2$)	71
圖 4-3 時間步進測試($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1, F_c = 2$)	72
圖 4-4 垂直管道流中強制、混合與自然對流在層流與紊流場的分布情形[56]	73
圖 4-5 第 16 振動週期之流線與等溫線變化($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1, F_c = 10$)	74
圖 4-6 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^0, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	75
圖 4-7 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^0, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	76
圖 4-8 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^1, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	77
圖 4-9 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^1, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	78
圖 4-10 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^2, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	79
圖 4-11 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^2, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	80
圖 4-12 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^3, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	81
圖 4-13 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^3, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	82
圖 4-14 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	83
圖 4-15 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	84
圖 4-16 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	85
圖 4-17 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1$)	86
圖 4-18 高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 變化圖($Re = 10^2$)	87
圖 4-19 高溫面振幅 $L_c = 0.2$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 變化圖($Re = 10^2$)	88
圖 4-20 高溫面振幅 $L_c = 0.4$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 變化圖($Re = 10^2$)	89
圖 4-21 臨界振動頻率 F_{cc} 隨 Gr 變化關係圖($Re = 10^2$)	90
圖 4-22 各種對流現象下臨界振動頻率 F_{cc} 與 Gr 變化之關係圖	91
圖 4-23 $F_c = 1$ 時，第 25 個振動週期後之等溫線圖($Gr = 10^4, L_c = 0.2$)	92

圖 4-24 $F_c = 20$ 時，第 25 個振動週期後之等溫線圖($Gr = 10^4, L_c = 0.2$)93

圖 4-25 實際常用振動高溫元件於臨界振動頻率之對應範圍94



符號說明

c	物質濃度	[kg m ⁻³]
\hat{c}	對流速度	[m s ⁻¹]
C	無因次物質濃度	
D_{ab}	濃度擴散係數	[m ² s ⁻¹]
f	任意函數	
f_c	高溫面振動頻率	[s ⁻¹]
F_c	無因次高溫面振動頻率	
$F_{c,1}$	第一無因次高溫面振動頻率 ($F_{c,1} < F_{cc}$)	
$F_{c,2}$	第二無因次高溫面振動頻率 ($F_{c,2} > F_{cc}$)	
F_{cc}	無因次高溫面臨界振動頻率	
Gr	葛瑞秀夫數 (Grashof number)	
g	重力加速度	[m s ⁻²]
k	熱傳導係數	[W m ⁻² K ⁻¹]
ℓ_0	垂直管道長度	[m]
ℓ_1	高溫面上緣至垂直管道頂部長度	[m]
ℓ_2	高溫面長度	[m]
ℓ_3	高溫面下緣至垂直管道底部長度	[m]
ℓ_c	高溫面振幅	[m]
L_2	無因次高溫面長度	
L_3	無因次高溫面下緣至垂直管道底部長度	
L_c	無因次高溫面振幅	
N_p	振動一週期的時間步進次數	
Nu	平均紐塞數 (Nusselt number)	
\overline{Nu}	時平均紐塞數	
\overline{Nu}_i	第 i 個週期之時平均紐塞數	



\overline{Nu}_{i+1}	第 $i+1$ 個週期之時平均紐塞數	
Nu_{st}	穩態平均紐塞數	
\overline{Nu}_{st}	穩定時平均紐塞數	
$\overline{Nu}_{st,1}$	高溫面振動頻率為 $F_{c,1}$ 時之穩定時平均紐塞數	
$\overline{Nu}_{st,2}$	高溫面振動頻率為 $F_{c,2}$ 時之穩定時平均紐塞數	
Nu_Y	局部紐塞數	
p	壓力	[N m ⁻²]
p_∞	參考壓力	[N m ⁻²]
P	無因次壓力	
Pr	普朗特數 (Prandtl number, $Pr = \nu/\alpha$)	
Ra	雷利數 (Rayleigh number)	
Re	雷諾數 (Reynolds number)	
Sc	修密特數 (Schmidt number)	
t	時間	[s]
T	溫度	[K]
T_c	進口溫度	[K]
T_h	高溫面溫度	[K]
u, v	x 和 y 方向速度	[m s ⁻¹]
u_c	高溫面振動速度	[m s ⁻¹]
u_m	高溫面最大振動速度	[m s ⁻¹]
\hat{u}	格點速度	[m s ⁻¹]
U, V	x 和 y 方向無因次速度	
U_c	無因次高溫面振動速度	
U_m	無因次高溫面最大振動速度	
\hat{U}	無因次格點速度	
v_0	進口速度	[m s ⁻¹]
w	垂直管道寬度	[m]
W	無因次垂直管道寬度	



x, y	卡式座標	[m]
x_i	參考定義域中之某點座標	[m]
y_i	空間定義域中之某點座標	[m]
z_i	物質定義域中之某點座標	[m]
X, Y	無因次卡式座標	

希臘符號

α	熱擴散係數	[m ² s ⁻¹]
β	體積膨脹係數	[K ⁻¹]
θ	無因次溫度	
λ	處罰函數	
ν	動黏滯係數	[m ² s ⁻¹]
ρ	密度	[kg m ⁻³]
τ	無因次時間	
τ_p	無因次週期時間	
Φ	計算變數	
Φ_i	物質定義域與空間定義域之座標轉換函數	
$\hat{\Phi}_i$	參考定義域與空間定義域之座標轉換函數	
Ψ_i	物質定義域與參考定義域之座標轉換函數	
Ω_x	參考定義域	
Ω_y	空間定義域	
Ω_z	物質定義域	



其他

	絕對值
--	-----

第一章 緒論

高溫壁面或電子元件表面的散熱問題在工業界或電腦資訊設備研發中非常常見，如何有效增加高溫壁面與電子元件的熱傳效益，一直是業界與學術界致力探索的主題。冷卻高溫壁面的模式主要有空氣自然對流(Natural air convection)、空氣強制對流(Forced air convection)、空氣強制對流加水冷式熱交換器(Forced air convection plus water-cooled heat exchanger)以及包括蒸發冷凝的液體冷卻(Liquid-cooled)與熱管(Heat pipe)等方法[1]。上述各種模式的特性比較如表 1-1[1]所示。

除了上述方法之外，近年來也有許多新的散熱觀念不斷被提出，Iida 等[2]在液體中加入鋁金屬微粒，當液體發生沸騰現象時，鋁金屬微粒也被液化，可將熱傳效率提高十倍。Fusegi [3]利用數值分析方法來模擬存在肋狀突起管道中之振動對向流，當提高振動對黏性的相對強度時，可顯著的提高熱傳效率。Sitter 等[4]則利用實驗的方法來探討高強度音場對重力場與微重力場下池沸騰的影響，發現音場有助於提高熱傳效率。儘管如此，空氣對流具有結構簡單、冷卻劑（空氣）取得容易、成本較低等特性，因而被廣泛的應用在各種電子元件的散熱中。然而，近年來隨著半導體製程進入奈米等級的尺寸以及電腦高速運算的要求，不同功能的電路經由整合後直接製作在同一晶片上，也因此單一晶片內的電子元件數目逐漸增加，電子構裝也有顯著的進步並朝向輕薄短小的構裝趨勢邁進，這也造成熱量集中造成現今電子元件的發熱量已經達到每平方公分數十瓦的等級，相較於圖 1-1 [5]之各種冷卻高溫壁面方法對壁面熱傳量與溫度差示意圖，此等級的熱傳量已經達到空氣強制對流的極限。

Bergles [6,7]詳細地討論與整理各種增加熱傳效率的方法，並且將常見的增加熱傳效率方法略分為兩大類：一為不須另外作功的被動式(passive)方法，比如在壁面加一層塗料、將壁面作表面粗糙處理、增加熱傳表面積、加裝混合流體或使流體產生旋轉流動的機構、與在流體中加入添加物等；另一類為須外加能量的主動式(active)方法，包括有以機構增加流體的擾動、使壁面振動或振動流場、增加電磁場、噴入流體、移除覆蓋熱傳面的冷凝水膜、或加裝噴嘴直接對高溫壁面噴出流體等。此外，Bergles 與 Webb [8]進一步將過去有關提高熱傳效率的文獻，依據上述分類整理製表，如表 1-2 所示。

比較上述各種增加熱傳量的方法，不論利用主動式或被動式的方法來增加熱傳效率都會面臨到極限的問題。主要原因在於流場熱傳面上形成的速度與溫度邊界層妨礙熱的逸散。壁面上的邊界層有速度邊界層與溫度邊界層。所謂速度邊界層，是指在靠近壁面

的附近，受壁面影響的區域。在此區域中，剪應力使流體的流速緩慢的變化至與壁面速度相同。至於溫度邊界層則是流體溫度受壁面熱傳的影響，其溫度逐漸變化至與壁面溫度相同的區域。在溫度邊界層中，流體的溫度變化和緩，溫度梯度較小。根據熱傳導的傅利葉定律，在溫度梯度小的情況下，熱傳量也較小。因此，溫度邊界層的存在將限制壁面所能傳出之熱傳量。若想要大幅提高高溫壁面的散熱效率，必須破壞掉高溫面上的邊界層，使壁面直接與低溫流體接觸，進而提高壁面與流體間的溫度梯度，達成增加壁面熱傳量的效果。

又轉動設備的運轉而造成發熱裝置振動之現象極為常見，例如許多機械或電子設備含有馬達或風機等轉動元件，而當該些元件運作時，設備上原有會發熱的電子零件如 IC 等即會受到該些轉動馬達或風機的影響而產生振動。至於該些 IC 的散熱現象有可能在自然對流、強制對流或是混合對流下進行。以電腦為例，雖然電腦機殼多有一至三顆的風機運轉，但由於電路板的使用頻繁，包括主機板、顯示卡、網路卡、數據卡、音效卡以及硬碟、光碟機等等，除了發熱量極大的 CPU 或部分顯示晶片會加裝散熱風扇以強制對流的模式加強熱傳效率外，常常造成機殼內部分 IC 並非處於理想的強制對流散熱模式，而較為類似自然對流或混合對流的熱傳現象，此時又在機殼或 CPU 等散熱風扇的運轉下，即會有固定振動的現象產生。因此，存在振動現象的發熱電子元件之散熱問題相當常見，本文的主要目的即在探討此一熱傳現象，而此流體與振動物體間相互影響的問題，被歸類於動態的移動邊界問題(moving boundary problem)。

現今描述流體運動問題的座標系統可分為兩種：拉格朗日(Lagrangian)座標系統與尤拉法(Eulerian)座標系統。利用拉格朗日座標系統描述流場時，觀測流場的焦點集中在各個流體質點上；在數值計算的過程中，計算網格將隨著流體質點的運動而移動。因此，拉格朗日座標系統可以準確的描述移動邊界與固體液體介面間相互影響的情況。但是流體質點的運動方向與速度大小皆不相同，當流體質點間速度變化較大時，網格在計算的過程中將過度扭曲變形而影響計算。反之，尤拉座標系統將觀測流場的焦點固定在流場的空間中，描述此固定範圍中的流體質點運動情況，因此計算網格是固定在流場的空間中，不隨流體質點運動，避免了前述的網格扭曲問題。也使得尤拉座標系統在處理移動邊界與描述固體液體介面間相互影響時產生問題。然而在動態的移動邊界問題中，固體與液體間的相互作用，對其溫度與速度場具有絕對的影響力。因此，無論採用拉格朗日座標系統或尤拉座標系統，皆不能適切地處理此類問題。

為適切地處理動態的移動邊界問題，Noh [9]首先結合使用拉格朗日與尤拉兩種座標

系統之混合形式用來計算包含可動液體邊界之二維液動問題，且稱此種混合形式為「Coupled Eulerian-Lagrangian Code」，其證明此方法可適切地描述移動邊界問題。Hirt 等[10]則採用了「Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method」的名稱來定義此種混合座標的數值方法，並利用有限差分(finite difference)形式處理可壓縮流體，對於 ALE 法的使用有初步的描述，且對該法的穩定性、準確性與網格劃分方式有詳細的探討。Hughes 等[11]則率先將 ALE 法應用在有限元素(finite element)的分析上來解析黏性不可壓縮流之自由表面問題，對於此法所牽涉到的三種座標系統與座標間的轉換關係有著深入的說明，並且驗證了 ALE 法使用於自由表面的波動問題有較佳的收斂解。Belytschko 等[12]利用此一方法來計算流體與結構物表面間的振動問題，使得此一類問題得以獲得較為正確的數值模擬方法。

隨著 ALE 法逐漸發展完整，以 ALE 法解決相關工程問題的文獻也逐漸增加。在自由液面的流體力學問題方面，Huerta 與 Liu [13]以 ALE 法配合網格重建求解較大位移量的自由邊界問題，結果證明 ALE 法可適切地模擬自由液面產生的流體激濺(sloshing)現象。在固體與流體間相互影響的問題上，Donea 等[14]、Huerta 與 Liu [15]、Nomura 與 Hughes [16]、及 Nomura [17]等皆採用 ALE 法模擬流體流經圓柱之流場，結果發現圓柱表面產生的流體漩渦剝離(vortex shedding)現象，將造成圓柱振動。Masud 與 Hughes [18]以 ALE 法模擬流體中移動區域(moving domain)問題，並且以靜止流體中運動圓柱與在海面下發射飛彈之潛水艇為例，探討固體與流體間的相互作用。在材料成型與固體力學方面，Liu 等[19]採用葛拉金(Galerkin)之有限元素法於 ALE 中來計算鍛造成形的過程，並將所得之結果與採用拉格朗日座標系統所得之結果相較，發現採用 ALE 法時，節點隨時間改變後的分布較為平滑，且所獲得的結果也較接近實際的材料澆鑄過程。

基於上述的討論得知，ALE 法可適切地處理移動邊界問題。ALE 法將統御方程式定義於另一參考座標上，並且根據網格的移動定義網格移動速度，因此網格速度與流體質點的速度無關，可以避免網格過度扭曲。本研究針對振動發熱源對自然對流與混合對流的影響作一深入的探討，期望藉由本文的分析有助於 IC 等發熱電子元件在振動中的熱傳現象有更清楚的認知，並藉以找出自然對流、混合對流與強制對流模式下，當振動高溫面之振動頻率達到某一大小時，其熱傳效果會高於無振動高溫面熱傳效率的臨界振動頻率 F_{cc} 。

據此，除本章外，本文尚分為：第二章、ALE 法之運動學理論與數學模式；第三章、自然對流垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之限制研究；第四章、混合與強制對流

垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之限制研究；第五章、總結與建議。文末另包括自然對流與混合對流模式之有限元素法詳細的離散化推導程序。



表 1-1 主要冷卻方法比較表 [1]

	Natural air convection (NAC)	Forced air convection (FAC)	FAC plus water-cooled heat exchanger (WCHE)	Liquid-cooled (including evaporation, boiling)		Heat pipe
				Direct	Indirect	
Construction (→: main heat flow)	Component (IC etc.) plus fin → circuit-board shelf → frame	NAC plus fan/blower	WCHE inserted into air-flow passage	Component → liquid-immersion plus HE (water, air)	Component → cold plate	Component → heated area → cooled area → heat sink
Coolant	Air	Air	Air, water	Inert insulator liquid	Water, etc.	Water, methanol, ammonia, F.C., etc.
Coolant mover	(Bouyancy)	Fan/blower	Fan/blower, pump	Pump	Pump	Vapor pressure, capilarity
Coolant velocity	~ 0.2 m/s	0.5 ~ 10 m/s	—	—	—	—
Cooling capability	Small	Middle ~ large	Middle ~ large	Very large	Large	Large
Equipment volume	Large	Middle	Middle	Small	Small	Small
Acoustic noise	None	Middle ~ large	Middle	Small	Small	Small (heat-sink liquid-cooled)
Reliability of cooling	Large	Middle	Middle	Small	Small	Large
Economy	Large	Middle ~ large	Middle	Small ~ middle	Small ~ middle	Small at present
Remarks (capabilities, etc.)	Capability increases by chimney effect	—	—	Capability depends on HE capacity	For example, He-gas used to decrease contact ther. resist.	Capability depends on HE capacity

表 1-2 各種熱傳增益技術文獻數目統計表 [8]

	Single-Phase Natural Convection	Single-Phase Forced Convection	Pool Boiling	Force-Convection Boiling	Condensation	Mass Transfer
Passive Techniques						
(no external power required)						
Treated surfaces	—	—	149	17	53	—†
Rough surfaces	7	418	62	65	65	29
Extended surface	23	416	75	53	175	33
Displaced enhancement devices	—†	59	4	17	6	15
Swirl flow devices	—†	140	—	83	17	10
Coiled tubes	—†	142	—	50	6	9
Surface tension devices	—	—	12	1	—	—†
Additives for liquids	3	22	61	37	—	6
Additives for gases	—†	211	—	—	5	0
Active Techniques						
(external power required)						
Mechanical aids	16	60	30	7	23	18
Surface vibration	52	30	11	2	9	11
Fluid vibration	44	127	15	5	2	39
Electric or magnetic fields	50	53	37	10	22	22
Injection or suction	6	25	7	1	6	2
Jet impingement	—	17	2	1	—	2
Compound techniques	2	50	4	4	4	2

— Not applicable.

*Not considered in this survey.

†No citations located.

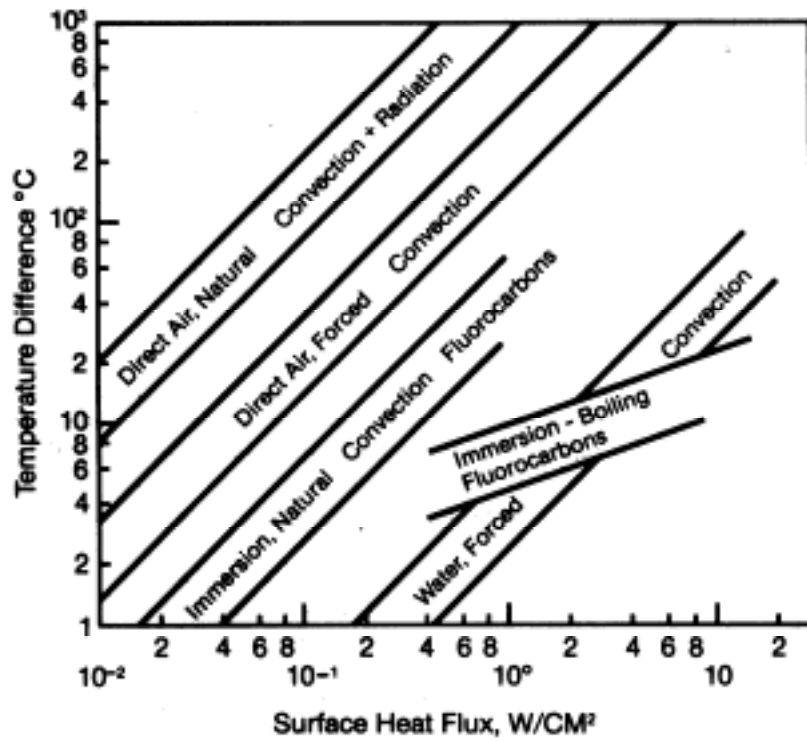


圖 1-1 各種熱傳模式與冷卻流體之熱傳量與可達成溫度差關係圖 [5]

第二章 ALE 法之運動學理論與數學模式

Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)是結合拉格朗日(Lagrangian)與尤拉(Eulerian)座標系統所衍生出的座標系統，能有效的處理移動邊界問題，並且在計算的過程中控制網格的變形。本章節將詳細說明 ALE 法的運動學理論、數學模式、格點速度以及應用方式等。

2.1 網格描述與座標系統

現今數值模擬的技術中，不論利用有限差分法 (finite difference method) 或有限元素法 (finite element method) 離散計算區域，描述流體運動的參考座標有兩種，一為拉格朗日(Lagrangian)座標系統，另一為尤拉(Eulerian)座標系統。其中，採用拉格朗日(Lagrangian)座標系統所計算之流場，其觀察流場的焦點會集中在各個流體質點上，因此數值計算過程中，其網格會隨著節點上的流體速度而移動；另外，若是採用尤拉(Eulerian)座標系統來計算流場速度時，則觀察流場的焦點會固定在空間中，所以網格不會隨著流體流動而改變位置。通常模擬本文所探討的移動邊界等類似問題，多會採用拉格朗日(Lagrangian)座標系統，但是當移動邊界所造成的流場之外另有其他流場存在時，則容易產生誤差乃至於無法求得收斂解，因此利用 ALE 的方法將可更加有效的處理此一移動邊界問題。

2.2 座標定義域

在使用 ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法計算移動邊界問題的座標中，有三種座標定義域的關係存在，分別敘述如下所示，亦可參考圖 2-1 之描繪[11,16]：

1. 空間定義域 (spatial domain, Ω_y)

代表固定不動的定義域，因此在數值方法中為固定的座標系統，其為一般流力問題所陳述的定義域，而在數值方法的格點劃分上，此定義域即為節點座標，又稱為尤拉(Eulerian)座標系統。

2. 物質定義域 (material domain, Ω_z)

代表流體粒子所佔有的定義域，一般來說會隨著流體的質點移動，而在數值方法的

計算中，此定義域即為流體本身，其座標系統稱為拉格朗日(Lagrangian)座標系統。若是存在某座標點 z_i ，則其與空間定義域之座標點 y_i 的關係如下：

$$y_i = \Phi(z_i, t) = \Phi_i(z_i) \quad (2-1)$$

3. 參考定義域 (referential domain, Ω_x)

在探討移動邊界問題的領域中，此定義域會移動，通常稱之為參考 (Referential) 座標系統。若是存在某座標點 x_i ，則其與空間定義域之座標點 y_i 的關係如下：

$$y_i = \hat{\Phi}(x_i, t) = \hat{\Phi}_i(x_i) \quad (2-2)$$

而物質座標點 z_i 與參考座標點 x_i 的關係則為

$$x_i = \Psi(z_i, t) = \Psi_i(z_i) \quad (2-3)$$

且

$$\Psi_i = \hat{\Phi}_i^{-1} \bullet \Phi_i \quad (2-4)$$

2.3 速度定義

根據上列所述的三種座標系統與空間定義域，ALE 法亦因此而產生了三種不同的速度定義，分別描述如下：

1. 流體速度 (material velocity, u)

$$u = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-5)$$

2. 節點速度 (mesh velocity, \hat{u})

$$\hat{u} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} \quad (2-6)$$

3. 對流速度 (convective velocity, \hat{c})

$$\hat{c} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-7)$$

且

$$\hat{c} = u - \hat{u} \quad (2-8)$$

2.4 座標轉換

另外，由三種不同的座標定義域可以獲得如下的座標轉換關係[20]：

1. 參考(Referential)座標與拉格朗日(Lagrangian)座標之轉換

根據微分定理可知，任一函數 f 可以滿足

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-9)$$

若是把函數 f 以座標函數 y 帶入，即可得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-10)$$

亦即

$$u = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-11)$$

則

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{z_i} = (u - \hat{u}) \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \quad (2-12)$$

再將其帶入式(2-9)即可獲得最後之座標轉換式

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_i} + (u - \hat{u}) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (2-13)$$

2. 尤拉(Eulerian)座標與拉格朗日(Lagrangian)座標之轉換

同理，根據微分定理可知，任一函數 f 可以滿足

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{y_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{z_i} \quad (2-14)$$

而上式最後之微分項由前面之流體速度的定義式(2-5)可知其恰好為 u ，故可直接獲得尤拉(Eulerian)與拉格朗日(Lagrangian)兩座標間的轉換關係式如下：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{z_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{y_i} + u \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (2-15)$$

3. 參考(Referential)座標與尤拉(Eulerian)座標之轉換

相同地，根據微分定理可知，任一函數 f 可以滿足

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{y_i} \quad (2-16)$$

再把函數 f 以尤拉(Eulerian)座標函數 y 帶入，即可得

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t} \right|_{x_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{y_i} \quad (2-17)$$

亦即

$$0 = \hat{u} + \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{y_i} \quad (2-18)$$

則

$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{y_i} = -\hat{u} \frac{\partial x_i}{\partial y_i} \quad (2-19)$$

再將上式所得之結果帶入式(2-17)即可獲得參考(Referential)座標與尤拉(Eulerian)座標之轉換關係式如下：

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{y_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_i} - \hat{u} \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (2-20)$$

ALE 綜合上述座標系統的概念，將觀測流場的焦點定在新定義的參考定義域(reference domain)上，此參考定義域以任意速度 \hat{u} 在計算區域中運動；計算網格則固定在參考定義域上，與參考定義域同以 \hat{u} 的速度移動。ALE 與拉格朗日(Lagrangian)、尤拉(Eulerian)座標系統間的關係，由 \hat{u} 決定：

1. 當 $\hat{u} = 0$ 時：

參考定義域(reference domain)與計算網格皆靜止不動，此時 ALE 描述流場的觀點與尤拉(Eulerian)座標系統相同。

2. 當 $\hat{u} = u$ 時：

此時參考定義域(reference domain)的移動速度與流體質點的速度相同，ALE 描述流場的觀點則與拉格朗日(Lagrangian)座標系統相同。

3. 當 $\hat{u} \neq 0$ 且 $\hat{u} \neq u$ 時：

此時參考定義域(reference domain)描述流場的觀點即為 ALE 法。

又在實際的數值模擬運用上，無論 $\hat{u} = 0$ 、 $\hat{u} = u$ 或 $\hat{u} \neq 0$ 且 $\hat{u} \neq u$ 的各種情形，都會同時發生在同一計算空間內的不同網格節點上，如此彈性的變化，正是利用 ALE 法模擬移動邊界問題的重點與精隨之所在。

2.5 ALE 統御方程式

一般考慮浮力項後之二維流場的質量方程式（連續方程式）、動量方程式與能量方程式或濃度方程式分別可以表示為：

連續方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-21)$$

動量方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \quad (2-23)$$

能量方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-24)$$

濃度方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D_{ab} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (2-25)$$

2.5.1 強制對流於濃度擴散之移動邊界問題

針對移動邊界問題中，強制對流模式下流場與濃度場擴散的數值模擬，作者於 1995 年[21]即已進行此一議題的研究，其變換後的連續方程式依舊相同，如式(2-21)，但動量方程式與濃度方程式則改變如下：

動量方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial u}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial v}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-27)$$

濃度方程式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial c}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial c}{\partial y} = D_{ab} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (2-28)$$

又若採用特定之無因次參數後，其無因次方程式則可表示為：

動量方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2-29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2-30)$$

濃度方程式

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial C}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial C}{\partial Y} = \frac{1}{Re Sc} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right) \quad (2-31)$$

2.5.2 強制對流於熱傳增益之移動邊界問題

針對移動邊界問題於強制對流模式所進行增加熱傳效益的研究，則在後續的揚[22-26]、王[27-30]以及童[31-35]等都有極為詳細的分析，揚為利用振動的方式來增加矩形柱的散熱效益，王則利用往復運動的薄塊搭配噴流的作用，以獲得對高溫壁面更好的熱傳效果，童利用相同的解法來探討振動圓柱對渠道內高溫壁面的熱傳效益，以及高溫圓柱加入振動後的散熱效果等。綜合上述問題，其所採用的 ALE 方程式中，質量方程式與動量方程式和前節所述相同，如式(2-21)、式(2-26)及式(2-27)，而濃度方程式則由能量方程式替換如下：

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial T}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-32)$$

若採用特定之無因次參數後，其無因次能量方程式則可表示為

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + (V - \hat{V}) \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2-33)$$

2.5.3 自然與混合對流於熱傳增益之移動邊界問題

在經過楊、王及童等人之研究後，有關移動邊界中強制對流模式的熱傳增益之相關問題已有相當深入的探討，且獲得的結果相當有助益，然而針對移動邊界於自然對流與

混合對流等模式之問題則尚未有所觸及，因此本文乃針對自然對流與混合對流之問題加以分析，其變換後的質量方程式、 x 方向動量方程式與能量方程式仍然相同，如式(2-21)、式(2-26)及式(2-32)，但 y 方向（重力方向）之動量方程式在考慮浮力項後，則可變化為：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial v}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g \quad (2-34)$$

而其無因次化後的動量與能量方程式則會因為流場是處於自然對流或混合對流的模式，而有不同的形式產生，通常在自然對流的模式下，因為流場不存在入口速度，亦即不採用雷洛數 Re 為無因次參數下，多以雷利數 Ra 或葛瑞秀夫數 Gr 為無因次參數。而在混合對流模式時，即會加入雷洛數 Re 之定義，而改變無因次方程式之形式。有關自然對流或混合對流下，詳細的無因次參數使用與無因次化後的動量與能量方程式會在後續的章節中加以說明。

2.5.4 加入多孔性介質於熱傳增益之移動邊界問題

連[36]將移動邊界的問題擴展到加入多孔性介質後熱傳增益的影響之研究，其變換後在沒有多孔性介質存在空間（外流場）其連續方程式、動量方程式與能量方程式依舊相同，如式(2-21)、式(2-26)、式(2-34)及式(2-32)，但存在多孔性介質的空間（內流場）其動量方程式與能量方程式則改變如下：

動量方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) + (v - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu \varepsilon}{K} u - \frac{\varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{u}| u \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (u - \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{\varepsilon} \right) + (v - \varepsilon \hat{v}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{\varepsilon} \right) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\nu \varepsilon}{K} v - \frac{\varepsilon F}{\sqrt{K}} |\bar{v}| v + g \varepsilon \end{aligned} \quad (2-36)$$

能量方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u - \hat{u}) \frac{\partial T}{\partial x} + (v - \hat{v}) \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_e \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-37)$$

其中， \bar{u} 為多孔性介質內的平均流速， ε 為多孔性介質之等效孔隙率，且

$$F = \frac{1.75}{(\sqrt{150} \varepsilon^{1.5})} \quad (2-38)$$

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (2-39)$$

$$\alpha_e = \frac{k_e}{\rho C_p} \quad (2-40)$$

又 d_p 為顆粒直徑， $k_e = k_e^0 + k_i^*$ ，其中 k_e^0 為停滯熱傳導係數（Stagnant conductivity）， k_i^* 為熱散逸傳導係數（thermal dispersion conductivity）。同樣地，其無因次化後的動量與能量方程式會因為流場處於自然對流或混合對流的模式而有不同的形式產生，本文則不加以探討。

2.6 格點速度

在 ALE 法中，參考座標系統的移動速度是可以任意給定的，因此計算網格的移動速度與流體速度間彼此獨立，可以根據計算的需要給定適當的網格速度。本研究依據不同的物理邊界條件，將網格速度分為三種區域：

1. 固定邊界上，網格速度為 0。
2. 移動邊界上，網格速度等於移動面速度，亦與移動邊界上的流體等速。
3. 在固定邊界與移動邊界間，網格速度可以依需求設定，以避免網格過度扭曲導致計算發散。

又本文根據格點與壁面間的距離，使網格速度成線性分布，有關網格的分布與高溫面振動後的網格變化情形可以參考圖 2-2 所示，在振動高溫面及其相鄰的上下兩個振動緩衝區的高度內，為網格變化區域，除此區域外，其於的網格不會隨著振動而改變。

另不同的網格分布對相同的問題所獲得的數值解之差異性，在王[30]的論文中有極為詳細的探討，其以兩組不同之網格速度，計算振動矩形發熱方柱對管道流之溫度與速度場的影響，藉以探討任意選取網格速度，對計算結果的影響。其物理模式如圖 2-3 所示，兩組網格的變化如圖 2-4 所示，最後的誤差如圖 2-5 所示。結果顯示，兩網格 U 值差異皆在 0.05% 以下，V 值的相對誤差值範圍在 -0.0405% 至 0.0232% 之間，又網格 A 與網格 B 之局部紐塞數分佈曲線完全重合，顯示兩組網格壁面附近的溫度場完全相同。由

