

第二章 移相干涉術

2.1 引言

干涉術已經成為現代精密量測以及非破壞性量測的主要技術，舉凡微小位移量的量測、折射率、光學元件的表面形狀及平整度，都廣泛的使用到干涉術。在本章節中將詳細的介紹干涉術原理、移相術原理、相位調制法、相位演算法及相位重建。

2.2 干涉術原理[6,7]

設有兩道光若其振幅分別為 $u_1 = U_1 \cdot e^{i\phi_1}$ 以及 $u_2 = U_2 \cdot e^{i\phi_2}$ ，當兩道光在空間中合併在一起時，會有干涉現象出現，而這兩道光合併的光強度為：

$$\begin{aligned} I &= U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 \cdot U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $I_1 = U_1^2$ 、 $I_2 = U_2^2$ 以及 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ 。 $\Delta\phi$ 為這兩道光的相位差，此相位差可以由很多種形式引入，例如光程的差別、經過一雙折射晶體、由全反射之後所引入相位的不同，或是由兩道光的波前的差別所引起..等等。

由(2.1)式得知，干涉之後的光強度，會因為相位的變化而改變，若此相位的變化是由光程差所引起的話，則可以從光強度的變化計算出以光波長為單位的長度變化，這是一種非常精密的量測。由於相位變化可以由各種不同的情況下引入，所以可以依不同的目的，利用兩道光的干涉，把同一光源出射的光束一分為二，其中一道為參考光使其振幅為 E_r ，另外一道為測試光使其振幅為 E_t ，讓測試光通過欲量測的系統，與參考光起干涉之後求得前後的相位差，再由此相位差計算得到欲求的物理量，這就是所謂的干涉儀，如圖 2.1 所示。常見的如 Mach-Zhender 干涉儀與 Twyman-Green 干涉儀，分別如圖 2.2 與 2.3，不同的干

