

第一章 序論

光波具有很多有趣的特性，包括光的波長、光的強度、光的同調性以及光的偏振性等等。光的偏振性在由丹麥科學家 Bartholinus 於 1669 年發現方解石晶體 (Calcite) 的雙折射特性；1690 年德國科學家 Huygens 發現光之偏振現象；1852 年，Stokes 利用四個參數 (Stokes polarization parameters) 來描述光的偏振態，即為 Stokes vector；1940 年代初，Mueller 以 Stokes vector 為基礎發展一套數學，用以表示偏振光與偏光元件之間的關係，即為 Mueller matrix calculus；約在同時，Jones 發展出較簡單只能運算純偏光的運算法，即為 Jones matrix calculus。至此，偏光理論趨於成熟 [2]。20 世紀初期因為鍍膜技術的需求，光的偏振性才比較受到重視並受到更多更廣泛的研究。

在光電量測的眾多技術中，若提到材料光學參數 (如薄膜厚度、折射率等) 之量測，則首推橢圓術 (ellipsometry)。橢圓術的原理是利用已知其偏振態之偏極光，入射一待測物質，經由量測出射光與原先入射光之間的偏振態變化，反推此待測物質之光學特性 [3]。應用橢圓術設計發展的儀器則稱為橢圓儀 (ellipsometer)，橢圓儀中主要的光學元件有：偏光片 (polarizer)、補波片 (compensator)、待測物 (sample) 及析光片 (analyzer)，上述系統中補波片已有被光彈調變器 (Photoelastic Modulator—PEM) 逐漸取代的趨勢 [4]，而發展出光彈調變式橢圓偏光儀 (P-PEM-S-A) 架構。光彈調變器是利用光學材料受應力而產生 X，Y 方向的折射率以週期性變化來調變光的相位延遲 [5]，可即時得到不同的偏光狀態資訊而對樣本進行解析，此系統不須轉動光學元件，可避免因機械轉動而造成的寄生誤差 (parasitic error)，同時具有較高的量測速度，不僅可以靜態地用在量測樣品的性質，也可以動態量測樣品的變化狀況。

本實驗室發展了光彈調變式橢圓偏光儀，並以穿透的方式成功的

校準了各元件的相對偏振角 (azimuthal angle) [6]及光彈調變器的相位振幅 [7]，搭配數據擷取卡 (DAQ card) 可即時量測橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) [8]。2005 年，韓建遠學長與李嘉倫學長利用觸發脈波產生器來對雷射二極體進行時間相位的調變，可利用四個特定時間相位下的強度取得一組橢圓偏光參數，並應用於量測二維動態的樣品，稱之為閃頻式橢圓偏光儀 [1]。本論文針對閃頻式橢圓偏光儀的系統校正及誤差作探討。

本論文以數據擷取卡擷取數位化波形，可取得一個週期內特定時間相位的強度，根據閃頻式橢圓偏光儀的計算方法來分析，所探討的重點有四：

第一部分 閃頻式橢圓偏光儀的原理與架構說明

此部分先敘述光彈調變器之光學特性，進而推導閃頻式橢圓偏光儀量測系統之理論及敘述實驗的架構。

第二部分 閃頻式橢圓偏光儀的誤差分析

3.2 節假設系統誤差的來源主要來自於：(1) 時間相位的偏移 x ；(2) 相位調變振幅 Δ_0 。並利用一階微分理論計算估計系統誤差對橢圓偏光參數產生的影響。

第三部分 閃頻式橢圓偏光儀的修正公式與修正流程

3.3 節與 3.4 節敘述如何求出時間相位與相位調變振幅的系統誤差、修正公式之推導與實驗數據的修正流程 (附錄 A)。藉由數值模擬驗證此修正流程可消除系統誤差的影響求得更準確的橢圓偏光參數。

第四部分 標準片之量測並驗證修正流程的可信度

在 4.1 節我們藉由量測已知厚度的待測物，並且左右平移時間相位來改變系統誤差，可驗證修正公式的可信度，且實驗結果與商用橢圓儀相符合。由於閃頻式橢圓偏光儀需要先校正真正相位起始零點，故 4.2 節藉由光彈調變器的方波訊號觸發強度訊號並利用數據擷取卡擷取波形後經計算可得相位起始點的位置，即可反推理論的相位零點位置。



第二章 基本原理

2.1 光的偏振態與表示法

光波實質上就是電磁波，我們通常以電場的時變分布來定義光波之偏振狀態。假設光波之傳播方向為 z 軸方向，其電場之振動方向將位於 x - y 平面，而電場可表示為

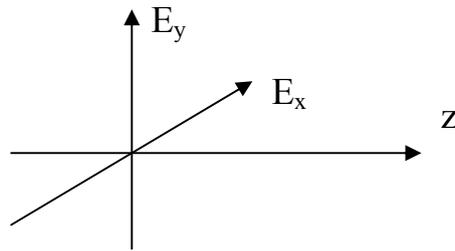


圖 2-1 橫向傳播光場

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{i} + E_y(z,t)\hat{j} \quad (2.1)$$

其中

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz - \delta_x) \quad (2.2a)$$

$$E_y(z,t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \delta_y) \quad (2.2b)$$

k : 波數 (wave number)

ω : 角頻率 (angular frequency)

δ_x 、 δ_y : x 及 y 方向電場之相位 (phase)

當 $z=0$ 時，電場之分布可寫成以下橢圓方程式：

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \quad (2.3)$$

$\delta = \delta_y - \delta_x$: 為 y 方向與 x 方向電場的相位差

我們再將 x, y 座標旋轉一角度 θ ，座標轉換成 x', y' 座標。

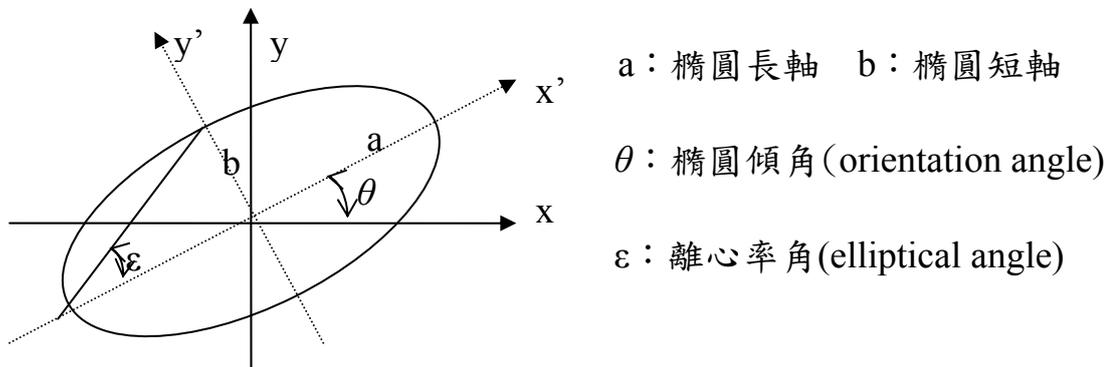


圖 2-2 旋轉座標的橢圓偏振光

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \theta + E_{0y}^2 \sin^2 \theta + 2E_{0x}E_{0y} \sin \theta \cos \theta \cos \delta$$

$$b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \theta + E_{0y}^2 \cos^2 \theta - 2E_{0x}E_{0y} \sin \theta \cos \theta \cos \delta$$

(2.3) 式可簡化成：

$$\frac{E_x'^2}{a^2} + \frac{E_y'^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

光波在某一點之電場分布為橢圓形故稱橢圓偏振。不同的相位差電場就會有不同的橢圓偏振，以下討論幾種特例：

- (1) 當 $\delta = 0, \delta = \pi$ 時，電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光。
- (2) 當 $\delta = \pm\pi/2$ ，且 $E_{0x} = E_{0y}$ 時，電場向量為順或逆時針圓形偏振，稱為右或左旋圓偏振光。
- (3) 當 $\delta \neq 0, \delta \neq \pm\pi, \delta \neq \pm\pi/2$ 時，電場之振動方向為橢圓，稱為橢圓偏振光。

為方便描述光波之偏振狀態，通常以一 2×1 行向量表示電場振動情形，表示光波在空間中的瞬時偏振狀態，此矩陣稱為瓊斯向量 (Jones vector)。

$$|E\rangle = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta x} \\ E_{0y} e^{i\delta y} \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.5)$$

一般而言 Jones vector 只能形容純偏振 (pure polarized) 光，不能形容非偏振 (unpolarized) 光或部份偏振 (partially polarized) 光，但一般光波大部份均為非偏振或部份偏振光，故須用史托克向量 (Stokes vector) 來代表，才能更完整描述光波的偏振狀態。



2.2 史托克參數 (Stokes Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

Stokes vector 為一 4×1 階矩陣

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.6a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.6b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \quad (2.6c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta \quad (2.6d)$$

其中 S_0 代表著此光線的總強度； $S_1 = \pm 1$ 代表偏振狀態為水平或鉛直方向； $S_2 = \pm 1$ 代表偏振狀態為 45° 或 -45° 方向； $S_3 = \pm 1$ 代表偏振狀態為右旋或左旋方向。

一個橢圓率 ε 之正橢圓偏極光的 Jones vector 可表示為

$$\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

一個方位角改變之橢圓偏極光的 Jones vector 可表示為

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = R(-\theta) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varepsilon \\ j \sin \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varepsilon - j \sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon + j \cos \theta \sin \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

將上式轉成 Stokes vector，考慮一般的部分偏極光的偏光率 P ，則廣義的橢圓偏極光可用 Stokes vector 表示：

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ P \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\varepsilon \\ P \cdot \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

其中 I_0 : 光波的總亮度 (intensity)
 P : 偏光率 (degree of polarization)
 θ : 橢圓傾角 (orientation angle)
 ε : 橢圓率 (elliptical angle)

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad P = \begin{cases} 0, & \text{unpolarized} \\ 1, & \text{pure polarized} \end{cases}$$

$P = \text{degree of polarization}$

$$\tan 2\theta = \frac{S_2}{S_1} \quad \sin 2\varepsilon = \frac{S_3}{S_0}$$

所以橢圓偏振光的方位角和橢圓率可由 Stokes parameters 來表示。

Mueller matrix 則是一個 4×4 階的矩陣，用來表示光學元件的傳導矩陣，主要架構建立在 Stokes parameters 上，如以下的出射光

$$\begin{aligned} S'_0 &= m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \\ S'_1 &= m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \\ S'_2 &= m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \\ S'_3 &= m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

可表示成

$$S' = M \cdot S = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

M 即為 Mueller Matrix

以下列舉常用的矩陣

(1) 旋轉矩陣 (假設旋轉 C 度)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2C & \sin 2C & 0 \\ 0 & -\sin 2C & \cos 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

(2) 偏光片的方位角為 P 度時

$$M_{polarizer}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

(2) 補波片

$$M_{compensator}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \phi \sin^2 2\theta & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin \phi \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \phi \cos^2 2\theta & -\sin \phi \cos 2\theta \\ 0 & -\sin \phi \sin 2\theta & \sin \phi \cos 2\theta & \cos \phi \end{bmatrix}$$

θ 為光軸方位角, ϕ 為相位延遲。 (2.14)

當光路徑中有數個偏光元件, 則出射光的 Stokes vector 為

$$S_{out} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots S_{in}$$

其中 S_{in} : 入射光的 Stokes vector

S_{out} : 出射光的 Stokes vector

M_1, M_2, M_3 為各偏光元件的 Mueller Matrix

2.3 光彈調變器 (PEM)

光彈調變器 (Photoelastic Modulator, PEM) 是本論文中所使用之光學調變系統，其構造如圖 2-3 所示，由控制器 (controller)，信號高壓驅動器 (driver) 以及光學頭 (optical head) 所組成。在控制面板上設定相位調變振幅 Δ_0 的大小及入射光波長，經計算後，控制面板將適當的信號傳入高壓驅動器產生交流高壓以驅動光學頭作相位變化。光學頭由 CaF_2 晶體及一壓電晶體 (Quartz) 所組成，壓電晶體在交流高壓作用下產生震盪，擠壓相黏的 CaF_2 晶體，當 CaF_2 晶體受到外加應力作用會在特定方向產生線性雙折射效應 (Linear Birefringence)。此機型的震盪頻率固定為 51 kHz。

