第二章　原理

2.1 光波的電場理論與橢圓偏極態理論

光波實質上就是電磁波，完整描述光波要用到四個基本的場向量。而我們通常以光波電場的時變分布來定義光波之偏振態。假設光波沿 z 軸方向前進，則電場之振動方向將位於 x-y 平面上，而電場可表示為

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{i} + E_y(z,t)\hat{j} \tag{2.1}$$

其中

$$E_x(z,t) = E_{ox}\cos(\omega t - kz + \delta_x) \tag{2.2a}$$

$$E_y(z,t) = E_{oy}\cos(\omega t - kz + \delta_y) \tag{2.2b}$$

k：波數 (wave number)

ω：角頻率 (angular frequency)

δx： x 之相位 (phase)

δy： y 之相位 (phase)

將 (2.2a) 及 (2.2b) 兩式的三角函數展開可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} = \cos(\omega t - kz)\cos(\delta_x) - \sin(\omega t - kz)\sin(\delta_x) \tag{2.3a}$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}} = \cos(\omega t - kz)\cos(\delta_x) - \sin(\omega t - kz)\sin(\delta_x) \tag{2.3b}$$

將 (2.3a) 及 (2.3b) 合併計算可得

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\sin(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\sin(\delta_x) = \cos(\omega t - kz)\sin(\delta_y - \delta_x) \tag{2.4a}$$

$$\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\cos(\delta_y) - \frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\cos(\delta_x) = \sin(\omega t - kz)\sin(\delta_y - \delta_x) \tag{2.4b}$$

將 (2.4a) 及 (2.4b) 式合併可得

$$\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\right)^2+\left(\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\right)^2-2\left(\frac{E_x(z,t)}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y(z,t)}{E_{oy}}\right)\cos(\delta)=\sin^2(\delta) \tag{2.5}$$

其中

$\boldsymbol{\delta=\delta_y-\delta_x}$

方程式 (2.5) 為橢圓方程式，也就是說在任核時間點電場的傳播軌跡為橢圓形。

一般來說，橢圓的長軸和短軸並不是在 x 軸和 y 軸上；所以必須借由座標轉換才可以將 (2.5) 式化成標準的橢圓方程式。如圖 2-1 所示，將座標 (x,y) 旋轉 θ 角，則新座標 (x′,y′)

$$E_x=E'_x\cos\theta-E'_y\sin\theta \tag{2.6a}$$

$$E_y=E'_x\sin\theta+E'_y\cos\theta \tag{2.6b}$$

將 (2.6a) 和 (2.6b) 代入 (2.5) 式中計算可得

$$\frac{\boldsymbol{E'_x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{E'_y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=1 \tag{2.7}$$

$$a^2=E_{ox}{}^2\cos^2\theta+E_{oy}{}^2\sin^2\theta+2E_{ox}E_{oy}\cos\delta\cos\theta\sin\theta\equiv L \tag{2.8a}$$

$$b^2=E_{ox}{}^2\sin^2\theta+E_{oy}{}^2\cos^2\theta-2E_{ox}E_{oy}\cos\delta\cos\theta\sin\theta\equiv T \tag{2.8b}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\delta}{E_{ox}^2-E_{oy}^2} \tag{2.8c}$$