此得知，以 ALE 法求解移動邊界問題時，不同的網格移動速度對結果的影響有限，但是仍需選取適當的網格速度，以避免網格在移動的過程中過度扭曲，影響結果。



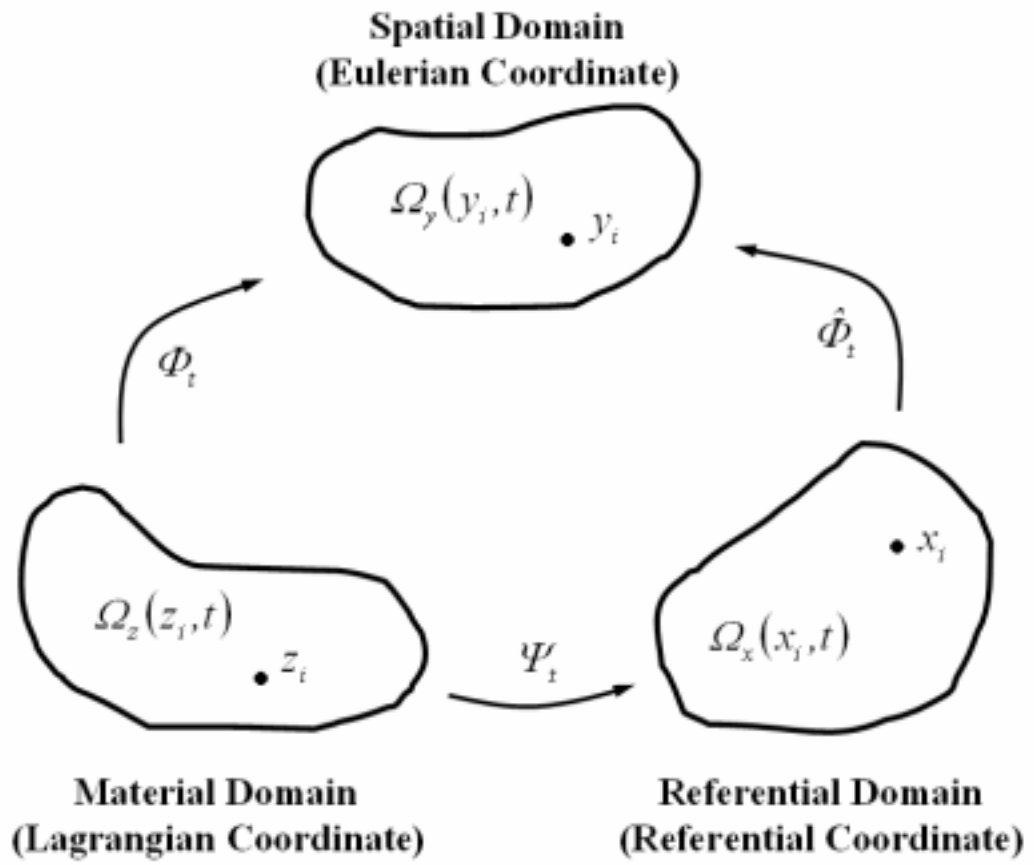


圖 2-1 ALE 座標系統關係圖

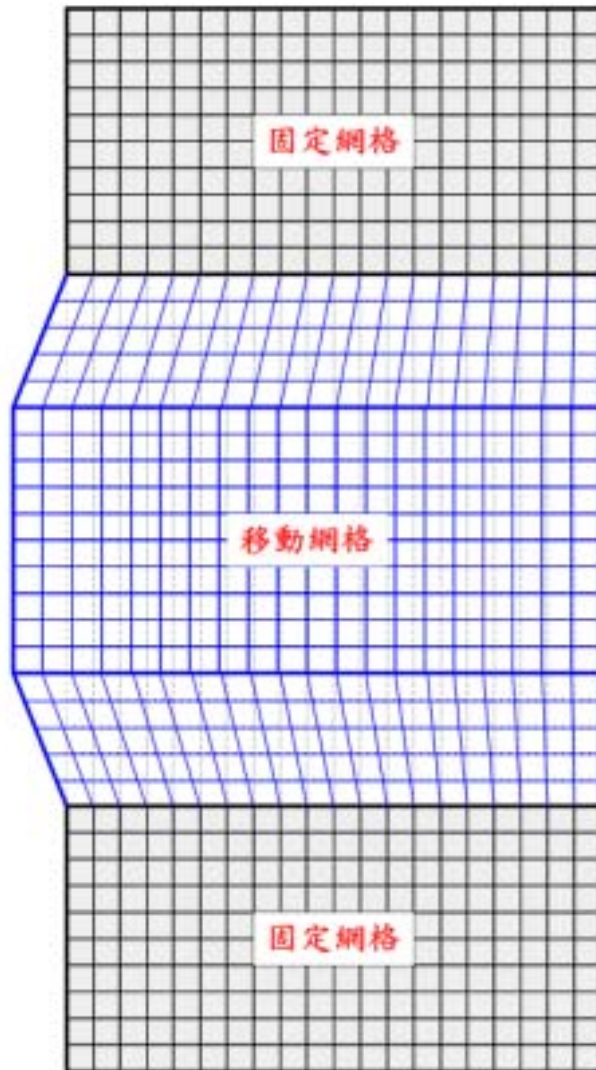


圖 2-2 網格變化圖

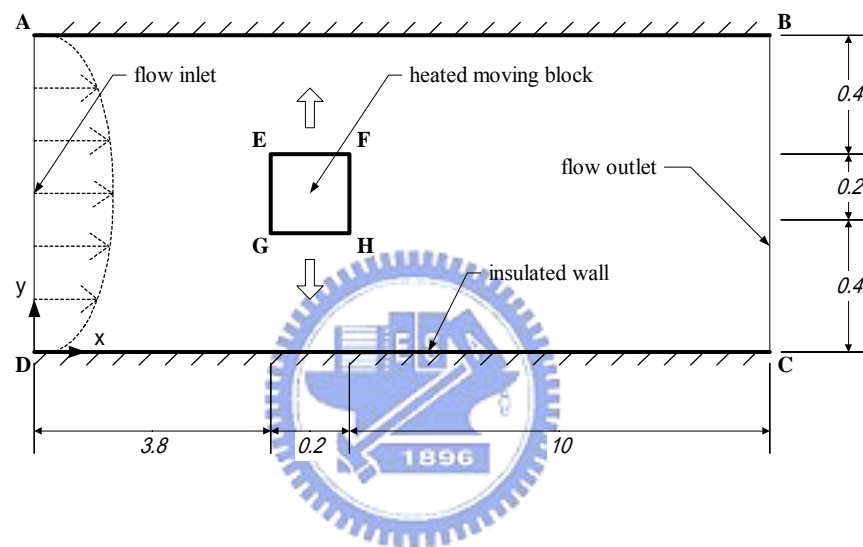
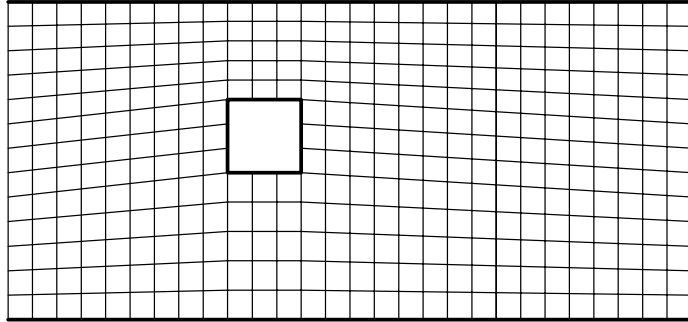
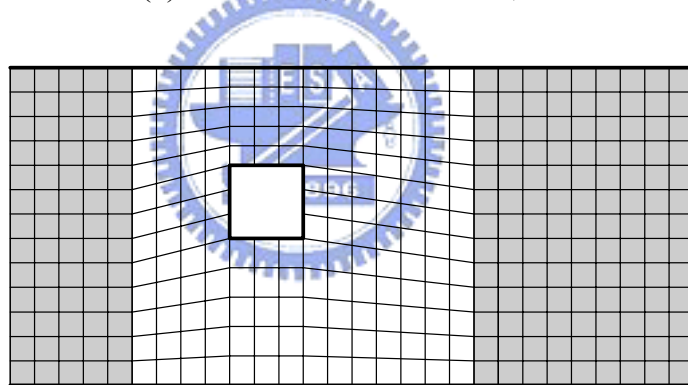


圖 2-3 網格變化研究之物理模式圖[30]

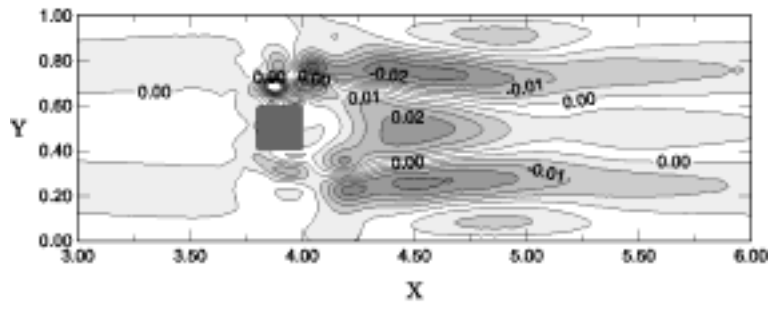


(a) 網格 A (大區域變化)

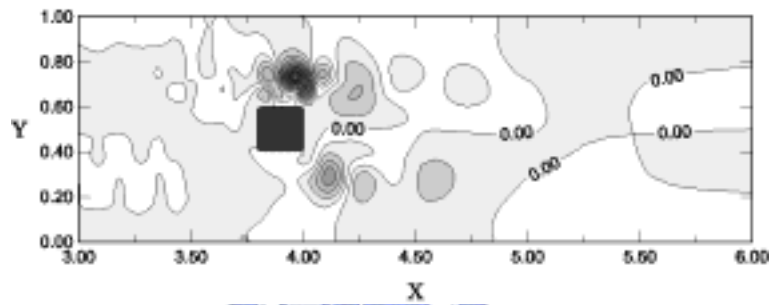


(b) 網格 B (小區域變化)

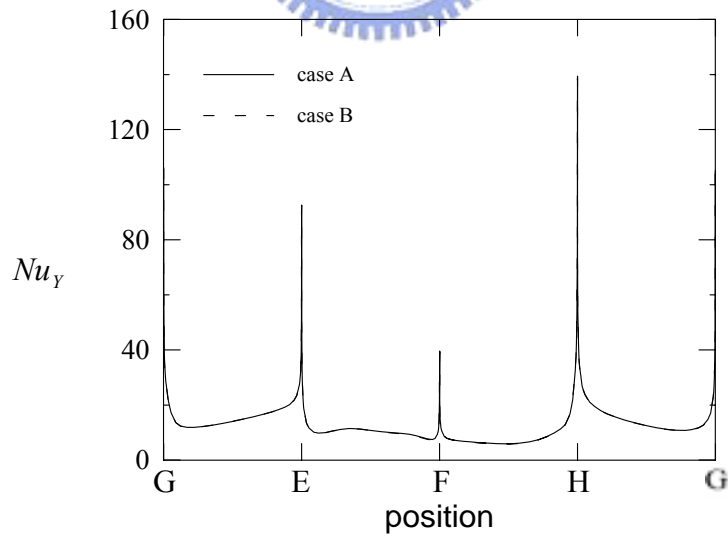
圖 2-4 兩組網格示意圖[30]



(a) U 值之等相對誤差線分佈



(b) V 值之等相對誤差線分佈



(c) 局部紐塞數分佈

圖 2-5 兩組網格速度之等相對誤差線與局部紐塞數分佈圖[30]

第三章 自然對流垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之研究

3.1 前言

過去，針對自然對流之振動分析的研究雖然常有所見，但是大多屬於密閉環境（enclosure）的分析，Fu 和 Shieh [37,38]即針對密閉環境中變動加速度和振動對自然對流的影響加以探討，並發現簡明的修正公式以預測共振頻率及紐塞數的變化。Ishida 和 Kimoto [39]也研究了密閉環境中垂直振動對自然對流的影響，並且發現了振動頻率與紐塞數的關係。Forbes 等 [40]則利用實驗的方法來探討密閉環境中振動對自然對流的影響，而在其實驗中利用振動的方法最多可以增加 50%的熱傳速率，此外，由於物體振動所引起的流體波動等幾個類似的自然對流與強制對流的研究亦在該文獻中有所呈現。Ichioka 等 [41]成功的使用 CFD 技術來模擬兩個振動圓柱與多個振動圓柱列所引起的流體振動問題，其所造成的渦流剝離與流場不穩定現象皆可清楚的觀察到。Baxi 和 Ramachandran [42]利用實驗的方法來分析振動圓柱對自然與強制對流的影響，當雷諾數小於 200 時，其對熱傳速率的影響變動不大，但是當雷諾數大於 200 時，振動對於熱傳速率的提升將有很明顯的影響，甚至可以比沒有振動情形下的自然對流高達七倍的熱傳速率。Krishnan 與 Rao [43]利用實驗的方法來探討振動對兩根管路間熱交換現象的影響，當振動頻率達 780-840cpm 時，振動頻率與熱傳效果沒有明顯關聯，但是當頻率繼續增加時，則熱傳速率會有微量的增加。Ivanova 與 Kozlov [44]亦針對水平圓柱之垂直振動對葛雷修數（Grashof numbers）的影響作一深入研究。Fu 與 Tong [31,34]則針對管道中振動圓柱對強制對流流場的影響作一探討，並發現了振動對於熱傳速率的效果明顯增加。

本研究的主要熱傳機構乃是基於一個振動的高溫面對於垂直管道流的影響，因為高溫面的振動方向為水平方向且位於垂直管道的左側壁面，因此會形成一個凸起與凹下的反覆運動。當高溫面凸起時，高溫的流體很容易從壁面上分離，也導致熱傳效率提高，但相反地當高溫面凹下時，則高溫的流體將因為流體的停滯而不利於分離，除非當振動的頻率或振幅大到足以克服這一屏障（凹下狀態）。為了避免計算的複雜性，當設備存在振動熱源時，在現實的考量下，通常利用非振動的穩定條件予以取代並計算其熱傳效率。所以，確認振動和穩定條件下之設備熱傳效率的差異性，並提供有用的數據給設計熱傳者之參考便成為本項研究的重要課題。

3.2 物理模式

本研究所採用的物理模式如圖 3-1 所示，主要為一個高與寬 w 的二維垂直管道。其中高溫振動壁面高度為 h 且位於左側壁面，振動面距離上方與下方開口面高度分別為 h_1 與 h_2 ，又該一振動面的溫度固定為 T_h 。在垂直管道中除了高溫振動面外，其餘兩側的壁面皆為絕熱狀態，而外面的環境溫度亦固定為 T_c 。當振動開始時 ($t>0$)，高溫面將以垂直於重力的方向作一水平來回振動，其振動頻率為 f_c 且振幅為 l_c 。由於高溫面於垂直管道中振動的交互作用影響，流場與溫度場的變化屬於隨時間而變化的移動邊界問題，因此可以 ALE 方法適當的描述。

3.3 統御方程式與邊界條件

本研究利用以下的假設條件簡化問題。

1. 流場為二維的層流流場。
2. 流體為不可壓縮之牛頓流體。
3. 流體的各種性質除了密度外皆為常數。
4. 流體與壁面間符合無滑動條件(no-slip condition)。

根據 l_2 、 T_h 、 T_c 為參考變數而定義出以下之無因次參數，並將 ALE 統馭方程式簡化如下：

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{l_2}, \quad Y = \frac{y}{l_2}, \quad \tau = \frac{t}{t_f} = \frac{t(\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2)}{l_2}, \quad U = \frac{u}{\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2}, \quad V = \frac{v}{\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2}, \\
 \hat{U} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2}, \quad P = \frac{p}{\rho(\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2)^2}, \quad L_c = \frac{l_c}{l_2}, \\
 F_c &= \frac{f_c l_2}{\sqrt{Ra} \cdot \alpha / l_2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)l_2^3}{\nu^2}, \\
 Ra &= Gr \cdot \text{Pr} = \frac{g\beta(T_h - T_c)l_2^3}{\alpha\nu}
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

其中 \hat{u} 為格點速度 (mesh velocity)， l_c 與 f_c 分為高溫面振動幅度與振動頻率。

連續方程式

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3-2)$$

動量方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\text{Pr}}{\sqrt{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Pr} \cdot \theta \quad (3-4)$$

與能量方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3-5)$$

又無因次高溫壁面振動速度 U_c 的計算方式如下所示：

$$U_c = U_m \cos(2\pi F_c \tau) \quad (3-6)$$

其中無因次的最大振動速度 U_m 則可以由下式獲得：

$$U_m = 2\pi F_c L_c \quad (3-7)$$

初始條件

以高溫壁面靜止不動之穩態速度與溫度場為初始條件（固定狀態）。

邊界條件

在垂直管道下方開口面 AB 為

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \theta = 0 \quad (3-8)$$

除了高溫振動面 EF 外，其餘的壁面為

$$U = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (3-9)$$

在垂直管道上方開口面 CD 為

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (3-10)$$

高溫振動面 EF 為

$$U = U_c, V = 0, \theta = 1 \quad (3-11)$$

3.4 數值方法

本研究的數值方法採用葛拉金有限元素法(Galerkin finite element method)。所有元素均為八節點二次等參元素，並配合處罰函數(penalty function)與連續方程式消去壓力項，利用後項差分隱式法(backward different implicit method)處理時間微分項，Newton-Raphson 迭代法處理非線性項。為縮短計算所需的時間，本研究採用鋒面法(frontal method)，配合 Gauss Jordan 消去法與高斯積分法，求解經過上述步驟產生之聯立方程組，詳細的離散方程式與矩陣可參考附錄 A 所示。又數值計算流程圖如圖 3-2，詳細步驟如下：

1. 根據所需的元素數目、網格數目與分佈情況，求出各網格點的位置，並指定邊界條件。
2. 求高溫振動面靜止時的速度與溫度場，作為其振動時的初始條件。
3. 計算各網格點的網格速度，並檢查初始條件與邊界條件有無錯誤。
4. 求所需的參數(Jacobian 矩陣、形狀函數等)。
5. 反覆解聯立方程組求出速度與溫度場，直到每一網格點的速度與溫度值滿足下列收斂條件。

$$\left| \frac{\varphi^{m+1} - \varphi^m}{\varphi^{m+1}} \right| < 10^{-3} \quad (3-12)$$

式中 φ 表示 U 、 V 與 θ 。

6. 在每一個計算時間裡，均需檢查每一元素和整個計算域的連續方程式的殘值 ($Residual = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}$) 以確保在整個計算過程中均能滿足質量守恆。
7. 重複步驟 5,6 至達到所需的無因次時間。

3.5 結果與討論

本研究所採用的工作流體為空氣，其普朗特常數為 $Pr = 0.71$ 。主要的研究參數包含雷利數 Ra 、振幅 L_c 以及振動頻率 F_c ，本文所採用的參數數值如表 3-1 所示。

高溫振動面的局部紐塞數 (local Nusselt number) 定義如下：

$$Nu_Y = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{EF} \quad (3-13)$$

高溫振動面的平均紐塞數 (average Nusselt number) 定義如下：

$$Nu = \frac{1}{L_2} \int_{L_3}^{L_3+L_2} Nu_Y dY \quad (3-14)$$

高溫振動面振動一週期之時平均紐塞數 (time-averaged Nusselt number) 定義如下：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} Nu d\tau \quad (3-15)$$

其中 τ_p 代表振動一個週期的時間亦可等於 $1/F_c$ 。

3.5.1 格點與時間步進測試

為了達到合理的邊界條件，在經由數值測試的結果於高溫面距離頂部與底部的長度分別採用了 $L_1 = 8l$ 與 $L_3 = 2l$ ，管道之寬度 $W = 2$ 、高溫面長度 $L_2 = l$ 、高溫振動面與上下固定管道壁面之振動緩衝區長度各為 0.5。另為了獲得較準確的速度 U 和 V 以及溫度 θ ，在雷利數 $Ra = 10^3$ 之穩定流場下，採用四種非均勻分佈的計算網格進行網格測試，其元素個數分別 3840、6848、10640 和 18000，沿著高溫面中心平行 X 軸之 U 、 V 和 θ 分布如圖 3-3 所示。根據網格測試的結果，本研究採用 3840 個元素之計算格點。又在時間步進 $\Delta\tau$ 大小方面，在雷利數 $Ra = 10^4$ 、高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 以及高溫面振動頻率 $F_c = 500$ 的條件下 ($\tau_p = 1/F_c = 1/500 = 2.0 \times 10^{-3}$)，分別以 $\Delta\tau = 2.0 \times 10^{-4}$ ($N_p = 10$)、 1.0×10^{-4} ($N_p = 20$)、 0.5×10^{-4} ($N_p = 40$) 以及 0.25×10^{-4} ($N_p = 80$) 四種不同的時間步進大小測試，結果如圖 3-4 所示，針對此一條件下採用 $\Delta\tau = 0.5 \times 10^{-4}$ 為時間步進大小。但實際的時間步進值並不一定，而會因為雷利數 Ra 與振動幅度 L_c 的不同而有所改變，基於本測試結果在其他不同條件下的週期步進次數 N_p (振動一週期的時間步進次數) 皆採用 40，而其相對應的時間步進大小可計算如下：

$$\Delta\tau = \frac{1}{N_p \times F_c} = \frac{1}{40 \times F_c} \quad (3-16)$$

3.5.2 振動高溫面對流場與溫度場之影響

在實際的狀況中，當 IC 運轉時的溫度應與周圍空氣的溫度差在 100°C 以內，且一般 IC 的規格大小約為公分等級，因此套用到現有的研究題目中，其合理的雷利數等級約在 10^3 到 10^5 範圍內。而在類似垂直通道內單邊高溫的壁面分析有 McAdams [45] 以及

Churchill 和 Chu [46]之研究，其與本研究的數值分析結果比較如圖 3-5 所示，而本研究與兩者間會有些微差距的原因在於本題目的高溫範圍僅限於垂直壁面中的振動段內，但另兩者的分析中則以整面垂直壁面皆為高溫段所致，又不同雷利數下的高溫面平均紐塞數分布如表 3-2 所示。

又為了更加清楚的顯示流場與溫度場的變化情形，所以有關流線與等溫線的顯示範圍僅以高溫面附近為主，並利用箭頭符號來表示振動高溫面的運動方向，而其無因次流線函數 Ψ 定義如下：

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, V = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (3-17)$$

圖 3-6 所示即為雷利數 $Ra = 10^4$ 、高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 、高溫面振動頻率 $F_c = 500$ 下第十一個振動週期的流線與等溫線隨時間變化情形。圖 3-6(a)為第十一振動週期的初始狀況（亦為第十振動週期的結束狀況），無因次時間為 $\tau = 0.02$ ，此時高溫面位於週期振動範圍的中間且運動方向朝右，該一時間的運動速度最大，靠近高溫面的流體因為擠壓而向右運動，所以流線皆由高溫面向右延伸，又因為自然對流所引起熱浮力的影響而向上。圖 3-6(b)，高溫面已經移動到最右邊的位置，此時高溫面為靜止狀態亦即速度為零，鄰近高溫面的區域其流線仍保持至高溫面向右上方延伸的形式，但在鄰近區域以外則與穩態流場下的流線較為類似。圖 3-6(c)，高溫面又回到位於週期振動範圍的中間但運動方向朝左，該一時間的運動速度亦為最大，不同於圖 3-6(a)的擠壓現象，流體會被高溫面所吸引過來，導致流線直接從下方連接到高溫面。圖 3-6(d)，高溫面移動到水平振動的最左邊位置，此時高溫面亦為靜止狀態，在其遠離高溫面區域外的流線與圖 3-6(b)或穩態流場下的流線類似，直接由下方邊界連接到上方邊界，但在鄰近高溫面的區域其流線則與圖 3-6(b)相反，並非由壁面外推而是由下方邊界連接至高溫面的吸引模式。圖 3-6(e)所示則為與圖 3-6(a)所示之高溫面位置相同，為第十一振動週期的結束狀況，也因此其流線的分布形式幾乎與圖 3-6(a)相同。在等溫線的分布變化方面，其分布多集中在靠近振動高溫面的區域內，亦即該範圍內的溫度變化較大，又由圖 3-6 內的各時間等溫線分布可知，其溫度分布變化不大，並不會隨著高溫面的振動位置而有大幅度的改變，單以等溫線的分布圖無法判別其差異性。

3.5.3 振動頻率及雷利數對熱傳之影響

圖 3-7 所示為當雷利數 $Ra = 10^3$ 且高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 時，平均紐塞數 Nu 隨時間 τ 的變化情形。由於高溫面的來回振動現象，導致平均紐塞數與會有類似的週期變化發生，且當振動頻率 F_c 越大時紐塞數也會隨之變大。當振動頻率 $F_c = 50$ 時，大部分時間下的平均紐塞數都會比固定狀態下（高溫面無振動情形，stationary state）的紐塞數要小，但是當振動頻率 $F_c = 200$ 時，平均紐塞數的大小就完全會比固定狀態下要來的大。另由曲線圖中可以發現，當高溫面凸起時，平均紐塞數會位於曲線的波峰部分，相反地，當高溫面向左運動造成凹陷時，平均紐塞數會位於曲線的波谷段。

同樣地在雷利數 $Ra = 10^3$ 且高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 下，時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間的變化情形則如圖 3-8 所示，由該圖可以更加清楚的發現，當振動頻率 F_c 為 200 時，時平均紐塞數 \overline{Nu} 的數值已經大於固定狀態下的平均紐塞數。但是當振動頻率 F_c 等於 100 時，時平均紐塞數的大小仍會隨著時間遞減而趨近於固定狀態下的數值，又當 $F_c = 50$ 時，除了初始的幾個振動週期外，其時平均紐塞數皆明顯的小於固定狀態下的平均紐塞數。

圖 3-9 所示為雷利數 $Ra = 10^4$ 且高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 時，時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間 τ 的變化情形。在任一相同振動頻率 F_c 下，當雷利數 Ra 增加時，時平均紐塞數 \overline{Nu} 亦會隨之增加，但必須補充說明的是，即使在相同的固定狀態下（stationary state），當雷利數 Ra 增大時，平均紐塞數 Nu 也會隨之增加（參考圖 3-5 所示）。因為振動高溫面的運動方向與自然對流方向垂直，所以當高溫面處於凹陷情形時，將不利於熱傳的發展。類似上面圖 3-8 所述，當振動頻率 F_c 增加時，時平均紐塞數 \overline{Nu} 整體趨勢亦會增加，但仍有少數例外的狀況，如 $F_c = 500$ 且 $\tau > 0.005$ 時，其時平均紐塞數 \overline{Nu} 就比振動頻率 $F_c = 1000$ 時要來的大。

在相同的振動幅度 $L_c (= 0.1)$ 下如果雷利數 Ra 增加到 10^5 （如圖 3-10 所示），則振動頻率 F_c 必須超過 3000 以上才可使時平均紐塞數 \overline{Nu} 大於固定狀態下的平均紐塞數 Nu ，這比先前兩個雷利數 $Ra = 10^3$ 與 $Ra = 10^4$ 的需求振動頻率要高上許多。綜合上述各雷利數的分析結果可以發現，當雷利數越高時，不僅固定狀態下高溫面的平均紐塞數 Nu 會越大，需要突破固定狀態之平均紐塞數以獲得更佳熱傳速率的振動頻率 F_c 也會隨之增加，在不同雷利數 $Ra = 10^3$ 、 $Ra = 10^4$ 、 $Ra = 10^5$ 下其需要突破的振動頻率 F_c 分別

約為 200、1500 以及 4000。

3.5.4 振動幅度對熱傳之影響

圖 3-11 所示為當雷利數 $Ra = 10^3$ 且振幅 $L_c = 0.2$ 時之平均紐塞數 Nu 隨時間 τ 的變化情形。此時的振動幅度 L_c 等於 0.2，這代表在相同的振動頻率 F_c 下，高溫面的運動速度與位移幅度將比前述的分析範例要增加，這樣的結果也導致平均紐塞數的變動範圍更大，這可以由圖 3-9 當 $Ra = 10^3$ 且 $L_c = 0.1$ 的結果比較後可知。

相同的情形，參考圖 3-12 所示，當振動頻率 F_c 等於 70 時其時平均紐塞數 \overline{Nu} 才會大於固定狀態下的數值。而該一振動頻率 ($F_c = 70$) 比圖 3-8 所示的振動頻率 ($F_c = 200$) 要小。

當雷利數 Ra 增加到 10^4 與 10^5 時，類似的分析在圖 3-13 與圖 3-14 中有清楚的展現，此一造成時平均紐塞數會大於固定狀態下的振動頻率 F_c 仍然會隨著雷利數的增加而變大，但是該一振動頻率依舊會小於 $L_c = 0.1$ 時的需求頻率（如圖 3-9 與圖 3-10 所示）。

圖 3-15 為當高溫面振幅 L_c 增加到 0.4 時，當雷利數 $Ra = 10^3$ 之平均紐塞數 Nu 隨時間 τ 的變化情形，此時的高溫面振動速度與振動幅度將大幅增加，而平均紐塞數的變動性亦會隨著高溫面的振動而更加劇烈地震盪。

同樣地隨著振動幅度 L_c 的增加，如圖 3-16，當雷利數 $Ra = 10^3$ 時，振動頻率 F_c 只要等於 60 即可使時平均紐塞數 \overline{Nu} 大小值超過固定狀態下的數值，也更明顯小於圖 3-8 所示之需求振動頻率 $F_c = 200$ 。類似的情況在雷利數 $Ra = 10^4$ 和 10^5 亦可發現如圖 3-17 與圖 3-18 所示，其大小分別為 $F_c = 300$ 與 900，這可相對應於圖 3-13 與圖 3-14 所示之需求振動頻率 $F_c = 600$ 與 1500。

3.5.5 臨界振動頻率與經驗公式

一般來說，當高溫表面受到振動影響後都會以為熱傳速率必定會增加，但是經過本文的研究後可以發現，不同的振動頻率 F_c 與振幅 L_c 組合後，其熱傳速率仍然會有低於固定狀態之熱傳速率的可能。基於上述的研究在不同的雷利數 Ra 與振幅 L_c 下都可以發現在某一個振動頻率下，該高溫面的熱傳速率會開始大於固定狀態下的熱傳速率，而且

只要高溫面的振動頻率超過該一振動頻率時，當振動頻率愈大，得到的熱傳效果也會愈好，而此一振動頻率即可定義為臨界振動頻率 F_{cc} (critical oscillation frequency)。

圖 3-19 中的每一個點狀符號代表每一個不同雷利數 Ra 與振幅 L_c 組合後所取得的臨界振動頻率數值，而利用這些點狀符號的位置與數值的方法歸納後，即可獲得一經驗公式如式 3-17 來預測不同情形下的臨界振動頻率 F_{cc} 數值。

$$\log(F_{cc}) = (-0.44L_c + 0.75)\log(Ra) + (4.9L_c^2 - 2.7L_c + 0.4) \quad (3-18)$$

圖 3-19 所示之直線可以稱為臨界振動頻率預測線，此一直線可由式 (3-17) 推導而得，其中雷利數的變動範圍可由 10^1 到 10^5 。由圖 3-19 即可獲知，當設定一振幅 L_c 後，在任何雷利數 Ra 下只要振動頻率會落在該一臨界振動頻率預測線上方，則代表該一狀況下的熱傳速率必定會大於固定狀態的熱傳速率，換句話說，在該區域內的高溫面熱傳速率會比沒有振動情下的高溫面之熱傳速率增加。