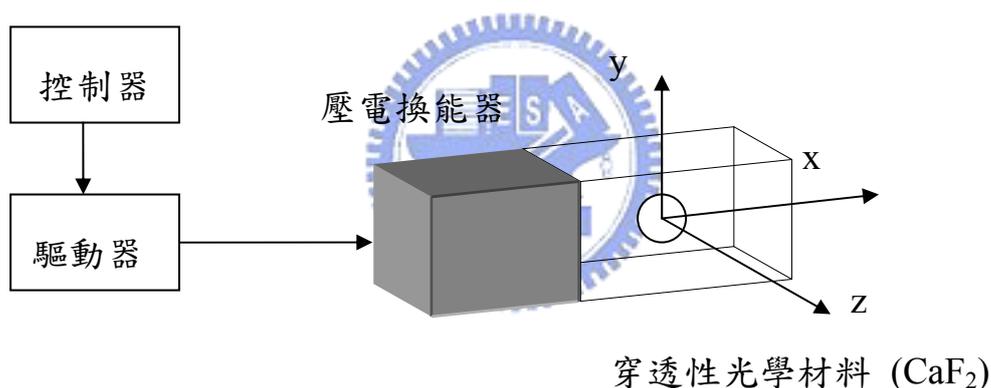


圖 2-3 光彈調變器構造示意圖

因此，PEM 可視為一個相位隨時間改變的相位延遲片 (Phase retarder)，其相位延遲 (Δ_p) 會隨著時間作角頻率為 ω 弦波變化：

$$\Delta_p = \delta_0 \cdot \sin \omega t \quad (2.14)$$

PEM 的 Mueller Matrix 可表示如下:(實驗中光軸固定於 0°)

$$M_{PEM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & -\sin \Delta_p \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

其中 $\Delta_p = \delta_0 \cdot \sin \omega t$, $\delta_0 = 2\pi \cdot \Delta_0$, Δ_0 為光彈調變器的相位調變振幅, ω 為調變頻率。方程式 (2.15) 為理想的 PEM 穆勒矩陣, 實際上 PEM 可能並非理想, 因此引入一個參數 Δ_I (內稟相位延遲)。假設 PEM 相位延遲除了時變項 ($\Delta_p = 2\pi \cdot \Delta_0 \sin \omega t$) 外, 還帶有一個非時變項的內稟相位延遲 Δ_I , 修正後的穆勒矩陣如下:

$$M_{PEM} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p' & -\sin \Delta_p' \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p' & \cos \Delta_p' \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

其中 $\Delta_p' = \Delta_I + \Delta_p$



2.4 橢圓特性參數 Ψ 和 Δ 之定義

根據馬克斯威爾方程式 (Maxwell equations) 和介面條件 (Boundary conditions) 可導出介質表面的反射係數及穿透係數。

$$r_p = \frac{n_1 \cos \theta_0 - n_0 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1} \quad (2.17a)$$

$$r_s = \frac{n_0 \cos \theta_0 - n_1 \cos \theta_1}{n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1} \quad (2.17b)$$

$$t_p = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_0 + n_0 \cos \theta_1} \quad (2.17c)$$

$$t_s = \frac{2n_0 \cos \theta_0}{n_0 \cos \theta_0 + n_1 \cos \theta_1} \quad (2.17d)$$

其中

r_p : 平行入射面方向之反射振幅係數

r_s : 垂直入射面方向之反射振幅係數

t_p : 平行入射面方向之穿透振幅係數

t_s : 垂直入射面方向之穿透振幅係數

n_0 : 入射前介質之折射率, 空氣折射率為 1.0

n_1 : 待測物的折射率

θ_0 : 入射角

θ_1 : 折射角

定義

$$\tan \Psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{|r_p|}{|r_s|} e^{i(\delta_p - \delta_s)} \quad (2.18)$$

$$r_p = |r_p| e^{i\delta_p}, \quad r_s = |r_s| e^{i\delta_s}$$

由上式可得

$$\tan \Psi = \frac{|r_p|}{|r_s|}, \quad \Delta = \delta_p - \delta_s$$

$\tan \Psi$: 反射光在平行入射面與垂直入射面之振幅大小比值

Δ : 反射光在平行入射面與垂直入射面之相位差

這兩參數被稱為橢圓偏光參數 (ellipsometric parameters)，橢圓儀所能測得的即為此參數，如何藉此參數得到樣品的光學常數則須先了解偏極光經介質反射時所遵循的物理模式即可推算，以下介紹兩種模式。

(1) 塊狀物 (bulk medium)：單次反射型態 (如圖 2-4)

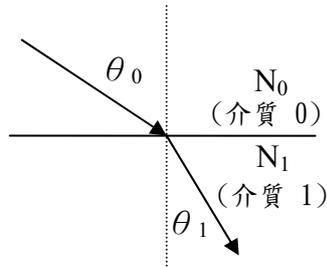


圖 2-4 單次反射型示意圖

當平面光波照射在各向同性 (isotropic)、具吸收的介質 (如金屬或半導體) 中，其折射率 (complex refractive index) 應為複數 N ，故其表示法為 $N = n - ik$ ，其中 n 為該介質的折射率 (index of refraction)， k 為介質的消光係數 (extinction coefficient)，我們可由方程式 (2.17a)、(2.17b)、(2.18) 可以知道橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 與物理參數 (N_0, N_1, θ_0) 之函數關係。

(2) 薄膜型式 (thin film)：多次反射型態 (如圖 2-5)

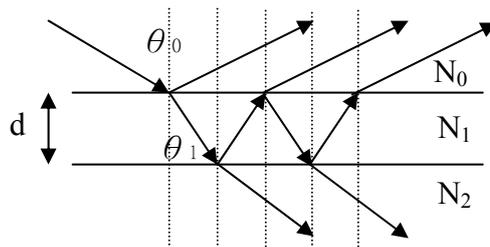


圖 2-5 多次反射型示意圖

在橢圓偏光量測中最常使用的一種情形正是薄膜量測，此種型態有多次反射情形發生，假設第一道反射光和第二道反射光的相位差為 2γ ，同理第二道反射光和第三道反射光的相位差也為 2γ ，所以第 n 道反射光 and 第 $n+1$ 道反射光的相位差都為 2γ 。則反射係數為：

$$r_p = r_{01p} + t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}r_{12p}^2e^{-i4\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}^2r_{12p}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.19a)$$

$$r_s = r_{01s} + t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}r_{12s}^2e^{-i4\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}^2r_{12s}^3e^{-i6\gamma} + \dots \quad (2.19b)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{ijp} &= \frac{N_j \cos \theta_i - N_i \cos \theta_j}{N_j \cos \theta_i + N_i \cos \theta_j} \\ r_{ijs} &= \frac{N_i \cos \theta_i - N_j \cos \theta_j}{N_i \cos \theta_i + N_j \cos \theta_j} \\ t_{ijp} &= \frac{2N_i \cos \theta_i}{N_j \cos \theta_i + N_i \cos \theta_j} \\ t_{ijs} &= \frac{2N_i \cos \theta_i}{N_i \cos \theta_i + N_j \cos \theta_j} \\ \gamma &= 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) N_1 \cos \theta_1 \\ N_1 \cos \theta_1 &= (N_1^2 - N_0^2 \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

d : 薄膜厚度

λ : 光的波長

r_{ijp} : 光線從介質 i 入射到介質 j , 平行入射面方向之反射係數

r_{ijs} : 光線從介質 i 入射到介質 j , 垂直入射面方向之反射係數

t_{ijp} : 光線從介質 i 入射到介質 j , 平行入射面方向之穿透係數

t_{ijs} : 光線從介質 i 入射到介質 j , 垂直入射面方向之穿透係數

其它依此類推, 若為無限多次反射則反射端所接收總反射係數為

$$r_p = r_{01p} + \frac{t_{01p} \cdot t_{10p} \cdot r_{12p} e^{-i2\gamma}}{1 - r_{01p} \cdot r_{12p} e^{-i2\gamma}}$$

$$r_s = r_{01s} + \frac{t_{01s} \cdot t_{10s} \cdot r_{12s} e^{-i2\gamma}}{1 - r_{01s} \cdot r_{12s} e^{-i2\gamma}}$$

$$\text{且 } r_{10} = -r_{01}, \quad t_{01}t_{10} = 1 - r_{01}^2$$

可得

$$\tan \Psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{r_{01p} + r_{12p} \cdot e^{-i2\gamma}}{1 + r_{01p} \cdot r_{12p} \cdot e^{-i2\gamma}} \cdot \frac{1 + r_{01s} \cdot r_{12s} \cdot e^{-i2\gamma}}{r_{01s} + r_{12s} \cdot e^{-i2\gamma}} \quad (2.21)$$

由方程式 (2.20)、(2.21) 可知橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 與物理參數 $(N_0, N_1, N_2, \theta_0, d)$ 之函數關係。只要知道橢圓參數、入射角以及各層介質的折射率就可以反推薄膜的厚度。



2.5 反射光之史托克參數 (Stokes Parameter) 與

穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

在反射式的架構下，x 軸是平行入射面方向，y 軸是垂直入射面方向。

入射光的史托克參數 (Stokes Parameter)

$$\begin{aligned}
 S_0 &= E_p E_p^* + E_s E_s^* \\
 S_1 &= E_p E_p^* - E_s E_s^* \\
 S_2 &= E_p E_s^* + E_s E_p^* \\
 S_3 &= i(E_p E_s^* - E_s E_p^*)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

反射光的史托克參數 (Stokes Parameter)

$$\begin{aligned}
 S'_0 &= R_p R_p^* + R_s R_s^* \\
 S'_1 &= R_p R_p^* - R_s R_s^* \\
 S'_2 &= R_p R_s^* + R_s R_p^* \\
 S'_3 &= i(R_p R_s^* - R_s R_p^*)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

又因 $R_s = r_s E_s$ ， $R_p = r_p E_p$

所以方程式 (2.7) 和 (2.8) 可以寫成矩陣模式

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_p r_p^* + r_s r_s^* & r_p r_p^* - r_s r_s^* & 0 & 0 \\ r_p r_p^* - r_s r_s^* & r_p r_p^* + r_s r_s^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_p r_s^* + r_s r_p^* & -i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) \\ 0 & 0 & i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) & r_p r_s^* + r_s r_p^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

由定義 $\tan \Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s}$ 方程式 (2.9) 可改寫成

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{r_s r_s^*}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tan^2 \Psi & -1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ -1 + \tan^2 \Psi & 1 + \tan^2 \Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \Psi \cos \Delta & 2 \tan \Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -2 \tan \Psi \sin \Delta & 2 \tan \Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

將 (2.25) 式簡化為

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{r_s r_s^*}{2 \cos^2 \Psi} \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\Psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\Psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\Psi \cos \Delta & \sin 2\Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\Psi \sin \Delta & \sin 2\Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

所以各向同性待測物 (isotropic sample) 之穆勒矩陣可表示為

$$M_{sample} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\Psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\Psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\Psi \cos \Delta & \sin 2\Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\Psi \sin \Delta & \sin 2\Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$



2.6 光彈調變式橢圓偏光儀之量測原理

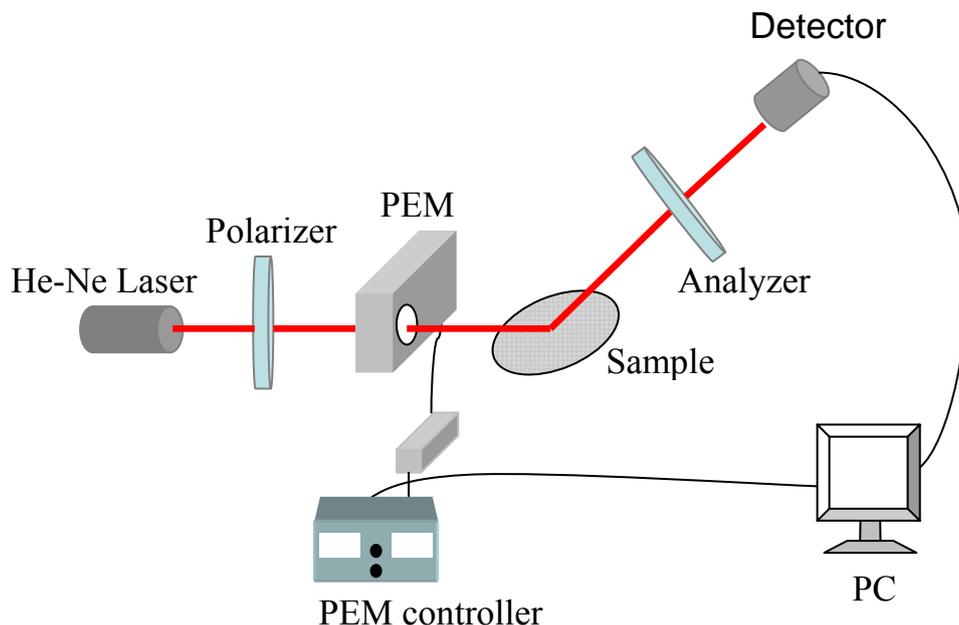


圖 2-6 光彈調變式橢圓偏光儀之架構

光彈調變器提供一角頻率為 ω 的時變相位延遲 Δ_p ，當待測物的法線方向和入射光線所構成的平面為參考平面，將光彈調變器之方位角調整至與入射面平行的位置，偏光片和析光片之穿透軸與參考平面的夾角即為偏光元件的夾角，如圖 2-6 所示，首先 He-Ne 雷射經過偏光片後光的史托克向量為 S_p ，經過光彈調變器 $M_{PEM}(C, \Delta_p)$ ，並入射待測物 $R_S(\Psi, \Delta)$ 反射後再通過析光片 $M_A(A)$ ，出射的史托克向量 S_f 的數學模式可以表示為：

$$S_f = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = M_A(A) \cdot R_S(\Psi, \Delta) \cdot M_{PEM}(C, \Delta_p) \cdot S_p \quad (2.28)$$