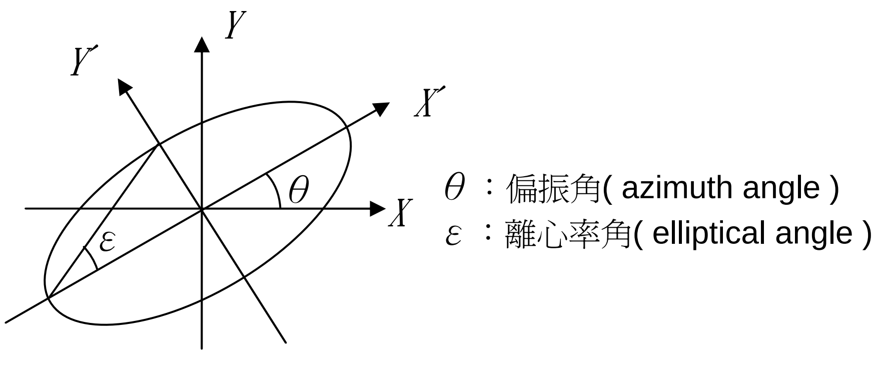

圖 2-1：橢圓偏振光

因光波在任一點之電場分部為橢圓偏振形式，接下來介紹幾種橢圓偏極的特例：

(1) 當 $\delta=0$ 或 $\delta=\pm\pi$ 時，電場為沿著固定方向振動，稱為線性偏振光 (圖 2-2)。

(2) 當 $\delta=\frac{\pi}{2}$ 之奇數倍時，且 x 與 y 方向之振幅相等，稱為圓偏振光 (圖 2-3)。

(3) 當不符合上兩項條件時，電場之振動方向投影於平面為橢圓，稱為橢圓偏振光(圖 2-4)。

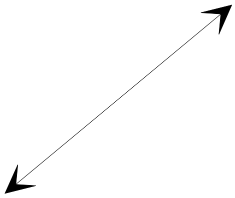

圖 2-2：線性偏振光

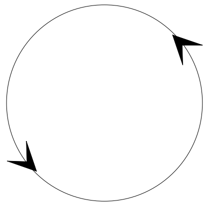

圖 2-3：圓偏振光

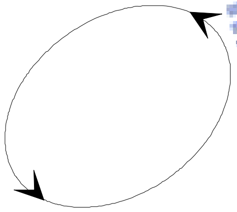

圖 2-4：橢圓偏振光

為了便描述光波之偏振狀態，通常以一 2×1 階矩陣表示電場，此矩陣稱為瓊斯向量 (Jones vector)。

$$\left|E\right\rangle=\begin{bmatrix}E_{ox}e^{i\delta x}\\E_{oy}e^{i\delta y}\end{bmatrix}e^{i(kz-\omega t)} \tag{2.9}$$

一般而言瓊斯向量只能表示純偏振光 (pure polarized light)，不能表示非偏振光 (unpolarized light) 或部份偏振光 (partially polarized light)，但一般光波大部份均為部份偏振光，故須用史托克參數 (Stokes Parameters) 來代表。

2.2 史托克 (Stokes Parameters) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

史托克參數 (Stokes Vector) 為一4×1階矩陣

$$S=\begin{bmatrix}S_o\\S_1\\S_2\\S_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{ox}^2+E_{oy}^2\\E_{ox}^2-E_{oy}^2\\2E_{ox}^2E_{oy}^2\cos(\delta)\\2E_{ox}^2E_{oy}^2\sin(\delta)\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

其中

$$S_0=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2 \tag{2.11}$$

$$\frac{S_1}{S_0}=\sin 2\varepsilon\Rightarrow S_3=S_0\sin 2\varepsilon \tag{2.12}$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\tan 2\theta\Rightarrow S_2=S_1\tan 2\theta \tag{2.13}$$

將 (2.13) 和 (2.12) 式代入 (2.11) 可得

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I_o}\begin{bmatrix}1\\\boldsymbol{p}\cdot\cos2\boldsymbol{\theta}\cdot\cos2\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{p}\cdot\sin2\boldsymbol{\theta}\cdot\cos2\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{p}\cdot\sin2\boldsymbol{\varepsilon}\end{bmatrix} \tag{2.14}$$

其中

$$I_o=E_{ox}{}^2+E_{oy}{}^2$$

$$\boldsymbol{p}=\frac{(\boldsymbol{S_1}{}^2+\boldsymbol{S_2}{}^2+\boldsymbol{S_3}{}^2)^{\frac{1}{2}}}{\boldsymbol{S_o}}$$

$\boldsymbol{p}$: 偏極度 (degrees of polarization)

$\boldsymbol{I_o}$: 入射光強度 (Intensity)

當 $\boldsymbol{p}=1$ 時為純偏振光 (pure polarized light)

當一入射光進入偏光元件時，可用穆勒矩陣 (M) 表示入射光 (S) 和出射光 (S′) 的關係

$$S' = M \cdot S \Rightarrow \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

以下列常用到的矩陣

(1) 旋轉矩陣 (假設旋轉 ψ 度)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & \sin 2\phi & 0 \\ 0 & -\sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 偏光片的方位角為 P 度時

$$M_{polarizer}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & -\sin 2P & 0 \\ 0 & \sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ 0 & -\sin 2P & \cos 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{polarizer}(P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \sin 2P \cos 2P & 0 \\ \sin 2P & \sin 2P \cos 2P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

當光路徑中有數個偏光元件，則出射光的史托克向量 (S_{out}) 等於各元件的穆勒矩陣 (M_1、M_2、M_3 ...) 依序作用於入射光史托克向量 (S_{out}) 的結果：

$$S_{out} = (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots) S_{in} \qquad (2.18)$$