3.6 結論

本章利用數值分析的方法來探討垂直管道流中高溫振動面對於自然對流的影響，藉由振動頻率、振幅以及雷利數的變化以找出相對應的結果。其主要的結論可歸納如下所述：

1. 在相同的雷利數下，高溫面在不同的振動頻率與振動幅度之組合下，其熱傳速率有可能會小於固定不動的狀態。
2. 當振動幅度與振動頻率增加時，高溫面的熱傳速率亦會相對的增加。
3. 臨界振動頻率可由雷利數與振動幅度兩項訂定，當雷利數與振動幅度相同時，只要振動頻率大於臨界振動頻率時即可獲得更好的熱傳效果。

表 3-1 設計參數組合表

參數	數值範圍
雷利數 Ra	10^1 、 10^2 、 10^3 、 10^4 、 10^5
高溫面振幅 L_c	0.1、0.2、0.4
高溫面振動頻率 F_c	隨 Ra 與 L_c 改變 (50~4000)

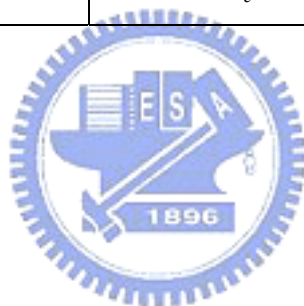


表 3-2 穩態非振動高溫面平均紐塞數與雷利數之關係表

雷利數 Ra	高溫面平均紐塞數 Nu_{st}
10^1	1.19105
10^2	2.14185
10^3	3.48328
10^4	5.61508
10^5	9.61796

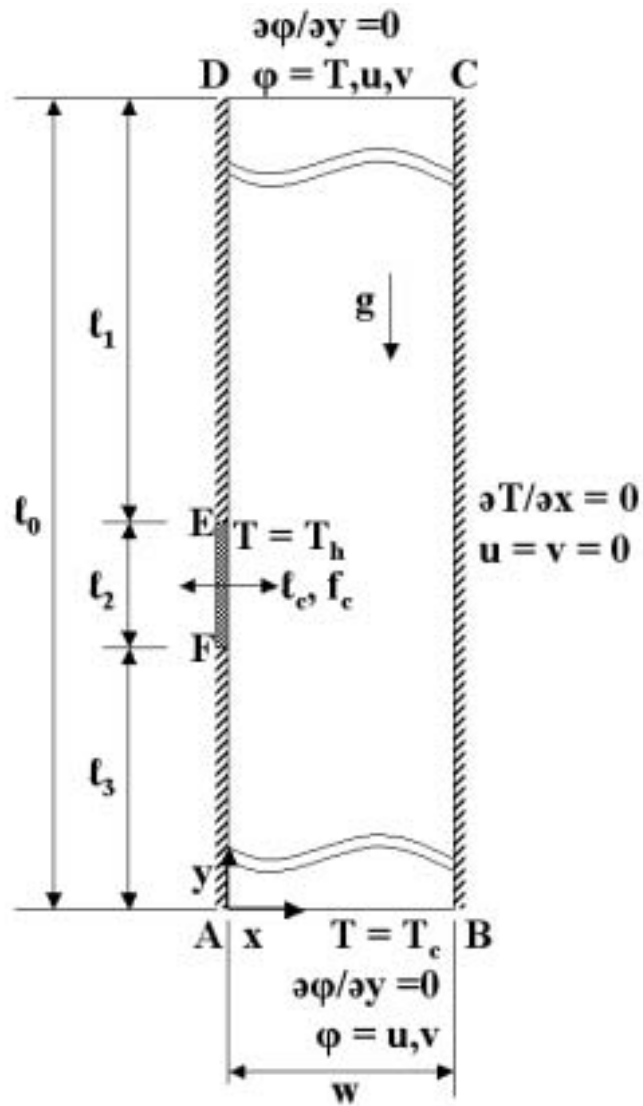


圖 3-1 物理模式圖

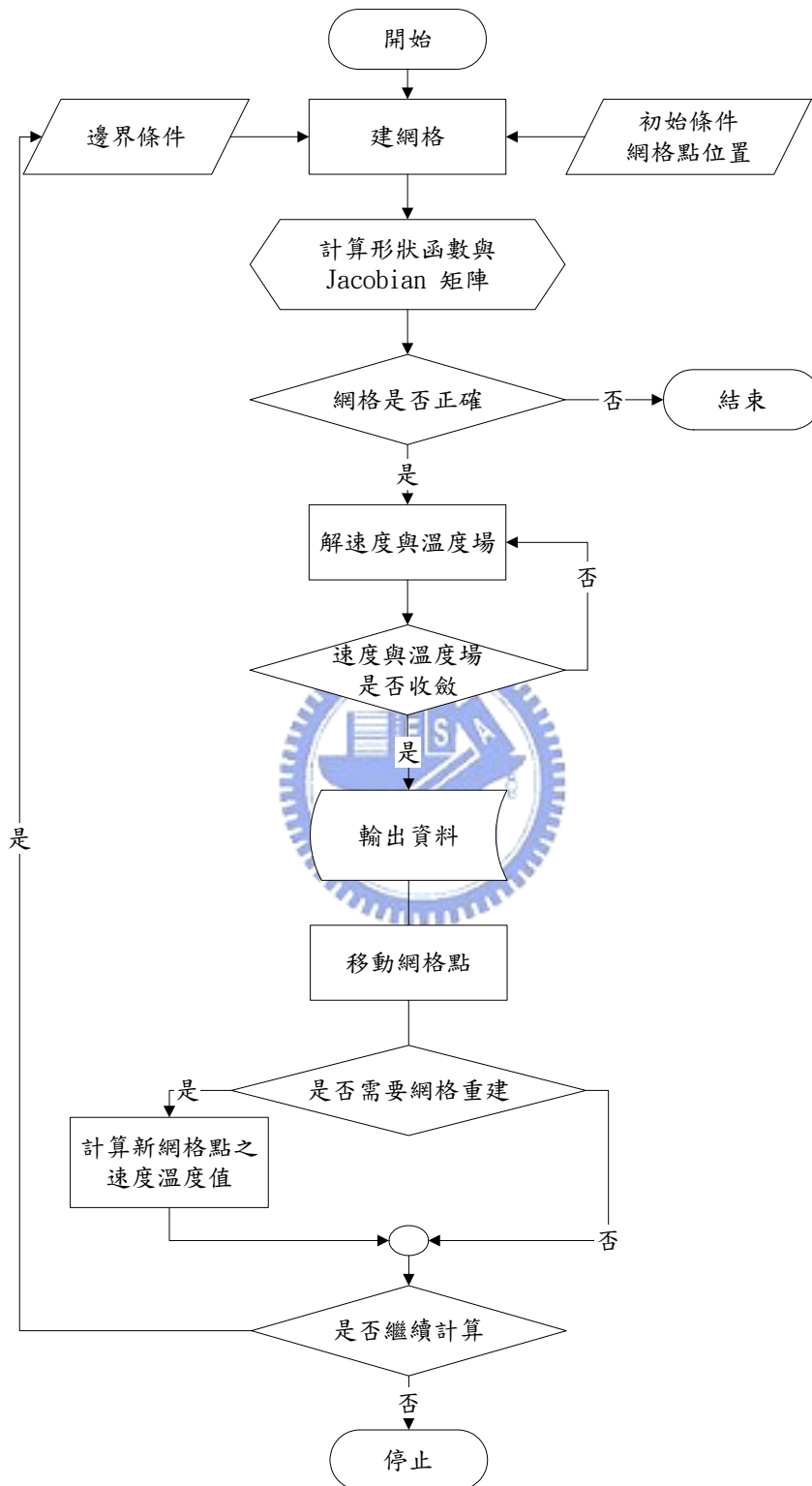


圖 3-2 計算流程圖

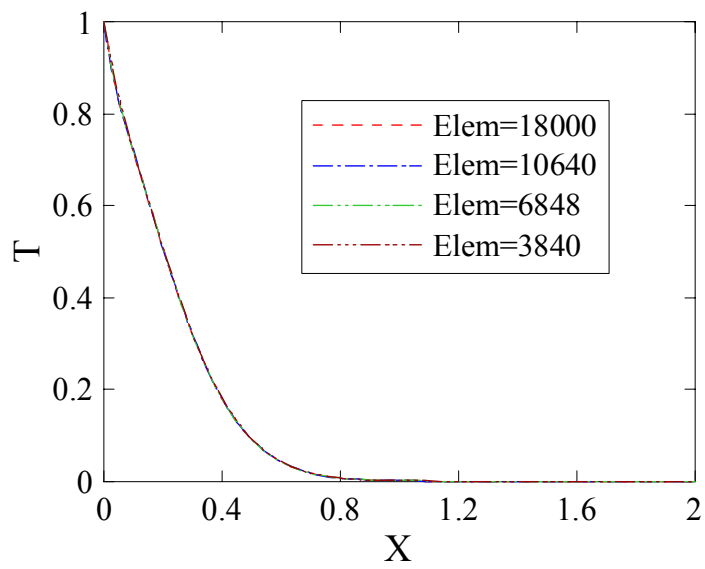
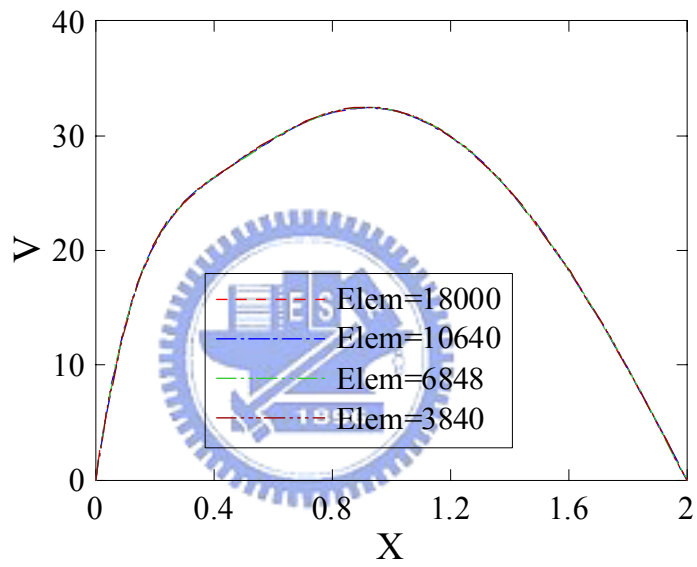
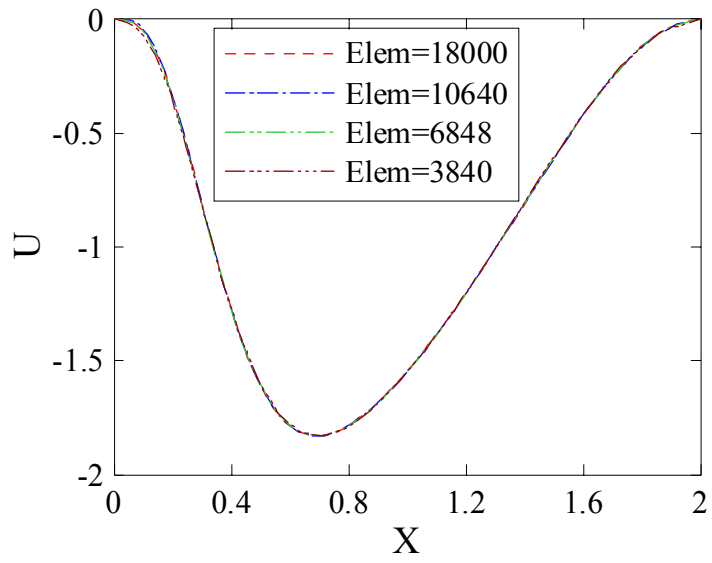


圖 3-3 網格測試($Ra = 10^3$)

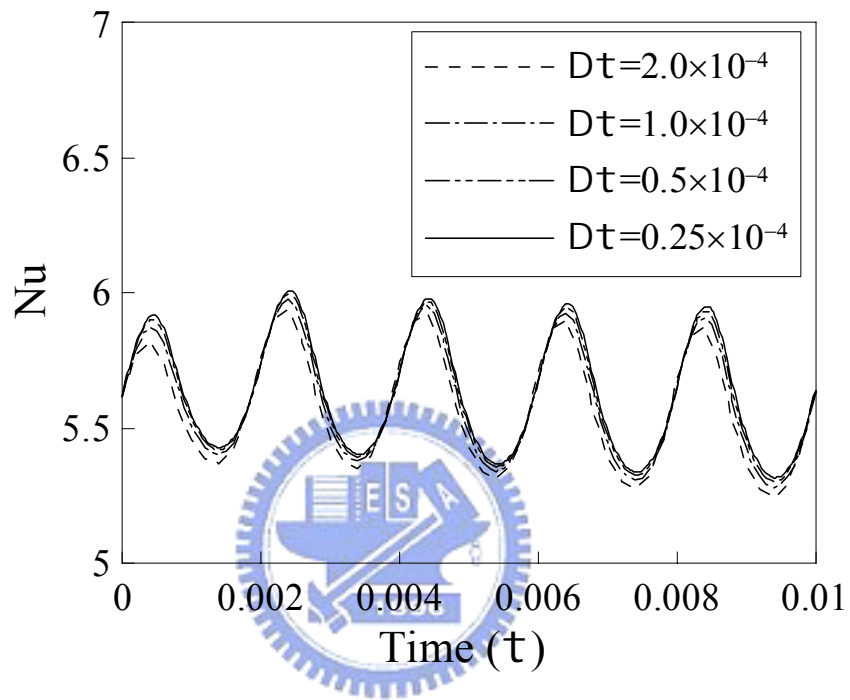


圖 3-4 時間步進測試($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$)

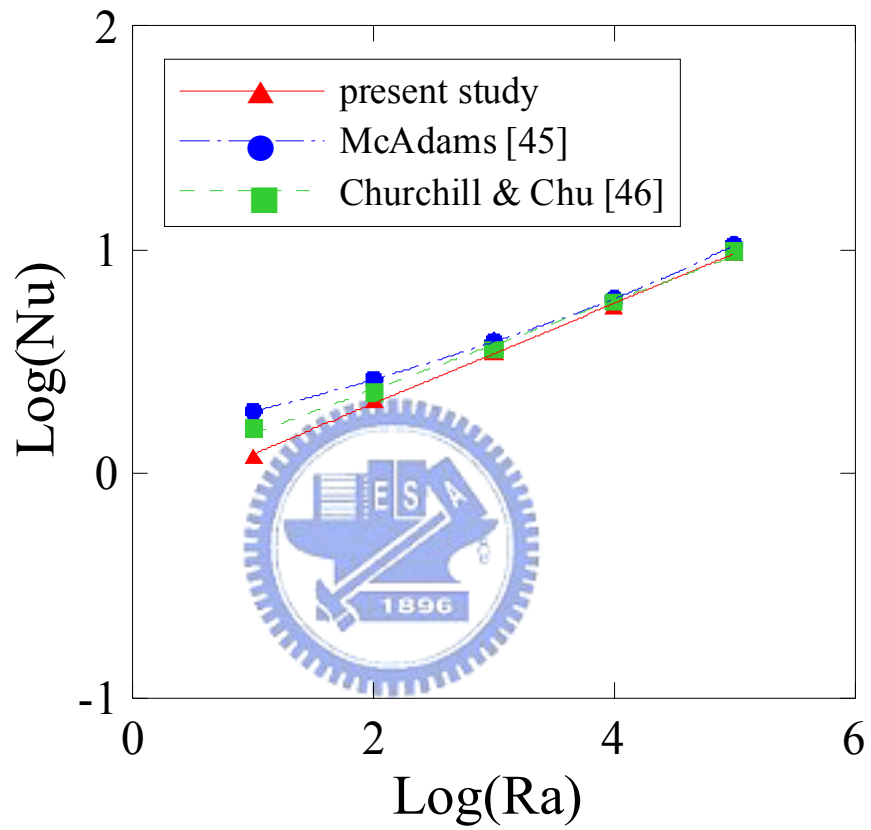
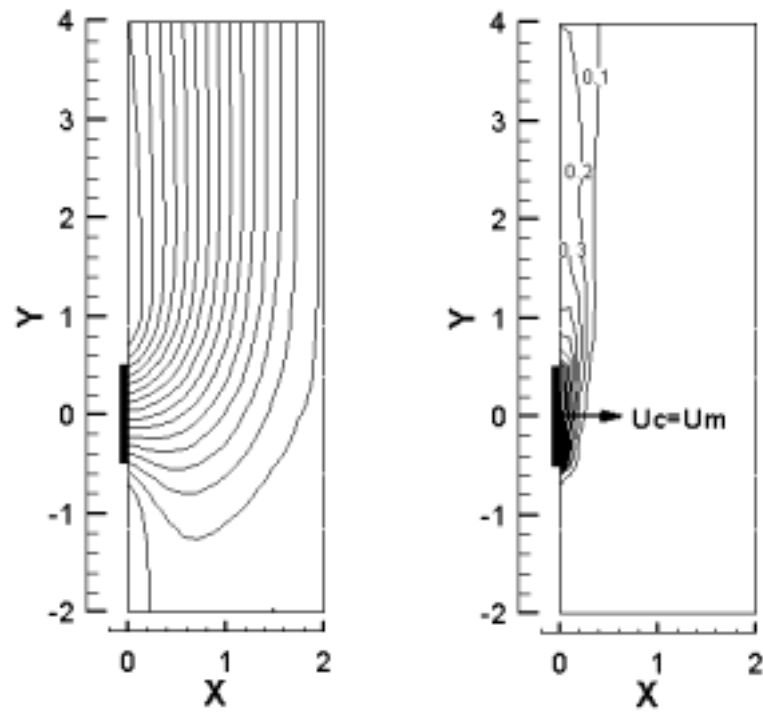
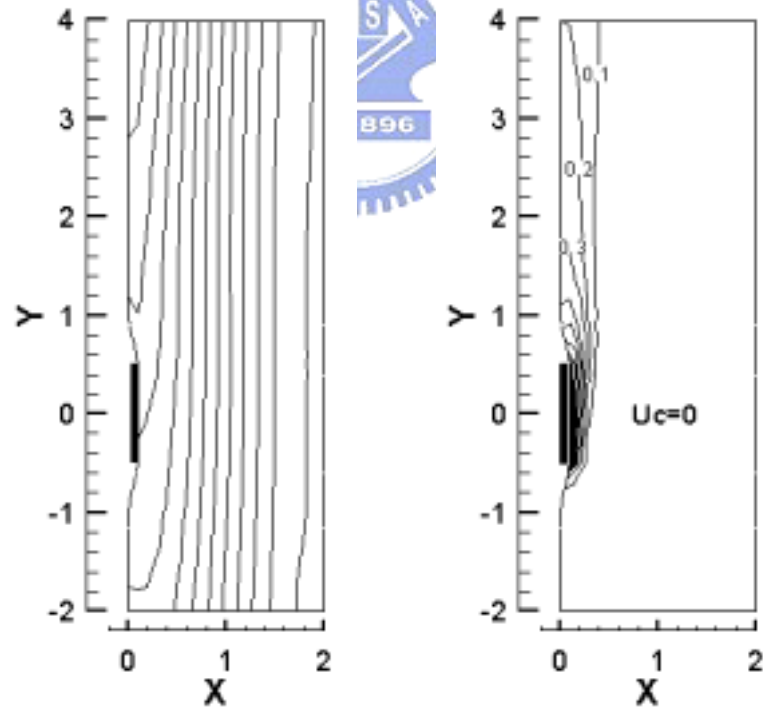


圖 3-5 本研究與 McAdams [45]、Churchill 和 Chu[46]研究結果比較圖

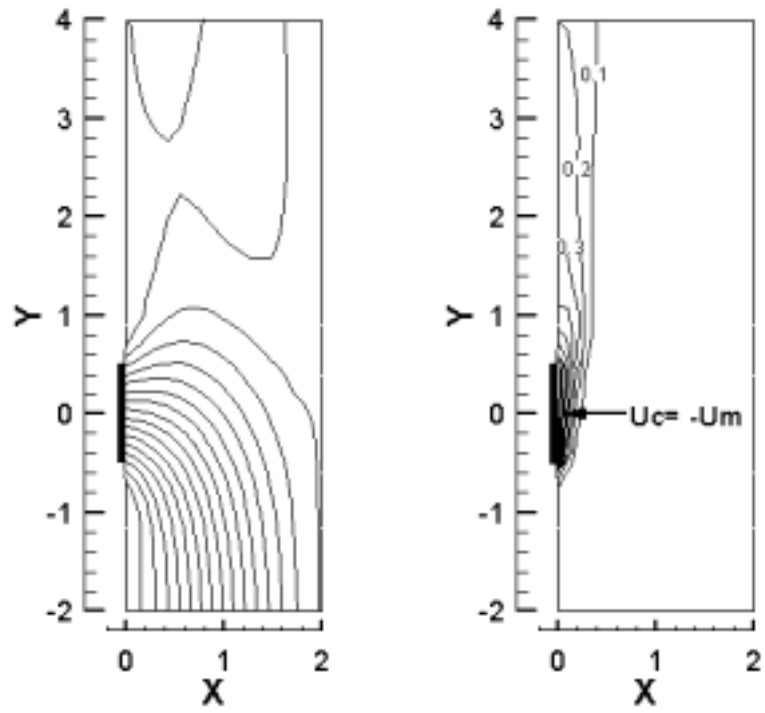


(a) $\tau = 0.02$

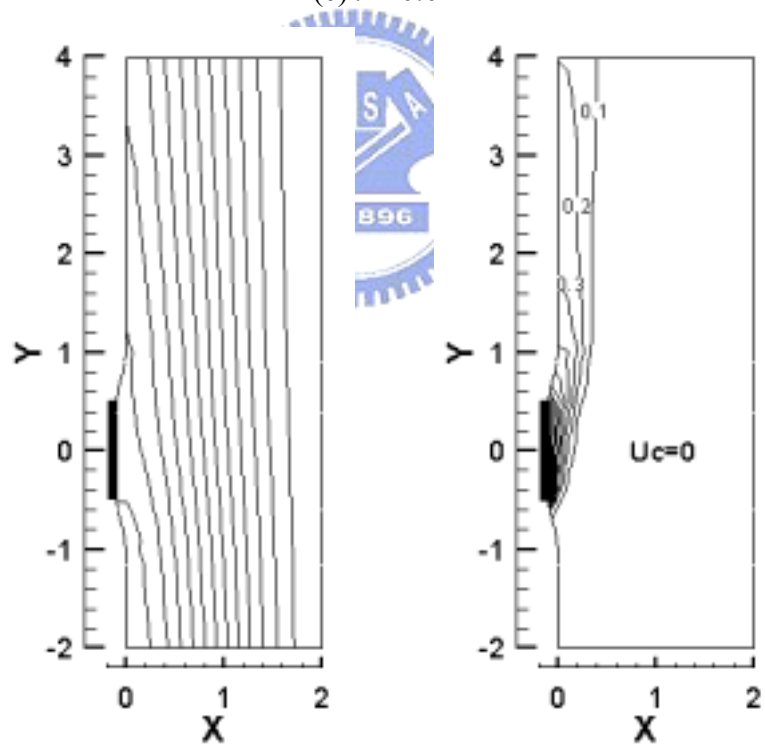


(b) $\tau = 0.0205$

圖 3-6 第 11 振動週期之流線與等溫線變化 ($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$)

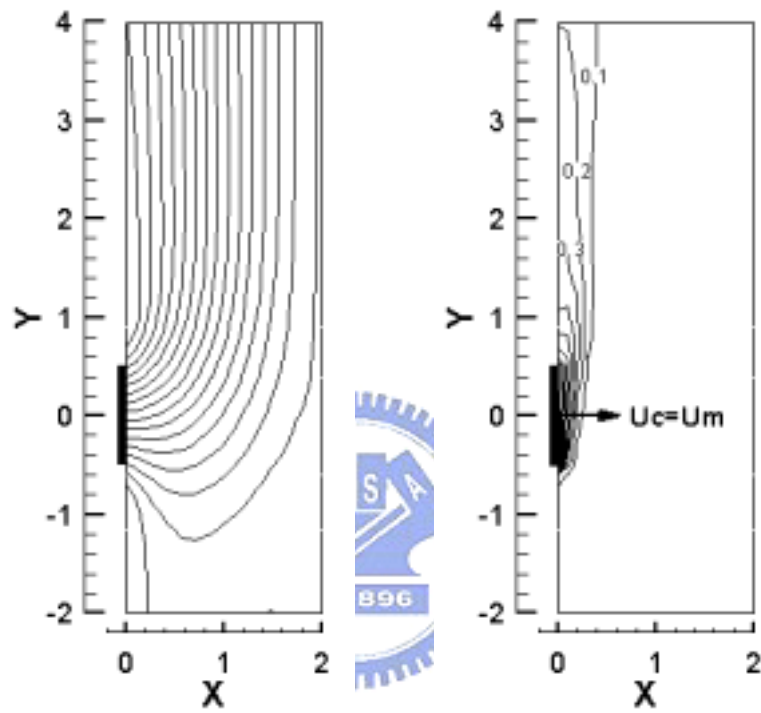


(c) $\tau = 0.021$



(d) $\tau = 0.0215$

圖 3-6 第 11 振動週期之流線與等溫線變化($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$) 續



(e) $\tau = 0.022$

圖 3-6 第 11 振動週期之流線與等溫線變化($Ra = 10^4, L_c = 0.1, F_c = 500$) 續

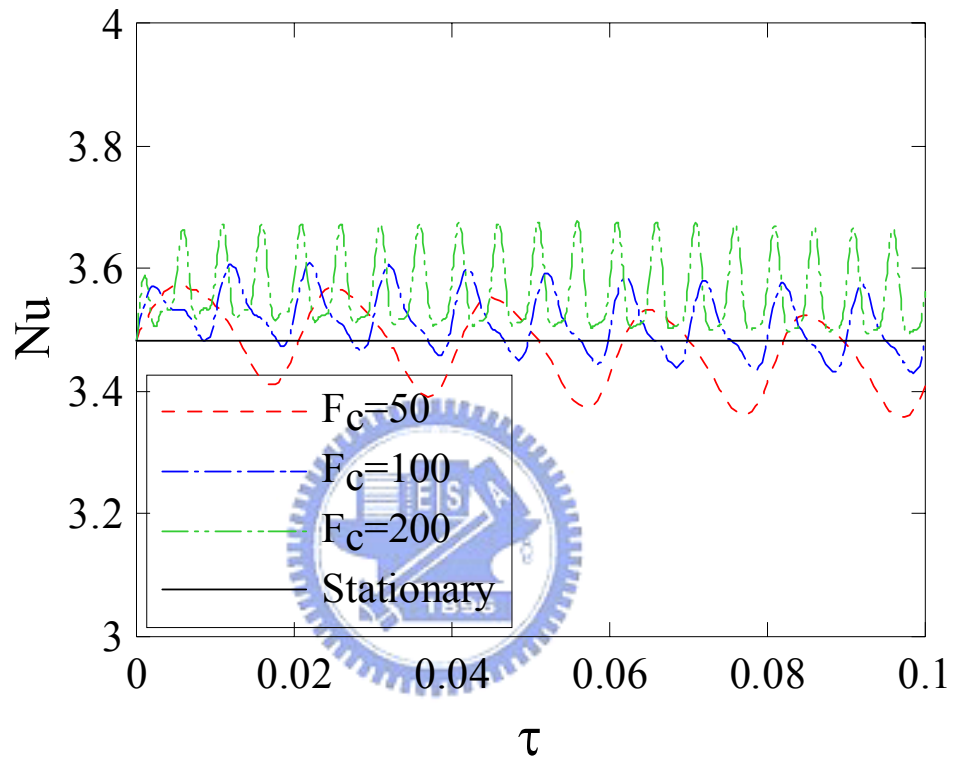


圖 3-7 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.1$)

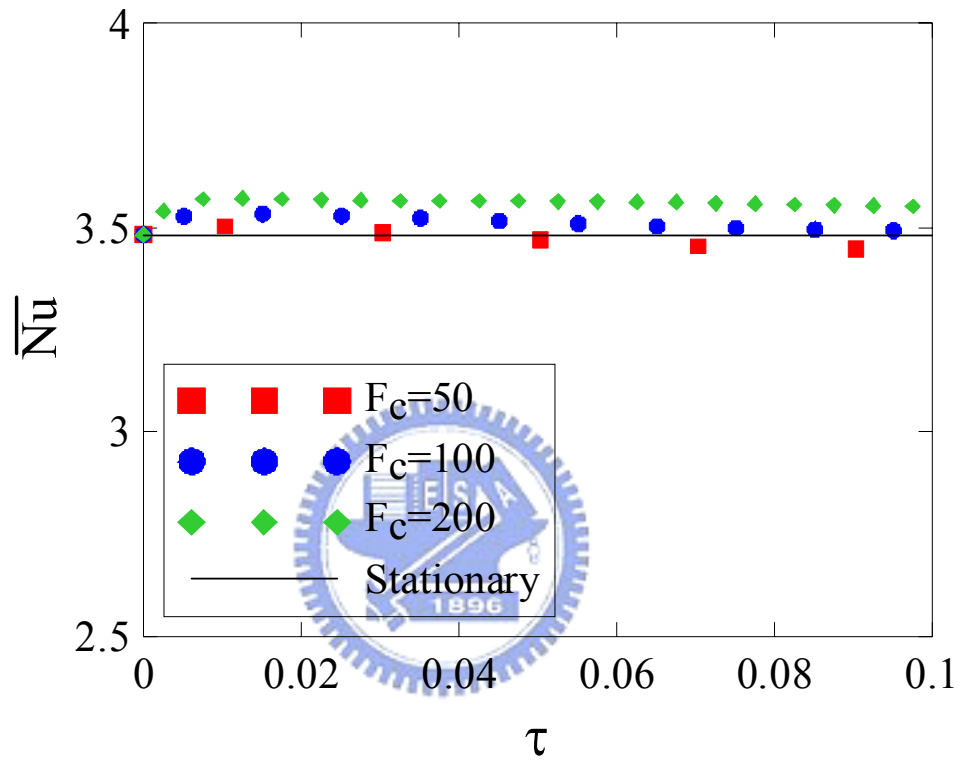


圖 3-8 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.1$)

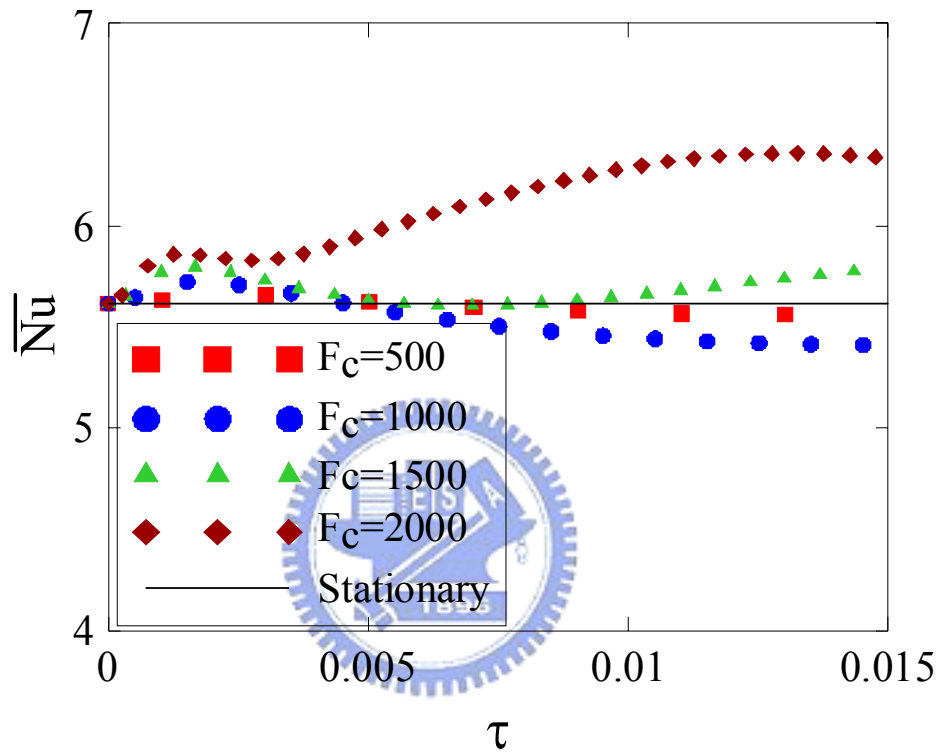


圖 3-9 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^4, L_c = 0.1$)