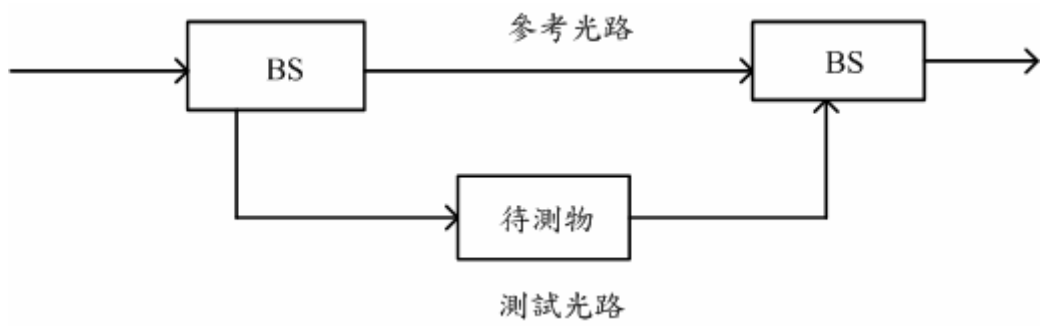


圖 2.1 干涉儀基本原理

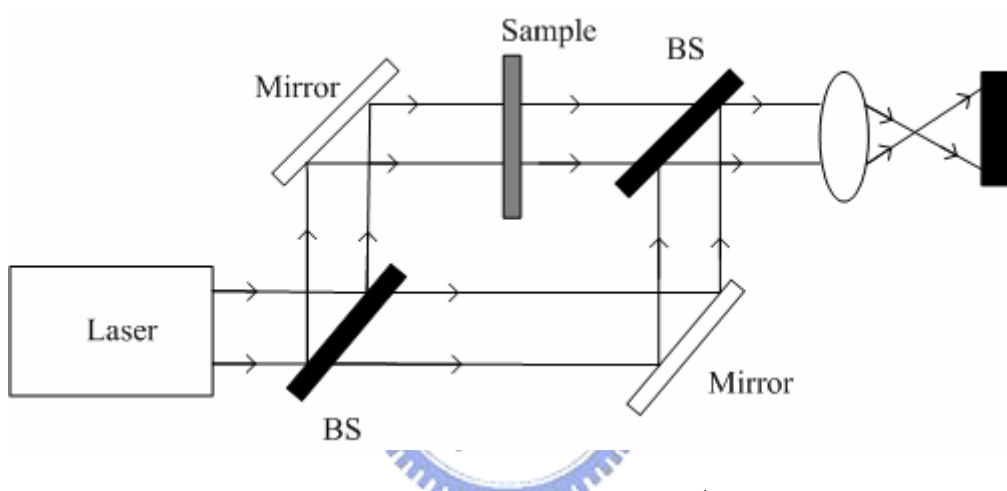


圖 2.2 Mach-Zehnder 干涉儀

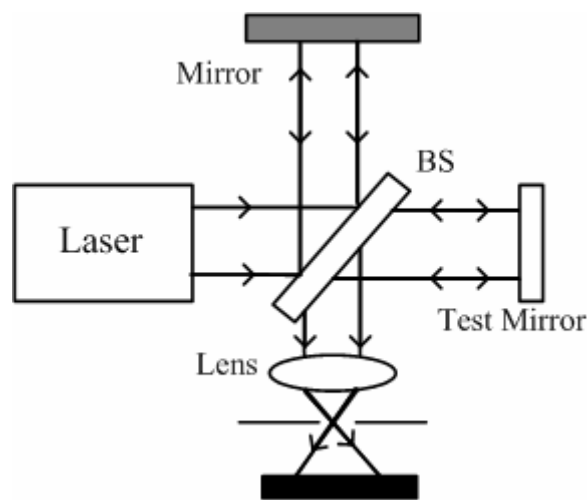


圖 2.3 Twyman-Green 干涉儀

涉儀具有不同的功能及優缺點，端看需求為何，例如 Mach-Zhender 干涉儀常應用在透明物體的量測上面，而 Twyman-Green 干涉儀則常用在光學元件的檢測 [6]。設計一個適合我們欲量測的物體以及量測系統的干涉儀通常是非常重要的。

2.3 移相術原理

由干涉儀所得之干涉圖形定量分析常利用移相干涉術(phase shifting interferometry)[8]，以相移調變方式為之。移相干涉術是一種利用干涉的原理，執行直接相位量測的技巧，藉著引入一個已知的相位變化量於干涉圖中，使干涉圖產生動態的變化，並利用電腦控制，擷取數組干涉圖，再藉著引入跟移相有關的運算公式，由干涉圖之強度變化計算出各量測點之相位，此方法適合用於求取二維表面上的相位分佈，其量測精確度可達 $\lambda/100$ 。

我們知道一平面上的光干涉結果可以用以下的一般式表示：

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos \Delta\phi(x, y), \quad (2.2)$$

在此式子中，我們欲得到 $\Delta\phi(x, y)$ 的資訊，並進而推導出相關之物理量，移相術便是基於精確的找出 $\Delta\phi(x, y)$ 之值，而建立的技術。我們以 Twyman-Green 干涉儀來簡單做說明。假設兩道光之相位差為 $\Delta\phi(x, y)$ ，也就是光程差所造成的相位差，所以我們以 PZT 改變參考光的光程，使得相位差增加了 α ，則

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \alpha), \quad (2.3)$$

若如今我們取得三組獨立的干涉圖：

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \alpha_1), \quad (2.4a)$$

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \alpha_2), \quad (2.4b)$$

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \alpha_3), \quad (2.4c)$$

因為有三個未知量， $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ 以及 $\Delta\phi(x, y)$ ，我們利用三個獨立方程式可以解出所有的未知量， $\Delta\phi(x, y)$ 也可以計算得到，這就是移相術的基本概念。

以前的干涉圖形多是針對 Fringe 的變化來做分析，例如當 Fringe 彎曲時所代表的是相位減少或者是增加的方向，但是這牽涉到干涉條紋中心的定位，中心定位限制了分析的精確度以及處理資料的量，而且光強變化、CCD 的空間非均勻放大效應以及定點雜訊都會對精確度產生重大的影響。在此，移相術並不依靠分析 Fringe，所以幾乎所有的干涉圖形都可以利用移相術來求取相位，此外，移相術也不會受到光強度在空間上的不均勻、CCD 的空間非均勻放大效應，以及定點雜訊所影響。我們將上述的效應寫入(2.3)式做修改，可以寫成

$$I'(x, y) = S(x, y) \cdot \{a(x, y) + b(x, y) \cos \Delta\phi(x, y)\} + n(x, y)$$

$$= [S(x, y) \cdot a(x, y) + n(x, y)] + [S(x, y) \cdot b(x, y)] \cdot \cos \Delta\phi(x, y), \quad (2.5)$$

其中 $S(x, y)$ 是 CCD 在空間上的非線性放大， $n(x, y)$ 則是定點雜訊，由上式可以看出 $S(x, y)$ 與 $n(x, y)$ 並不會影響 $\Delta\phi(x, y)$ 的求得，只是改變了平均光強度的分佈，以及每一個位置的光強度調變大小；對於平面上任一點來說，這兩個量可以經由方程式連同 $\Delta\phi(x, y)$ 解出，所以並不會造成任何困擾。