2.3 橢圓特性參數 Ψ 和 Δ 之定義

Fresnel 根據馬克斯威爾（Maxwell equations）和介面條件 (Boundary condition) 導出介質表面的反射係數及穿透係數。

$$r_p = \frac{n_1 \cos\theta_0 - n_0 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_0 + n_0 \cos\theta_1} \tag{2.19a}$$

$$r_s = \frac{n_0 \cos\theta_0 - n_1 \cos\theta_1}{n_0 \cos\theta_0 + n_1 \cos\theta_1} \tag{2.19b}$$

$$t_p = \frac{2n_o \cos\theta_o}{n_1 \cos\theta_o + n_o \cos\theta_1} \tag{2.19c}$$

$$t_s = \frac{2n_o \cos\theta_o}{n_o \cos\theta_o + n_1 \cos\theta_1} \tag{2.19d}$$

這就是俗知的 Fresnel equation，其中

r_p ：為平行入射面方向之反射振幅係數

r_s ：為垂直入射面方向之反射振幅係數

t_p ：為平行入射面方向之穿透振幅係數

t_s ：為垂直入射面方向之穿透振幅係數

n_0 ：為入射前介質之折射率,空氣折射率為 1.0

n_1 ：為待測物的折射率

θ_0 ：為入射角

θ_1 為折射角

也可寫成

$$r_p = |r_p| e^{i\delta_p}$$

$$\boldsymbol{r_s} = |\boldsymbol{r_s}| \boldsymbol{e^{i\delta_s}}$$

則定義

$$\tan\Psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{|r_p|}{|r_s|} e^{i(\delta_p - \delta_s)} \tag{2.20}$$

由上式可得

$$\tan\Psi = \frac{|r_p|}{|r_s|}, \quad \Delta = \delta p - \delta s$$

$\tan\Psi$ ：表反射光在平行入射面與垂直入射面之振幅大小比值

Δ ：表反射光在平行入射面與垂直入射面之相位差

這兩參數通常被命名為橢圓偏光參數 (ellipsometric parameters)，橢圓儀所能測得的即為此參數，如何藉此參數轉換為光學常數則須先了解偏極光經介質反射時所遵循的物理模式即可推算，以下介紹兩種模式。

(1) 塊狀物 (bulk medium)：單次反射型態 (如圖 2-5)

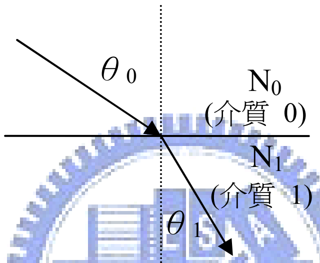

圖 2-5：單次反射型示意圖

當平面光波照射在各向同性 (isotropic)、具吸收的介質 (如金屬或半導體) 中，其折射率 (complex refractive index) 應為複數 N，故其表示法為 $N = n - ik$，其中 n 為該介質的折射率 (index of refraction)，k 為介質的消光係數 (extinction coefficient)，我們可由方程式 (2.19a)、(2.19b)、(2.20)可以知道橢圓偏光參數 (Ψ，Δ) 與物理參數 (N_0，N_1，θ_0) 之函數關係。

(2) 薄膜型式 (thin film)：多次反射型態 (如圖 2-6)

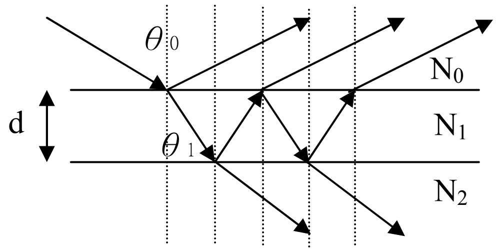

圖 2-6：多次反射型示意圖

在橢圓偏光量測中最常使用的一種情形正是薄膜量測，此種型態有多次反射情形發生，假設第一道反射光和第二道反射光的相位差為 2γ，同理第二道反射光和第三道反射光的相位差也為 2γ，所以第 n 道反射光和第 n+1 道反射光的相位差都為 2γ。則反射係數為：

$$r_p = r_{01p} + t_{01p}t_{10p}r_{12p}e^{-i2\gamma} + t_{01p}t_{10p}r_{10p}\,r_{12p}^{2}e^{-i4\gamma} + t_{01p}t_{10p}\,r_{10p}^{2}r_{12p}^{3}e^{-i6\gamma} + \cdots\cdots \tag{2.21a}$$

$$r_s = r_{01s} + t_{01s}t_{10s}r_{12s}e^{-i2\gamma} + t_{01s}t_{10s}r_{10s}\,r_{12s}^{2}e^{-i4\gamma} + t_{01s}t_{10s}\,r_{10s}^{2}r_{12s}^{3}e^{-i6\gamma} + \cdots\cdots \tag{2.21b}$$