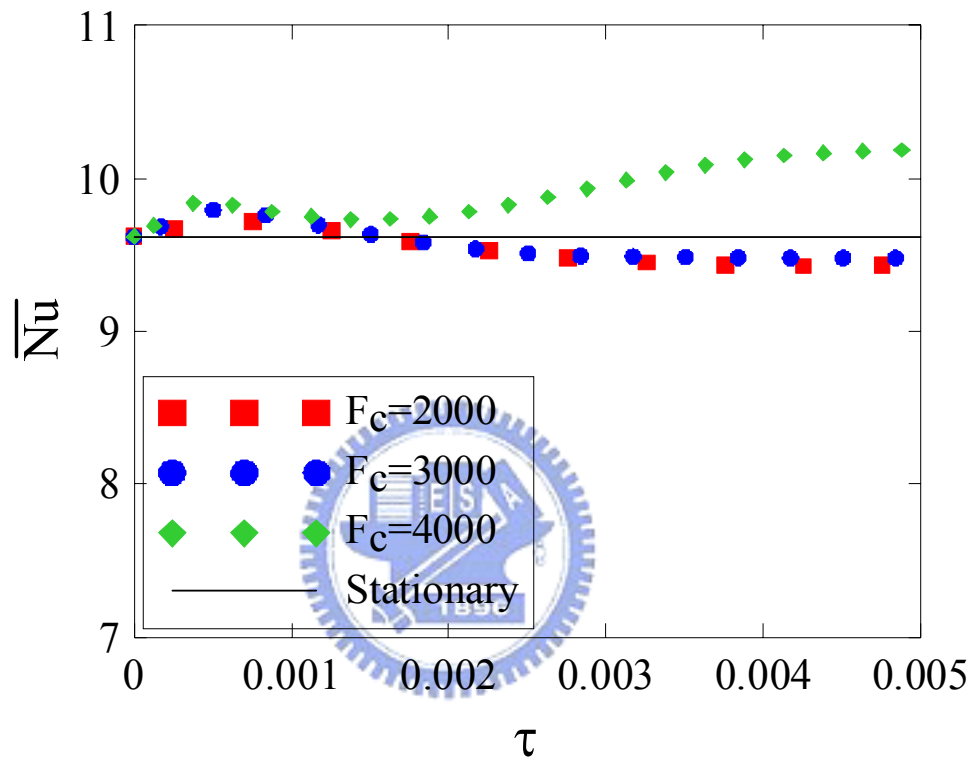


圖 3-10 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^5, L_c = 0.1$)

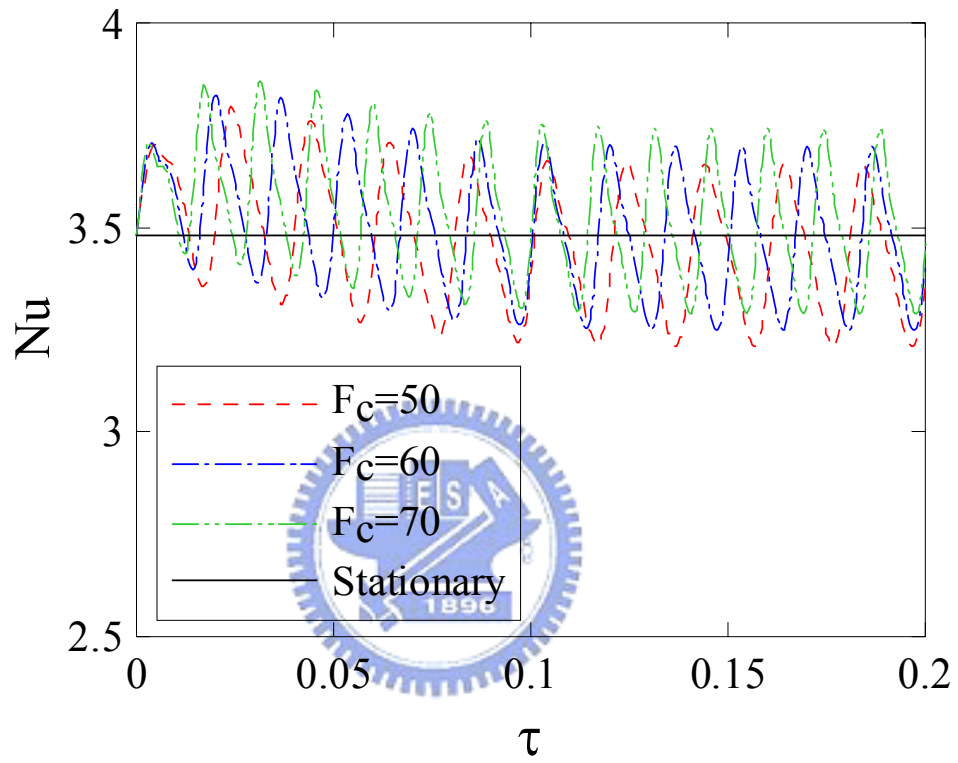


圖 3-11 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.2$)

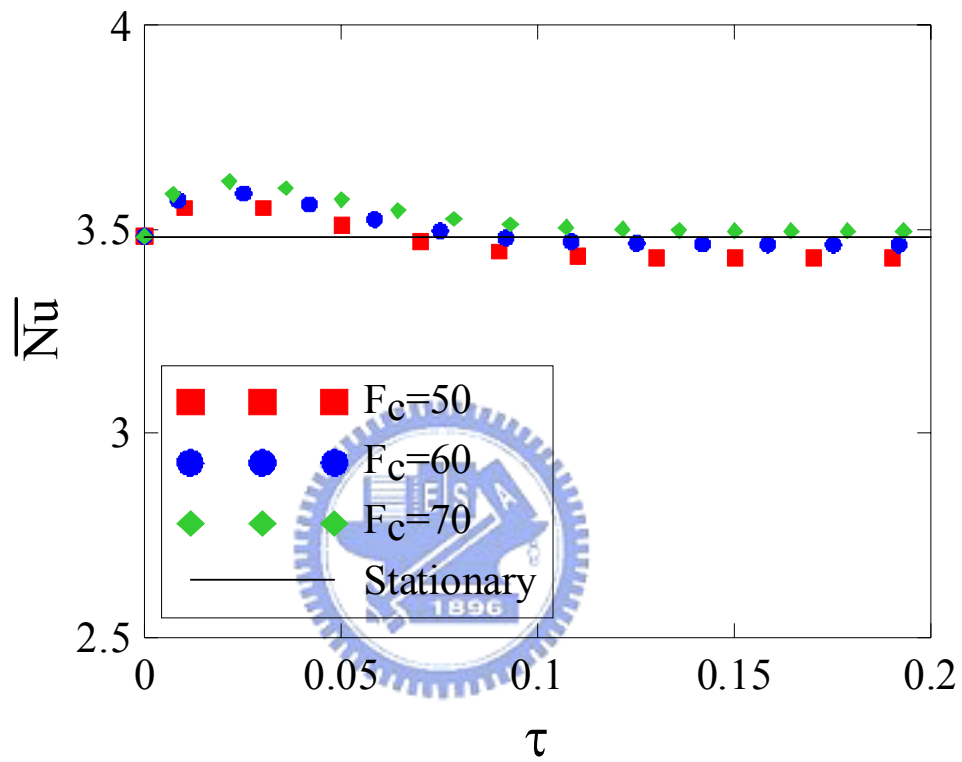


圖 3-12 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.2$)

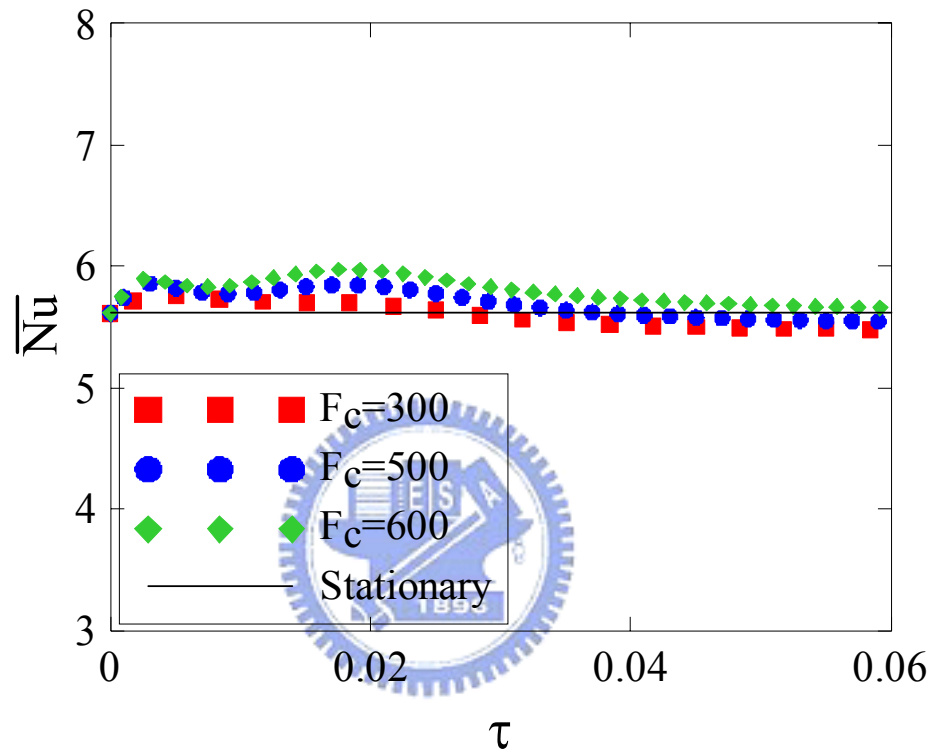


圖 3-13 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^4, L_c = 0.2$)

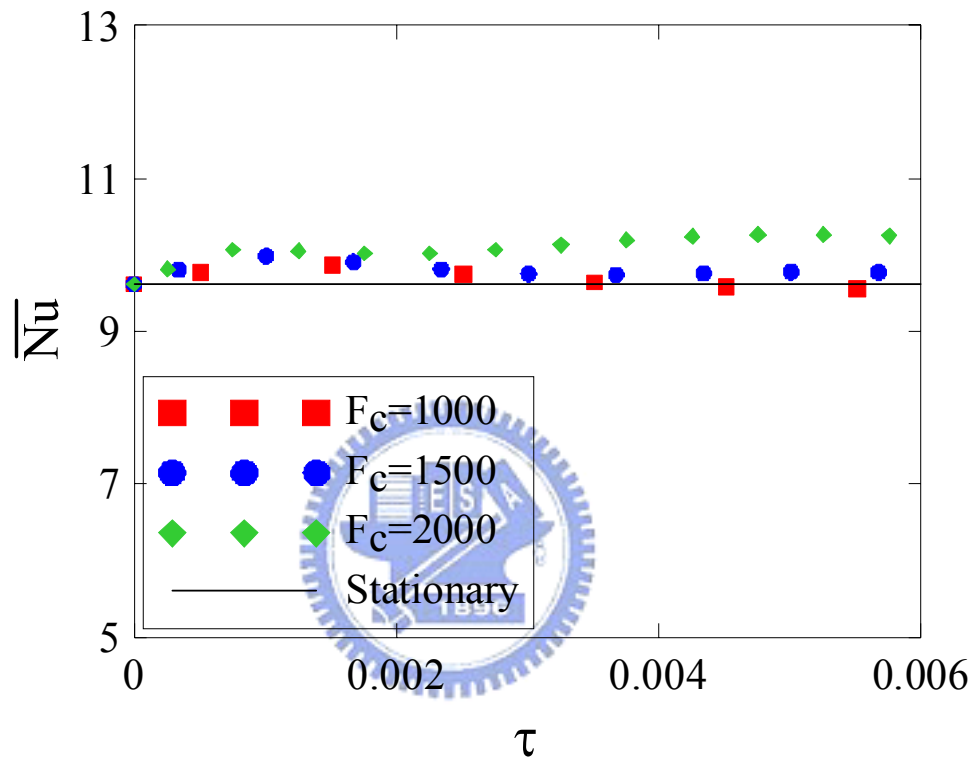


圖 3-14 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^5, L_c = 0.2$)

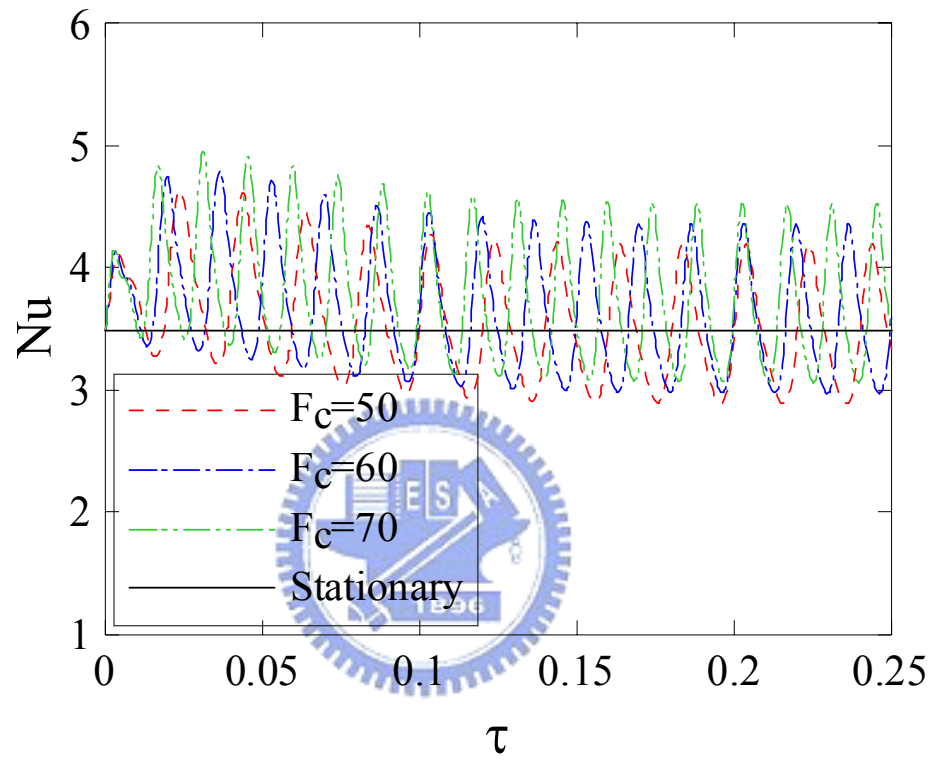


圖 3-15 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.4$)

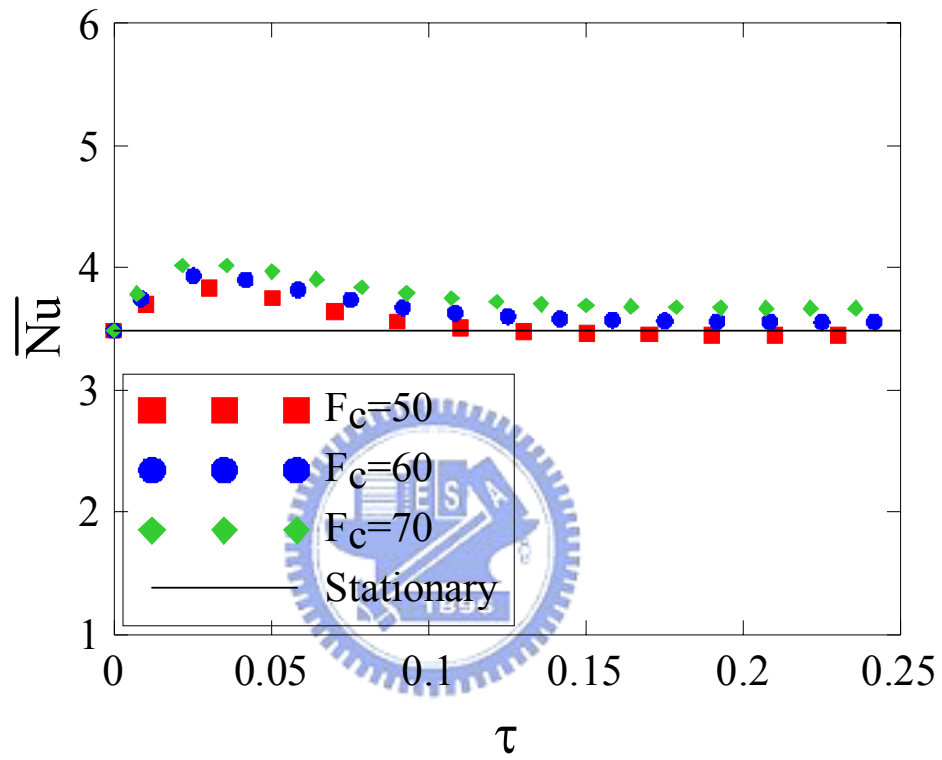


圖 3-16 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^3, L_c = 0.4$)

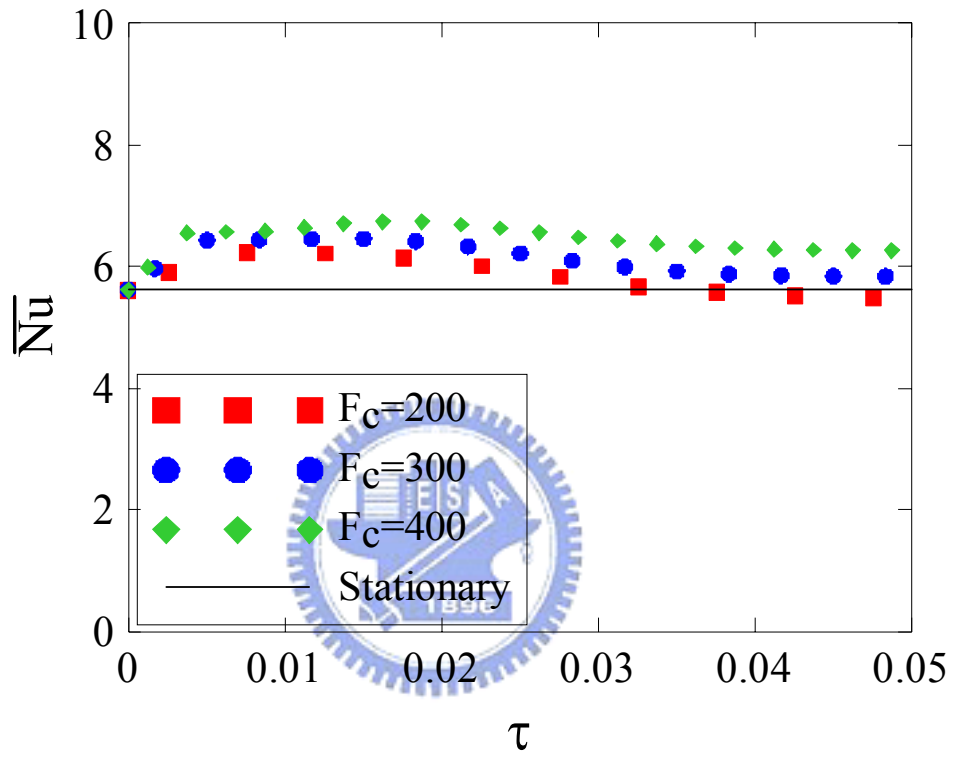


圖 3-17 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^4, L_c = 0.4$)

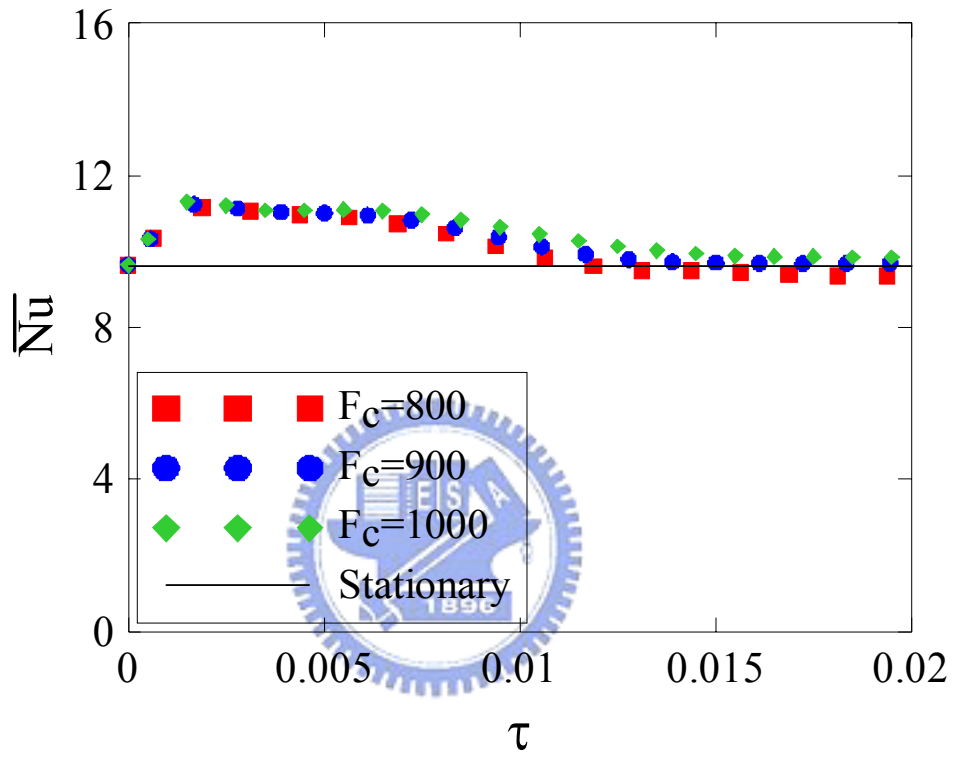


圖 3-18 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Ra = 10^5, L_c = 0.4$)

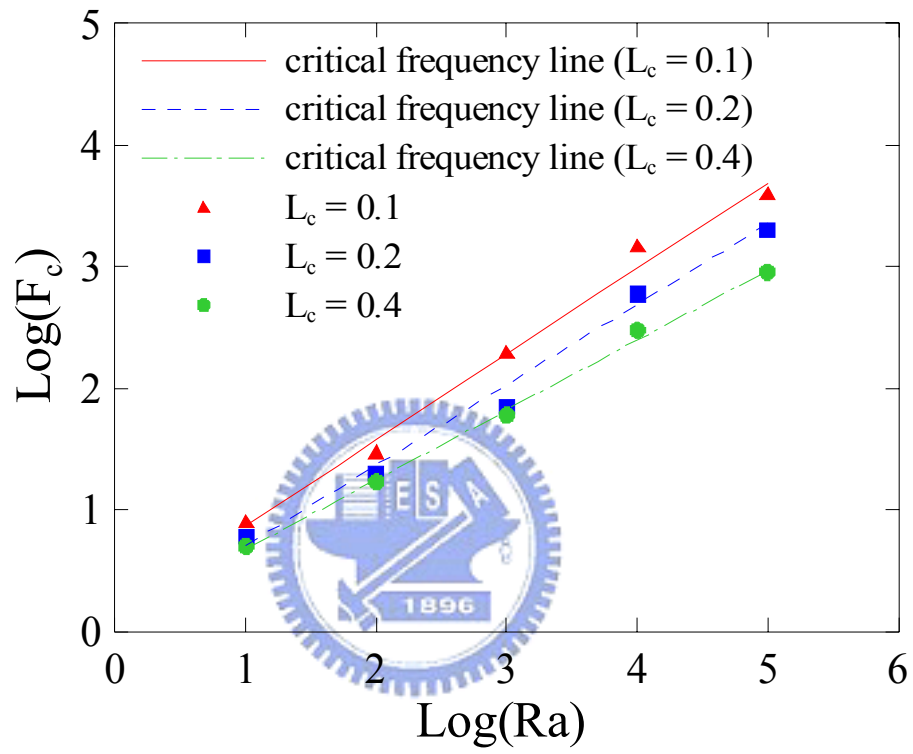


圖 3-19 臨界振動頻率 F_{cc} 隨雷利數 Ra 變化關係圖

第四章 混合與強制對流垂直管道流中振動對高溫壁面熱傳增益之研究

4-1 前言

在實際日常生活或工業上的應用中，許多設備的高溫元件都避免不了因設備自身所引起的振動問題，因此，研究振動對高溫元件的散熱影響就變為設備與系統設計工作上刻不容緩的問題。有關此一垂直管動中高溫面的振動問題在自然對流領域上的研究已於前章有過深入的描述，而臨界振動頻率的概念亦有清楚的說明，當高溫面的振動頻率高於臨界振動頻率時，自然對流的熱傳效益就會比沒有振動時的效果要好。這與既有的觀念，無論振動頻率為何，只要有振動的話其散熱的效果就會比較好，是有出入的。總之，前一章節的探討僅是針對自然對流的領域加以說明，然而在混合對流與強制對流的模式下，振動對高溫面的熱傳效果仍然需要加以研究。

有關振動在混合對流下的熱傳效應屬於移動邊界的問題，類似的問題在過去的研究當中極為罕見，但在混合對流的研究以及混合對流垂直管道流的散熱等相關研究則較為常見。首先針對混合對流的問題，Hieber 與 Gebhart [47]利用演算的方式針對低雷洛數與葛瑞秀夫數推導出球座標的混合對流方程式。Brdlik 等[48]則利用數值分析的方法找出層流模式混合對流中，垂直平板的局部熱傳近似解，其近似解有效的涵蓋範圍可以從強制對流 ($Gr_x/Re_x^2 = 0.01$) 到自然對流 ($Gr_x/Re_x^2 = 100$) 之範疇。Cheng [49]則把有關斜角面的熱傳問題延伸到多孔性介質的領域，並發現了自然對流與強制對流的差異性，進而提出混合對流於多孔性介質的研究結果。Hwang [50]利用實驗的方法來分析混合對流中氣流方向對垂直平板流以及加裝突起方塊於平板上對熱傳效率的影響，並且發現在層流混合對流模式中，針對向上的流場，浮力項會增加熱傳的效應，但是若為向下的流場則浮力項反而會減少熱傳的效率。又在紊流混合對流模式中，浮力項對於熱傳的增益則為向下流場會優於向上流場。Tsay [51]利用數值的方法來研究混合對流垂直管道流於單邊加熱的熱傳現象，該研究中利用不連續的片段等溫或等熱量高溫面加以模擬，發現了不同於連續高溫面的熱傳現象。Kang 與 Jaluria [52,53]利用數值的方法研究於混合對流場中加入連續的流動物質在管道內，其主要的目的在找出較好的冷卻方式以應用於機械成形製造過程中。Andreozzi 等[54]亦利用數值分析的技巧來探討與浮力方向相反的移動平板於垂直管道中的熱傳現象，結果顯示，當移動平板的移動速度越快時，對大

的壁面溫度將會減少，這是因為反向移動的平板使管道內的質量流率減少所引起。

綜觀以上研究，即時部份論文有描述到移動邊界的問題，但也僅是利用公式轉換的模式來設定邊界條件，尚未有實際的格點移動方式來計算流場與溫度場的變化，因此本文所採用的方法，將可獲得更加準確與更接近實際情況的數據。

4-2 物理模式

本研究採用的物理模式如圖 4-1 所示，主要為一個高與寬 w 的二維垂直管道。其中高溫振動壁面高度為 h 且位於左側壁面，振動面距離上方與下方開口面高度分別為 h_1 與 h_2 ，又該一振動面的溫度固定為 T_h 。在垂直管道中除了高溫振動面外，其餘兩側的壁面皆為絕熱狀態，底部開口邊界速度為垂直向上且速度為 v_0 ，又其進入管道之空氣溫度為 T_c 。當振動開始時 ($t > 0$)，高溫面將以垂直於重力的方向作一水平來回振動，其振動頻率為 ω 且振幅為 A 。由於高溫面於垂直管道流中振動的交互作用影響，流場與溫度場的變化屬於隨時間而變化的移動邊界問題，因此可以 ALE 方法適當的描述。



4.3 統御方程式與邊界條件

本研究利用以下的假設條件簡化問題。

1. 流場為二維的層流流場。
2. 流體為不可壓縮之牛頓流體。
3. 流體的各種性質除了密度外皆為常數。
4. 流體與壁面間符合無滑動條件(no-slip condition)。

根據 l_2 、 T_h 、 T_c 以及 v_0 為參考變數而定義出以下之無因次參數，並將 ALE 統馭方程式簡化如下：

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{l_2}, \quad Y = \frac{y}{l_2}, \quad \tau = \frac{tv_0}{l_2}, \quad U = \frac{u}{v_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad \hat{U} = \frac{\hat{u}}{v_0}, \\
 P^* &= \frac{P_d}{\rho_0 v_0^2}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 v_0 l_2}{\mu} = \frac{v_0 l_2}{\nu}, \\
 \theta &= \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta(T_h - T_c)l_2^3}{\nu^2}
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

其中 \hat{u} 為格點速度 (mesh velocity)， l_c 與 f_c 分為振動幅度與振動頻率。

連續方程式

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4-2)$$

動量方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (4-4)$$

與能量方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4-5)$$

又無因次高溫壁面振動速度 U_c 的計算方式如下所示：

$$U_c = U_m \cos(2\pi F_c \tau) \quad (4-6)$$

其中無因次的最大振動速度 U_m 則可以由下式獲得：

$$U_m = 2\pi F_c L_c \quad (4-7)$$

初始條件

以高溫壁面靜止不動之穩態速度與溫度場為初始條件 (固定狀態)。

邊界條件

在垂直管道下方開口面 AB 為

$$U = 0, V = 1, \theta = 0 \quad (4-8)$$

除了高溫振動面 EF 外，其餘的壁面為

$$U = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (4-9)$$

在垂直管道上方開口面 CD 為

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (4-10)$$

高溫振動面 EF 為

$$U = U_c, V = 0, \theta = 1 \quad (4-11)$$

4.4 數值方法

本研究的數值方法採用葛拉金有限元素法(Galerkin finite element method)。所有元素均為八節點二次等參元素，並配合處罰函數(penalty function)與連續方程式消去壓力項，利用後項差分隱式法(backward different implicit method)處理時間微分項，Newton-Raphson 迭代法處理非線性項。為縮短計算所需的時間，本研究採用鋒面法(frontal method)，配合 Gauss Jordan 消去法與高斯積分法，求解經過上述步驟產生之聯立方程組，詳細的離散方程式與矩陣可參考附錄 B 所示。又數值計算流程與第三章之圖 3-2 相同，詳細數值方法演算程序如第三章之數值方法所敘述。

4.5 結果與討論

本研究所採用的工作流體為空氣，其普朗特常數為 $Pr = 0.71$ 。主要的研究參數包含葛瑞秀夫數 Gr 、振幅 L_c 以及振動頻率 F_c ，本文所採用的參數數值如表 4-1 所示。