各偏光元件的穆勒矩陣乘積可表示為：

$$S_f = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{I_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2A & \sin 2A & 0 \\ \cos 2A & \cos^2 2A & \cos 2A \sin 2A & 0 \\ \sin 2A & \cos 2A \sin 2A & \sin^2 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\Psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\Psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\Psi \cos \Delta & \sin 2\Psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\Psi \sin \Delta & \sin 2\Psi \cos \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2C & \sin 2C & 0 \\ 0 & \sin 2C & \cos 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \Delta_p & -\sin \Delta_p \\ 0 & 0 & \sin \Delta_p & \cos \Delta_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2C & \sin 2C & 0 \\ 0 & -\sin 2C & \cos 2C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2P \\ \sin 2P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

將偏光片、光彈調變器與析光片之方位角分別置於 -45° 、 0° 、 45° ，

由光偵測器所偵測到之時變訊號為：

$$I = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta - \Delta_p)] \quad (2.30)$$

由 (2.14) 式可知光彈調變器之時變相位延遲為 $\Delta_p = \Delta_l + \delta_0 \sin \omega t$ ，

假設光彈調變器為理想狀態，不考慮內稟相位延遲 ($\Delta_l = 0$) 則時變

相位延遲為 $\Delta_p = \delta_0 \sin \omega t$ ，利用傅立葉展開式

$$\begin{aligned} \sin \Delta_p &= 2J_1(\delta_0) \sin \omega t + 2J_3(\delta_0) \sin 3\omega t + \dots \\ \cos \Delta_p &= J_0(\delta_0) + 2J_2(\delta_0) \cos \omega t + 2J_4(\delta_0) \cos 4\omega t + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

將 (2.31) 式代入 (2.30) 式，可得偵測到的時變訊號表示如下

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_0}{2} [1 - J_0(\delta_0) \sin 2\Psi \cos \Delta - 2J_1(\delta_0) \sin 2\Psi \sin \Delta \sin \omega t \\ &\quad - J_2(\delta_0) \sin 2\Psi \cos \Delta \cos 2\omega t + \dots] \end{aligned} \quad (2.32)$$

當設定調變振幅 $\delta_0 = 2.405$ 時，則 $J_0(\delta_0) = 0$ ，此時 I_{DC} 唯一常數

$$I_{DC} = \frac{I_0}{2} \quad (2.33)$$

其餘各倍頻訊號可表示如下

$$\begin{aligned} I_{(2m-1)f} &= -I_0 \cdot J_{(2m-1)}(\delta_0) \sin 2\Psi \sin \Delta \sin[(2m-1)\omega t] ; \\ I_{2mf} &= -I_0 \cdot J_{2m}(\delta_0) \sin 2\Psi \cos \Delta \sin(2m\omega t) , \text{ where } m=1,2,\dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

最後可使用鎖相放大器擷取各倍頻訊號大小，並經運算後即可獲得待測物之橢圓偏光參數

$$\Psi = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left\{ \left[\frac{I_{1f}}{2J_1(\delta_0)I_{DC}} \right]^2 + \left[\frac{I_{2f}}{2J_2(\delta_0)I_{DC}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

$$\Delta = \tan^{-1} \left[\frac{I_{1f}J_2(\delta_0)}{I_{2f}J_1(\delta_0)} \right]$$

調變振幅的大小是光彈調變器中隨著波長與溫度變化相關的參數。在本實驗中雷射光都是單一波長，所以調變振幅的變化只與溫度有關，在長時間的實驗中有可能因溫度造成調變振幅的飄移，而我們可以即時監測調變振幅的變化作修正以減少量測誤差。由 (2.35) 式可知，通常將調變振幅設定 δ_0 為 2.405，如果 $\delta_0 \neq 2.405$ 則直流向多了一項 $J_0(\delta_0) \sin 2\Psi \cos \Delta$ ，而其他各倍頻的 Bessel 函數值也需修正而影響到量測的橢圓偏光參數。

而即時量測調變振幅大小的方法是利用所像放大器即時監控各倍頻訊號的大小，並經由計算可即時量測調變振幅，如 (2.36) 式所示。如經量測發現調變振幅 $\delta_0 \neq 2.405$ ，可藉由調節輸入電壓大小來修正至理想值。

$$\frac{I_{1f}}{I_{3f}} = \frac{J_1(\delta_0)}{J_3(\delta_0)} \quad \text{或} \quad \frac{I_{2f}}{I_{4f}} = \frac{J_2(\delta_0)}{J_4(\delta_0)} \quad \delta_0 = 2\pi \cdot \Delta_0 \quad (2.36)$$

2.7 閃頻式橢圓偏光儀量測系統架構

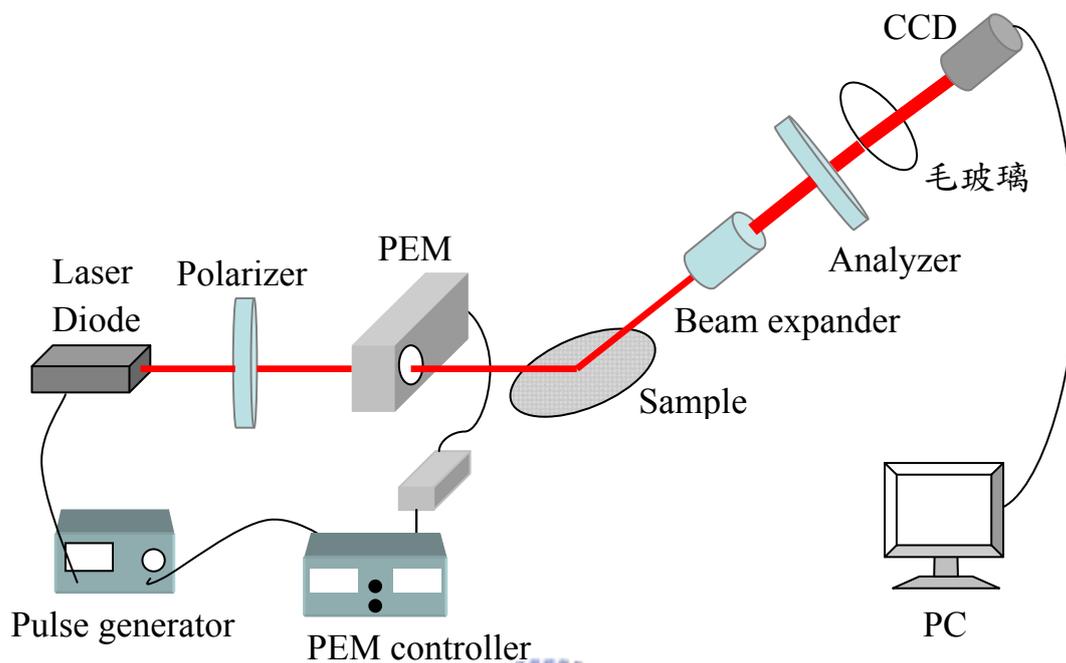


圖 2-7 閃頻式橢圓偏光儀之架構

由 (2.30) 式可知光強度表示式為

$$I = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin \omega t)] \quad (2.37)$$

令 ωt 為 θ ， $\Delta_0=0.5$ ，故

$$I_\theta = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta - \pi \sin \theta)] \quad (2.38)$$

$$I_{0^\circ} = \frac{I_0}{2} (1 - \sin 2\Psi \cos \Delta) \quad (2.39a)$$

$$I_{30^\circ} = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta - \frac{\pi}{2})] = \frac{I_0}{2} (1 - \sin 2\Psi \sin \Delta) \quad (2.39b)$$

$$I_{90^\circ} = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta - \pi)] = \frac{I_0}{2} (1 + \sin 2\Psi \cos \Delta) \quad (2.39c)$$

$$I_{210^\circ} = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cos(\Delta + \frac{\pi}{2})] = \frac{I_0}{2} (1 + \sin 2\Psi \sin \Delta) \quad (2.39d)$$

$$I' = \frac{I_{90^\circ} - I_{0^\circ}}{I_{90^\circ} + I_{0^\circ}} = \sin 2\Psi \cos \Delta \quad (2.40)$$

$$I'' = \frac{I_{210^\circ} - I_{30^\circ}}{I_{210^\circ} + I_{30^\circ}} = \sin 2\Psi \sin \Delta \quad (2.41)$$

由 (2.40) 與 (2.41)

$$\tan \Delta = \frac{I''}{I'} = \frac{\sin 2\Psi \sin \Delta}{\sin 2\Psi \cos \Delta} \quad (2.42)$$

$$\sin 2\Psi = \sqrt{I'^2 + I''^2} = \sqrt{(\sin 2\Psi \sin \Delta)^2 + (\sin 2\Psi \cos \Delta)^2} \quad (2.43)$$

由 (2.42) 得

$$\Delta = \tan^{-1}\left(\frac{I''}{I'}\right) \quad (2.44)$$

由 (2.43) 得

$$\Psi = \frac{1}{2} \sin^{-1}(\sqrt{I'^2 + I''^2}) \quad (2.45)$$

由式 (2.37) 可知，不同的待測物有不同的橢圓偏光參數時，則我們可以從示波器上得到不同的實驗波形，再由上面的推導可知，當我們能取得光彈調變器時間相位分別為 0° 、 30° 、 90° 、 210° 之光強度值，運算後可得橢圓偏光參數 (Ψ, Δ) 。

但是我們該如何鎖住快速調變的光彈調變器中時間相位分別為 0° 、 30° 、 90° 、 210° 之光強度值呢？藉由下圖 2-8 加以說明。在傳統的光彈調變式橢圓偏光儀中，我們藉由光彈調變器控制器所輸出的一方波訊號 (square wave) 來當作參考訊號，將其送入鎖相放大器中才可將各倍頻的訊號解析出來。而此系統架構則以此方波訊號輸入可程式化脈衝延遲產生器 (Programmable delay/pulse generator) 當作觸發訊號 (trigger signal) 來驅動半導體雷射作激發，如此一來則半導體雷射之激發時間與光彈調變器建立了同步的時間關係，此技術稱為同步照射 (synchronous illumination) [1]，而我們偵測時所需要的時間相位改變則藉由改變可程式化脈衝延遲產生器中延遲脈衝激發的時間功能來達成。經由此方法光彈調變器的時間相位被鎖定，除非改變脈衝激發的時間，系統所偵測光強度大小不因光彈調變器是時變訊號而

有所改變，由此可知系統偵測速度則決定在光偵測器上。如以電荷耦合元件 (CCD) 為例，其曝光時間為 0.5 秒時，所偵測到的光強度大小約是 25000 ($=50\text{kHz}/2$) 次雷射脈衝強度之合，我們控制每次曝光時間並配合不同的脈衝激發時間，則可以藉由偵測到四個時間相位的光強度大小而得到二維的橢圓偏光參數 (Ψ, Δ)。 [9]

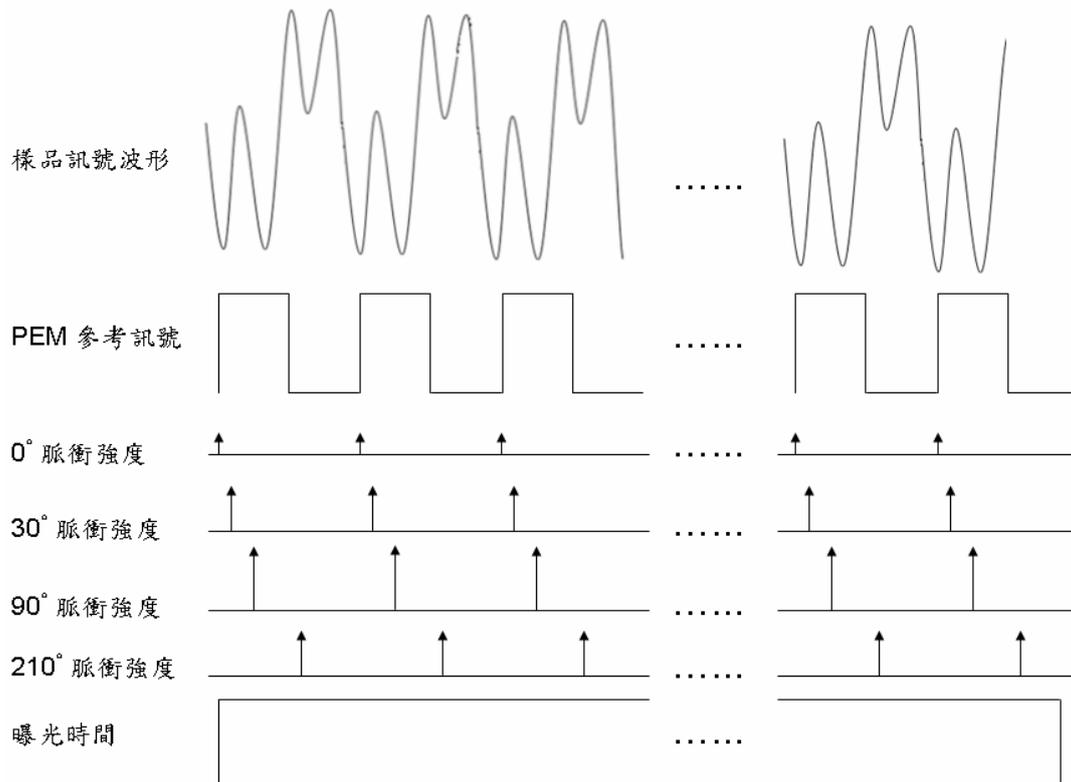


圖 2-8 量測方法說明示意圖

2.8 時域分析法與波形極點位置特性

由 (2.38) 式可知光強度為

$$I_{\theta} = \frac{I_0}{2}[1 - \cos(\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0 \cdot \sin \theta)\sin(2\Psi)]$$