其中

$$r_{ijp} = \frac{N_j\cos\theta_i - N_i\cos\theta_j}{N_j\cos\theta_i + N_i\cos\theta_j}$$

$$r_{ijs} = \frac{N_i\cos\theta_i - N_j\cos\theta_j}{N_i\cos\theta_i + N_j\cos\theta_j}$$

$$t_{ijp} = \frac{2N_i\cos\theta_i}{N_j\cos\theta_i + N_i\cos\theta_j}$$

$$t_{ijs} = \frac{2N_i\cos\theta_i}{N_i\cos\theta_i + N_j\cos\theta_j}$$

$$\gamma = 2\pi\left(\frac{d}{\lambda}\right)N_1\cos\theta_1 \tag{2.22}$$

$$N_1\cos\theta_1 = (N_1^2 - N_0^2\sin^2\theta_0)^{\frac{1}{2}}$$

d ：薄膜厚度

λ ：光的波長

r_{ijp} ：光線從介質 i 入射到介質 j ，平行入射面方向之反射係數

r_{ijs} ：光線從介質 i 入射到介質 j ，垂直入射面方向之反射係數

t_{ijp} ：光線從介質 i 入射到介質 j ，平行入射面方向之穿透係數

t_{ijs} ：光線從介質 i 入射到介質 j ，垂直入射面方向之穿透係數

其它依此類推，若為無限多次反射則反射端所接收總反射係數為

$$r_p = r_{01p} + \frac{t_{01p} \cdot t_{10p} \cdot r_{12p} e^{-i2\gamma}}{1 - r_{01p} \cdot r_{12p} e^{-i2\gamma}}$$

$$r_s = r_{01s} + \frac{t_{01s} \cdot t_{10s} \cdot r_{12s} e^{-i2\gamma}}{1 - r_{01s} \cdot r_{12s} e^{-i2\gamma}}$$

且 $r_{10} = -r_{01}$ ， $t_{01} t_{10} = 1 - r_{01}^2$

可得

$$\tan\Psi \cdot e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s} = \frac{r_{01p} + r_{12p} \cdot e^{-i2\gamma}}{1 + r_{01p} \cdot r_{12p} \cdot e^{-i2\gamma}} \cdot \frac{1 + r_{01s} \cdot r_{12s} \cdot e^{-i2\gamma}}{r_{01s} + r_{12s} \cdot e^{-i2\gamma}} \tag{2.23}$$

由方程式 (2.22) 、 (2.23) 可知橢圓偏光參數 (Ψ，Δ) 與物理參數 (N_0、N_1、N_2、θ_0、d) 之函數關係。只要知道橢圓參數、入射角以及各層介質的折射率就可以反推薄膜的厚度。

2.4 反射光之史托克參數 (Stoke Parameter) 與穆勒矩陣 (Mueller Matrix)

在反射式的架構下，x 軸是平行入射面方向，y 軸是垂直入射面方向。

入射光的史托克參數 (Stokes Parameter)

$$
\begin{aligned}
S_0 &= E_p E_p^* + E_s E_s^* \\
S_1 &= E_p E_p^* - E_s E_s^* \\
S_2 &= E_p E_s^* + E_s E_p^* \\
S_3 &= i(E_p E_s^* - E_s E_p^*)
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

反射光的史托克參數 (Stokes Parameter)

$$
\begin{aligned}
S_0' &= R_p R_p^* + R_s R_s^* \\
S_1' &= R_p R_p^* - R_s R_s^* \\
S_2' &= R_p R_s^* + R_s R_p^* \\
S_3' &= i(R_p R_s^* - R_s R_p^*)
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

又因　$R_s = r_s E_s$ ， $R_p = r_p E_p$

所以方程式 (2.24) 和 (2.25) 可以寫成矩陣模式

$$
\begin{bmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}
\begin{bmatrix}
r_p r_p^* + r_s r_s^* & r_p r_p^* - r_s r_s^* & 0 & 0 \\
r_p r_p^* - r_s r_s^* & r_p r_p^* + r_s r_s^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & r_p r_s^* + r_s r_p^* & -i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) \\
0 & 0 & i(r_p r_s^* - r_s r_p^*) & r_p r_s^* + r_s r_p^*
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.26}
$$

由定義 $\tan\Psi e^{i\Delta} = \frac{r_p}{r_s}$ 方程式 (2.25) 可改寫成

$$
\begin{bmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{bmatrix} = \frac{r_s r_s^*}{2}
\begin{bmatrix}
1+\tan^2\Psi & -1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\
-1+\tan^2\Psi & 1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\tan\Psi\cos\Delta & 2\tan\Psi\sin\Delta \\
0 & 0 & -2\tan\Psi\sin\Delta & 2\tan\Psi\cos\Delta
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \tag{2.27}
$$