高溫振動面的局部紐塞數 (local Nusselt number) 定義如下：

$$Nu_Y = - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{EF} \quad (4-12)$$

高溫振動面的平均紐塞數 (average Nusselt number) 定義如下：

$$Nu = \frac{1}{L_2} \int_{L_3}^{L_3+L_2} Nu_Y dY \quad (4-13)$$

高溫振動面振動一週期之時平均紐塞數 (time-averaged Nusselt number) 定義如下：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} Nu d\tau \quad (4-14)$$

其中 τ_p 代表振動一個週期的時間亦可等於 $1/F_c$ 。

4.5.1 格點與時間步進測試

為了達到合理的邊界條件，在經由數值測試的結果於高溫面距離頂部與底部的長度分別採用了 $L_1 = 8l$ 與 $L_3 = 2l$ ，管道之寬度 $W = 2$ 、高溫面長度 $L_2 = l$ 、高溫振動面與上

下固定管道壁面之振動緩衝區長度各為 0.5。另為了獲得較準確的速度 U 和 V 以及溫度 θ ，在雷諾數 $Re = 10^2$ 且葛瑞秀夫數 $Gr = 10^4$ 之穩定流場下，採用三種非均勻分佈的計算網格進行網格測試，其元素個數分別 3840、6848 與 10640，沿著高溫面中心平行 X 軸之 U 、 V 和 θ 分布如圖 4-2 所示。根據網格測試的結果，本研究採用 3840 個元素之計算格點。又在時間步進 $\Delta\tau$ 大小方面，在葛瑞秀夫數 $Gr = 10^4$ 、雷諾數 $Re = 10^2$ 、高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 以及高溫面振動頻率 $F_c = 2$ 的條件下 ($\tau_p = 1/F_c = 1/2 = 5.0 \times 10^{-1}$)，分別以 $\Delta\tau = 5.0 \times 10^{-2}$ ($N_p = 10$)、 2.5×10^{-2} ($N_p = 20$)、 1.25×10^{-2} ($N_p = 40$)、 5.0×10^{-3} ($N_p = 100$) 以及 2.5×10^{-3} ($N_p = 200$) 等五種不同的時間步進大小測試，結果如圖 4-3 所示，針對此一條件下採用 $\Delta\tau = 1.25 \times 10^{-2}$ 為時間步進大小。但實際的時間步進值並不一定，而會因為雷利數 Ra 與振動幅度 L_c 的不同而有所改變，基於本測試結果在其他不同條件下的週期步進次數 N_p (振動一週期的時間步進次數) 皆採用 40，而其相對應的時間步進大小可計算如下：

$$\Delta\tau = \frac{1}{N_p \times F_c} = \frac{1}{40 \times F_c} \quad (4-15)$$

4.5.2 振動高溫面對流場與溫度場之影響

如前第三章所述，在實際的應用狀況中，IC 運轉時的溫度與周圍空氣的溫度差在 100°C 以內，且一般 IC 的規格大小約為 10^{-2} m 等級，又本文的研究包括了層流中混合對流與強制對流的領域，因此根據圖 4-4 Metais 等[55]及 Holman[56]之研究，選定後續探討的問題以雷諾數 $Re = 10^2$ 且葛瑞秀夫數 $Gr = 10^0 \sim 10^5$ 為主 ($Gr/Re^2 = 10^{-4} \sim 10^1$)。

又為了更加清楚的顯示流場與溫度場的變化情形，所以有關流線與等溫線的顯示範圍僅以高溫面附近為主，並利用箭頭符號來表示振動高溫面的運動方向，而其無因次流線函數 Ψ 定義與第三章相同如下：

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, V = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (4-16)$$

圖 4-5 所示即為葛瑞秀夫數 $Gr = 10^5$ 、雷諾數 $Re = 10^2$ 、高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 以及高溫面振動頻率 $F_c = 10$ 下第十六個振動週期的流線與等溫線隨時間變化情形。圖 4-5(a) 為第十六振動週期的初始狀況 (亦為第十五振動週期的結束狀況)，無因次時間 $\tau = 1.5$ ，此時高溫面位於週期振動範圍的中間且運動方向朝右，該一時間的運動速度最大，靠近

高溫面的流體因為擠壓而向右運動，所以靠近高溫面之流線會由高溫面向右延伸，又因為強制對流與高溫面的熱浮力影響而向上，離高溫面較遠處之流體則受入口速度之影響而持續向上流動，流線則呈現由下向上分布之趨勢。圖 4-5(b)，高溫面已經移動到最右邊的位置，此時高溫面為靜止狀態亦即振動速度為零，鄰近高溫面上方的區域其流線仍保持至高溫面向上方延伸的形式，但在此區域以外則與穩態流場下的流線較為類似。圖 4-5(c)，高溫面又回到位於週期振動範圍的中間但運動方向朝左，該一時間的運動速度亦為最大，不同於圖 4-5(a)的擠壓現象，流體會被高溫面所吸引過來，導致流線直接從上方與下方連接到高溫面。圖 4-5(d)，高溫面移動到水平振動的最左邊位置，此時高溫面亦為靜止狀態，由圖中可以發現高溫面下方與遠離高溫面之上方會形成迴流區域，而在其他區域的流線則為呈現由右下至左上流動的現象。在等溫線的分布變化方面，其溫度變化較大的地方多集中在靠近振動高溫面的相鄰與上方區域內，亦即該範圍內的熱擴散較為明顯，又由圖 4-5 內的各時間等溫線分布可知，其溫度分布變化不大，並不會隨著高溫面的振動位置而有大幅度的改變，單以等溫線的分布圖無法判別其差異性。

4.5.3 振動頻率對熱傳之影響

圖 4-6 顯示當雷諾數 $Re = 10^2$ 、葛雷秀夫數 $Gr = 10^0$ 以及高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 的情況下，不同的高溫面振動頻率 ($F_c = 20$ 及 $F_c = 30$) 對熱傳的影響。由圖中可以發現，當無因次高溫面振動頻率 F_c 為 20 時，溫度場達到穩定後的平均紐塞數 Nu 約在穩態非振動高溫面的平均紐塞數 Nu_{st} 上下震盪，但是當 F_c 提高至 30 後，其達到穩定後的平均紐塞數 Nu 會明顯的在大於穩態非振動高溫面之平均紐塞數 Nu_{st} 的地方上下震盪。若利用時平均紐塞數來觀察不同的高溫面振動頻率對熱傳效果的影響時，則可以更加清楚的比較其與穩態非振動高溫面的熱傳效果，圖 4-7 所示即為當雷諾數 $Re = 10^2$ 、葛雷秀夫數 $Gr = 10^3$ 以及高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 的情況下時平均紐塞數 \overline{Nu} 在 $F_c = 20$ 及 $F_c = 30$ 時隨時間變化的關係圖，由該圖即可明顯的看出當 $F_c = 20$ ，溫度場達到穩定的狀態後，其時平均紐塞數 \overline{Nu} 會略小於穩態非振動高溫面之平均紐塞數 Nu_{st} ，但是當 $F_c = 30$ ，則時平均紐塞數 \overline{Nu} 會大於穩態非振動高溫面之平均紐塞數 Nu_{st} ，而不同葛瑞秀夫數下之穩態非振動高溫面平均紐塞數值可參考表 4-2 所示。

又該處針對振動高溫面所定義之溫度場達到穩定的狀態即代表連續十個週期其時

平均紐塞數 \overline{Nu} 的變化皆小於或等於 10^{-3} ，如下式所示：

$$\left| \frac{\overline{Nu}_{i+1} - \overline{Nu}_i}{\overline{Nu}_i} \right| \leq 10^{-3} \quad (4-17)$$

該一穩定狀態下的時平均紐塞數即定義為「穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 」。

圖 4-8 至圖 4-17 所示為不同葛瑞秀夫數下 ($Gr = 10^1 \sim 10^5$) 之平均紐塞數 Nu 與時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間之變化關係 (雷諾數與振幅同為 $Re = 10^2, L_c = 0.1$)，由該些圖中可以發現時平均紐塞數 \overline{Nu} 會大於穩態非振動高溫面平均紐塞數 Nu_{st} 之概略振動頻率，亦即第三章所提到之臨界振動頻率 F_{cc} 。其中， $Gr = 10^1$ 、 $Gr = 10^2$ 及 $Gr = 10^3$ 之臨界振動頻率 F_{cc} 與 $Gr = 10^0$ 之分布情形相同，都介於 $F_c = 20$ 及 $F_c = 30$ 之間，但隨著葛瑞秀夫數越大，臨界振動頻率 F_{cc} 越遠離 $F_c = 20$ ，當 $Gr = 10^4$ 時，臨界振動頻率 F_{cc} 則已經明顯的增大且介於 $F_c = 30$ 及 $F_c = 40$ 之間，這可以由圖 4-14 與圖 4-15 中看出。又當 $Gr = 10^5$ 時，流場已屬自然對流之範疇 (參考圖 4-4， $Re = 10^2, Gr = 10^5$)，當高溫面振動頻率 F_c 高達 50 後，溫度場已經無法達到穩定的狀態，時平均紐塞數在經過一段長時間的振動後，仍然會上下震盪，如圖 4-17 所示，無法達到式 4-17 所定義之穩定狀態值與獲得穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} ，因此臨界振動頻率 F_{cc} 無法容易判斷出介於何種頻率間，針對高葛瑞秀夫數無法達到穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 之情形，可利用全時間 ($\tau = 0 \sim 5$) 的平均紐塞數予以平均後求得近似穩定狀態下之穩定時平均紐塞數解，公式如下：

$$\overline{Nu}_{st} = \frac{1}{5} \int_{\tau=0}^5 Nu(\tau) d\tau \quad (4-18)$$

利用上述之公式即可獲得 $Re = 10^2, Gr = 10^5, L_c = 0.1$ 下， $F_c = 50$ 、 $F_c = 60$ 與 $F_c = 70$ 之近似穩定時平均紐塞數，並可發現當 $F_c = 70$ ，其數值會大於穩態非振動高溫面之平均紐塞數 Nu_{st} ，亦即臨界振動頻率 F_{cc} 介於 $F_c = 60$ 及 $F_c = 70$ 之間。

4.5.4 葛瑞秀夫數對熱傳之影響

圖 4-18 顯示當 $Re = 10^2$ 、高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 時，針對不同葛瑞秀夫數 ($Gr = 10^1 \sim 10^5$) 高溫面振動達到穩定狀態下之穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 與穩態非振動高溫面平均紐塞數 Nu_{st} 之比值隨振動頻率 F_c 變化的情形，振動頻率的範圍在 0.1 至 100

之間。由圖中可以發現，無論葛瑞秀夫數為何，穩定時平均紐塞數與穩態平均紐塞數之比值 ($\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$) 會開始超過 1.0 的振動頻率 F_c 都介於 10 與 100 之間。而如同第三章的定義，當 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 等於 1 時之振動頻率 F_c 即為臨界振動頻率 F_{cc} ，而當高溫面之振動頻率 F_c 高於臨界振動頻率 F_{cc} 後，其熱傳的效果將會優於穩態非振動高溫面的熱傳效率。

相同地，圖 4-19 與圖 4-20 所示分別為高溫面振幅 $L_c = 0.2$ 與 $L_c = 0.4$ 且 $Re = 10^2$ 時，不同葛瑞秀夫數 ($Gr = 10^1 \sim 10^5$) 振動高溫面穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 與穩態非振動高溫面平均紐塞數 Nu_{st} 之比值隨振動頻率變化的情形。由圖 4-19 中可以發現，當高溫面振幅 $L_c = 0.2$ 時，穩定時平均紐塞數與穩態平均紐塞數之比值 ($\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$) 會開始超過 1.0 的振動頻率位於 10 附近，在低葛瑞秀夫數 ($Gr = 10^1 \sim 10^3$) 下會略低於 10，而在高葛瑞秀夫數 ($Gr = 10^4$ 與 $Gr = 10^5$) 時會高於 10。又由圖 4-20 中可以發現，當高溫面的振幅提高到 $L_c = 0.4$ 時，因為振幅較大，在高振動頻率 ($F_c = 10 \sim 100$) 下振動速度極快，無法有效獲得穩定的時平均紐塞數，因此主要的研究振動頻率範圍集中在 10 以下，且該一振幅內，除了 $Gr = 10^3$ 時的平均紐塞數比值 ($\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$) 等於 1.0 之振動頻率會大於 10 外，其餘的葛瑞秀夫數都會使平均紐塞數比值 ($\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$) 等於 1.0 之振動頻率介於 1 到 10 之間。

從上述三個圖中可以清楚觀察到，相同的葛瑞秀夫數 Gr 下，隨著振幅加 L_c 大後，臨界振動頻率 F_{cc} 會越小。同樣地，在相同的振幅 L_c 下，隨著葛瑞秀夫數 Gr 加大後，臨界振動頻率 F_{cc} 會越大。

4.5.5 臨界振動頻率

為了求得臨界振動頻率 F_{cc} 之數值與了解不同範圍之振動頻率下穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 的變化情形，本研究針對各種葛瑞秀夫數與各種振幅都計算了振動頻率 F_c 為 0.1、0.3、1、3、10、30 及 100 之七種狀況 (除了 $L_c = 0.4$ 時， $F_c = 30$ 與 $F_c = 100$ 不易求得穩定時平均紐塞數 \overline{Nu}_{st} 外)，並針對相鄰臨界振動頻率 F_{cc} 之兩個頻率間再仔細分析其他同次元 (order) 頻率的結果，例如當 $F_c = 10$ 時 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st} < 1$ 且 $F_c = 30$ 時 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st} > 1$ ，則會進一步的計算 $F_c = 20$ 之結果，若計算之結果為 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st} > 1$ ，最後則利用 $F_c = 10$ 與

$F_c = 20$ 之 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 作為依據，並採用內插的方式來求得實際的臨界振動頻率 F_{cc} 。參考表 4-3 即為 $L_c = 0.1$ 時，不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表，其計算式如下：

$$F_{cc} = F_{c,1} + \frac{1 - (\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st})}{(\overline{Nu}_{st,2}/Nu_{st}) - (\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st})} (F_{c,2} - F_{c,1}) \quad (4-19)$$

亦即將 $\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st} < 1$ 之第一振動頻率 $F_{c,1}$ 與 $\overline{Nu}_{st,2}/Nu_{st} > 1$ 之第二振動頻率 $F_{c,2}$ 內插後，即可獲得 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st} = 1$ 之臨界振動頻率 F_{cc} 。同樣地，表 4-4 與表 4-5 分別顯示 $L_c = 0.2$ 與 $L_c = 0.4$ 時，不同葛瑞秀夫數所獲得之第一振動頻率 $F_{c,1}$ 、第二振動頻率 $F_{c,2}$ 與臨界振動頻率 F_{cc} 等結果。

又由上述三個表中可以發現，當葛瑞秀夫數 $Gr \leq 10^2$ 時，不同的葛瑞秀夫數其臨界振動頻率 F_{cc} 沒有明顯的變化，但是當葛瑞秀夫數 $Gr \geq 10^3$ 時，葛瑞秀夫數越大其所求得的臨界振動頻率 F_{cc} 越大。又經過數值化後可以更容易的觀察到，與前述章節相同地，隨著振幅 L_c 加大，臨界振動頻率 F_{cc} 會相對變小。

4.5.6 經驗公式

就一般的觀念而言，大多認為存在振動的熱表面其對流散熱的效果應該會比較好，然而經過本文的研究後可以發現，在不同之 F_c 與 L_c 搭配的情形下，加入振動後的熱傳現象仍然有可能比沒有振動時的熱傳效率差，也因此針對不同葛瑞秀夫數及不同高溫面振幅定義出臨界振動頻率 F_{cc} 以提供研究振動熱傳者之參考是非常有用且重要的。

由圖 4-18、圖 4-19、圖 4-20 以及表 4-3、表 4-4、表 4-5 可以找出當 $Re = 10^2$ 時，三種振幅下，對數形式之臨界振動頻率 $\text{Log}(F_{cc})$ 隨著對數形式之葛瑞秀夫數 $\text{Log}(Gr)$ 的分布情形，如圖 4-21 所示。由圖中可以觀察到，臨界振動頻率 F_{cc} 會隨著振幅 L_c 而縮小，且當葛瑞秀夫數小於 10^2 時，臨界振動頻率 F_{cc} 幾乎維持不變，此時 Gr/Re^2 約等於 0.01，而此一比值屬於強制對流的範圍（參考圖 4-4 所示），亦即當流場為強制對流時，在固定的高溫面振幅下其臨界振動頻率 F_{cc} 為常數且可以求得。又當 Gr/Re^2 大於 0.01 時，臨界振動頻率 F_{cc} 就會隨著葛瑞秀夫數增大而增加，而此時流場已進入混合對流的模式。有關強制對流與混合對流的經驗公式可以整理如下：

強制對流

$$\log(F_{cc}) = 6.46L_c^2 - 5.85L_c + 1.83 \quad (4-20)$$

混合對流

$$\log(F_{cc}) = (0.16L_c + 0.04)\log(Gr / Re^2)^2 + (0.27L_c + 0.21)\log(Gr / Re^2) + (7.53L_c^2 - 6.45L_c + 2.13) \quad (4-21)$$

又第三章有關自然對流的研究所得之經驗公式 (3-18)，在經過調整後可改為葛瑞秀夫數之關係式如下：

自然對流

$$\log(F_{cc}) = (-0.44L_c + 0.75)\log(Gr Pr) + (4.9L_c^2 - 2.7L_c + 0.4) \quad (4-22)$$

在綜合第三章與本章的研究後，為了比較自然對流與混合對流的結果特將三個經驗公式整理在同一圖面上以方便比較，如圖 4-22 所示。但需注意的一件事情，因為前章與本章之無因次高溫面振動頻率定義方式不同，第三章之定義為 $F_c = f_c \ell_2 / (\sqrt{Ra} \cdot \alpha / \ell_2)$ ，而本章之定義則為 $F_c = f_c \ell_2 / v_0$ ，所以兩者的定義另標明於圖中。

4.5.7 熱傳增益原因之探討

振動頻率加大對於溫度場之變化可由圖 4-23 與圖 4-24 觀察得出，上述兩圖皆為雷諾數 $Re = 10^2$ 、振動幅度 $L_c = 0.2$ 與葛瑞秀夫數 $Gr = 10^4$ 時之等溫線圖，其中圖 4-23 的振動頻率 $F_c = 1$ ，而圖 4-24 的振動頻率則為 $F_c = 20$ 。另由圖 4-19 中 $Gr = 10^4$ 之曲線可以觀察出當 $F_c \leq 10$ 時， $\overline{Nu_{st}} / Nu_{st}$ 之比值皆會小於 1.0，亦即振動對熱傳的增益沒有效果，但是當 $F_c = 20$ 時，則 $\overline{Nu_{st}} / Nu_{st}$ 之比值明顯的大於 1.0，這是因為當振動頻率仍在較低範圍時，溫度邊界層會隨著高溫面振動而來回移動，此時的振動頻率仍不足以破壞掉溫度邊界層，如圖 4-23 所示，但是當振動頻率超過臨界振動頻率後，溫度邊界層的變化則有著明顯的改變，高溫的流體因為振動被推向右側後，由於熱浮力與下方進入氣流的帶動，加上振動頻率（振動速度）的提高，導致高溫的流體與原本的溫度邊界層剝離，形成溫度邊界層的厚度降低，造成熱傳效果的增加，如圖 4-24 所示。

4.5.8 實際應用範圍

在經過研究後，各熱傳模式下的臨界振動頻率雖皆以獲得如圖 4-22 所示，但現有存在之常用振動高溫元件的對應頻率為何，則為實際應用所需。一般而言，高溫元件如

IC 等的溫度與環境溫度差約為 10 的 1~2 次方、高溫元件的尺寸則為 10 的 -2~-1 次方 m、入口風速的範圍則在 10 的 -1~0 次方 m/s、振動頻率則在 10 的 1~2 次方 Hz (轉動元件迴轉速度約為 10 的 2~3 次方 RPM)，經過換算後之無因次參數則分別為：雷諾數 $Re = 10^2 \sim 10^3$ 、葛瑞秀夫數 $Gr = 10^3 \sim 10^5$ (亦即 $Gr/Re^2 = 10^{-3} \sim 10^1$)，而無因次振動頻率則為 $F_c = 10^{-1} \sim 10^2$ ，對應到本文所研究的臨界振動頻率結果則可以把圖 4-22 在強制對流與混合對流中的實際振動高溫元件之無因次振動頻率標示為如圖 4-25 中之虛線範圍，亦即在日常所使用到之電腦主機或其他工業界所使用內含高溫元件的轉動設備，其運轉的頻率皆有可能落在臨界振動頻率的附近範圍，如果可以針對個別設備詳加計算後，即可確認其振動頻率會大於或小於臨界振動頻率，並加以判斷其後續的熱傳增益之對策。

4.6 結論

本研究採用數值分法模擬垂直管道流場中振動高溫面的混合對流之熱傳現象，藉由不同之振動頻率 F_c 、振幅 L_c 與葛瑞秀夫數 Gr 以求得各情形之熱傳效果，其結果可歸納如下：

1. 臨界振動頻率 F_{cc} 可以以葛瑞秀夫數 Gr 及振幅 L_c 為函數定義出來，且當振動頻率 F_c 大於臨界振動頻率 F_{cc} 後，其溫度邊界層會隨振動之持續進行而剝離開來，導致熱傳的效果將優於穩態非振動高溫面的熱傳效率。
2. 在強制對流的情形下，臨界振動頻率 F_{cc} 僅與振幅 L_c 有關而與葛瑞秀夫數 Gr 無關，且振幅 L_c 越大則臨界振動頻率 F_{cc} 越小。
3. 有關臨界振動頻率的經驗公式在強制對流、混合對流以至於自然對流的形式皆不相同，可以分別推導出來，且在三種的對流形式中都有相當平滑的曲線可以獲得。
4. 實際常用振動高溫元件的振動頻率有可能大於或小於臨界振動頻率，因此有必要針對個別的設備加以計算其臨界振動頻率大小，以作為改善熱傳效率之參考。

表 4-1 設計參數組合表

參數	數值範圍
葛瑞秀夫數 Gr	10^0 、 10^1 、 10^2 、 10^3 、 10^4 、 10^5
雷諾數 Re	10^2
高溫面振幅 L_c	0.1、0.2、0.4
高溫面振動頻率 F_c	0.1、0.3、1、3、10、30、100 及 F_{cc} 附近之頻率（隨 Gr 與 L_c 而變）

表 4-2 穩態非振動高溫面平均紐塞數與葛瑞秀夫數之關係表

葛瑞秀夫數 Gr	高溫面平均紐塞數 Nu_{st}
10^0	4.29823
10^1	4.29940
10^2	4.31112
10^3	4.42273
10^4	5.19526
10^5	7.37327

表 4-3 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.1$)

Gr	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
$F_{c,1}$	20	20	20	20	30	60
$\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st}$	99.1%	99.1%	98.9%	97.0%	90.5%	98.2%
$F_{c,2}$	30	30	30	30	40	70
$\overline{Nu}_{st,2}/Nu_{st}$	112.4%	112.4%	112.1%	109.3%	101.2%	101.7%
F_{cc}	20.64	20.66	20.82	22.44	38.84	65.25
$Log(F_{cc})$	1.3147	1.3151	1.3185	1.3510	1.5893	1.8146

表 4-4 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.2$)

Gr	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
$F_{c,1}$	8	8	8	9	10	30
$\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st}$	98.2%	98.2%	98.0%	100.0%	90.0%	98.2%
$F_{c,2}$	9	9	9	10	20	40
$\overline{Nu}_{st,2}/Nu_{st}$	102.8%	102.7%	102.5%	104.2%	119.0%	106.3%
F_{cc}	8.39	8.40	8.45	9.01	13.45	32.27
$Log(F_{cc})$	0.9239	0.9241	0.9270	0.9546	1.1288	1.5088

表 4-5 不同葛瑞秀夫數之臨界振動頻率 F_{cc} 列表 ($L_c = 0.4$)

Gr	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
$F_{c,1}$	3	3	3	3	5	10
$\overline{Nu}_{st,1}/Nu_{st}$	95.9%	95.9%	95.7%	93.8%	97.0%	88.5%
$F_{c,2}$	4	4	4	4	6	15
$\overline{Nu}_{st,2}/Nu_{st}$	106.5%	106.5%	106.2%	103.5%	104.0%	100.9%
F_{cc}	3.39	3.39	3.41	3.64	5.43	14.64
$Log(F_{cc})$	0.5298	0.5301	0.5330	0.5612	0.7349	1.1655

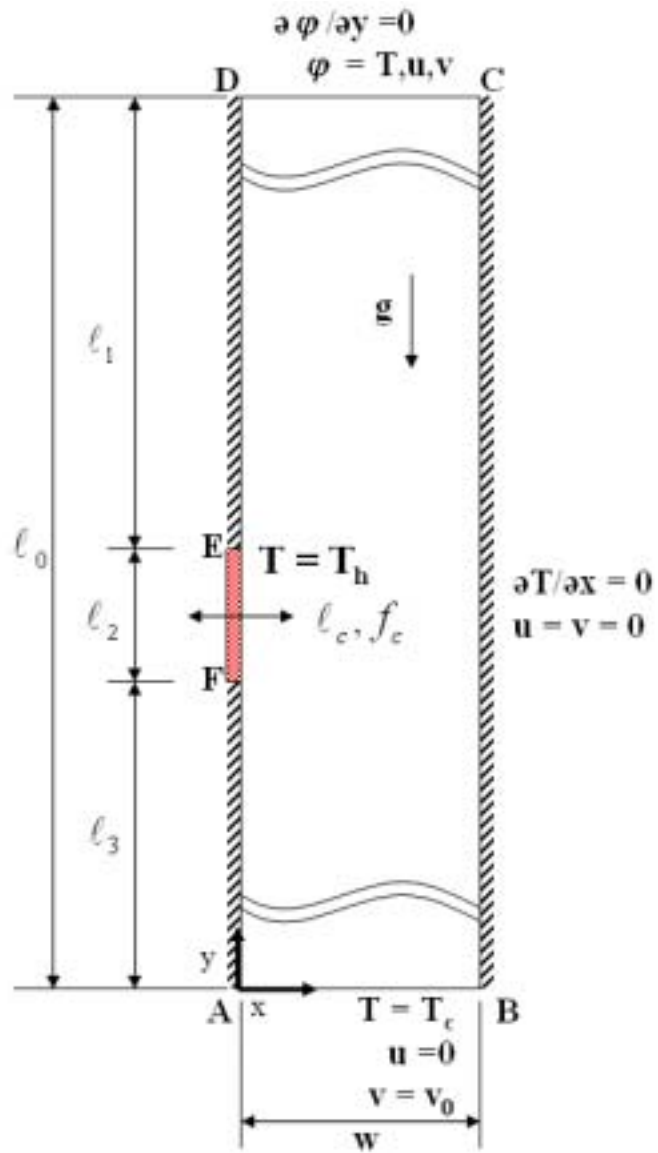


圖 4-1 物理模式圖

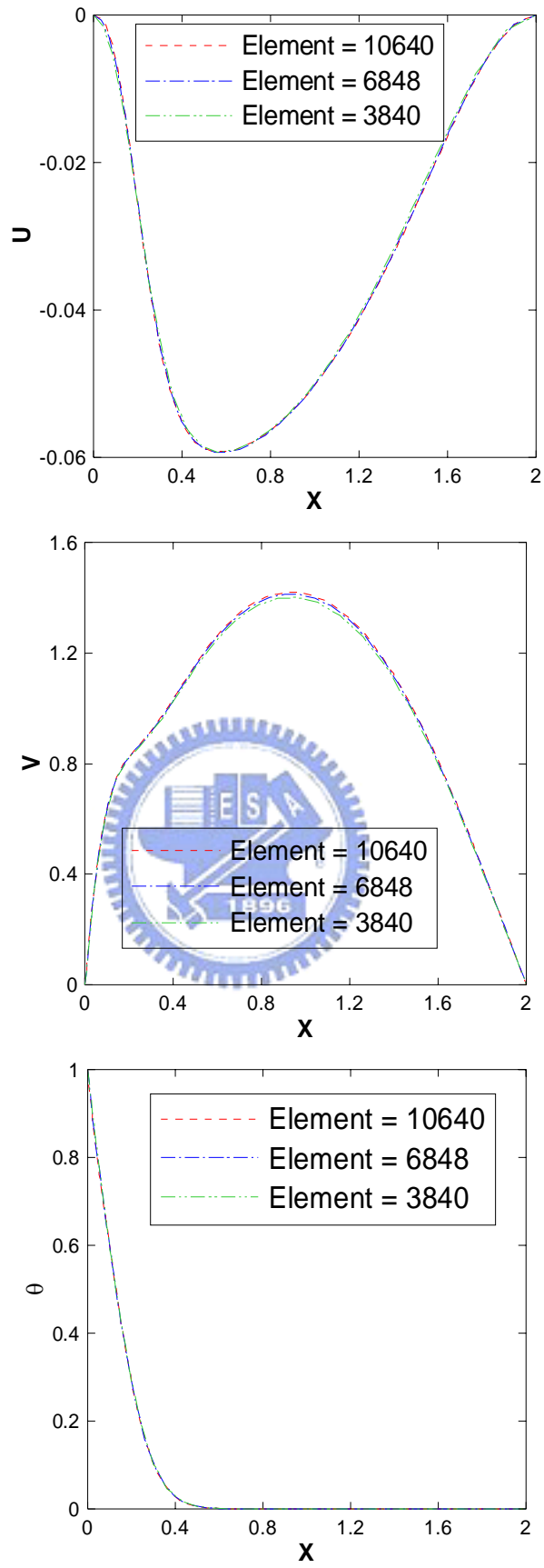


圖 4-2 網格測試($Gr = 10^4, Re = 10^2$)

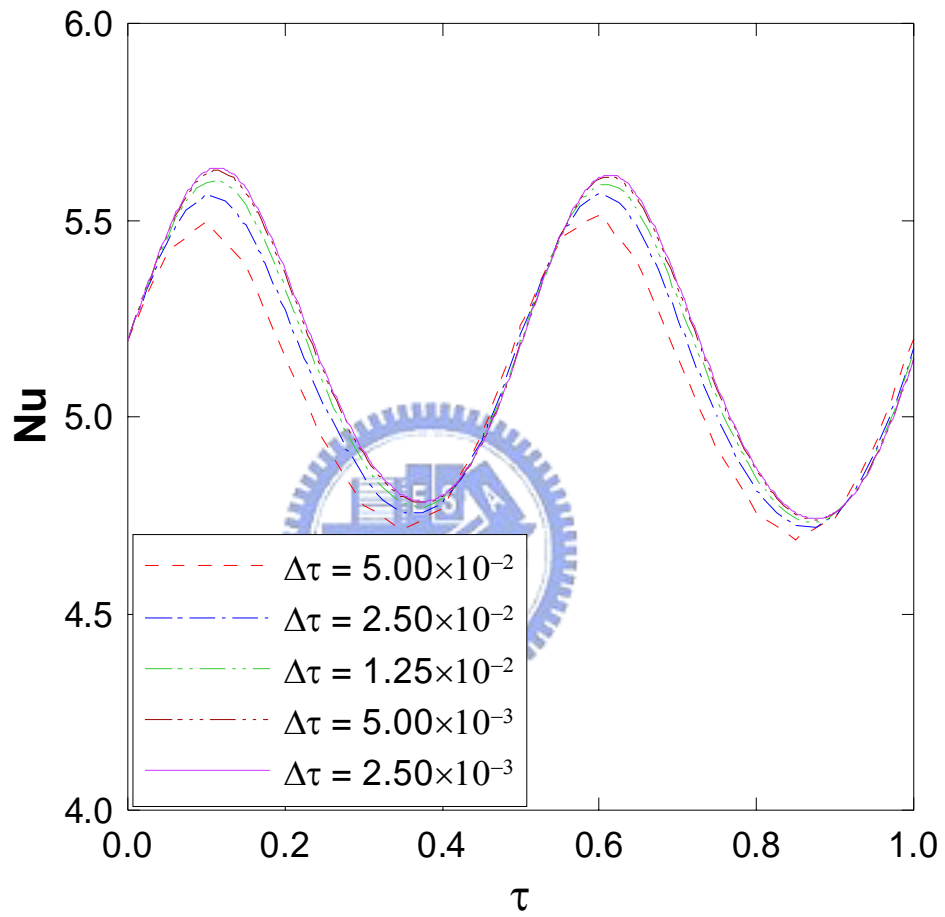


圖 4-3 時間步進測試($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1, F_c = 2$)