將光強度對時間相位 θ 微分

$$\partial_{\theta} I_{\theta} = -I_0\pi\Delta_0 \cos \theta \cdot \sin(\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0 \sin \theta)\sin(2\Psi) \quad (2.46)$$

令 (2.46) 式等於零

可知極點出現在 $\cos \theta = 0$ 或 $\sin(\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0 \sin \theta) = 0$ 的時候

(1) 當 $\cos \theta = 0$ 時

即為 $\theta = 90^\circ + 2n\pi$ 、 $270^\circ + 2n\pi$ ， $n \in Z$ ，且與樣品的橢圓參數無關。

此時光強度為：

$$I_{90^\circ} = \frac{I_0}{2}[1 - \cos(\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0)\sin(2\Psi)] \quad (2.47a)$$

$$I_{270^\circ} = \frac{I_0}{2}[1 - \cos(\Delta - \Delta_I + 2\pi\Delta_0)\sin(2\Psi)] \quad (2.47b)$$

(2) 當 $\sin(\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0 \sin \theta) = 0$ 時

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta - \Delta_I - n\pi}{2\pi\Delta_0}\right) + k\pi$ ， $n, k \in Z$ ，與極點位置與 PEM 相位調

變振幅 Δ_0 、內稟相位 Δ_I 及樣品的 Δ 有關。

此時光強度為：

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2}[1 + \sin(2\Psi)] \quad (2.48a)$$

$$I_{\min} = \frac{I_0}{2}[1 - \sin(2\Psi)] \quad (2.48b)$$

由 (2.48a)、(2.48b) 可得：

$$\Psi = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \right) \quad (2.49)$$

$$I_0 = I_{\max} + I_{\min} \quad (2.50)$$

將 (2.49)、(2.50) 式代入 (2.47a)、(2.47b) 可得：

$$\Delta - \Delta_I - 2\pi\Delta_0 = \cos^{-1} \left(2 \times \frac{I_{90^\circ}}{I_0 \sin(2\Psi)} - 1 \right) \quad (2.51)$$

$$\Delta - \Delta_I + 2\pi\Delta_0 = \cos^{-1} \left(2 \times \frac{I_{270^\circ}}{I_0 \sin(2\Psi)} - 1 \right) \quad (2.52)$$

最後由方程式 (2.51)、(2.52) 可得 $\Delta - \Delta_I$ 與 Δ_0 。

由以上推導可知，取一週波形後取得極大值與極小值可得 Ψ 和 I_0 ，再由 I_{90° 和 I_{270° 可求得 Δ 及 Δ_0 [10]。而在閃頻式橢圓偏光儀之架構下， $\Delta_0 = 0.5$ 為必要條件，此時強度必須滿足 $I_{90^\circ} = I_{270^\circ}$ 的特性。之後在利用 DAQ card 擷取波形時，亦可利用此關係簡易判斷 Δ_0 是否為 0.5。

第三章 誤差分析與系統校正

3.1 時間相位的起始點

當穿透式光彈調變橢圓偏光儀在量測空氣時，理論的偏光參數 $\Psi=45^\circ$ 、 $\Delta=0^\circ$ 之理論波形如下圖 (圖 3-1)，與示波器上的圖形 (圖 3-2)，明顯存在一個起始的時間相位差。在閃頻式橢圓偏光儀的架構下量測樣品偏光參數必須先校正起始點的位置，相位起始點若產生偏差則無法準確的得到所需要的四個強度，並對所得的橢圓偏光參數 (Ψ ， Δ) 產生誤差。

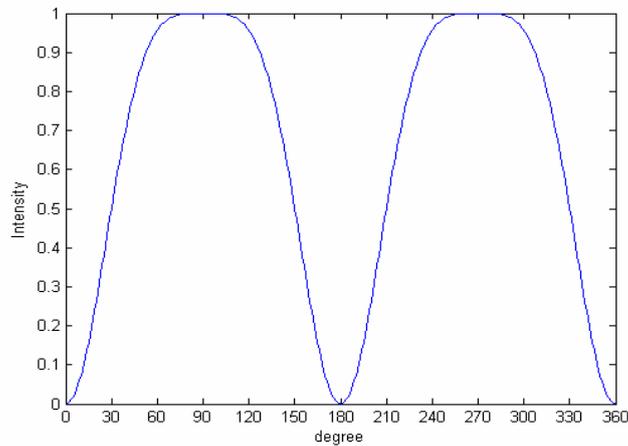


圖 3-1 穿透式量測空氣之理論波形與起始點

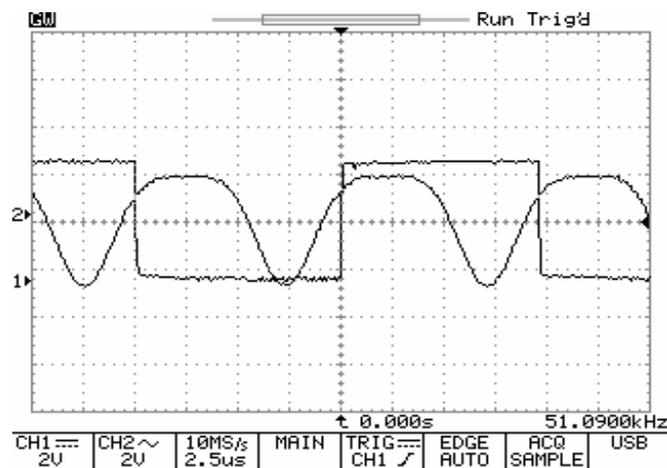


圖 3-2 穿透式量測空氣之實驗波形與起始點

3.2 誤差分析

由前一章公式 (2.38) 可知，在閃頻式橢圓偏光儀量測系統下影響公式準確性的主要參數為相位調變振幅 Δ_0 與時間相位 θ 。利用一階微分近似的方法計算 Δ_0 和 θ 的誤差對橢圓參數的影響，假設光彈調變器與光偵測器之間的初始時間相位偏移為 x 度及相位調變振幅誤差為 $\delta\Delta_0$ ，反射式光彈調變器量測系統的強度公式如下：

$$I(\theta, x, \delta\Delta_0) = \frac{I_0}{2} \{1 - \sin 2\Psi \cdot \cos[\Delta - (\pi + 2\pi \cdot \delta\Delta_0) \cdot \sin(\theta + x)]\} \quad (3.1)$$

$$\text{令 } f(x, \delta\Delta_0) = \frac{I(\frac{1}{2}\pi, \delta\Delta_0, x) - I(0, \delta\Delta_0, x)}{I(\frac{1}{2}\pi, \delta\Delta_0, x) + I(0, \delta\Delta_0, x)} = F(\Psi, \Delta) \quad (3.2a)$$

$$\text{令 } g(x, \delta\Delta_0) = \frac{I(\frac{7}{6}\pi, \delta\Delta_0, x) - I(\frac{1}{6}\pi, \delta\Delta_0, x)}{I(\frac{7}{6}\pi, \delta\Delta_0, x) + I(\frac{1}{6}\pi, \delta\Delta_0, x)} = G(\Psi, \Delta) \quad (3.3b)$$

參數 x 和 $\delta\Delta_0$ 的變動對強度 f 和 g 的影響如下：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} df \\ dg \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \delta\Delta_0} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \delta\Delta_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \\ &= M(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

參數 Ψ 和 Δ 的變動對強度 F 和 G 的影響如下：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dF \\ dG \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Psi} & \frac{\partial F}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial G}{\partial \Psi} & \frac{\partial G}{\partial \Delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\Psi \\ d\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\Psi \\ d\Delta \end{pmatrix} \\ &= N(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \cdot \begin{pmatrix} d\Psi \\ d\Delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (3.13)、(3.14) 式，可得誤差 $(x, \delta\Delta_0)$ 對 (Ψ, Δ) 的影響：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\Psi \\ d\Delta \end{pmatrix} &= N^{-1}(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \cdot M(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(N)} \begin{pmatrix} n_{22} & -n_{12} \\ -n_{21} & n_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$d\Psi = \frac{dx}{\det(N)} (-m_{21} \cdot n_{12} + m_{11} \cdot n_{22}) + \frac{d\delta\Delta_0}{\det(N)} (-m_{22} \cdot n_{12} + m_{12} \cdot n_{22})$$

$$d\Delta = \frac{dx}{\det(N)} (-m_{21} \cdot n_{11} + m_{11} \cdot n_{21}) + \frac{d\delta\Delta_0}{\det(N)} (-m_{22} \cdot n_{11} + m_{12} \cdot n_{21})$$

其中 $n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ 詳細推導如附錄 B

在理想狀況時 (即 $x = \delta\Delta_0 = 0$)， dx 和 $d\delta\Delta_0$ 的誤差對理論公式所得之 Ψ 和 Δ 的影響如下：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\Psi \\ d\Delta \end{pmatrix} &= \left[N^{-1}(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \cdot M(\Psi, \Delta, x, \delta\Delta_0) \right]_{x=0, \delta\Delta_0=0} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ d\delta\Delta_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中

$$q_{11} = \frac{\pi}{8} \sin 2\Delta \tan 2\Psi [1 + (\cos \Delta - \sqrt{3} \sin \Delta) \sin 2\Psi] \quad (3.8a)$$

$$q_{12} = -\frac{\pi}{4} \sin 2\Delta \tan 2\Psi [-1 + (\cos \Delta + \sin \Delta) \sin 2\Psi] \quad (3.8b)$$

$$q_{21} = -\frac{\pi}{2} \sin \Delta [\sin \Delta + \cos \Delta (\sqrt{3} \cos \Delta + \sin \Delta) \sin 2\Psi] \quad (3.8c)$$

$$q_{22} = \pi \sin \Delta [-\sin \Delta + \cos \Delta (-\cos \Delta + \sin \Delta) \sin 2\Psi] \quad (3.8d)$$

以誤差 $dx=0.5^\circ$ 和 $d\delta\Delta_0=0.002$ 為例，對於不同橢圓偏光參數的樣品所造成的誤差如下圖 3-3(a)、3-3(b)：