所以一各向同性待測物 (isotropic sample) 之穆勒矩陣 (Mueller Matrix) 可表示為

$$M_{sample} = \begin{bmatrix} 1+\tan^2\Psi & -1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\ -1+\tan^2\Psi & 1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tan\Psi\cos\Delta & 2\tan\Psi\sin\Delta \\ 0 & 0 & -2\tan\Psi\sin\Delta & 2\tan\Psi\cos\Delta \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

2.5 簡式橢偏儀 (PSA：Polarizer Sample Analyzer) 求橢圓偏光參數

簡式橢偏儀架構為一入射光 (S_i) 經過偏光片 ($M_{polarizer}(P)$) 入射樣品 (M_{sample} (Ψ,Δ)) 反射再經析光片 ($M_{analyzer}$ (A)) 得一出射光 (S_r)；而實驗時只能量測到光強度，所以必須了解光強度和各參數 (Ψ,Δ,P,A) 的函數關係，以下探討此問題。

史脫克參數 (Stokes Parameter) 第一項就是光強度，所以只須利用前面所提到的方程式(2.17)及(2.28)即可得到關係式。則矩陣乘積為：

$$S_r = M_{analyzer}(A)M_{sample}(\Psi,\Delta)M_{polarizer}(P)S_i$$

$$=\frac{I_0'}{4}\begin{bmatrix} 1 & \cos 2P & \sin 2P & 0 \\ \cos 2P & \cos^2 2P & \frac{1}{2}\sin 4P & 0 \\ \sin 2P & \frac{1}{2}\sin 4P & \sin^2 2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1+\tan^2\Psi & -1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\ -1+\tan^2\Psi & 1+\tan^2\Psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tan\Psi\cos\Delta & 2\tan\Psi\sin\Delta \\ 0 & 0 & -2\tan\Psi\sin\Delta & 2\tan\Psi\cos\Delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2P \\ \sin 2P \\ 0 \end{bmatrix}$$

則 S_r 的第一項為：

$$I=\frac{I_0'}{4}(\sin^2 P\sin^2 A+\tan^2\Psi\cos^2 P\cos^2 A+0.5\tan\Psi\cos\Delta\sin 2P\sin 2A) \quad (2.29)$$

$$I=I_0(\sin^2 P\sin^2 A+\tan^2\Psi\cos^2 P\cos^2 A+0.5\tan\Psi\cos\Delta\sin 2P\sin 2A)$$

方程式 (2.29) 即為光強度與各參數的函數關係式。其中 P，A 分別為偏光片與析光片的方位角，由於亮度僅有三個未知數，即 $\tan\Psi$ 、$\cos\Delta$ 及 I_0，故只需量測析光片三個方角的亮度即可推算以上的未知數。 Meyer et.al. 將 P=45° 的線偏極光照射在金屬上，並以極座標表示 (如圖 2-7) ，則反射光之強度分佈形成類橢圓型，其數學模式可寫成下式 [3]

$$I(A)=\frac{L}{2}\cos^2(A-\theta)+\frac{T}{2}\sin^2(A-\theta) \quad (2.30)$$

其中 L 與 T 為長軸與短軸，θ 為偏振角。

$$L = I_0(\tan^2\Psi\cos^2 P\cos^2\theta + \sin^2 P\sin^2\theta + 0.5\tan\Psi\sin 2P\sin 2\theta\cos\Delta) \quad (2.31a)$$

$$T = I_0(\tan^2\Psi\cos^2 P\sin^2\theta + \sin^2 P\cos^2\theta - 0.5\tan\Psi\sin 2P\sin 2\theta\cos\Delta) \quad (2.31b)$$

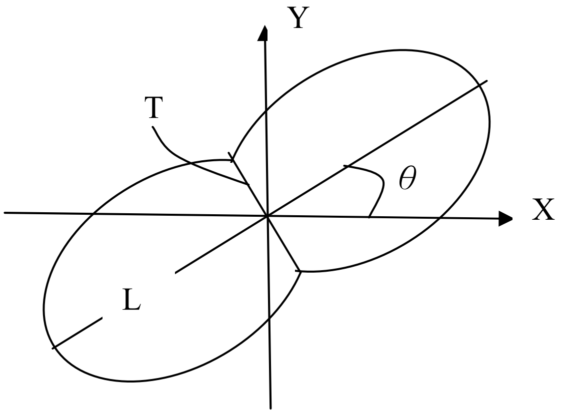

圖 2-7：反射光之強度分佈圖

為了找出 θ 和其他參數 (Ψ,Δ,P,A) 的函數關係。當 A=θ 時，光強度 (I) 為極值，也就是說光強度對 A 微分一次後令 A=θ 答案為零，由數學式表示為：

$$\left.\frac{\partial I(A,P)}{\partial A}\right|_{A=\theta} = 0 \quad (2.32)$$

將方程式 (2.29) 帶入 (2.32) 可得

$$\tan 2\theta = \frac{\cos\Delta\sin 2P\tan\Psi}{\cos^2 P\tan\Psi - \sin^2 P} = \frac{\cos\Delta\sin 2P\sin 2\Psi}{\cos 2P - \cos 2\Psi} \quad (2.33)$$