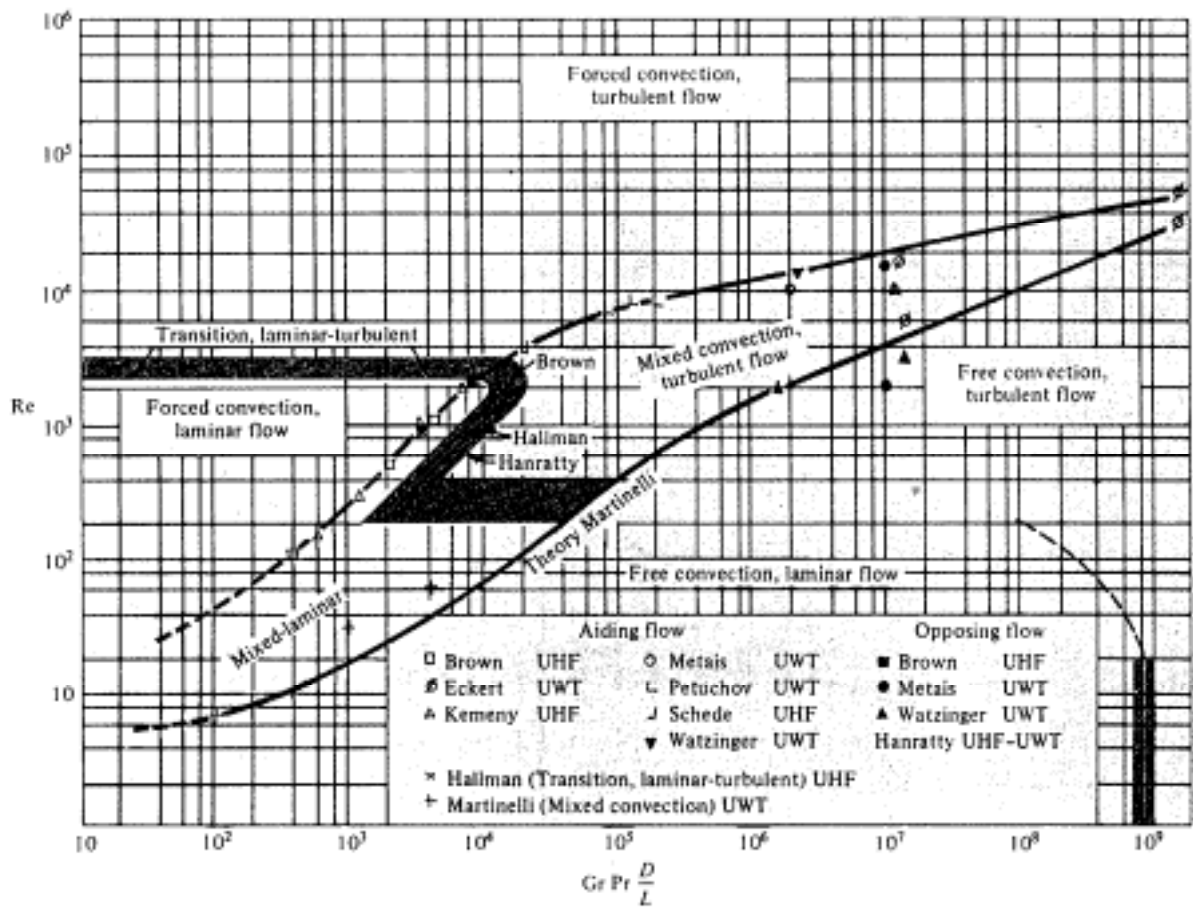
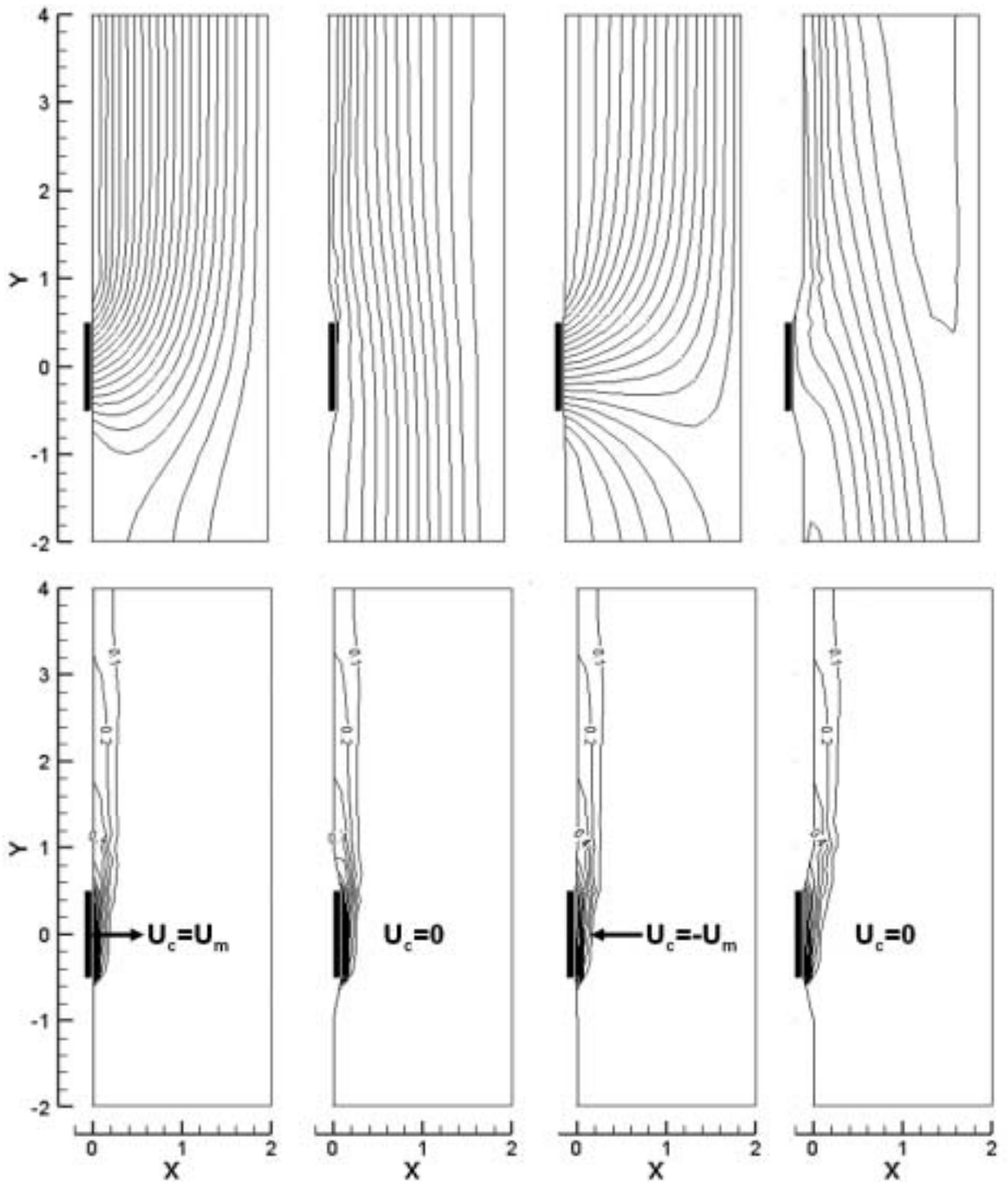


圖 4-4 垂直管道流中強制、混合與自然對流在層流與紊流場的分布情形[56]



(a) $\tau = 1.5$

(b) $\tau = 1.525$

(c) $\tau = 1.55$

(d) $\tau = 1.575$

圖 4-5 第 16 振動週期之流線與等溫線變化($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1, F_c = 10$)

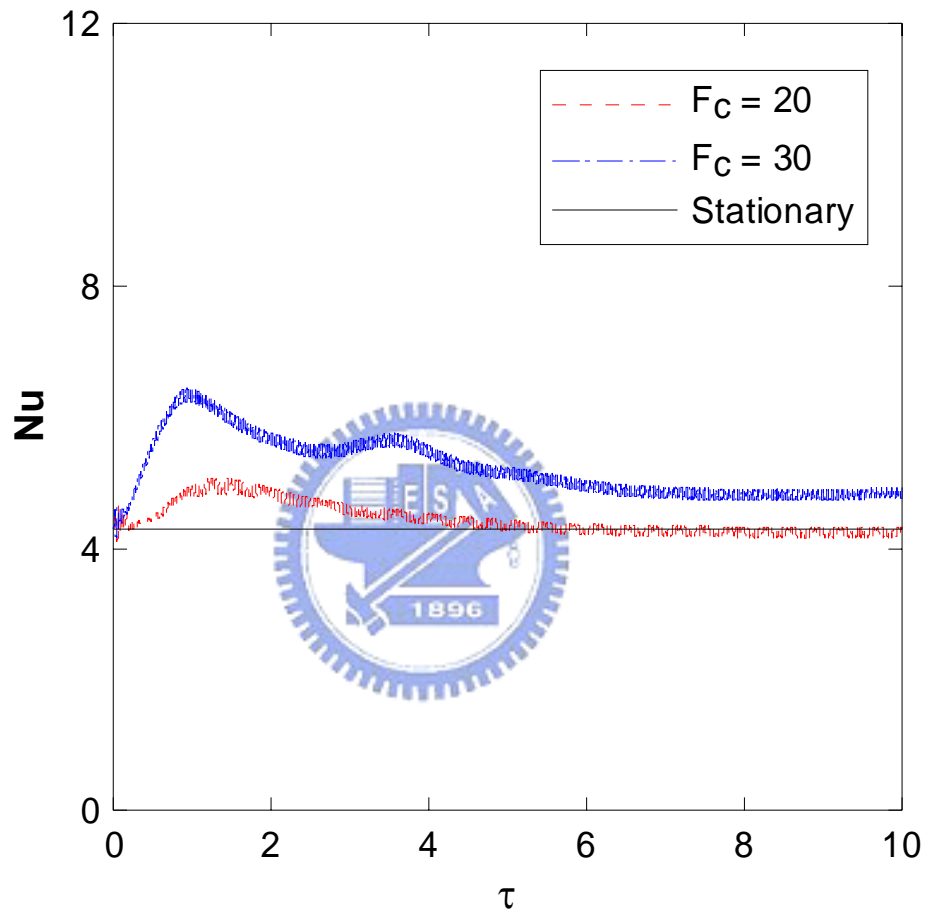


圖 4-6 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Gr = 10^0, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

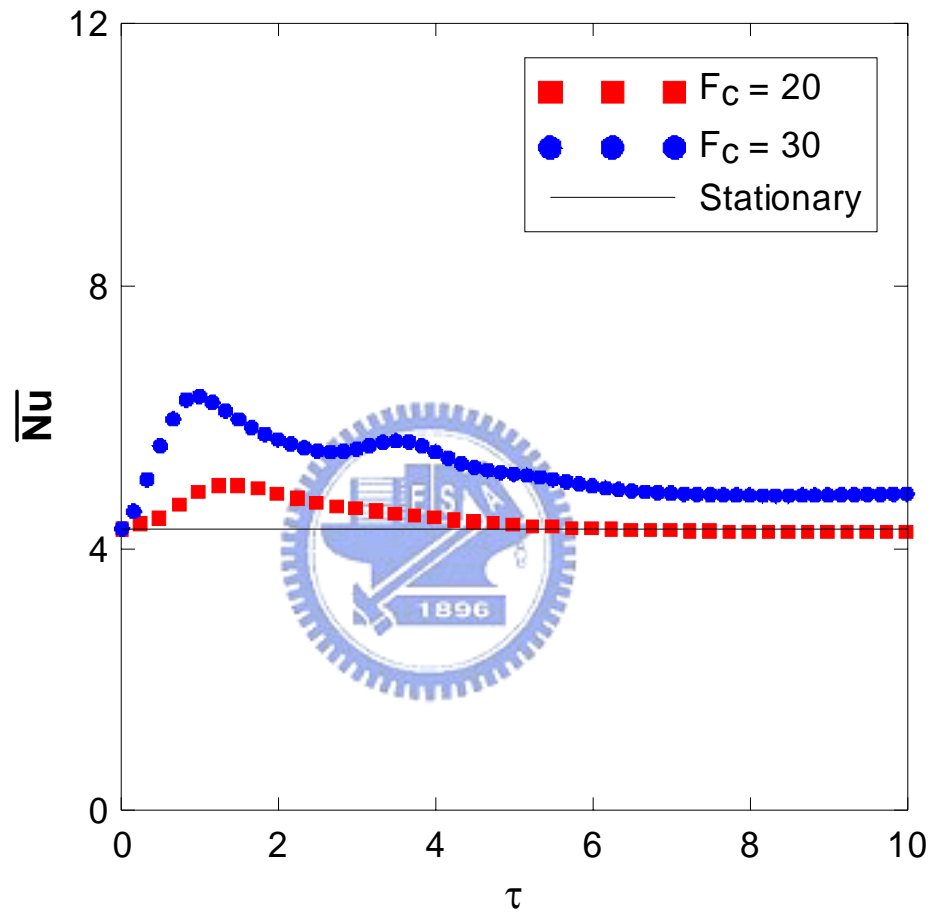


圖 4-7 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^0, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

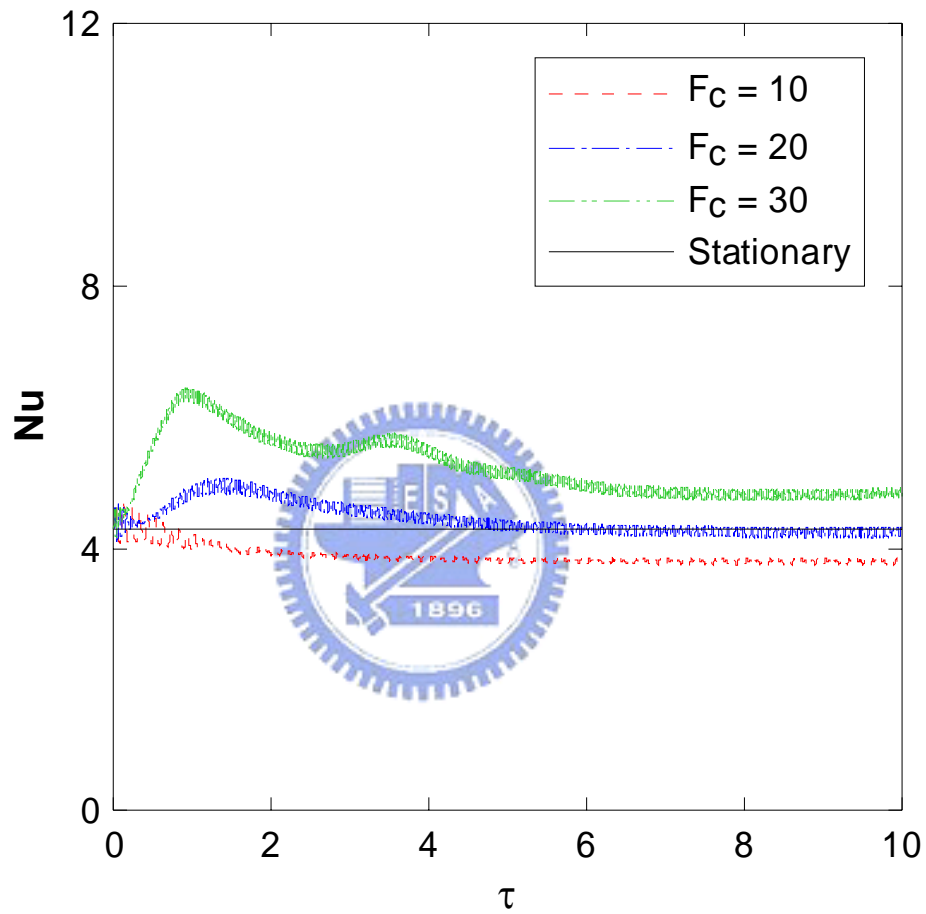


圖 4-8 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Gr = 10^1, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

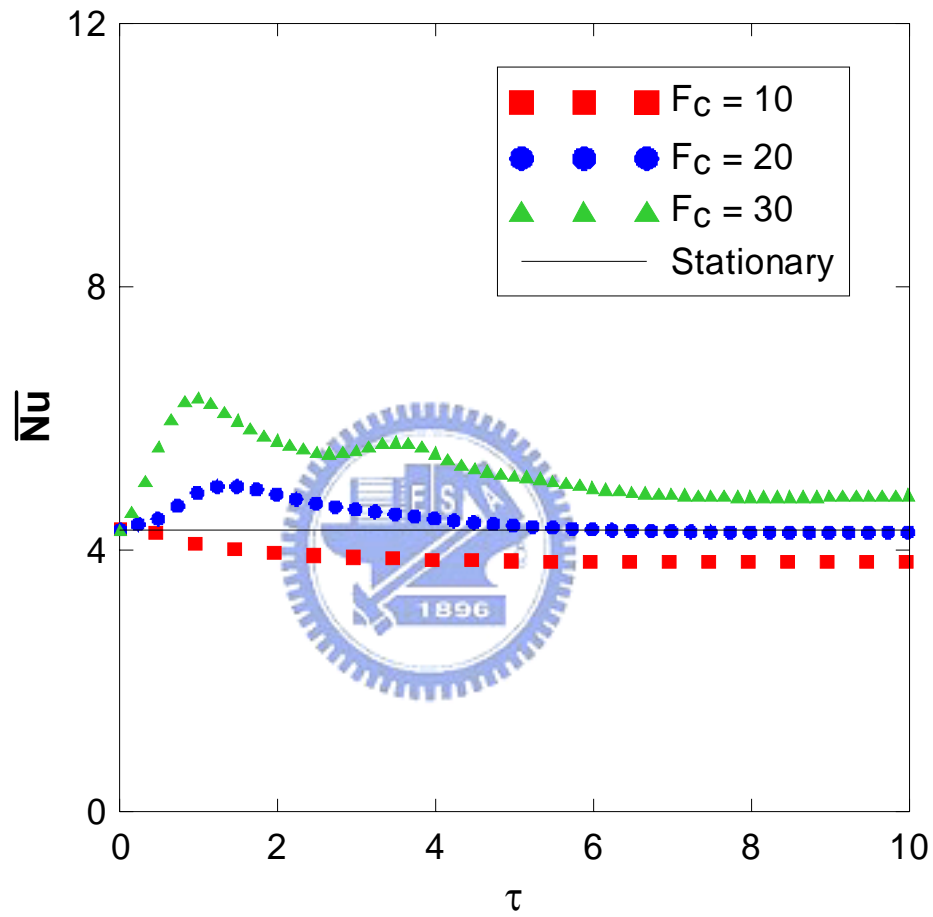


圖 4-9 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^1, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

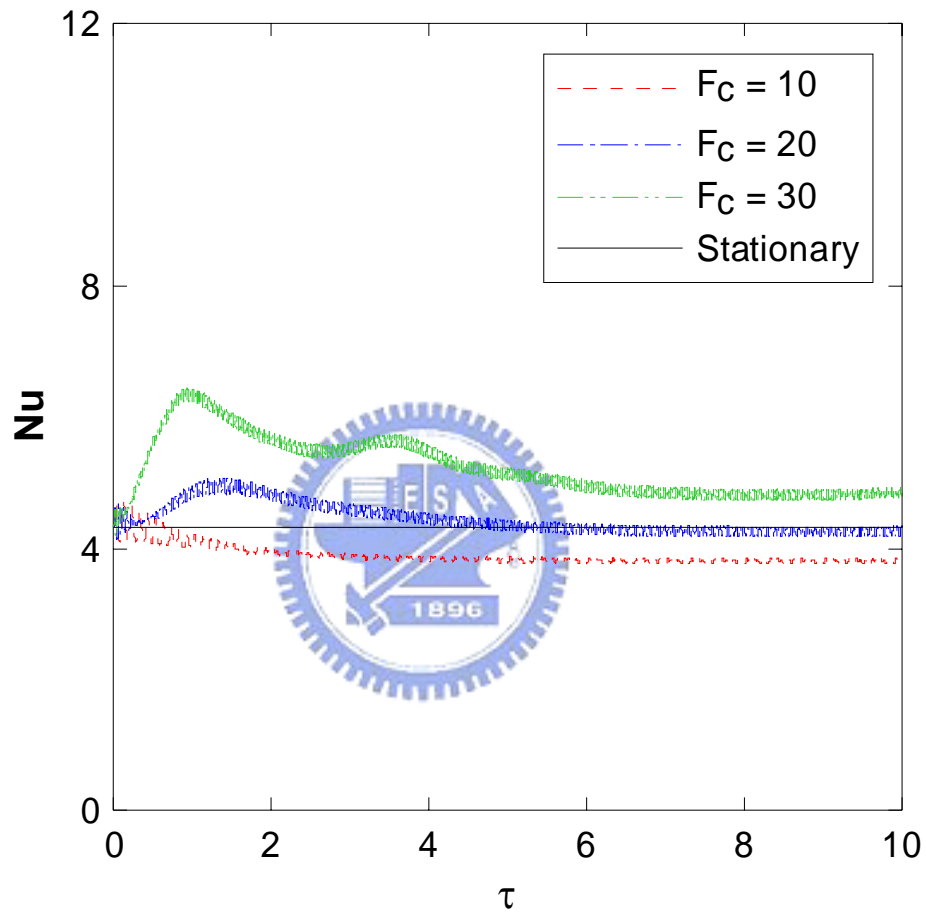


圖 4-10 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Gr = 10^2, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

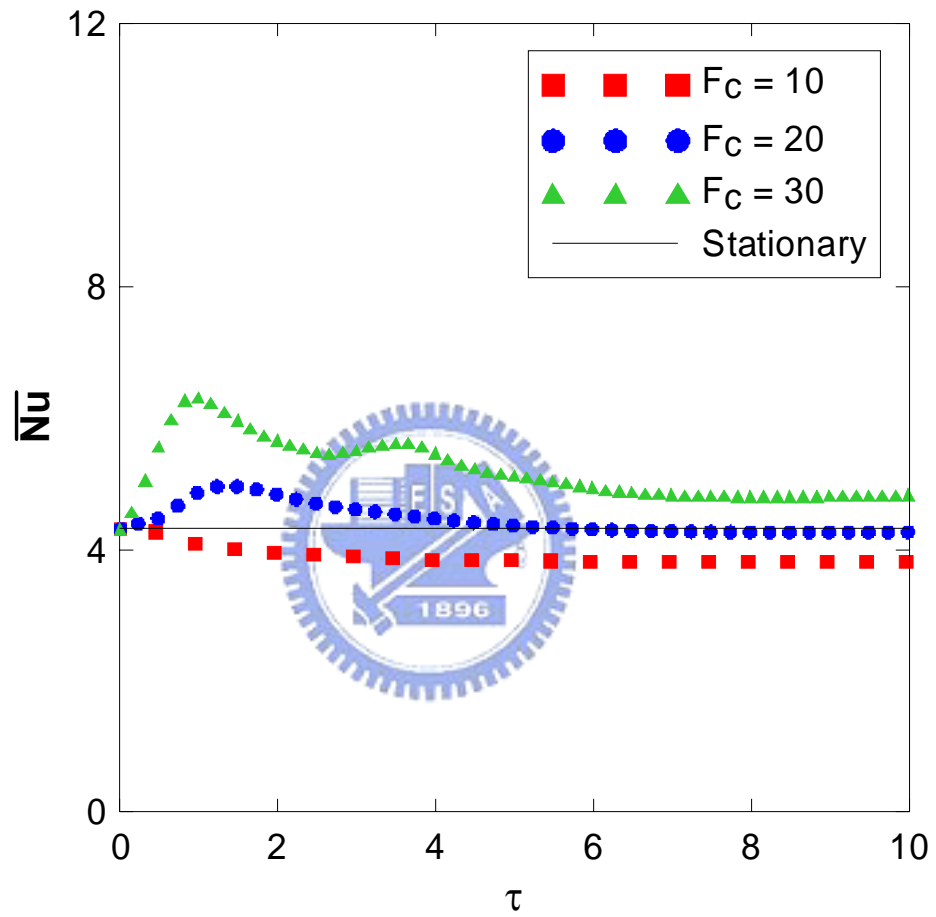


圖 4-11 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^2, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

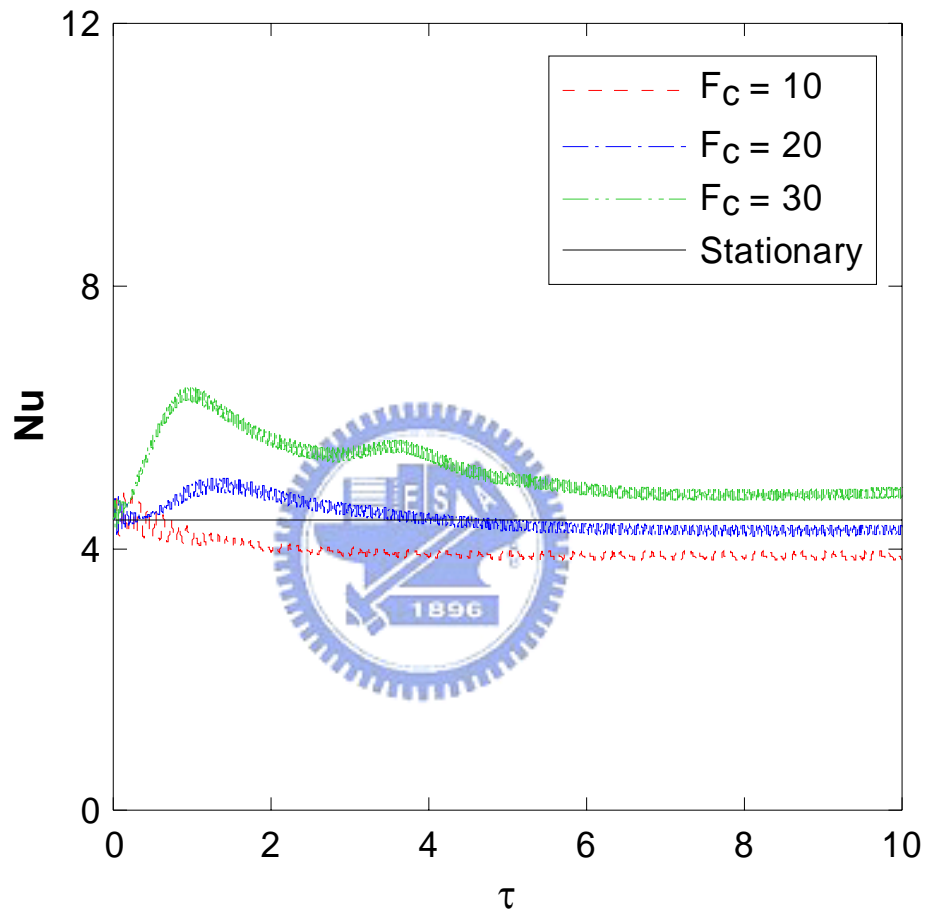


圖 4-12 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Gr = 10^3, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

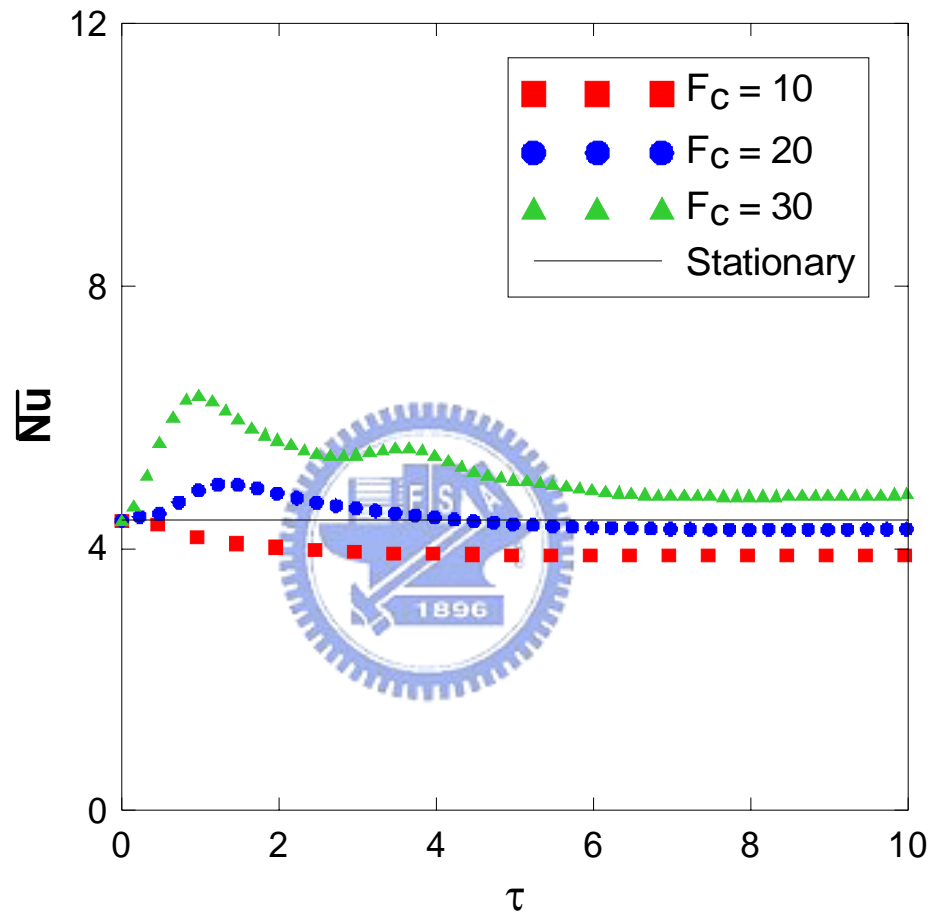


圖 4-13 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^3, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