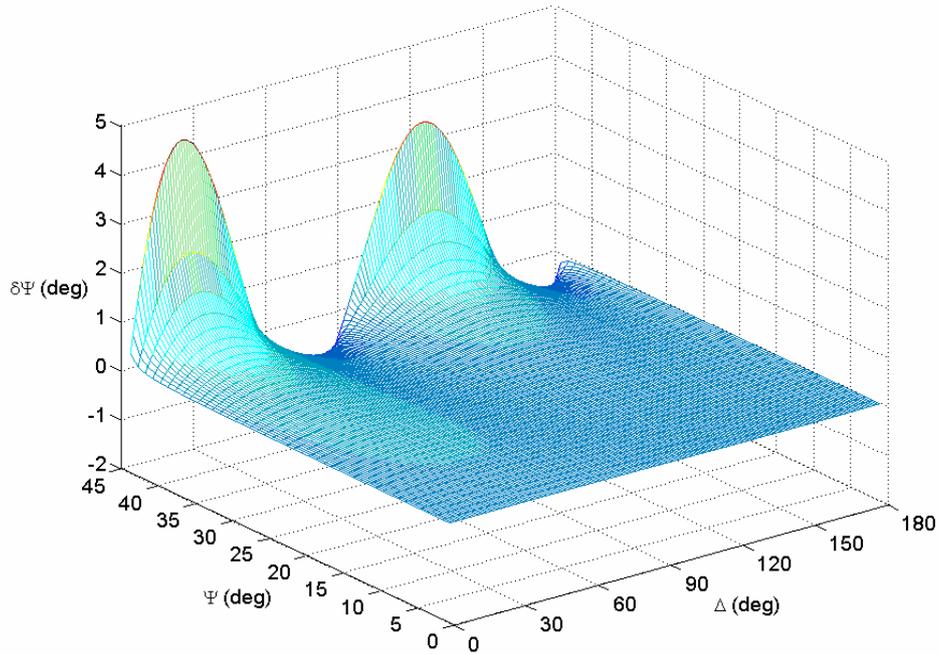


圖 3-3(a) 存在系統誤差，各種橢圓偏光參數與 $\delta\Psi$ 的關係

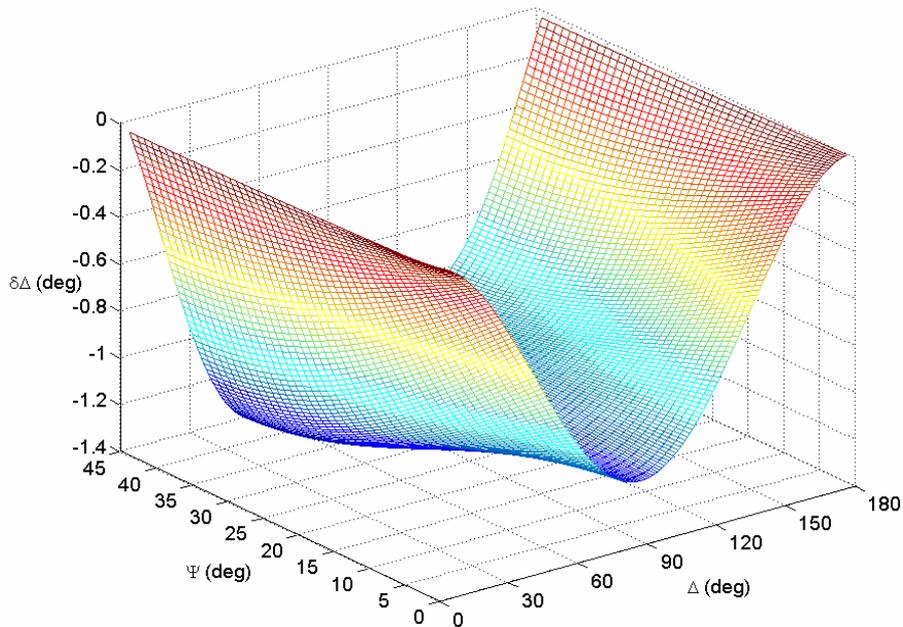


圖 3-3(b) 存在系統誤差，各種橢圓偏光參數與 $\delta\Delta$ 的關係

由圖 3-3(a) 與 3-3(b) 可知系統誤差對於不同的橢圓偏光參數所造成的影響也不同，由 (3.8a)~(3.8d) 式也可分析出 $\delta\Psi$ 在 $\Psi\sim 45^\circ$ 時有很大的誤差產生，而 $\delta\Delta$ 在 $\Delta=0^\circ$ or 180° 時誤差較小。此為閃頻式橢圓偏光儀之系統特性。

而相位調變振幅可藉由倍頻的方法先校正，所以實驗上 x 比 Δ_0 影響來的大，以下先針對 x 的誤差作討論。若以薄膜厚 29.96 (nm) 的 SiO_2/Si ，入射角 70° 為例，理論的橢圓偏光參數為 $\Psi=16.61^\circ$ 、 $\Delta=115.16^\circ$ ，假設時間相位偏移了 $x = -5^\circ\sim 5^\circ$ ，此時由理論公式所得 Ψ 、 Δ 及厚度的影響如下圖 3-4。

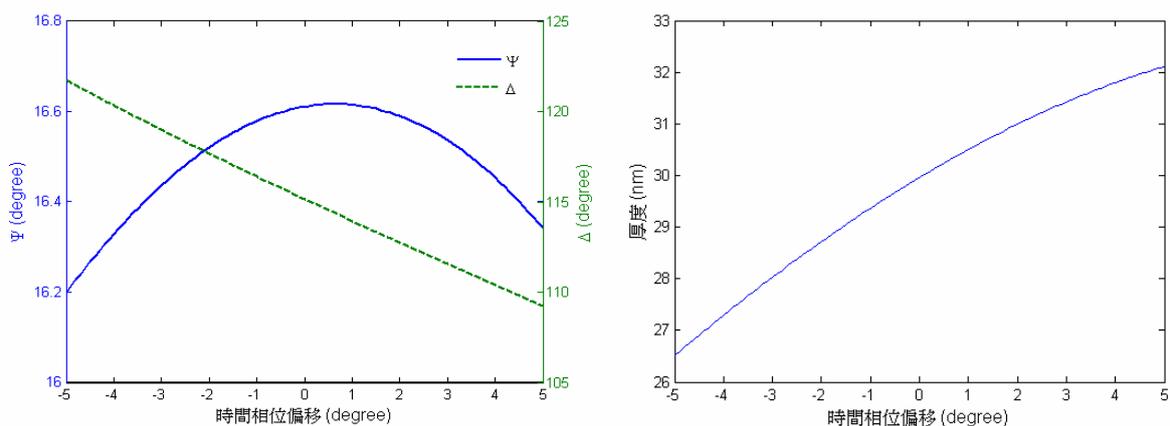


圖 3-4 時間相位偏移對橢圓參數及 SiO_2 薄膜厚度的影響

由圖 (3-4) 可知，當存在系統誤差 x 時，將影響公式求得的橢圓參數，其中又以 Δ 的影響較大於對 Ψ 的影響，因此在下一節將出修正公式消除系統誤差，經過修正可得精確的橢圓參數。

3.3 利用修正公式消除系統誤差

3.3.1 修正公式推導

當 Δ_0 和 θ 存在系統誤差下，將公式加以修正並消除系統誤差，可得到較準確的橢圓參數，以下不考慮 Δ_I ，令 Δ_I 為零，(2-38)

式強度公式如下：

$$I_\theta = \frac{I_0}{2} [1 - \sin 2\Psi \cdot \cos(\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin \theta)] \quad (3.9)$$

假設光彈調變器與光偵測器之間的初始時間相位偏移了 x 度。

(2.39a)~(2.39d) 式改寫為：

$$I_{0^\circ+x} = \frac{I_0}{2} \{1 - \sin 2\Psi \cdot \cos[\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin x]\} \quad (3.10a)$$

$$I_{30^\circ+x} = \frac{I_0}{2} \{1 - \sin 2\Psi \cdot \cos[\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]\} \quad (3.10b)$$

$$I_{90^\circ+x} = \frac{I_0}{2} \{1 - \sin 2\Psi \cdot \cos[\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin(90^\circ + x)]\} \quad (3.10c)$$

$$I_{210^\circ+x} = \frac{I_0}{2} \{1 - \sin 2\Psi \cdot \cos[\Delta - 2\pi\Delta_0 \sin(210^\circ + x)]\} \quad (3.10d)$$

原來理想的公式 (2.40)、(2.41) 改寫為：

$$\frac{I_{90^\circ+x} - I_{0^\circ+x}}{I_{90^\circ+x} + I_{0^\circ+x}} = \frac{-\sin 2\Psi \sin[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot \sin[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]}{1 - \sin 2\Psi \cos[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot \cos[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]} \quad (3.11a)$$

$$\frac{I_{210^\circ+x} - I_{30^\circ+x}}{I_{210^\circ+x} + I_{30^\circ+x}} = \frac{\sin 2\Psi \sin \Delta \cdot \sin[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ+x)]}{1 - \sin 2\Psi \cos \Delta \cdot \cos[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ+x)]} \quad (3.11b)$$

由 (3-10a)~(3-10d) 可得

$$\frac{I_{90^\circ+x} - I_{0^\circ+x}}{I_{210^\circ+x} - I_{30^\circ+x}} = -\frac{\sin[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot \sin[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]}{\sin \Delta \cdot \sin[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]}$$

交叉相乘後，令右式為常數 C_1

$$\frac{\sin[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)]}{\sin \Delta} = -\frac{I_{90^\circ+x} - I_{0^\circ+x}}{I_{210^\circ+x} - I_{30^\circ+x}} \cdot \frac{\sin[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]}{\sin[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]} = C_1$$

$$\frac{\sin \Delta \cdot \cos \pi\Delta_0(\sin x + \cos x) - \cos \Delta \cdot \sin \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)}{\sin \Delta} = C_1$$

$$\Delta = \cot^{-1} \left\{ \frac{\cos[\pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] - C_1}{\sin[\pi\Delta_0(\sin x + \cos x)]} \right\} \quad (3.12)$$

將 (3.12) 代入 (3.11a)、(3.11b)

令 (3.11a) 左式為常數 C_2

$$\frac{-\sin 2\Psi \sin[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot \sin[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]}{1 - \sin 2\Psi \cos[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot \cos[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)]} = C_2$$

化簡如下：

$$\sin 2\Psi_1 = \frac{C_2}{C_2 \cos[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot D_1 - \sin[\Delta - \pi\Delta_0(\sin x + \cos x)] \cdot D_2}$$

$$\text{其中令 } D_1 = \cos[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)] ; D_2 = \sin[\pi\Delta_0(\sin x - \cos x)] \quad (3.13)$$

令 (3.11b) 左式為常數 C_3

$$\frac{\sin 2\Psi \sin \Delta \cdot \sin[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]}{1 - \sin 2\Psi \cos \Delta \cdot \cos[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]} = C_3$$

化簡如下：

$$\sin 2\Psi_2 = \frac{C_3}{C_3 \cos \Delta \cdot \cos[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)] + \sin \Delta \cdot \sin[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]} \quad (3.14)$$

由方程式 (3.12)、(3.13)、(3.14) 可求得修正後的橢圓參數。

3.3.2 修正公式分析與數值模擬

方程式 (3.13)、(3.14) 在修正 Ψ 時，理論上兩式所得的 Ψ 為相等的，但在某些特殊情況下分母有趨近於零而產生無限大的問題，故需要判斷公式使用的時機，(3.13) 式較不適用於 $\Delta=90^\circ$ 、 270° 附近的情況；同理 (3.14) 式較不適用於 $\Delta=0^\circ$ 、 180° 附近的情況，往後修正時，依照所量測到的 Δ 而選擇用 (3.13) 或 (3.14) 式修正。

藉由理論的計算，方程式 (3.12) 在 $x = -45^\circ$ 、 -30° 、 45° ... 等特殊角度不適用 (圖 3-5)，但是在實際的情況下，不論閃頻式橢圓偏光儀系統或使用 DAQ card 擷取波形來分析，經過系統校正後 x 值最多應該只在正負 2° 以內，故不影響修正公式的使用。至於 Δ_0 則沒有此現象發生。

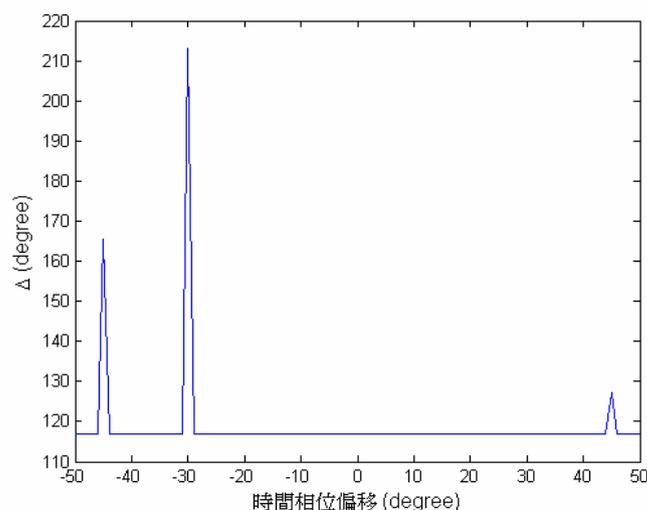


圖 3-5 修正公式在某些時間相位偏移時不適用 ($\Delta=117^\circ$ 為例)

假設橢圓偏光參數為 ($\Psi=16^\circ, \Delta=117^\circ$) 和時間相位及相位調變振幅的誤差為 ($x, \delta\Delta_0$)，可模擬出不同誤差下修正前的橢圓偏光參數 (Ψ', Δ') 與修正後的橢圓偏光參數 (Ψ'', Δ'')，如圖 (3-6)、(3-7)。誤差範圍 $x = \pm 5^\circ$ ； $\delta\Delta_0 = \pm 5^\circ$ (約 $0.014 \times 2\pi$ radian)。

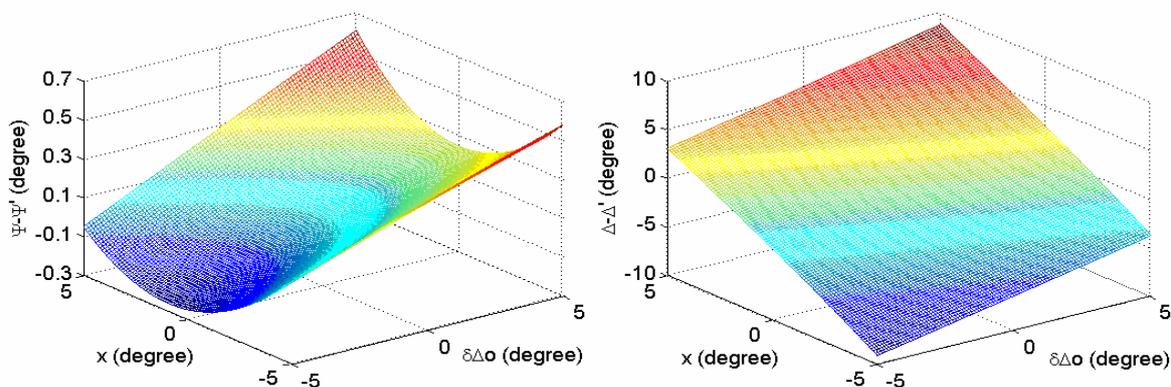


圖 3-6 時間相位與調變振幅的誤差與 (Ψ, Δ) 的關係 (修正前)