接著將 (2.30) 數學式改寫為：

$$I = \frac{L+T}{2}(1 + \frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T}\cos 2A + \frac{(L-T)\sin 2\theta}{L+T}\sin 2A)$$

$$I = B(1 + C\cos 2A + D\sin 2A) \quad (2.34)$$

上式的三個未知數 (B,C,D) ，我們由旋轉析光片在 0 度、60 度和 120 度三個角度的光強度，在經數學計算可得，此方法稱為三點量測法。

$$B = \frac{L+T}{2} = \frac{1}{3}(I(A=0°) + I(A=60°) + I(A=120°))$$

$$C=\frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T}=2-\frac{1}{B}(I(A=60°)+I(A=120°))$$
$$D=\frac{(L-T)\sin 2\theta}{L+T}=\frac{1}{\sqrt{3}B}(I(A=60°)-I(A=120°))$$

為了得到橢圓偏光參數 (Ψ,Δ)，把方程式 (2.31a) 和方程式(2.31b) 帶入參數 (C) 可得

$$C=\frac{(L-T)\cos 2\theta}{L+T}=\frac{-\sin^2 P+\cos^2 P\tan^2\Psi}{\sin^2 P+\cos^2 P\tan^2\Psi}$$
$$\tan^2\Psi=\frac{1+C}{1-C}\tan^2 P \tag{2.35}$$
$$\Psi=\arctan\sqrt{\frac{1+C}{1-C}\tan^2 P} \tag{2.36}$$

由方程式 (2.33) 和參數 (C,D) 可得

$$\tan 2\theta=\frac{\cos\Delta\sin 2P\sin 2\Psi}{\cos 2P-\cos 2\Psi}=\frac{D}{C}$$
$$\Delta=\arccos\frac{D(\cos 2P-\cos 2\Psi)}{C(\sin 2P\sin 2\Psi)} \tag{2.40}$$

以上為不考慮偏光片與析光片方位角誤差下所得橢圓偏光參數 (Ψ,Δ) 。

2.6 偏光片及析光片方位角誤差及修正

假設偏光片方位角誤差為 α ，而析光片方位角誤差為 β 。則前一節所提到的光強度方程式必須改寫成：

$$I=I_0(\sin^2(P+\alpha)\sin^2(A+\beta)+\tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\cos^2(A+\beta)+0.5\tan\Psi\cos\Delta\sin2(P+\alpha)\sin2(A+\beta))$$

$$=L\cos^2(A+\beta-\theta)+T\sin^2(A+\beta-\theta)$$

$$I=\frac{L+T}{2}(1+\frac{(L-T)\cos2(\theta-\beta)}{L+T})\cos2A+\frac{(L-T)\sin(\theta-\beta)}{L+T}\sin2A)$$

$$I=B(1+C\cos2A+D\sin2A)$$

其中

$$B=\frac{L+T}{2} \tag{2.41a}$$

$$C=\frac{L-T}{L+T}\cos2(\theta-\beta) \tag{2.41b}$$

$$D=\frac{L-T}{L+T}\sin2(\theta-\beta) \tag{2.41c}$$

$$L=I_0(\tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\cos^2\theta+\sin^2(P+\alpha)\sin^2\theta+0.5\tan\Psi\sin2(P+\alpha)\sin2\theta\cos\Delta) \tag{2.42a}$$

$$T=I_0(\tan^2\Psi\cos^2(P+\alpha)\sin^2\theta+\sin^2(P+\alpha)\cos^2\theta-0.5\tan\Psi\sin2(P+\alpha)\sin2\theta\cos\Delta) \tag{2.42b}$$

當 $A+\beta=\theta$ 時，光強度 (I) 為極值，以數學表示為：

$$\left.\frac{\partial I(A,P)}{\partial A}\right|_{A+\beta=\theta}=0 \qquad \tan2\theta=\frac{\cos\Delta\sin2(P+\alpha)\sin2\Psi}{\cos2(P+\alpha)-\cos2\Psi} \tag{2.43}$$