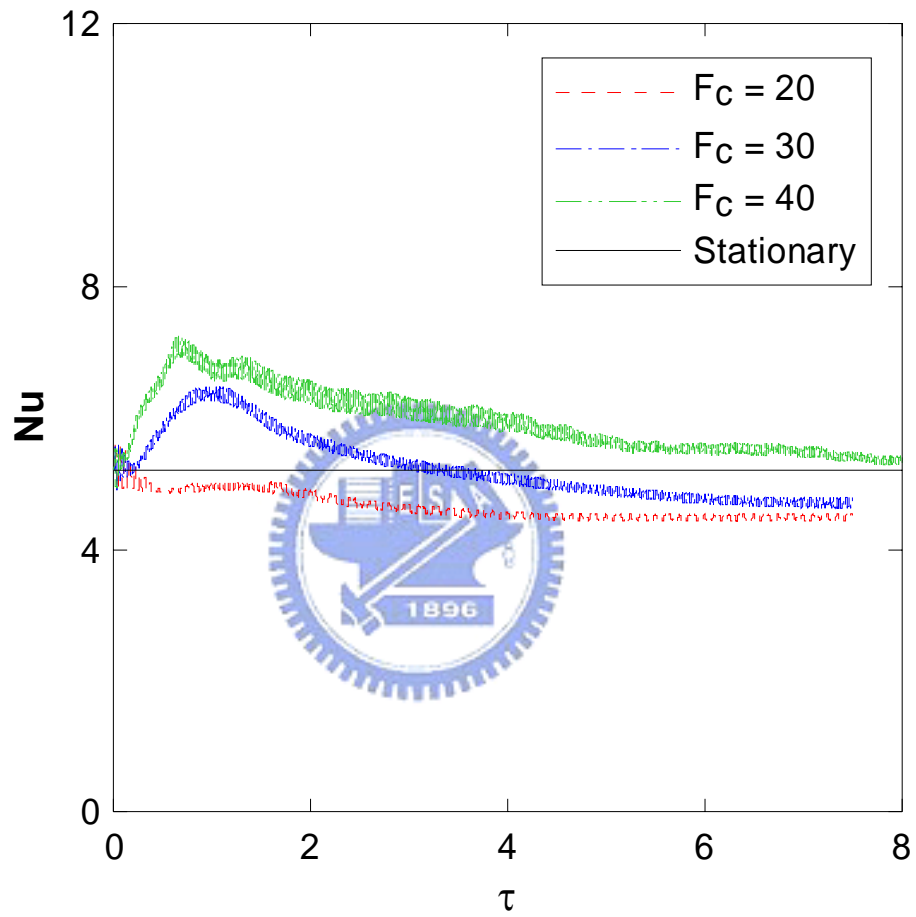


圖 4-14 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖 ($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

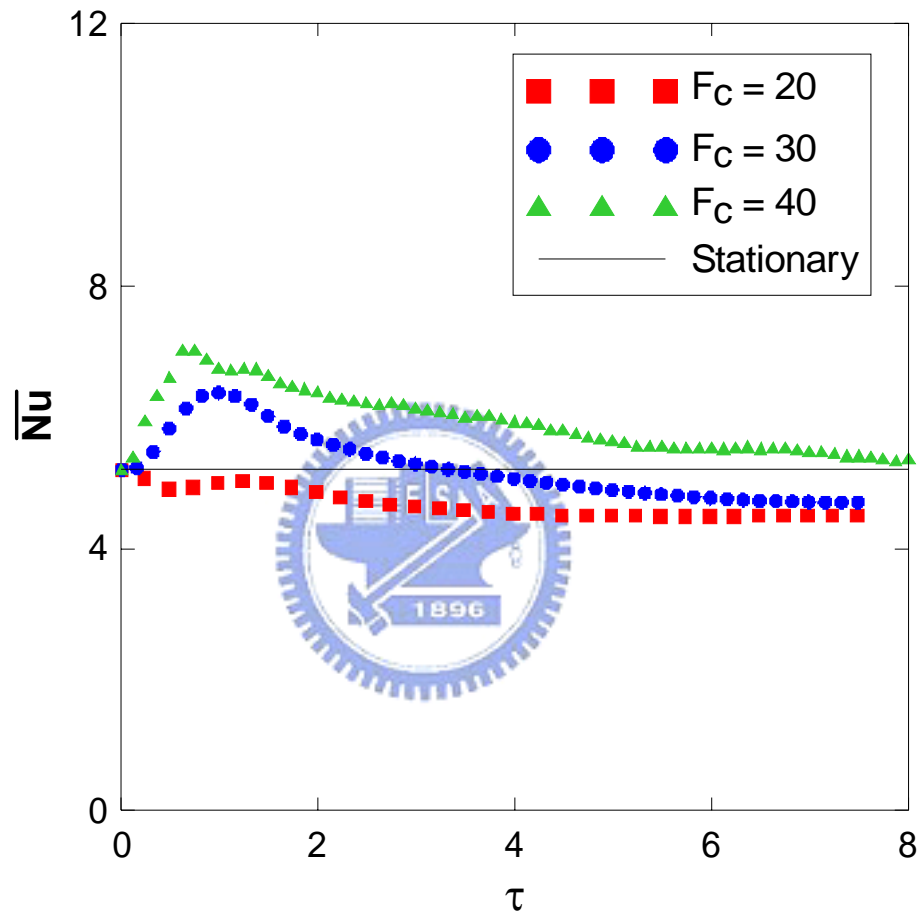


圖 4-15 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^4, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

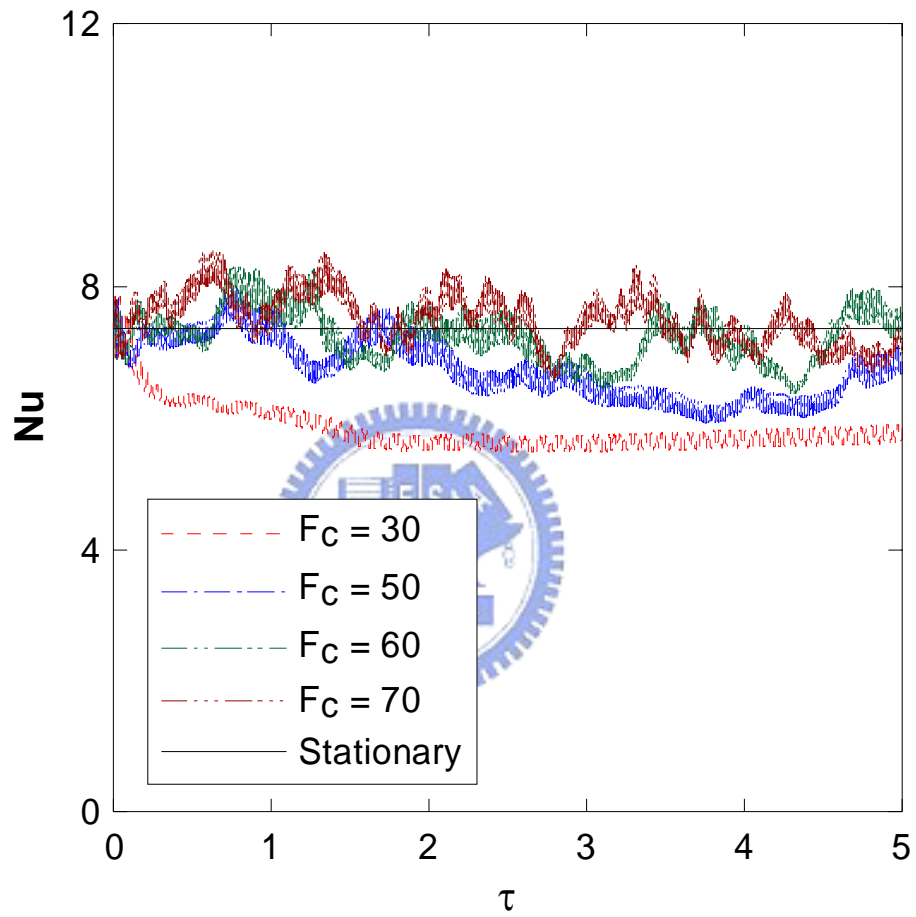


圖 4-16 平均紐塞數 Nu 隨時間變化圖($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

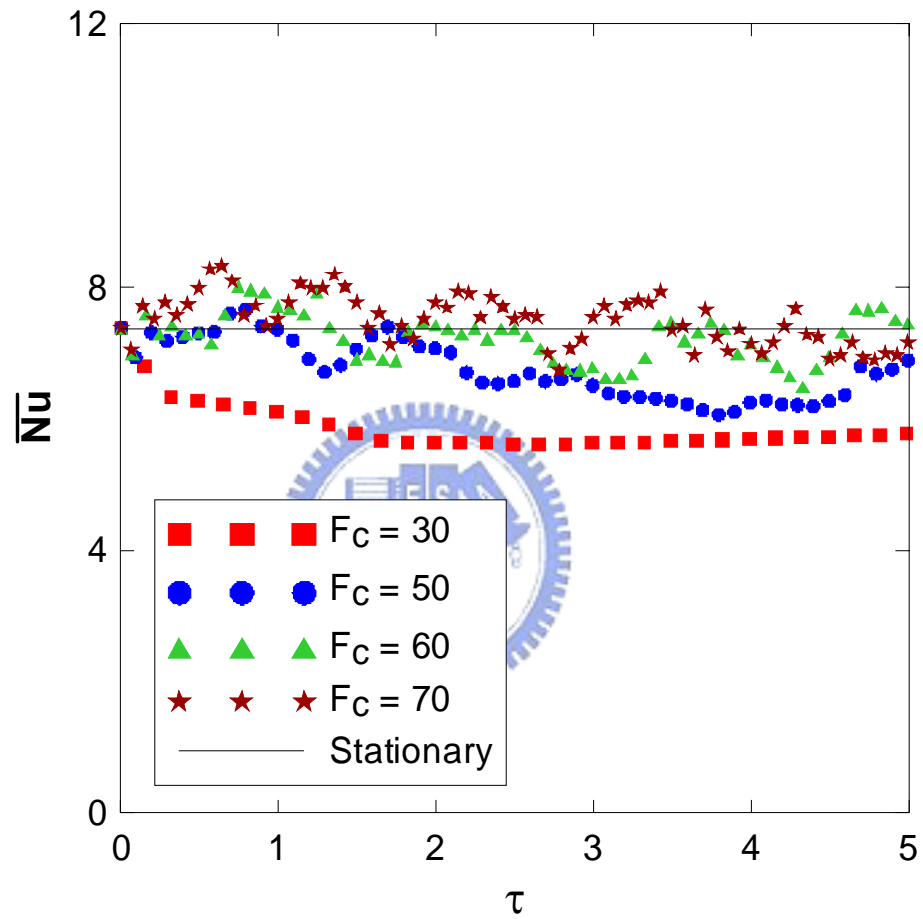


圖 4-17 時平均紐塞數 \overline{Nu} 隨時間變化圖 ($Gr = 10^5, Re = 10^2, L_c = 0.1$)

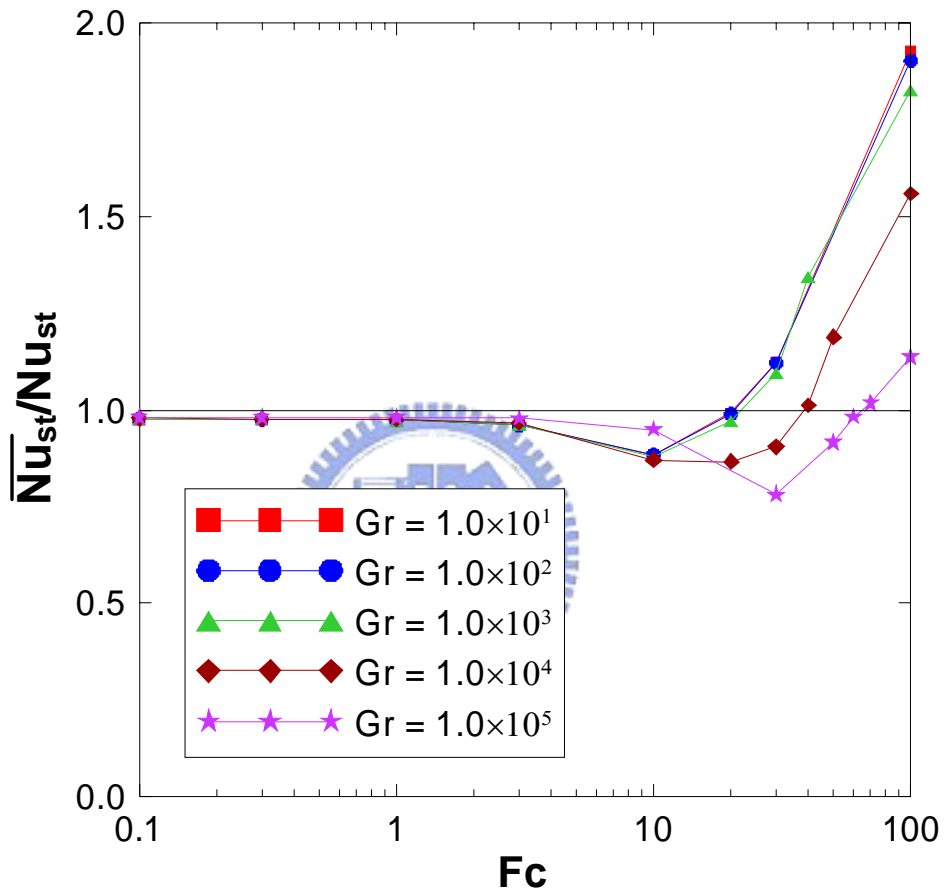


圖 4-18 高溫面振幅 $L_c = 0.1$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 變化圖 ($Re = 10^2$)

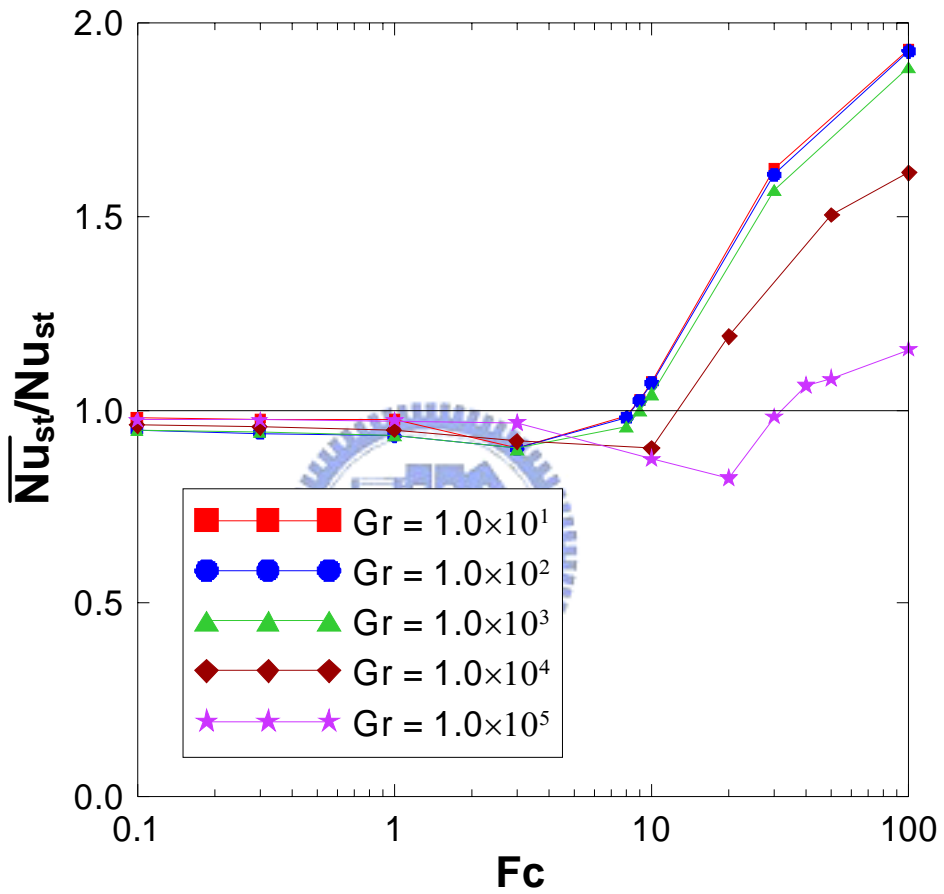


圖 4-19 高溫面振幅 $L_c = 0.2$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu}_{st}/Nu_{st}$ 變化圖 ($Re = 10^2$)

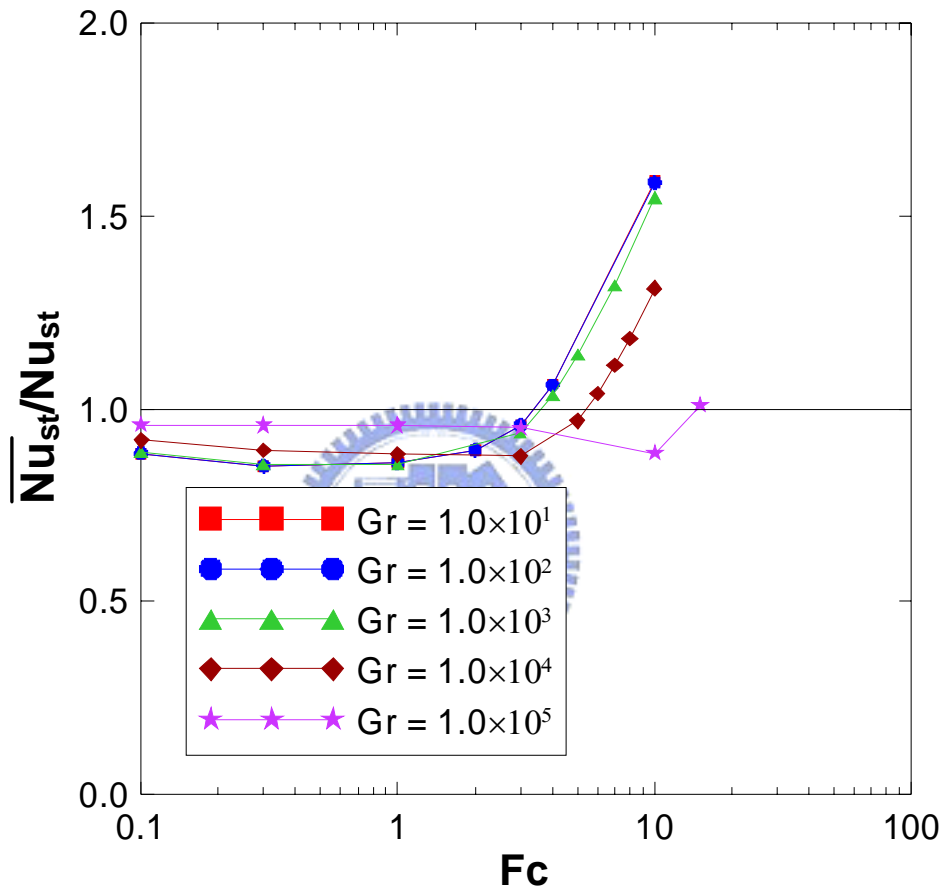


圖 4-20 高溫面振幅 $L_c = 0.4$ 時，不同 Gr 下振動頻率對 $\overline{Nu_{st}}/Nu_{st}$ 變化圖 ($Re = 10^2$)

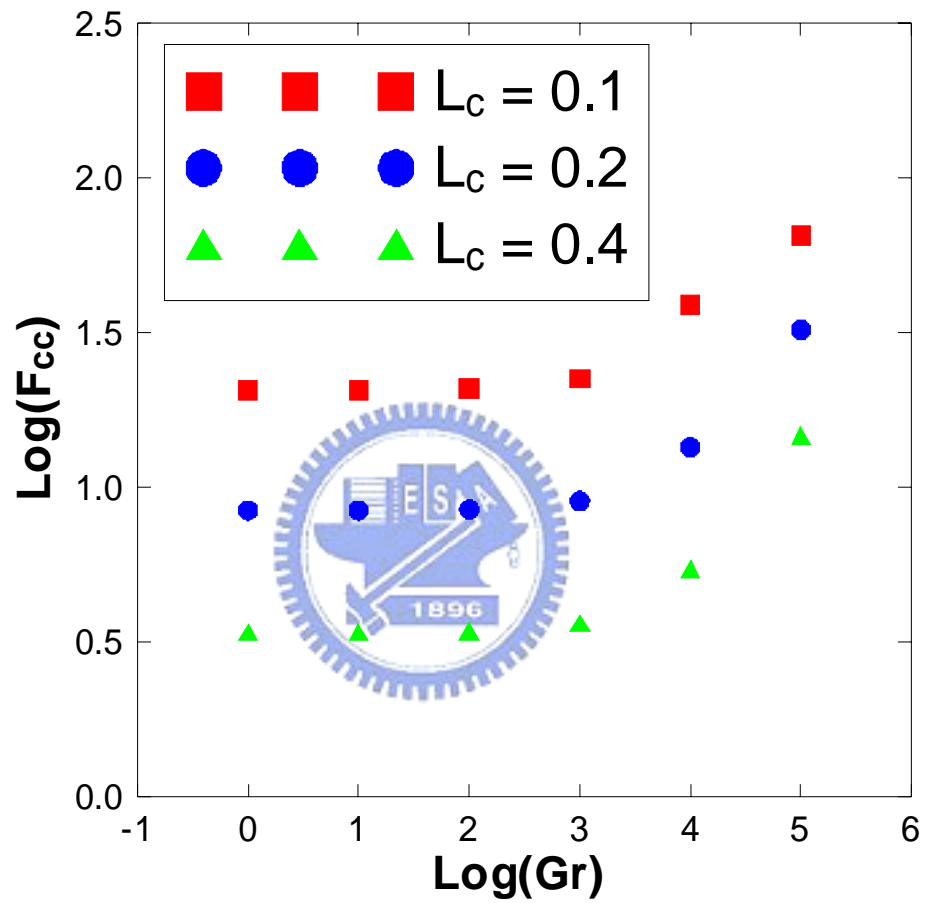


圖 4-21 臨界振動頻率 F_{cc} 隨 Gr 變化關係圖 ($Re = 10^2$)

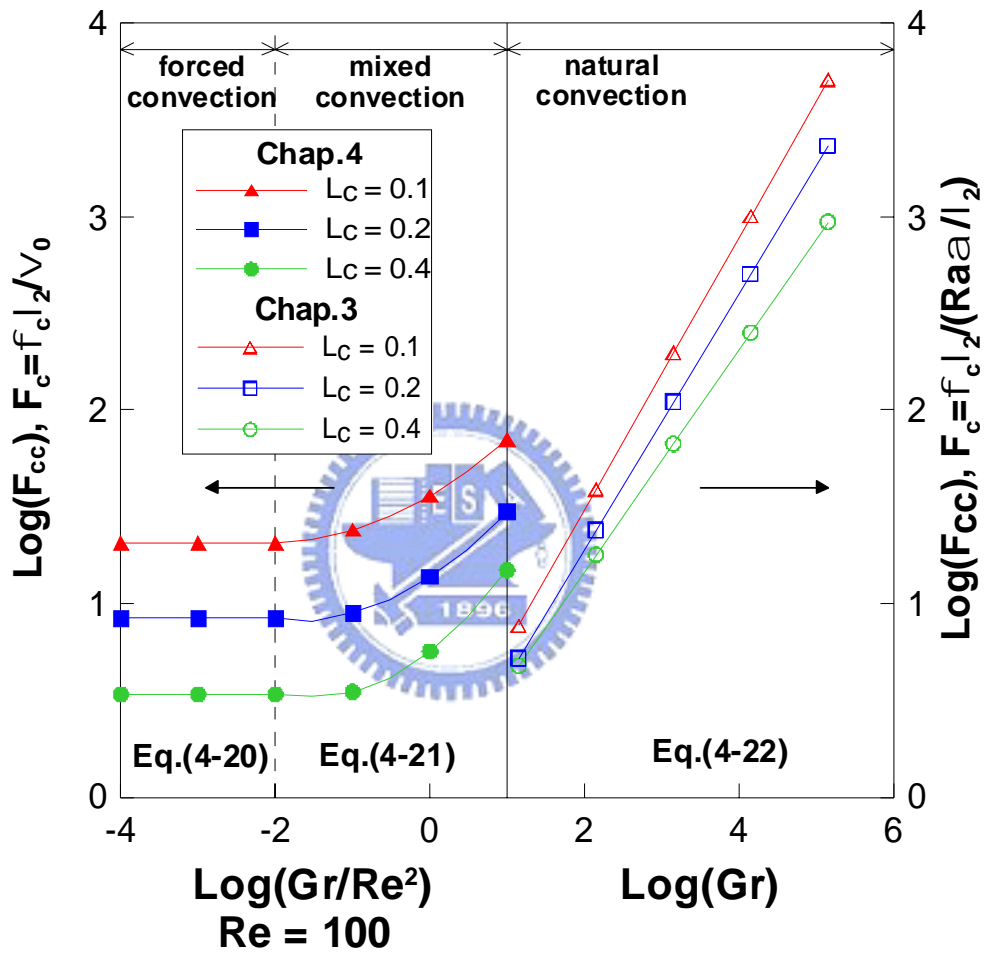


圖 4-22 各種對流現象下臨界振動頻率 F_{cc} 與 Gr 變化之關係圖

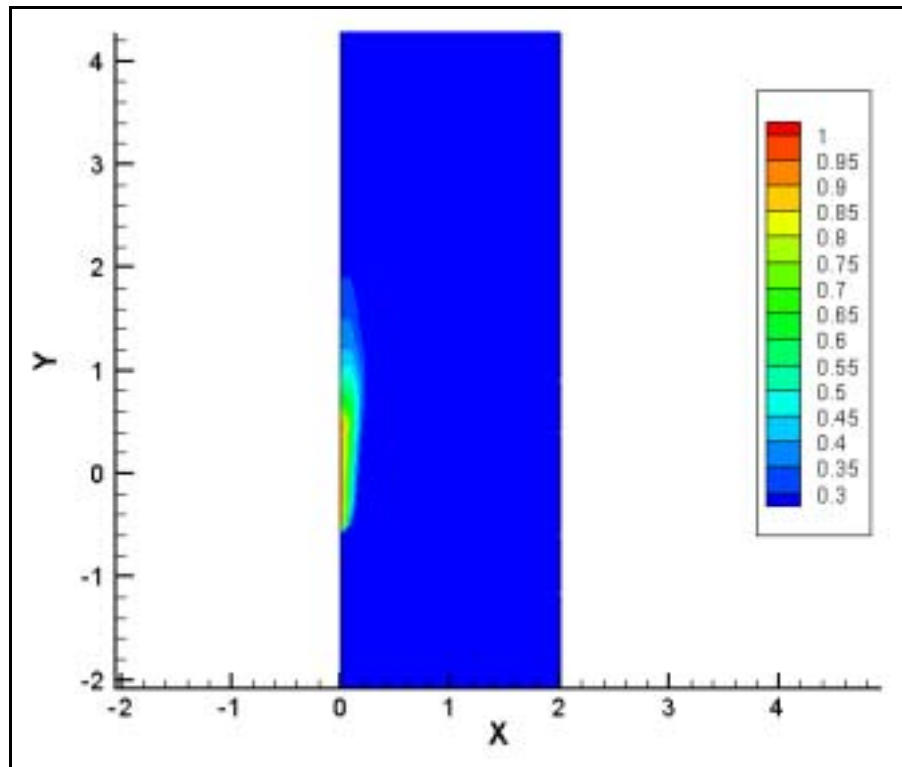


圖 4-23 $F_c = 1$ 時，第 25 個振動週期後之等溫線圖($Gr = 10^4, L_c = 0.2$)

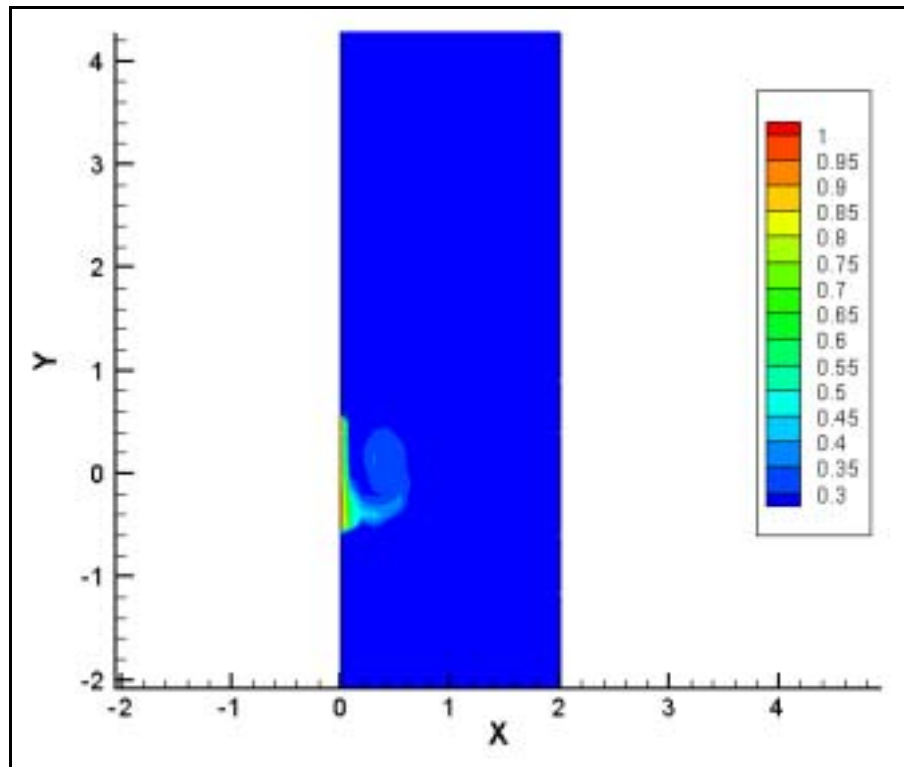


圖 4-24 $F_c = 20$ 時，第 25 個振動週期後之等溫線圖($Gr = 10^4, L_c = 0.2$)

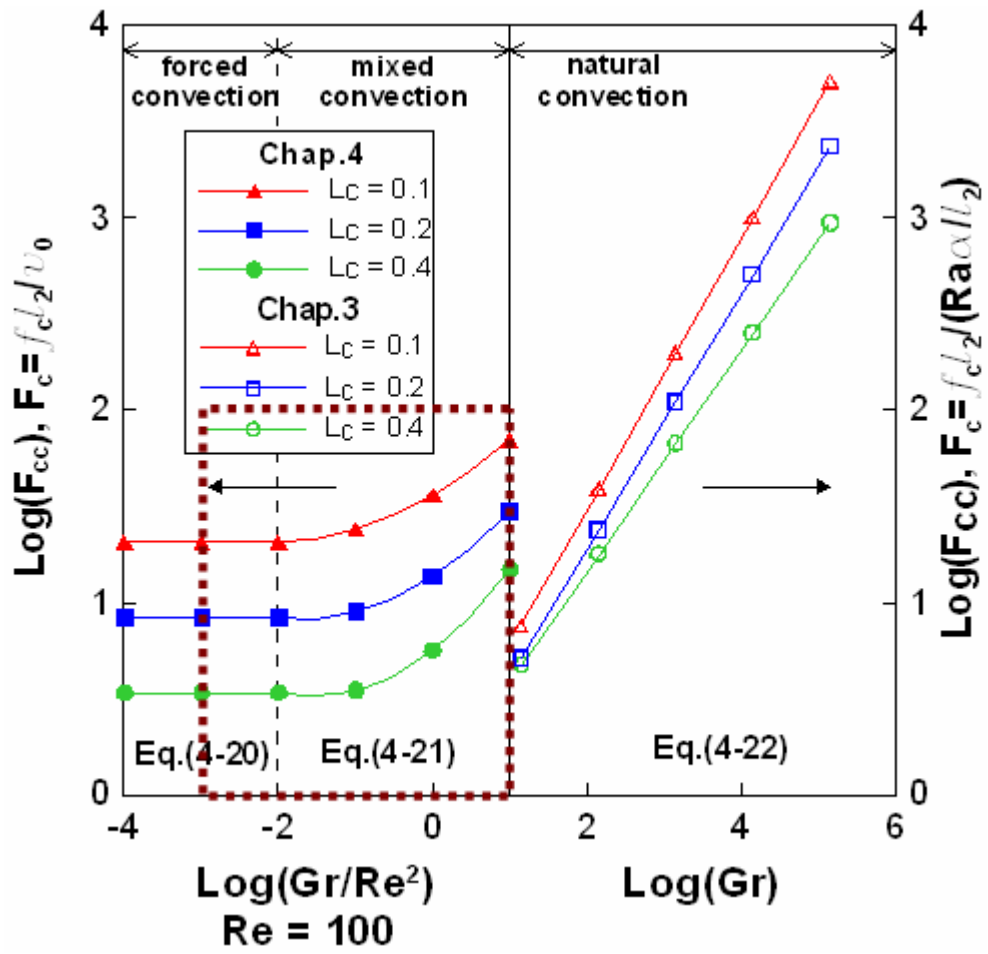


圖 4-25 實際常用振動高溫元件於臨界振動頻率之對應範圍

第五章 結論與建議

5.1 總結

為了瞭解垂直管道內高溫壁面振動時的熱傳增益情形，本研究特採用適於分析移動邊界問題之 Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) 座標系統配合葛拉金有限元素法 (FEM) 來處理此種流體與固體介面間相互影響的問題。通常高溫壁面的熱傳機制無論在自然對流、混合對流或是強制對流的模式下皆有可能且極為常見，因此本研究的內容亦包含了上述三種模式之熱傳機制，而本研究可獲得以下結論：