2.4 相位調制法及演算法

若要調制兩道光之間的相位差，一般來說有以下幾種形式：可以利用 PZT 推動參考光路徑上面的反射鏡[9]，接著改變其光程差，進而達成移相的功能；也可以藉著旋轉位於干涉臂上的玻璃平板使其相位產生變化，進而達成移相的功能；連續移動位於干涉臂上的繞射光柵或超音波驅動的 AO 晶體[10]，使繞射光的相位產生改變，進而達成移相的功能；或者利用 EO 晶體[11]來使得不同偏光間的相位差產生改變，進而達成移相的功能，這些方法都能調制相位，進而達成移相的方法，如圖 2.4(a)~(c)所示。

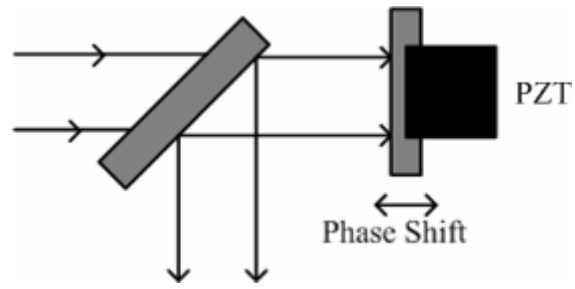


圖 2.4(a) 利用 PZT 推動鏡子造成相位變化

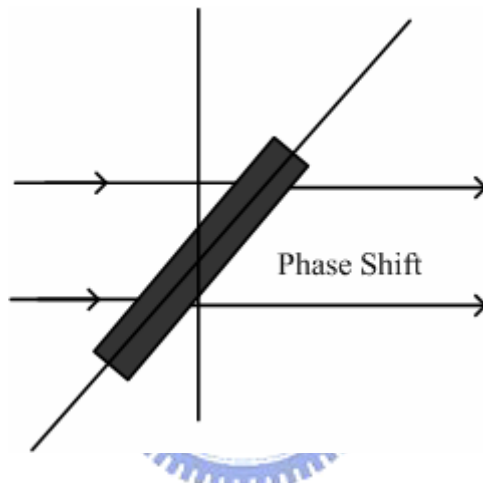


圖 2.4(b) 利用一玻璃平板旋轉造成相位變化

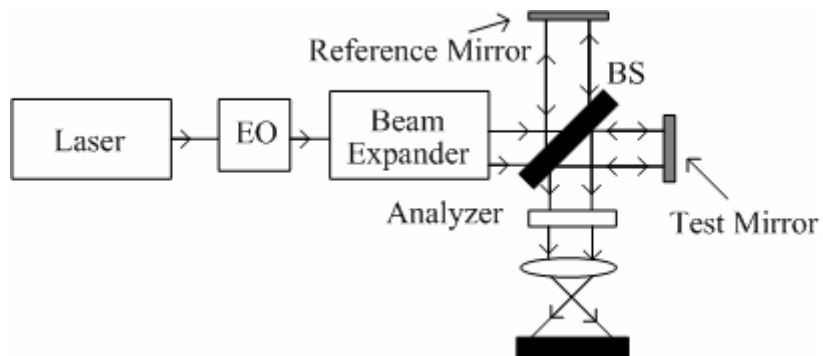


圖 2.4(c) 利用 EO 晶體造成 p-與 s-偏光間的相位變化

為了減少誤差、增加對擾動或是 PZT 誤差的抵抗力以及取得更高的相位解析度，現今有許多相位演算法被提出，但是最常被使用的為以下幾種基本的相位量測演算法：四步驟移相法、五步驟移相法、Carre's 移相法，將在本節一一介紹。

2.4.1 四步驟移相法[12]

四步驟移相法與三步驟移相法的原理是相同的，其相位移動的大小為 0 、 $\pi/2$ 、 π 、 $3\pi/2$ ，所拍攝到的光強度分佈為：

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 0), \quad (2.6a)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \pi/2), \quad (2.6b)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \pi), \quad (2.6c)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 3\pi/2), \quad (2.6d)$$

(2.6a)式至(2.6d)式可以在一步簡化成

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)), \quad (2.7a)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \sin(\Delta\phi(x, y)), \quad (2.7b)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) - b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)), \quad (2.7c)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \sin(\Delta\phi(x, y)), \quad (2.7d)$$

我們利用上面四個式子，可以解出三個未知數 $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ 以及 $\Delta\phi(x, y)$ ，可以得到 $\Delta\phi(x, y)$ 的表示為

$$\Delta\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right), \quad (2.8)$$

利用上式，即可針對平面上的每一點去計算出其相位。

2.4.2 五步驟移相法[13]

五步驟移相法的相位移動為 -2φ 、 $-\varphi$ 、 0 、 φ 、 2φ ，對干涉圖形做五次光強度量測，這五組獨立干涉圖形的光強度分佈分別為

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) - 2\varphi) , \quad (2.9a)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) - \varphi) , \quad (2.9b)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) , \quad (2.9c)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \varphi) , \quad (2.9d)$$

$$I_5(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 2\varphi) , \quad (2.9e)$$