由以上方程式可知 α 會直接影響到參數 (L,T,θ)；而 β 並不會影響到參數，只會使量測到偏振角為 $\theta-\beta$。

合併方程式 (2.42a)、(2.42b) 計算，且將方程式 (2.43) 改寫可得[7]

$$\frac{(L+T)^2}{LT}=\frac{(\cot\Psi\tan(P+\alpha)+\cot(P+\alpha)\tan\Psi)^2}{\sin^2\Delta} \tag{2.44a}$$

$$\frac{(L-T)\cos2\theta}{L+T}=\frac{-1+\cot^2(P+\alpha)\tan^2\Psi}{1+\cot^2(P+\alpha)\tan^2\Psi} \tag{2.44b}$$

$$\tan^2 2\theta=\frac{4\cos^2\Delta}{(-\cot\Psi\tan(P+\alpha)+\cot(P+\alpha)\tan\Psi)^2} \tag{2.44c}$$

再將 (2.44a)、(2.44b)、(2.44c) 合併化簡為

$$\frac{(L-T)^2}{4LT}\sin^2 2(\theta-\beta+\beta)=\cot^2\Delta \tag{2.45}$$

在 P=45°+α 得 $(L_1,T_1,\theta_1\text{-}\beta)$ 帶入方程式 (2.45) 可得

$$\frac{(L_1-T_1)^2}{4L_1T_1}\sin^2 2((\theta_1-\beta)+\beta)=\cot^2\Delta$$

$$\frac{(L_1-T_1)}{2\sqrt{L_1T_1}}\sin 2((\theta_1-\beta)+\beta)=\pm\cot\Delta \tag{2.46a}$$

同理 P=-45°+α 得 $(L_2,T_2,\theta_2\text{-}\beta)$ 帶入方程式 (2.45) 可得

$$\frac{(L_2-T_2)^2}{4L_2T_2}\sin^2 2((\theta_2-\beta)+\beta)=\cot^2\Delta$$

$$\frac{(L_2-T_2)}{2\sqrt{L_2T_2}}\sin 2((\theta_2-\beta)+\beta)=\pm\cot\Delta \tag{2.46a}$$

因為 θ_1~$-\theta_2$ ，所以 (2.46a) 和 (2.46b) 可合併成：

$$\frac{(L_1-T_1)}{2\sqrt{L_1T_1}}\sin 2((\theta_1-\beta)+\beta)=\frac{-(L_2-T_2)}{2\sqrt{L_2T_2}}\sin 2((\theta_2-\beta)+\beta) \tag{2.47}$$

將方程式 (2.47) 和差化積可得析光片方位角誤差 β：

$$\beta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\frac{(L_2-T_2)}{2\sqrt{L_2T_2}}\sin 2(\theta_2-\beta)+\frac{(L_1-T_1)}{2\sqrt{L_1T_1}}\sin 2(\theta_1-\beta)}{-\frac{(L_2-T_2)}{2\sqrt{L_2T_2}}\cos 2(\theta_2-\beta)-\frac{(L_1-T_1)}{2\sqrt{L_1T_1}}\cos 2(\theta_1-\beta)}\right) \tag{2.48}$$

同時由已知值 $(\theta_1\text{-}\beta,\theta_2\text{-}\beta)$ 可得偏振角 (θ_1,θ_2)，再將已知值帶入方程

式 (2.42a)、(2.42b) 和 (2.43) 並且合併計算得：

$$\frac{(L_1-T_1)\cos 2\theta_1}{L_1+T_1}=\frac{-\sin^2(45°+\alpha)+\cos^2(45°+\alpha)\tan^2\Psi}{\sin^2(45°+\alpha)+\cos^2(45°+\alpha)\tan^2\Psi}\equiv C_1'$$

$$\tan^2\Psi=\frac{1+C_1'}{1-C_1'}\tan^2(45°+\alpha) \tag{2.49a}$$

$$\frac{(L_2-T_2)\cos 2\theta_2}{L_2+T_2}=\frac{-\sin^2(-45°+\alpha)+\cos^2(-45°+\alpha)\tan^2\Psi}{\sin^2(-45°+\alpha)+\cos^2(-45°+\alpha)\tan^2\Psi}\equiv C_2'$$

$$\tan^2\Psi=\frac{1+C_2'}{1-C_2'}\tan^2(-45°+\alpha) \tag{2.49b}$$

將 (2.49a) 和 (2.49b) 相乘：

$$\tan^4\Psi = \frac{1+C_1'}{1-C_1'}\frac{1+C_2'}{1-C_2'} \qquad \Psi = \arctan\{(\frac{1+C_1'}{1-C_1'}\frac{1+C_2'}{1-C_2'})^{1/4}\} \tag{2.50}$$

$$\frac{1+C_2'}{1-C_2'}\tan^2(45^\circ+\alpha) = \frac{1+C_1'}{1-C_1'}\tan^2(-45^\circ+\alpha)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{\frac{(1+C_1')}{(1-C_1')}\frac{(1-C_2')}{(1+C_2')}}}{1+\sqrt{\frac{(1+C_1')}{(1-C_1')}\frac{(1-C_2')}{(1+C_2')}}}\right) \tag{2.51}$$