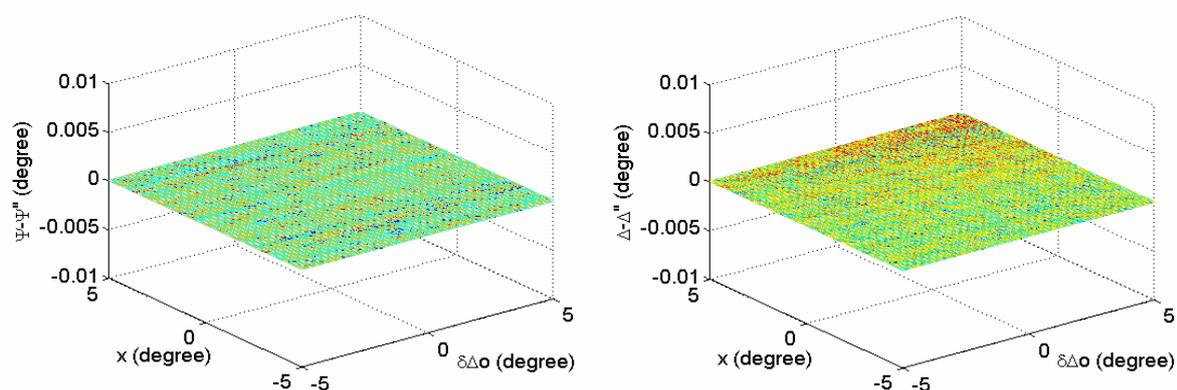


圖 3-7 時間相位與調變振幅的誤差與 (Ψ, Δ) 的關係 (修正後)

由 (圖 3-6) 和 (圖 3-7) 可以看出公式修正後可以完全消除時間相位與光彈調變器相位調變振幅的誤差對橢圓偏光參數的影響。換言之，若已知光彈調變器的相位調變振幅 Δ_0 與起始時間相位 θ 偏移 x 度，經修正後我們可得橢圓偏光參數的精確解。下一節將介紹如何求得 (x, Δ_0)。

3.4 利用擬合找到 $(\Delta_0, x, \Psi, \Delta)$ 精確解

由反射式光彈調變器量測系統的強度公式可得下式 (3.15)

$$\frac{I_{45^\circ+x} - I_{225^\circ+x}}{I_{135^\circ+x} - I_{315^\circ+x}} = \frac{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \sin(x + 45^\circ)]}{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \cos(x + 45^\circ)]} \quad (3.15)$$

以下利用變動 Δ_0 求得其他參數並利用恆等式作擬合可得精確解。 Δ_0 變動的最小單位為 0.0001，變動範圍為 0.497~0.503 代入 (3.15) 式及修正公式 (3.12)~(3.14) 可得 61 組 $(\Delta_0, x, \Psi, \Delta)$ ，並將實驗所得的強度代入方程式 (3.16a)、(3.16b) 作擬合。

$$I_{90^\circ+x} + I_{0^\circ+x} = I_0 \{1 - \sin 2\Psi \cos[\Delta - \pi\Delta_0(\cos x + \sin x)] \cdot \cos[\pi\Delta_0(\cos x + \sin x)]\} \quad (3.16a)$$

$$I_{210^\circ+x} + I_{30^\circ+x} = I_0 \{1 - \sin 2\Psi \cos \Delta \cdot \cos[2\pi\Delta_0 \sin(30^\circ + x)]\} \quad (3.16b)$$

代入方程式 (3.16a)、(3.16b) 後利用兩 I_0 相等的條件，找出 61 組中最符合的 1 組 $(\Delta_0, x, \Psi, \Delta)$ ，可得最後修正的橢圓偏光參數。詳細的修正流程圖如附錄 A 所示。

第四章 實驗流程與數據

4.1 量測橢圓偏光參數

4.1.1 實驗架構

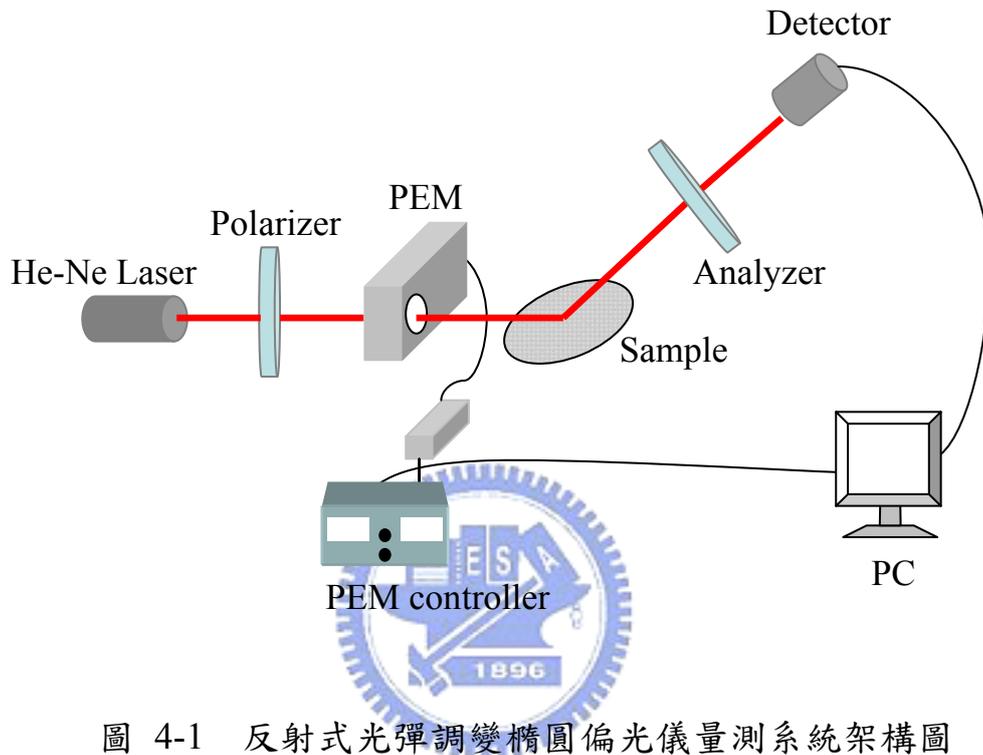


圖 4-1 反射式光彈調變橢圓偏光儀量測系統架構圖

以下為實驗器材：

1. He-Ne Laser : Melles Griot laser 10 mw
2. Polarizer , Analyzer : Melles Griot 03FPG015 sheet polarizer of extinction ratio 10^{-4}
3. PEM (Photoelastic Modulator) : Hinds instruments , PEM-90
4. Detector : Thorlabs PDA55 silicon pin diode Spectral Range : 400~1000 nm
5. DAQ card (Data Acquisition card) : NI PCI-6115
6. Oscilloscope : GDS-820C
7. BNC Adapter : NI BNC-2110
8. Sample : SiO₂/Si thin film

4.1.2 實驗流程

實驗架構如圖 (4-1)，偏光片的方位角為 -45° ，PEM 光軸校正正在 0° ，利用倍頻的校正方法調整 PEM 的相位調變振幅 Δ_0 為 0.383，析光片方位角位於 45° ，PEM 的調變頻率為 51.09 KHz，入射角為 70° ，待測物 SiO_2/Si ，入射光波長 6328 \AA ，利用倍頻的方法 (2.35) 式，可即時量測橢圓偏光參數，此數據用來與閃頻式橢圓偏光儀所得的結果比較。

同理，利用倍頻的校正方法調整 PEM 的相位調變振幅 Δ_0 為 0.5，設定 DAQ card 的取樣頻率為 10 MHz，擷取點數為 500 點，利用 PEM 方波訊號作外部觸發，紀錄波形，經事後分析可得修正後的橢圓偏光參數。

4.1.3 實驗結果

因為使用 PEM 訊號作外部觸發來紀錄波形，所以每次取點的位置都大致相同，DAQ card 擷取波形一次擷取 500 點 (圖 4-2)，並利用 LabView 的迴圈指令共擷取 100 組。

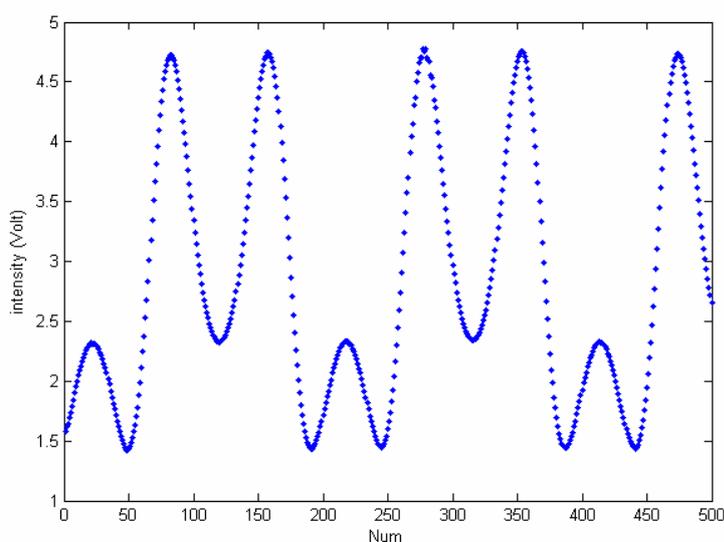


圖 4-2 以 PEM 訊號作觸發，DAQ 所擷取之波形

修正流程

因為 DAQ card 的取樣頻率為 10 MHz，PEM 的調變頻率為 51.09 KHz，我們可估計一週約 196 個點 ($10000000/51090 = 195.73$)，每點間距約為 1.84° ($360^\circ/195.73 = 1.83924^\circ$)，一個週期的時間大約為 $19.57\mu s$ ($1/51090 \text{ KHz} = 19.57\mu s$)。

從波形極點的特性可知，假設第 218 點為 $90^\circ+x^\circ$ ，取樣的兩點間距為 1.84° ，可依序找出 $0^\circ+x^\circ$ 、 $30^\circ+x^\circ$ 、 $210^\circ+x^\circ$ 的光強度，同理，也可找出 $45^\circ+x^\circ$ 、 $135^\circ+x^\circ$ 、 $225^\circ+x^\circ$ 、 $315^\circ+x^\circ$ 的光強度， Δ_0 並以 0.0001 為單位，變動範圍 $0.497\sim 0.503$ 代入方程式 (3.15) 可得 61 組 (Δ_0, x) ，再代入 (3.12)~(3.14) 式可得修正後的 (Ψ, Δ) ，並由關係式 (3.16a) 與 (3.16b) 找出 $(\Delta_0, x, \Psi, \Delta)$ 的精確解。可得下圖(4-3)。

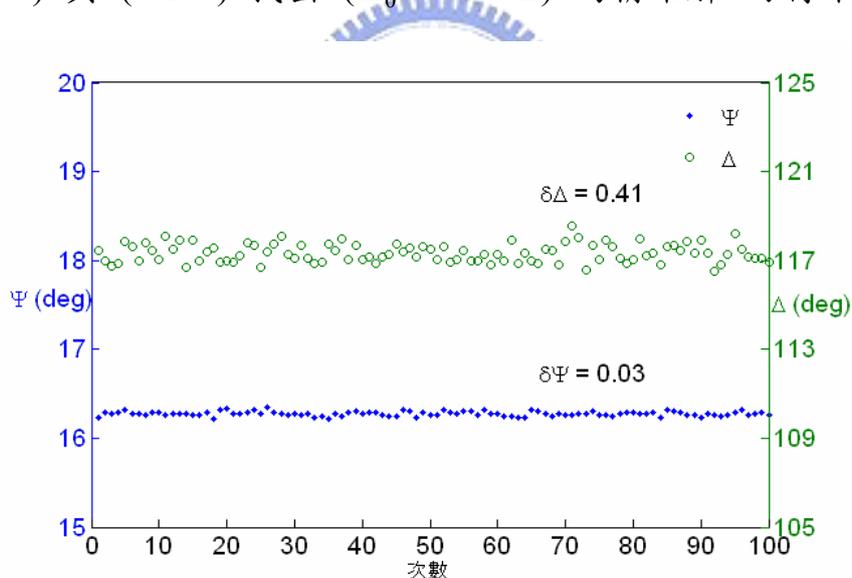


圖 4-3 修正後 100 組橢圓偏光參數

結果討論

將(圖 4-3)的 100 組數據計算結果列為下表 4-1：

	Δ (deg)	Ψ (deg)	Δ_0	x (deg)	d (Å)
平均值	117.33	16.28	0.4998	0.03	285.5
標準差	0.41	0.03	0.0012	0.28	1.8