這五個方程式可以聯立解得

$$\Delta\phi(x, y) = \tan^{-1} \left[2 \sin \varphi \cdot \frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} \right] , \quad (2.10)$$

由式子(2.10)可以看出 $\Delta\phi(x, y)$ 值的計算會因為移相的偏差而得到不正確的值，如今對(2.10)式作微分，可以得到因相移 φ 之偏差所引起的相位分佈 $\Delta\phi$ 的誤差量：

$$\frac{\partial \Delta\phi}{\partial \varphi} = \frac{[2 \cos \varphi \cdot \frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1}]}{1 + [2 \sin \varphi \cdot \frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1}]} , \quad (2.11)$$

若選取 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，則可以把式子(2.9)對於因為 PZT 相位移動的偏差量所造成的相位

誤差降到最低，最後可以得到相位分佈的表示式為：

$$\Delta\phi(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1} \right] . \quad (2.12)$$

2.4.3 Carre'移相法[14]

Carre'法和四步驟移相法其基本原理基本上是相同的，但是對於干涉圖形做四步驟移相法時，必須對移相機構做校正的工作，而且各步驟間移動的相位已經訂好，如果實際上各步驟間的相位跟鎖定好的不同時，則較容易造成誤差。利用Carre'法來計算相位分佈時，不需要對移相機構做校正的工作，我們求得的相位和實際由移相機構引入的相位變化值 α 是沒有關係的，只需要相位的改變量是以線性方式來改變即可。另 $\alpha_i = -3\delta$ 、 $-\delta$ 、 δ 、 3δ ，則各步驟所得之光強度可以表示為：

$$I_1(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) - 3\delta) \quad (2.13a)$$

$$I_2(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) - \delta) \quad (2.13b)$$

$$I_3(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \delta) \quad (2.13c)$$

$$I_4(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 3\delta) \quad (2.13d)$$

最後可以解得：

$$\delta(x, y) = \tan^{-1} \left[\frac{3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)}{(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

以及

$$\Delta\phi(x, y) = \tan^{-1} \left[\tan[\delta(x, y)] \cdot \frac{(I_1 - I_4) + (I_2 - I_3)}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)} \right], \quad (2.15)$$

由於 $b(x, y)$ 可以由四個獨立取得的干涉圖形求得，所以Carre'移相法可以補償在移相上的誤差與空間上的不均勻，但是對於每一點來說，phase step 仍然要是線性的以及各不相同的，也就是假設PZT推動的距離跟輸入的關係是成現性的情況。

2.5 相位重建

利用干涉術作光學檢驗得到干涉圖之後，再以先前所述的各種移相法對干涉圖求取相位值的圖形，此種相位值圖示屬於覆蓋(unwrapped phase map)，而不是

我們所要的相位重建圖(phase unwrapping map)，因此覆蓋相位圖需要經過相位重建的程序作成相位重建圖(phase unwrapping map)。

因為覆蓋相位圖(wrapped phase map)中有不連續的現象，此種不連續現象的原因是因為，當相位值的大小超過一個 2π 的整數倍時，就會發生不連續的現象，而相位重建的目的即是要消除此種不連續的現象，以得到我們所需要的相位重建圖形。

相位重建的步驟如下:首先比較相鄰兩像素(pixel)之間的相位差，如果相鄰兩個 pixel 之間的相位大於 π ，則加上或是減去 2π 的整數倍使得相鄰兩個 pixel 之間的相位差小於 π ，然後再對整個覆蓋相位圖的每一點作相同的計算，最後將這些計算之後的各點相位值繪成圖形，即為相位重建圖[15]。圖 2.5 為一維的相位重建圖。

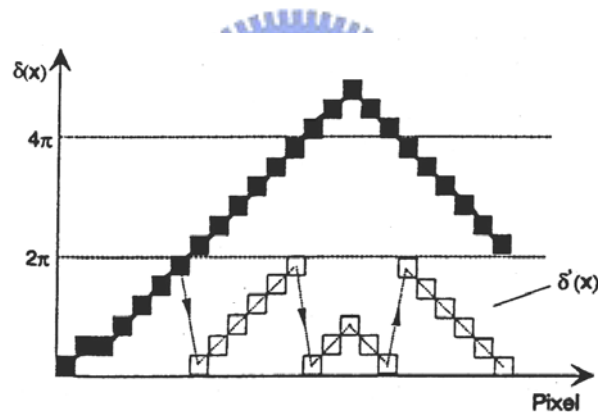


圖 2.5 一維的相位重建圖

2.6 小結

此章說明了干涉術的基本原理以及應用，接著介紹移相術求取二維相位分佈的原理。結合干涉術及移相術，選擇適合我們實驗的相位調制法以及相位演算法，即可用來測量待測物的高度變化以及折射率分佈。