1. 雖然一般的觀念大多認為存在振動的熱表面其對流散熱的效果應該會比較好，然而經過本文的研究後可以發現，在不同之高溫面振幅與不同之葛瑞秀夫數搭配下，加入振動後的熱傳現象仍然有可能比沒有振動時的熱傳效率差，但是當振動的頻率加大到某一特定數值後，高溫面的熱傳效率將會明顯的增加，針對此一現象本文依照不同的振幅與葛瑞秀夫數搭配的條件下，分別找出該一振動頻率且定義為臨界振動頻率。
2. 在自然對流、混合對流以及強制對流等三種熱傳機制中，皆可以找出相對應之臨界振動頻率的經驗公式，當流場為自然對流之模式時，臨界振動頻率為高溫面振幅與葛瑞秀夫數之函數，且臨界振動頻率與葛瑞秀夫數成正比。若為混合對流之過度模式時，臨界振動頻率仍為高溫面振幅與葛瑞秀夫數之函數，但臨界振動頻率約與葛瑞秀夫數的平方成正比。又流場若是在強制對流模式下，則臨界振動頻率僅為高溫面振幅之函數，臨界振動頻率的大小只與振幅有關而與葛瑞秀夫數無關，亦即在強制對流的熱傳機制中，無論葛瑞秀夫數為何，當高溫面振幅不變時，臨界振動頻率亦大約維持固定不變。
3. 無論在何種對流模式下，振幅與振動頻率（超過臨界振動頻率後）增加時，高溫面的熱傳速率亦會相對的增加。針對振幅而言，在相同的葛瑞秀夫數下，當振幅越大，臨界振動頻率會越小，亦即可以達到優於穩態非振動高溫面之熱傳效率所需的振動頻率越小，這與一般所知的觀念較為吻合。

5.2 建議

高溫元件如資訊設備中的中央處理器、動態隨機存取記憶體、繪圖晶片等以及其他

各式各樣的積體電路其正常使用時的振動現象原本就相當常見，但是振動對熱傳效率的提升未必是正面的，除非超過臨界振動頻率時才會達到更加的散熱效果，因此，假使高溫元件的正常振動頻率低於臨界振動頻率時，就應該避免其振動的發生並須進行結構上的改良如防震的措施等。又假使高溫元件的常態振動頻率已經高於臨界振動頻率時，就應避免不必要的減震措施，在不會造成元件運轉上的危害與其他損害的情形下，甚至可以增加振動的頻率或振動的幅度來加強元件的散熱效果。本文只是針對高溫振動元件的散熱現象作一初始的研究，未來仍有以下幾點建議值得繼續深入的探討；

1. 本研究已把移動邊界問題從強制對流的領域進入到自然對流的領域，以往許多採用 ALE 座標系統來模擬增加熱傳效益之問題皆只針對強制對流的模式進行研究，在電腦資訊科技的發展下，數值模擬的技術亦可獲得相當的提升，故可進一步探討先前採用的熱傳增益模式其在自然對流中的適用性與有效性。
2. 大部分之工程問題為三維之紊流流場，本文的研究仍僅限於二維的層流流場，因此進一步研究發展三維及紊流之計算程式並配合適當的演算法與平行化處理，將可更加適切的解析工程問題，這在電腦資訊科技的快速發展下，亦可以更加快速的達成。
3. 相關的垂直管道高溫面振動問題之研究，本文僅以數值模擬的方式加以探討，在模擬上所採用的 ALE 及 FEM 等相關技術亦已純熟，且程式模擬結果與先前的研究結果之比對驗證工作亦已完備，然相關的研究亦可以進一步從事實驗方面的比對工作，將可以發現更多有用的數據與更加實用的設計參數，對於爾後的高溫元件散熱問題，可以提供更有效的建議。

参考文献

1. K. Ogiso, "Recent Trends in Electronic Equipment Cooling", Heat Transfer in High Technology and Power Engineering, W.J. Yang and Y. Mori, Hemisphere, Washington D.C., 1987.
2. Y. Iida, T. Tsuyuki, T. Mashima, T. Takashima, and K. Okuyama, "Augmentation of Boiling Heat Transfer from Horizontal Cylinder to Liquid by Movable Particles", KAGAKU KOGAKU RONBUNSHU, 26, pp. 575-580, 2000.
3. T. Fusegi, "Numerical Study of Turbulent Forced Convection in a Periodically Ribbed Channel with Oscillatory Throughflow", International Journal of Numerical Methods in Fluids, 23, pp. 1223-1233, 1996.
4. J.S. Sitter, T.J. Snyder, J.N. Chung, and P.L. Marston, "Terrestrial and Microgravity Pool Boiling Heat Transfer from a Wire in an Acoustic Field", International Journal of Heat and Mass Transfer, 41, pp.2143-2155, 1998.
5. K.C. Cheng and G.J. Hwang, "Forced and Mixed Convection Cooling in Computers", Cooling Techniques for Computers, Win Aung, Hemisphere, Washington D.C., 1991.
6. A.E. Bergles, "Recent Development in Convective Heat-transfer Augmentation", Applied Mechanics Reviews, 26, pp. 675-682, 1973.
7. A.E. Bergles, "Survey and Evaluation of Techniques to Augment Convective Heat and Mass Transfer", Heat and Mass Transfer, 1, pp. 331-424, 1969.
8. A.E. Bergles and R.L. Webb, "A Guide to the Literature on Convective Heat Transfer Augmentation", Advances in Enhanced Heat Transfer-1985, S.M. Shenkman, J.E. O'Brien, I.S. Habib, and J.A. Kohler, 43, pp. 81-90, ASME Symposium, 1985.
9. W.F. Noh, "A Time-dependent Two-space-dimensional Coupled Eulerian -Lagrangian Code", Methods in Computational Physics, 3, p. 117, B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg, Academic Press, New York, 1964.
10. C.W. Hirt, A.A. Amsden, and H.K. Cooks, "An Arbitrary Lagrangian -Eulerian Computing Method for all Flow Speeds", Journal of Computational Physics, 14, pp. 227-253, 1974.
11. T.J.R. Hughes, W.K. Liu, and T.K. Zimmermann, "Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 29, pp. 329-349, 1981.
12. T. Belytschko, D.P. Flanagan and J.M. Kennedy, "Finite Element Methods with User-Controlled Meshes for Fluid-Structure Interaction", Computer Method in Applied

- Mechanics and Engineering, 33, pp. 669-688, 1982.
13. A. Huerta and W.K. Liu, "Viscous Flow with Large Free Surface Motion", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 69, pp. 277-324, 1988.
 14. J. Donea, S. Giuliani, and J.P. Halleux, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Transient Dynamic Fluid Structure Interactions", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 33, pp. 689-723, 1982.
 15. A. Huerta and W.K. Liu, "Viscous Flow Structure Interaction", Journal of Pressure Vessel Technology, 110, pp. 15-21, 1988.
 16. T. Nomura and T.J.R. Hughes, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods for Interaction of Fluid and a Rigid Body", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95, pp. 115-138, 1992.
 17. T. Nomura, "Finite Element Analysis of Vortex-induced Vibrations of Bluff Cylinders", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 46, pp. 587-594, 1993.
 18. A. Masud and T.J.R. Hughes, "A Space-time Galerkin/least-squares Finite Element Formulation of the Navier-Stokes Equation for Moving Domain Problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 146, pp. 91-126, 1997.
 19. W.K. Liu, H. Chang, J.S. Chen, and T. Belytschko, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Pereov-Galerkin Finite Element for Nonlinear Continua", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 68, pp. 259-310, 1988.
 20. 楊德良，張仁德，「結構物在風場中之數值模擬研究」，行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告，民國八十四年。
 21. 黃建平，「無塵室內工作人員移動對塵粒擴散之影響」，國立交通大學，碩士論文，民國八十五年。
 22. W.S. Fu and S.J. Yang, "Numerical Simulation of Heat Transfer Induced by a Body Moving in the Same Direction as Flowing Fluids", Heat and Mass Transfer, 36, pp. 257-264, 2000.
 23. W.S. Fu and S.J. Yang, "Heat Transfer Induced by a Body Moving in Opposition to a Flowing Fluid", International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp. 89-98, 2001.
 24. W.S. Fu and S.J. Yang, "A New Model for Heat Transfer of Fins Swinging Back and Forth in a Flow", International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp. 1687-1697, 2001.
 25. W.S. Fu and S.J. Yang, "A Numerical Study of Effects of the Swinging Amplitude of Fins on Heat Transfer Characteristics in a Flow", Heat and Mass Transfer, 38, pp. 55-63,

- 2001.
26. 楊肅正,「擺動矩形體在流動場中之流場與熱傳特性研究」,國立交通大學,博士論文,民國八十九年。
 27. W.S. Fu, W.W. Ke and K.N. Wang, “Laminar Forced Convection in a Channel with a Moving Block”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp. 2385-2394, 2001.
 28. W.S. Fu, K.N. Wang and W.W. Ke, “An Investigation of a Block Moving Back and Forth on a Heat Plate under a Slot Jet”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp. 2621-2631, 2001.
 29. W.S. Fu, and K.N. Wang, “An Investigation of a Block Moving Back and Forth on a Heat Plate under a Slot Jet, part II (the Effect of Block Moving Distance and Vacant Distance)”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp. 4649-4665, 2001.
 30. 王可男,「往復運動薄塊對噴流中壁面熱傳影響之研究」,國立交通大學,博士論文,民國九十年。
 31. W.S. Fu and B.H. Tong, “Numerical Investigation of Heat Transfer from a Heated Oscillating Cylinder in a Cross Flow”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 45, pp. 3033-3043, 2002.
 32. W.S. Fu and B.H. Tong, “Numerical Investigation into Effect of an Oscillating Cylinder on Heat Transfer of the Heated Wall in a Channel”, Numerical Heat Transfer Part A, 43, pp. 639-658, 2003.
 33. W.S. Fu and B.H. Tong, “Effects of Eccentricity of Cylinder and Blockage Ratio on Heat Transfer by an Oscillating Cylinder in a Channel Flow”, International communication of Heat and Mass Transfer, 30, pp. 401-412, 2003.
 34. W.S. Fu and B.H. Tong, “Numerical Investigation of Heat Transfer Characteristics of the Heated Blocks in the Channel with a Transversely Oscillating Cylinder”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, pp. 341-351, 2004.
 35. 童寶鴻,「振動圓柱對渠道內熱流場影響之研究」,國立交通大學,博士論文,民國九十二年。
 36. 連信宏,「利用多孔性介質增強活塞頂面之熱傳效率」,國立交通大學,碩士論文,民國九十四年。
 37. W.S. Fu and W.J. Shieh, “A Study of Thermal Convection in an Enclosure Induced Simultaneously by Gravity and Vibration”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 35, pp. 1695-1710, 1992.

38. W.S. Fu and W.J. Shieh, "Transient Thermal Convection in an Enclosure Induced Simultaneously by Gravity and Vibration", International Journal of Heat and Mass Transfer, 36, pp. 437-452, 1993
39. Hideshi Ishida and Hideo Kimoto, "The Structures of Attractors Reconstructed with Time-Evolution Data of Average Heat Transfer on Thermal Convection Field in a Vibrating Square Enclosure", Heat Transfer-Asian Research, 30, pp. 11-21, 2001.
40. Forbes RE, Carley CT, Bell CJ, "Vibration Effects on Convective Heat Transfer in Enclosure", Journal of Heat Transfer-Trans. ASME, pp. 429-438, 1970.
41. Takehiko Ichioka etc., "Research on Fluid Elastic Vibration of Cylinder Arrays by Computational Fluid Dynamics (Analysis of Two Cylinders and a Cylinder Row)", JSME International Journal Series B-Fluids Thermal Engineering, 40, pp. 16-24, 1997.
42. C.B. Baxi and A. Ramachandran, "Effect of Vibration on Heat Transfer from Spheres", Journal of Heat Transfer-Trans. ASME, pp. 337-344, 1969.
43. K.N. Krishnan and B.K. Subba Rao, "Effect of Vibration on the Performance of a Double Pipe Heat Exchanger", Indian Journal of Technology, 13, pp. 1-5, 1975.
44. A.A Ivanova and V.G. Kozlov, "Vibrationally Gravitational Convection in a Horizontal Cylindrical Layer", Heat Transfer-Soviet Research, 20, pp. 235-247, 1988.
45. W.H. McAdams, Heat Transmission, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
46. S.W. Churchill and H.H.S. Chu, "Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate", International Journal of Heat and Mass Transfer, 18, pp. 1323-1329, 1975.
47. C.A. Hieber, B. Gebhart, "Mixed Convection from a Sphere at Small Reynolds and Grashof Numbers", Journal of Fluid Mechanics, 38, pp. 137-159, 1969.
48. P.M. Brdlik, I.A. Kozhinov, A.A. Petrova, "Approximate Solution to the Problem of Local Heat Transfer at a Vertical Plate under Conditions of Laminar Mixed Convection", International Chemical Engineering, 14, pp. 65-69, 1974.
49. P. Cheng, "Combined Free and Forced Convection Flow about Inclined Surfaces in Porous Media", International Journal of Heat and Mass Transfer, 20, pp. 807-814, 1977.
50. U.P. Hwang, "Effect of Flow Direction on Mixed Convection Heat Transfer from a Vertical Flat Plate and a Plate with Square Protuberances", Letters in Heat and Mass Transfer, 6, pp. 459-468, 1979.
51. Y.L. Tsay, "Transient Conjugated Mixed-Convective Heat Transfer in a Vertical Plate Channel with One Wall Heated Discretely", Heat and Mass Transfer, 35, pp. 391-400,

1999.

52. B.H. Kang, Y. Jaluria, “Conjugate Heat Transfer from a Continuously Moving Material in a Parallel Channel Flow for Cooling in Forming Manufacturing Processes”, 1990 the Winter Annual Meeting of the ASME, Proceedings of the ASME Heat Transfer Division, 146, pp. 25-35, 1990.
53. B.H. Kang, Y. Jaluria, “Heat Transfer from Continuously Moving Material in Channel Flow for Thermal Processing”, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 8, pp. 546-554, 1994.
54. A. Andreozzi, N. Bianco, V. Naso, O. Manca, “Numerical Analysis of Opposing Mixed Convection in Air in a Vertical Channel with a Moving Plate”, 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings of the ASME Heat Transfer Division, 376, pp. 713-722, 2005.
55. B. Metais and E.R.G. Eckert, “Forced, Mixed, and Free Convection Regimes”, Journal of Heat Transfer, series C, 86, pp. 295, 1964.
56. J.P. Holman, Heat Transfer, 7th ed., McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1992.



附錄一. 自然對流模式之有限元素法離散化推導程序

在採用葛拉金有限元素法並使用形狀函數 N_i 為加權函數後，則原統御方程式可以轉換成如下之積分形式：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial X} - N_i \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial Y} - N_i \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - N_i Pr \theta \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) - \frac{N_i}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

再將二次項及壓力項利用高斯積分定理加以化簡，

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P}{\partial X} d\Omega = \int_{\Gamma_e} PN_i n_x d\Gamma - \int_{\Omega_e} P \frac{\partial N_i}{\partial X} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial P}{\partial Y} d\Omega = \int_{\Gamma_e} PN_i n_y d\Gamma - \int_{\Omega_e} P \frac{\partial N_i}{\partial Y} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial X} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} d\Omega = \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial Y} d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} d\Omega$$

則原積分式可以改寫如下：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} PN_i n_x d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + V \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial Y} + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \right) - N_i Pr \theta \right] d\Omega \\
&= \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \\
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial n} d\Gamma
\end{aligned}$$

利用處罰函數可將壓力項以速度關係式代入，

$$P = -\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

則動量方程式變為

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
&= \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma \\
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - N_i Pr \theta \right] d\Omega \\
&= \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma
\end{aligned}$$

為了計算處理上的方便，我們可以把原本非線性積分方程式加以線性化，其中 $\Phi^{m+1} = \Phi^m + \delta\Phi$ 則

$$\begin{aligned}
\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial S} &= \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} \approx \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \delta\Phi \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} \\
&= \Phi^m \frac{\partial \Phi^{m+1}}{\partial S} + \Phi^{m+1} \frac{\partial \Phi^m}{\partial S} - \Phi^m \frac{\partial \Phi^m}{\partial S}
\end{aligned}$$

上式中省略了 $\delta\Phi \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial S}$ 項，其中 Φ 可表為 U 、 V 或 θ ， S 可表為 X 或 Y ，

若是將上述之推導加上格點速度，則線性化結果變為

$$\begin{aligned}
(U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} &= (U^{m+1} - \hat{U}) \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} = U^{m+1} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} - \hat{U} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} \\
&= \left(U^m \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + U^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial X} - U^m \frac{\partial U^m}{\partial X} \right) - \hat{U} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X}
\end{aligned}$$

$$= (U^m - \hat{U}) \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + U^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial X} - U^m \frac{\partial U^m}{\partial X}$$

同理，Y 方向之線性化亦可推導而得

$$(U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} = (U^m - \hat{U}) \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + U^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial X} - U^m \frac{\partial V^m}{\partial X}$$

另外，對於時間項 $\frac{\partial}{\partial \tau}$ 的處理方式，則採用後向差分隱式法，其微分式可以表示成

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\Phi_{\tau+\Delta\tau} - \Phi_{\tau}}{\Delta\tau}$$

由上述之推導，最終即可獲得線性化之有限元素方程式，如下所示：

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial U^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial Y} \right) \right. \\ & \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_{\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial U^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial U^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma \\ & \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial Y} \right) \right. \\ & \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) - N_i Pr \theta^{m+1} \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_{\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial V^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial V^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma \\ & \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta_{\tau}}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma \end{aligned}$$

上式中含上標「m」或「m+1」之各項，其下標均為「 $\tau + \Delta\tau$ 」。

將上述步驟所得之三個方程式利用矩陣形式表示，且

$$U^{(e)} = [N] \{U\}^{(e)}、V^{(e)} = [N] \{V\}^{(e)}、\theta^{(e)} = [N] \{\theta\}^{(e)}$$

$$[N]_{1 \times 8} = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$\{U\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{Bmatrix}, \{V\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{Bmatrix}, \{\theta\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_8 \end{Bmatrix}$$

而其中的形狀函數採用八節點二次等參元素，其函數如下所述：

$$N_1 = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

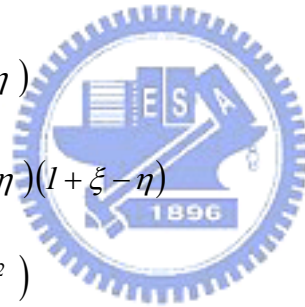
$$N_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = \frac{-1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$



如此即可獲得單一元素之矩陣方程式

$$([C]^{(e)} + [K]^{(e)} + \lambda [L]^{(e)}) \{q\}^{(e)} = \{f\}^{(e)}$$

其中 $\{q\}^{(e)} = [U_1, U_2, \dots, U_8, V_1, V_2, \dots, V_8, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8]^t$ ，且

$[C]^{(e)}$ ：表非線性迭代 U 、 V 與 θ 所組成之矩陣

$[K]^{(e)}$ ：表純由幾何形狀函數與時間項所組成之矩陣

$[L]^{(e)}$ ：表帶有處罰函數 λ 項所組成之矩陣

$\{f\}^{(e)}$ ：表右半部已知向量之矩陣

若是將計算區域內的所有元素結合成單一矩陣方程式，則上式變為

$$([C] + [K] + \lambda [L]) \{q\} = \{f\}$$

其中

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & 0 \\ [C_{21}] & [C_{22}] & 0 \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{22}] & [K_{23}] \\ 0 & 0 & [K_{33}] \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] & 0 \\ [L_{21}] & [L_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \{f\} = \begin{bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_\theta\} \end{bmatrix}$$

又上列矩陣中的子矩陣分別為

[C]矩陣：

$$[C_{11}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{U\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[C_{12}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{U\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{21}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{V\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{22}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{V\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[C_{31}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{\theta\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{32}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{\theta\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{33}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right]$$

[K]矩陣：

$$[K_{11}] = \sum_I^{n_e} \left[\frac{I}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] d\Omega + \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right\} d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] d\Gamma \right]$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[K_{23}] = - \sum_I^{n_e} Pr \int_{\Omega_e} \{N\} [N] d\Omega$$

$$[K_{33}] = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} d\Omega + \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] d\Gamma \right]$$

[L] 矩陣：

$$[L_{11}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] n_x d\Gamma \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] n_x d\Gamma \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] n_y d\Gamma \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] n_y d\Gamma \right]$$

{f} 矩陣：

$$\{f_u\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \{U\}_I d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U\}^m d\Omega \right]$$

$$\{f_v\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \{V\}_I d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V\}^m d\Omega \right]$$

$$\{f_\theta\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \{\theta\}_I d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} \{N\} \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{\theta\}^m d\Omega \right]$$

附錄二. 混合對流模式之有限元素法離散化推導程序

與上述之自然對流離散過程相同，在採用葛拉金有限元素法並使用形狀函數 N_i 為加權函數後，則原統御方程式可以轉換成如下之積分形式：

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{N_i}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + N_i \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{N_i}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - N_i \frac{Gr}{Re^2} \theta \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) - \frac{N_i}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

同樣將二次項及壓力項利用高斯積分定理加以化簡後則原積分式可改寫為

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - P \frac{\partial N_i}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - N_i \frac{Gr}{Re^2} \theta \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{Pr Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta}{\partial n} d\Gamma$$

利用處罰函數可將壓力項以速度關係式代入，則動量方程式變為

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial U}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\partial V}{\partial \tau} + N_i \left((U - \hat{U}) \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - N_i \frac{Gr}{Re^2} \theta \right] d\Omega$$

$$= \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} P N_i n_y d\Gamma$$

同樣地我們可以把原本非線性積分方程式加以線性化，且對於時間項採

用後向差分隱式法，最終即可獲得線性化之有限元素方程式如下：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial U^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial U^m}{\partial Y} \right) \right. \\
& \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial X} \left(\frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial U^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{U_\tau}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial U^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial U^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial U^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} PN_i n_x d\Gamma \\
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial V^m}{\partial Y} \right) \right. \\
& \left. + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial Y} \left(\frac{\partial U^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial V^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial V^{m+1}}{\partial Y} \right) - N_i \frac{Gr}{Re^2} \theta^{m+1} \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{V_\tau}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial V^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial V^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial V^m}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} PN_i n_y d\Gamma \\
& \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta^{m+1}}{\Delta\tau} + N_i \left((U^m - \hat{U}) \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + V^m \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} + U^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^{m+1} \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial \theta^{m+1}}{\partial Y} \right) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega_e} \left[N_i \frac{\theta_\tau}{\Delta\tau} + N_i \left(U^m \frac{\partial \theta^m}{\partial X} + V^m \frac{\partial \theta^m}{\partial Y} \right) \right] d\Omega + \frac{1}{Pr Re} \int_{\Gamma_e} N_i \frac{\partial \theta^m}{\partial n} d\Gamma
\end{aligned}$$

上式中含上標「m」或「m+1」之各項，其下標均為「 $\tau + \Delta\tau$ 」。

將上述步驟所得之三個方程式利用矩陣形式表示，且

$$U^{(e)} = [N] \{U\}^{(e)}、V^{(e)} = [N] \{V\}^{(e)}、\theta^{(e)} = [N] \{\theta\}^{(e)}$$

$$[N]_{l \times 8} = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$\{U\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{Bmatrix}、\{V\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_8 \end{Bmatrix}、\{\theta\}_{8 \times 1}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_8 \end{Bmatrix}$$

而其中的形狀函數同上節所述，且可獲得單一元素之矩陣方程式

$$([C]^{(e)} + [K]^{(e)} + \lambda [L]^{(e)}) \{q\}^{(e)} = \{f\}^{(e)}$$

其中 $\{q\}^{(e)} = [U_1, U_2, \dots, U_8, V_1, V_2, \dots, V_8, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8]^t$ ，且

$[C]^{(e)}$ ：表非線性迭代 U 、 V 與 θ 所組成之矩陣

$[K]^{(e)}$ ：表純由幾何形狀函數與時間項所組成之矩陣

$[L]^{(e)}$ ：表帶有處罰函數 λ 項所組成之矩陣

$\{f\}^{(e)}$ ：表右半部已知向量之矩陣

若是將計算區域內的所有元素結合成單一矩陣方程式，則上式變為

$$([C] + [K] + \lambda [L])\{q\} = \{f\}$$

其中

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] & 0 \\ [C_{21}] & [C_{22}] & 0 \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{22}] & [K_{23}] \\ 0 & 0 & [K_{33}] \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] & 0 \\ [L_{21}] & [L_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_\theta\} \end{bmatrix}$$

又上列矩陣中的子矩陣分別為

$[C]$ 矩陣：

$$[C_{11}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{U\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[C_{12}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{U\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{21}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{V\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{22}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{V\}^m [N] \right) d\Omega \right]$$

$$[C_{31}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] \{\theta\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{32}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \{\theta\}^m [N] d\Omega \right]$$

$$[C_{33}] = \sum_1^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \{N\} \left([N] \left(\{U\}^m - \{\hat{U}\} \right) \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + [N] \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega \right]$$

[K] 矩陣：

$$[K_{11}] = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] d\Gamma \right]$$

$$[K_{22}] = [K_{11}]$$

$$[K_{23}] = - \sum_I^{n_e} \frac{Gr}{Re^2} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] d\Omega$$

$$[K_{33}] = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] d\Omega + \frac{1}{Pr Re} \int_{\Omega_e} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) d\Omega - \frac{1}{Pr Re} \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] d\Gamma \right]$$

[L] 矩陣：

$$[L_{11}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] n_x d\Gamma \right]$$

$$[L_{12}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial X} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] n_x d\Gamma \right]$$

$$[L_{21}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] n_y d\Gamma \right]$$

$$[L_{22}] = \sum_I^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N}{\partial Y} \right\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_e} \{N\} \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] n_y d\Gamma \right]$$

{f} 矩陣：

$$\{f_u\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \{U\}_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{U\}^m d\Omega \right]$$

$$\{f_v\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \{V\}_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{V\}^m d\Omega \right]$$

$$\{f_\theta\} = \sum_I^{n_e} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \{\theta\}_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \{N\} [N] \left(\{U\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial X} \right] + \{V\}^m \left[\frac{\partial N}{\partial Y} \right] \right) \{\theta\}^m d\Omega \right]$$

作者簡介

黃建平，1971 年出生於台北市。1990 年進入國立交通大學機械工程學系就讀，1994 年直升進入交通大學機械工程學系碩士班熱流組，1996 年以熱流組第一名的成績獲得碩士學位，同年進入國軍服役，1998 年退伍後進入工業技術研究院服務，2001 年以在職進修的方式考試進入交通大學機械工程學系博士班開始攻讀博士學位。在交通大學機械系在職進修期間，研習機械工程相關領域之課程，並同時進行工業技術研究院職內之研究工作，參與政府及產業界等相關研究計畫，獲得十多項專利與發表學術論文數篇。

A. 期刊論文

- W.S. Fu and **C.P. Huang**, “Effects of a Vibrational Heat Surface on Natural Convection in a Vertical Channel Flow”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 49, pp. 1340-1349, 2006.
- W.S. Fu, C.C. Tseng, **C.P. Huang** and K.N. Wang, “An Experimental Investigation of a Block Moving Back and Forth on a Heat Plate under a Slot Jet”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50, pp. 3224-3233, 2007.
- W.S. Fu and **C.P. Huang**, “Limitation Enhancement of a Mixed Convection by a Vibrational Heat Surface in a Vertical Channel”, Heat and Mass Transfer. (**accepted**)
- 傅武雄，**黃建平**，「動態污染源擴散模式」，工業安全科技，第 30 期，17~25 頁，經濟部工業局，民國八十八年四月。
- 謝文德，李松凌，**黃建平**，「改良型模組化氣流亭系統設計與工程實例」，工業安全科技，第 34 期，46~53 頁，經濟部工業局，民國八十九年三月。
- **黃建平**，「高科技廠房排氣系統之監控與節能探討」，能源節約技術報導，第 55 期，3~11 頁，經濟部能源局，民國九十三年十二月。
- 黃德琪，**黃建平**，闕妙如，「鑄造業遊離二氧化矽作業場所改善實例」，工業安全科技，第 62 期，28~36 頁，經濟部工業局，民國九十六年三月。

B. 專利獲証

- **黃建平**，「單芯式平均動壓量測裝置」，200006，台灣，2003/07/01。
- **黃建平**，湯新達，「多功能壓力量測裝置」，ZL02282880.X，中國，2003/10/08。

- 黃建平，湯新達，「多功能壓力量測裝置」，210150，台灣，2004/01/29。
- 黃建平，唐思維，「套管式平均動壓量測管」，M242689，台灣，2004/09/14。
- 黃建平，「雙管式平均動壓量測管」，M245405，台灣，2004/10/15。
- 陸忠憲，黃建平，林慶峰，吳振榮，許又仁，「移動式負壓隔離艙」，M248423，台灣，2004/11/12。
- 黃建平，唐思維，「套管式平均動壓測量裝置」，ZL03249004.6，中國，2004/11/22。
- 黃建平，「雙管式平均動壓測量裝置」，ZL03249005.4，中國，2004/12/20。
- 黃建平，「壓力監測系統」，I237689，台灣，2005/08/19。
- 黃建平，「平均動壓量測方法」，I251666，台灣，2006/04/03。
- 黃建平，黃秀華，黃德琪，「烹調設備及其油煙控制系統」，I254783，台灣，2006/05/23。
- 黃建平，湯新達，「監控方法及其監控系統」，I255328，台灣，2006/06/05。
- 黃建平，湯新達，「監控方法及其監控系統」，7,127,377，美國，2006/12/01。

C. 榮譽與獎勵

- 「研究紀錄簿獎」，工業技術研究院環境與安全技術發展中心，民國九十二年。
- 「最佳創意-專利獎」第一名，工業技術研究院環境與安全技術發展中心，民國九十三年。
- 「最佳技術手冊獎」第二名，工業技術研究院環境與安全技術發展中心，民國九十三年。
- 「衍生加值個人績優獎」第一名，工業技術研究院環境與安全技術發展中心，民國九十四年。
- 「國際期刊論文獎」，工業技術研究院能源與環境研究所，民國九十五年。
- 「第三屆工研院品質衡量典範案例」第一名，工業技術研究院，民國九十五年。