表 4-1 閃頻式修正後的橢圓偏光參數

由倍頻訊號即時量測 100 組橢圓偏光參數的結果如下表 4-2：

	Δ (deg)	Ψ (deg)	Δ_0	d (Å)
平均值	117.18	16.22	0.3828	285.4
標準差	0.02	0.01	3.44E-05	0.1

表 4-2 倍頻訊號所量測的橢圓偏光參數

比較兩種方法所求得的结果，以平均值來說兩者是相當接近的，但是倍頻訊號方法的標準差明顯較小許多。此結果是合理的，因為閃頻式的計算方法只用了一個週期的光強度來分析，反觀倍頻訊號的方法是取多週的資訊進行傅立葉轉換取得各倍頻訊號，由標準差的計算結果可知，前者受到電訊號跳動的影響較後者來的大。

由上表 4-1 可知，PEM 相位調變振幅經過倍頻校正後約為 0.4998 ± 0.0012 ，而時間相位偏移 x 約 $0.03^\circ \pm 0.28^\circ$ ，這表示我們選取擷取波形的第 220 點並非 90° 整而是 $90.03^\circ \pm 0.28^\circ$ 。此結果將在下一節求初始相位時作探討。

由 3.2 節的誤差分析可利用一階微分近似的方法來估計當系統誤差 $x = 0.03^\circ$ ， $\delta\Delta_0 = 0.0002$ 且實驗標準差 $dx = 0.28^\circ$ ， $d\delta\Delta_0 = 0.0012$ 時，理論誤差為 $d\Psi = 0.02^\circ$ 與 $d\Delta = 0.57^\circ$ ，與實驗結果的標準差 $\delta\Psi = 0.03^\circ$ ， $\delta\Delta = 0.41^\circ$ 亦相近。

由表 4-1 可知 100 組數據的時間相位偏移 x 約 $0.03^\circ \pm 0.28^\circ$ ，理論上利用 PEM 訊號作觸發後每次所擷取的位置應該相同，我認為隨機誤差的產生主要來自於擷取波形的訊號強度跳動。假設 100 組各點強度的標準差為 $\delta I(t)$ ，平均值為 $I(t)$ ，可得 $\delta I(t)/I(t)$ 約為 0.003 ~ 0.012，各點位置強度的變動對公式 (3-15) 的誤差 $\delta I(t)/I(t)$ 約為 0.016，此數值大小轉換在時間相位偏移的影響由理論分析可得約為 0.3° 與實驗結果相符合。

在 DAQ card 擷取訊號的系統中， Δ_0 經過倍頻訊號校正，而時間相位偏移 x 可藉由極點分析使得誤差在 $\pm 0.92^\circ$ (即為點間距的一半)，故系統誤差很小，為了探討修正公式的正確性，以下藉由改變所選取的 90° 位置增加系統誤差來分析。取 100 組數據各點的平均值後並左右各平移 5 個點，修正前與修正後之計算結果如表 4-3：

	未修正 $\Delta_0 = 0.5$		修正後 $\Delta_0 = 0.4998$			
	Δ (deg)	Ψ (deg)	Δ (deg)	Ψ (deg)	x (deg)	d (Å)
往左平移 5 點	130.13	15.26	117.48	16.32	-9.13	285.47
往左平移 4 點	127.21	15.57	117.41	16.3	-7.31	285.53
往左平移 3 點	124.55	15.85	117.43	16.31	-5.49	285.49
往左平移 2 點	121.99	16.06	117.39	16.29	-3.64	285.45
往左平移 1 點	119.56	16.21	117.32	16.28	-1.81	285.56
第 218 點	117.34	16.28	117.34	16.27	0.03	285.43
往右平移 1 點	115.07	16.25	117.26	16.26	1.89	285.6
往右平移 2 點	112.93	16.15	117.21	16.27	3.72	285.96
往右平移 3 點	110.85	15.94	117.19	16.27	5.55	286.02
往右平移 4 點	108.69	15.64	117.08	16.27	7.37	286.5
往右平移 5 點	106.56	15.27	117.04	16.29	9.2	286.92

表 4-3 閃頻式修正前與修正後的橢圓偏光參數

以第 218 點修正後的橢圓偏光參數為理論值，表 4-3 修正前後的橢圓偏光參數與時間相位偏移的關係如下圖 (4-4)、(4-5)：

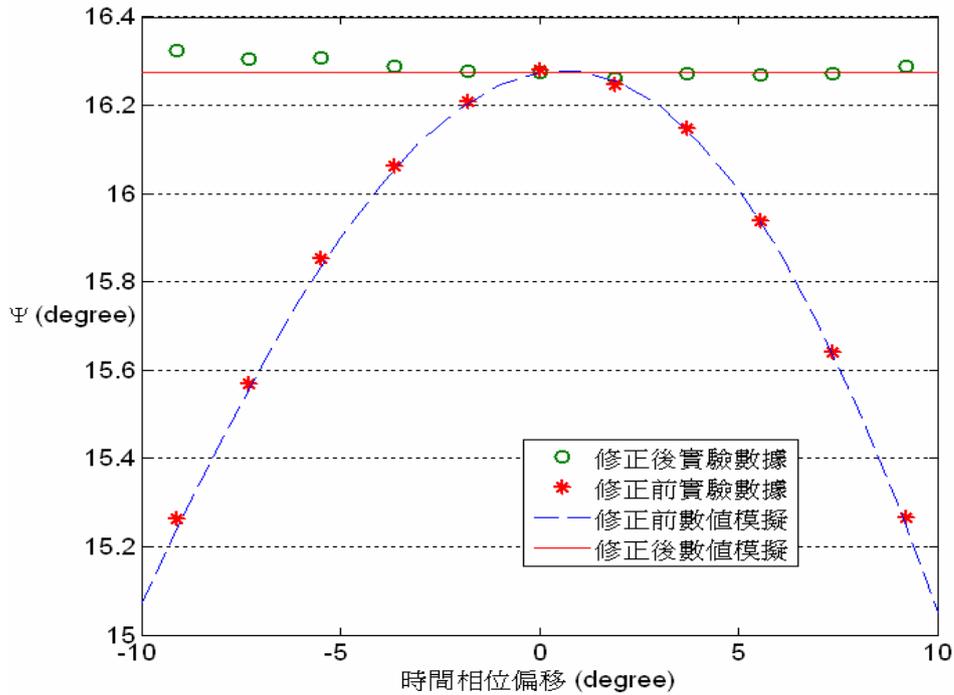


圖 4-4 Ψ 與時間相位偏移的關係

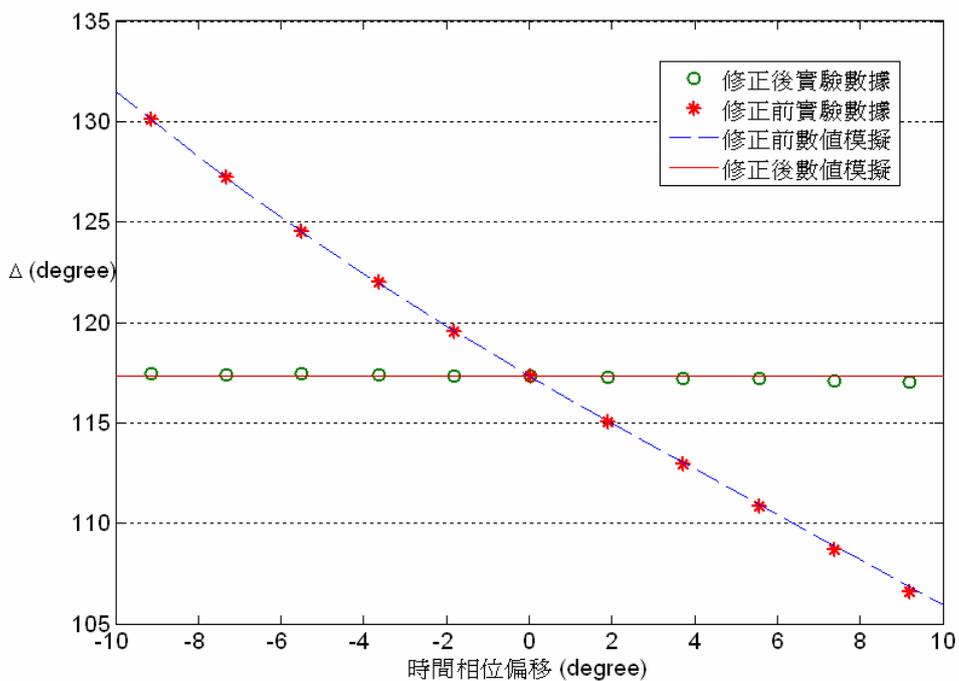


圖 4-5 Δ 與時間相位偏移的關係

4.2 量測 PEM 與光偵測器之間的起始相位差

由 3-1 節可知當穿透式光彈調變橢圓偏光儀在量測空氣時，發現 PEM 與強度訊號波形存在一個起始的時間相位差，在閃頻式橢圓偏光儀的架構下量測樣品偏光參數必須先校正起始點的位置才能準確的得到所需要的四個強度。首先 4.2.1 節利用穿透式量測空氣，驗證 DAQ Card 擷取的訊號與示波器之間的相關性，接下來 4.2.2 節在反射式光彈調變橢圓偏光儀量測樣品下，驗證了起始時間相位公式的準確性。

4.2.1 DAQ Card 擷取的訊號與示波器比較

實驗架構

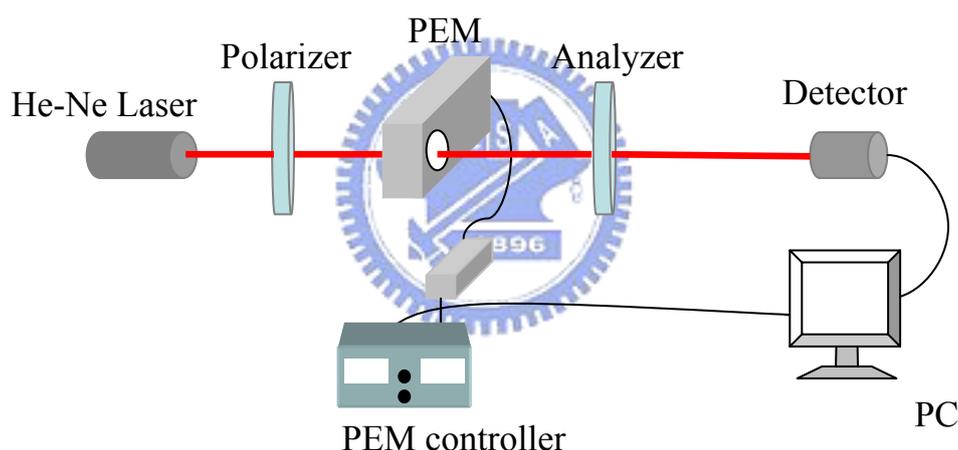


圖 4-6 穿透式光彈調變橢圓偏光儀量測系統架構圖

實驗方法

偏光片的方位角 -45° ，PEM 光軸校正正在 0° ，利用倍頻的校正方法調整 PEM 的相位調變振幅 Δ_0 為 0.5，析光片方位角位於 45° 。設定 DAQ card 的取樣頻率為 10 MHz，PEM 的調變頻率為 51.09 KHz，擷取點數為 400 點，利用 PEM 訊號作外部觸發，紀錄波形，並與示波器上的圖形比較。

實驗結果與討論

因為 DAQ card 的取樣頻率為 10 MHz，PEM 的調變頻率為 51.09 KHz，我們可以估計一個週期約為 196 個點 ($10000000 / 51090 = 195.73$)，每點間距約為 1.84° ($360^\circ / 195.73 = 1.83924^\circ$)，一個週期的時間大約為 $19.57 \mu\text{s}$ ($1 / 51090 \text{ KHz} = 19.57 \mu\text{s}$)。

由放大的示波器圖形 (圖 4-7)，利用示波器上 cursor 的功能，令波形最低點的時間相位為 T_2 ，PEM 零點的時間相位為 T_1 ，因為 T_1 在示波器可調整的最小單位為 $0.04 \mu\text{s}$ ，故存在 $\pm 0.02 \mu\text{s}$ (約 0.37°) 的判斷誤差，可知 T_1 和 T_2 間的相位差約為 $128.75^\circ \pm 0.37^\circ$ 。

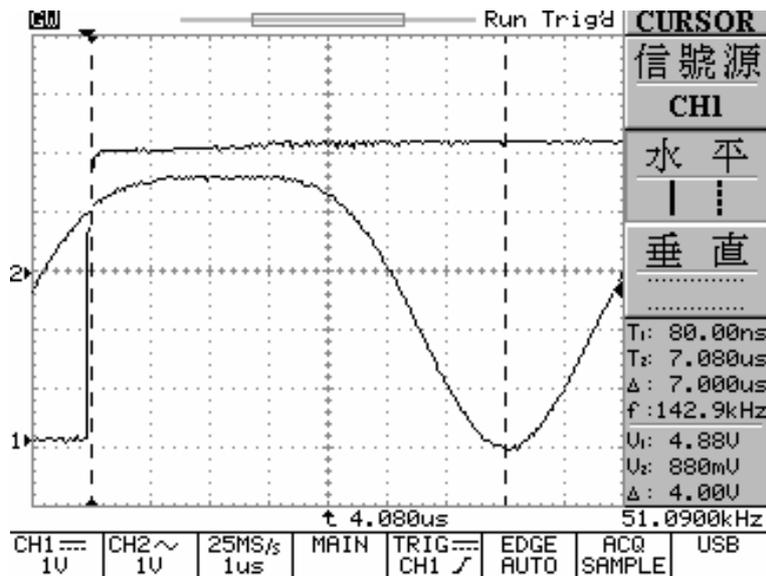


圖 4-7 示波器放大圖

實驗擷取下來的數據如下圖(圖 4-8)，可知波形最低點位置為第 71 點，PEM 零點時間相位為第 1 點，兩點間隔約為 $128.75^\circ \pm 0.92^\circ$ ($70 * 1.83924^\circ = 128.75^\circ$)。此結果與示波器所估計的值相近。根據此結果，DAQ card 擷取的訊號與示波器的圖形兩者之間是相當符合的。

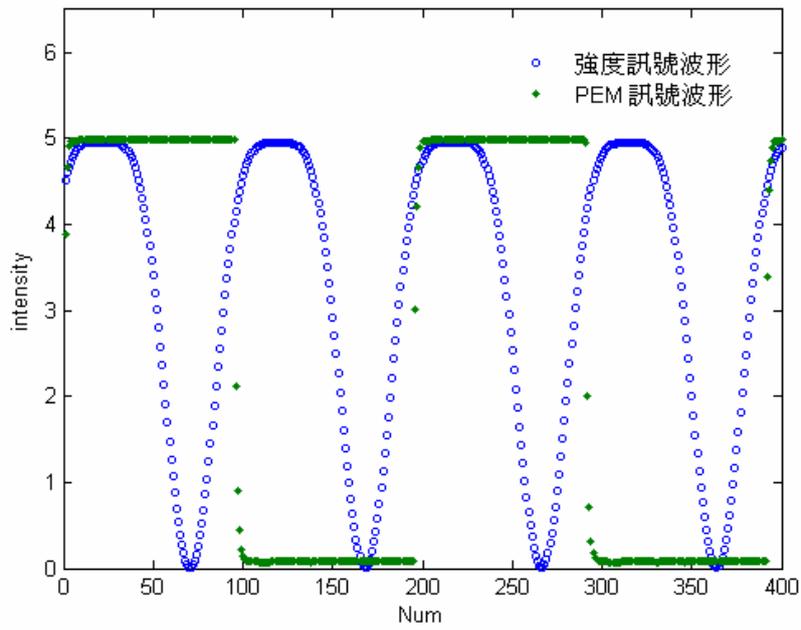


圖 4-8 穿透式量測空氣 DAQ card 擷取的實驗數據

4.2.2 起始時間相位公式的準確性

實驗方法與實驗數據如同 4-1 節所敘述。

實驗架構

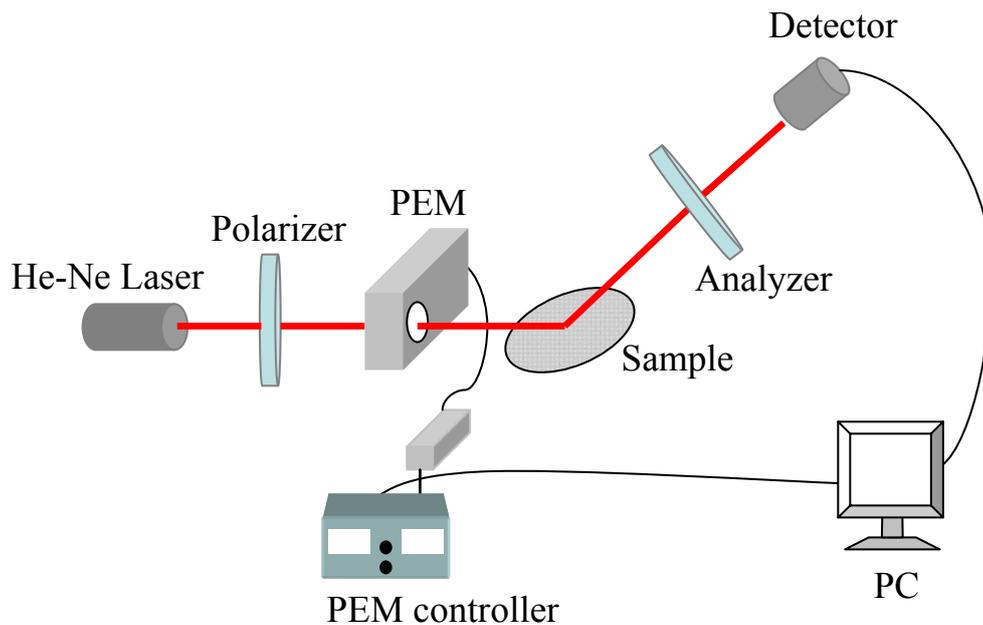


圖 4-9 反射式光彈調變橢圓偏光儀量測系統架構圖

實驗結果與討論

因為使用 PEM 訊號作外部觸發來紀錄波形，所以每次取點的位置都相同，擷取一次波形 500 點如圖 4-2，總共紀錄 100 次。假設第一點為 x° ，依序可得 $90^\circ+x^\circ$ 、 $180^\circ+x^\circ$ 、 $270^\circ+x^\circ$ 的值，代入 4-1 節所得的 Δ_0 ，利用方程式 (4.1)，可得到起始的時間相位差 x ，且與橢圓參數無關。

$$\frac{I_{0^\circ+x} - I_{180^\circ+x}}{I_{90^\circ+x} - I_{270^\circ+x}} = \frac{\sin(2\pi\Delta_0 \cdot \sin x)}{\sin(2\pi\Delta_0 \cdot \cos x)} \quad (4.1)$$

所得起始時間相位如下圖 (圖 4-10)，可得擷取訊號第一點時間相位 x 為 $50.94^\circ \pm 0.38^\circ$ 。

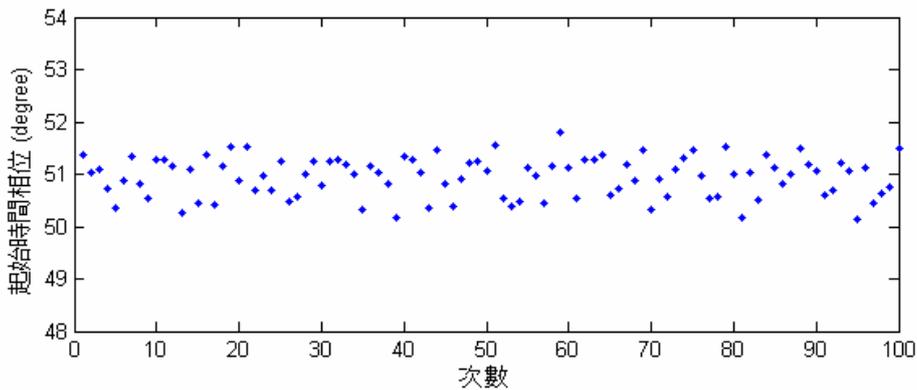


圖 4-10 利用方程式 (4.1)，所得之起始時間相位

根據 2-8 節波形極點的特性與 4-1 節的實驗數據可知，擷取數據第 218 個點的位置估計為 $450.03^\circ \pm 0.28^\circ$ ，已知兩點間距可得第一點為 $50.92^\circ \pm 0.28^\circ$ ($450.03^\circ - 217 \times 1.83924^\circ = 50.92^\circ$)，與公式計算結果也很相近，並驗證了公式的準確性。

求出光彈調變器的參考訊號起始點後，在閃頻式橢圓偏光儀量測系統中，脈衝產生器必須延遲時間相位約 309° 才能符合理論公式，但本篇論文重點放在利用 DAQ card 擷取波形來分析誤差，利用波形極點位置的特性，則不需要知道光彈調變器的起始時間相位仍然可以找出 0° 、 30° 、 90° 、 210° 的位置，所以此實驗的目的是為了校正閃頻式橢圓偏光儀量測系統的起始時間相位。除此之外，兩種系統在分析上

也有部分不通用，例如方程式 (4.1) 在找 $x=0^\circ$ 附近時，較不靈敏且會造成誤判，當用 DAQ card 擷取波形並利用極點判斷位置時，判斷誤差在 $\pm 0.92^\circ$ ，故方程式 (4.1) 不適用於 DAQ card 擷取波形的系統，故在 3.4 節時我們用來時間相位偏差的方程式為下式 (即為 3-15 式)：

$$\frac{I_{45^\circ+x} - I_{225^\circ+x}}{I_{135^\circ+x} - I_{315^\circ+x}} = \frac{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \sin(x + 45^\circ)]}{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \cos(x + 45^\circ)]}$$

類似平移的效果，使得方程式 (3.15) 在求 $x=0^\circ$ 附近時有較好的準確性。



第五章 結論

閃頻式橢圓偏光儀利用可程式化脈衝延遲產生器(Programmable delay/pulse generator) 將半導體雷射與光彈調變器進行同步的調制，而形成同步照射 (synchronous illumination) 的模式，來達成鎖定光學調變訊號中特定時間相位的目的。本文重點在於探討系統誤差在閃頻式橢圓偏光儀的理論計算，並分析與研究其修正誤差的方法。由數據擷取卡 (DAQ card) 擷取數位化波形，並利用波形的極點特性、取樣頻率...等關係，可取得所需的四個特定時間相位之光強度加以分析。

對於閃頻式橢圓偏光儀的架構，由數值模擬我們可證明 PEM 時間相位與相位調變振幅的誤差對於橢圓偏光參數是有影響的，重新考慮系統誤差後將公式加以修正後可得更精確的橢圓偏光參數。並實際量測了一片薄膜 (SiO_2/Si)，量測出的結果所推算出的薄膜厚度 $d = 285.5 \pm 1.8$ (Å)，與商用橢圓儀所測的值 287 ± 1 (Å) 相吻合，並與倍頻訊號所測的值 285.4 ± 0.1 (Å) 比較，藉由已知厚度的樣品可驗證量測的可信度。接著利用時間相位的偏移可改變系統誤差大小，由修正前與修正後的橢圓偏光參數可確認修正公式的可信度。

在閃頻式橢圓偏光儀的計算中，半導體雷射光源與光彈調變器可進行同步的調制，但光彈調變器與所需的理論值之間存在起始時間相位差，我們藉由 DAQ card 擷取波形加上數學的計算可求得起始相位，並與示波器之波形比較加以驗證，可預先用來校正起始相位取得所需要的理論值。實驗結果可得起始時間相位差為 $50.94^\circ \pm 0.38^\circ$ 。

若要達到二維的影像的量測則光源必須要換成可調變的半導體雷射並利用脈衝延遲產生器的架構，在此架構下所需要考慮的誤差將會更多，例如脈衝寬度對時間相位偏移的影響、CCD 曝光時間...等等。除此之外，光彈調變器的各項特性如：內稟雙折射、橢圓率...等特性往後都應該需要被加以考慮。目前二維量測系統的速度約 13 秒

可取得四個特定時間相位的光強度，即可得 1 組橢圓偏光參數，量測時間主要限制在 CCD 的資料傳輸速度，若使用較新的 CCD 則可提高量測的速度。根據之前所敘述的修正流程則必須額外取得四組時間相位下($45^\circ+x^\circ$ 、 $135^\circ+x^\circ$ 、 $225^\circ+x^\circ$ 、 $315^\circ+x^\circ$) 的光強度才可作事後的誤差修正，但會增加一倍的量測時間。若將公式改為：

$$\frac{I_{30^\circ+x} - I_{210^\circ+x}}{I_{120^\circ+x} - I_{300^\circ+x}} = \frac{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \sin(x+30^\circ)]}{\sin [2\pi\Delta_0 \cdot \cos(x+30^\circ)]} \quad (5.1)$$

則只需多取 2 組光強度，相同的 100 組數據計算結果如下：

	Δ (deg)	Ψ (deg)	Δ_0	x (deg)	d (Å)
平均值	117.41	16.28	0.4998	0.10	285.2
標準差	0.73	0.03	0.0013	0.43	3.3

表 5-1 閃頻式修正後的橢圓偏光參數

與表 4-1 比較可得平均值的結果是符合的，但受到公式的影響標準差比原來大。在二維的量測時，常用的曝光時間約為 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 秒，而脈衝產生器最大頻率為 50 MHz，調整至 PEM 的頻率(51 KHz)後，拍一張光強度圖約為 500~5000 次脈衝強度之總和，類同於平均後的效果，故二維的量測只多取 2 組光強度利用 (5.1)式進行修正應該是可行的，此部分須要未來進一步作實驗驗證。

本實驗室此系統未來主要應用在生物上的量測，並與表面電漿共振技術結合可提高系統解析度，且不須轉動光學元件可進行快速的二維動態量測。