再前所得到參數 ($\Psi,\alpha,\beta,\theta_1$) 代入方程式 (2.43) 得：

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\cos\Delta\sin 2(45^\circ+\alpha)\sin 2\Psi}{\cos 2(45^\circ+\alpha)-\cos 2\Psi}$$

$$\Delta = \arccos\left(\frac{\tan 2\theta_1(\cos 2(45^\circ+\alpha)-\cos 2\Psi)}{\sin 2(45^\circ+\alpha)\sin 2\Psi}\right) \tag{2.52}$$

最後得到一組不受偏光片方位角 α 與析光片方位角 β 誤差影響的橢圓偏光參數 (Ψ,Δ)。

2.7 量測曲面時偏光片與析光片的方位角誤差

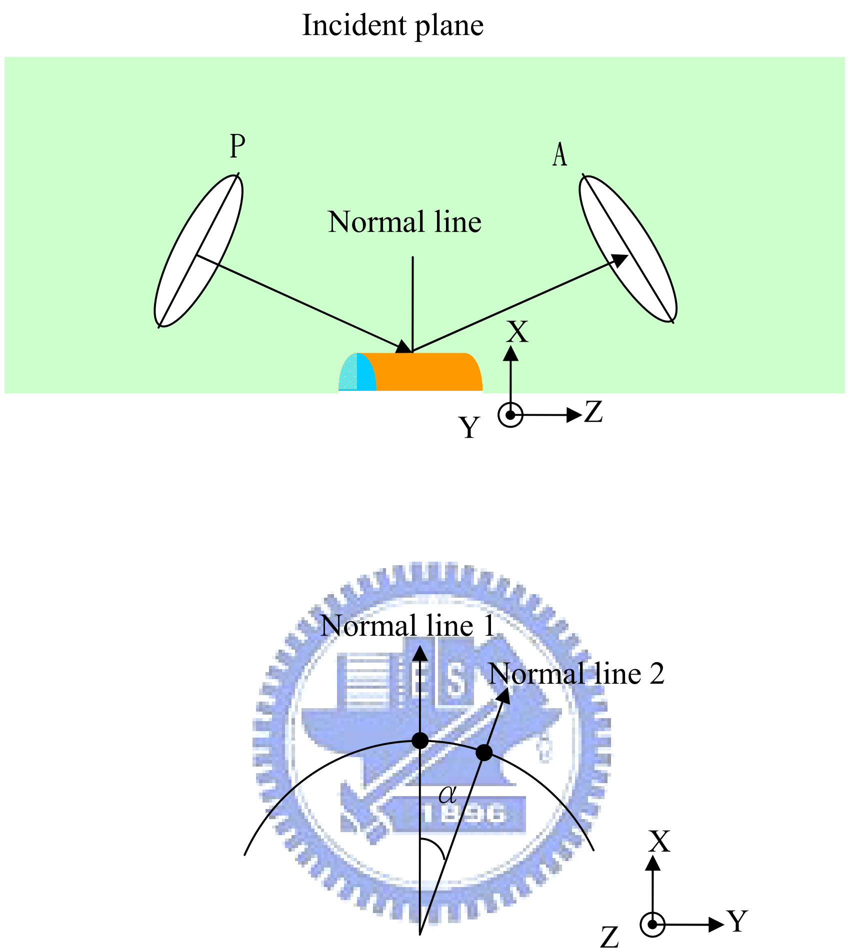

圖 2-8：入射面與方位角誤差關係

當系統利用水平參考面校正後，我們將圓柱曲面的 Z 軸方向與系統的入設面平行進行量測時，圓柱的法線 1 即曲面頂點的法線(圖 2-8) 會與系統的入射面平行，因此點的法線方向與水平面的法線同方向，所以在此點看到的偏光片與析光片方位角誤差將會是趨於 0°。當光點位置在曲面的法線 2 時，因法線 2 與法線 1 夾 α 角，所以光在此入射面看到的偏光片與析光片方位角將會與法線 1 的點不同，而這偏差大小與此點入射面相對於系統入射面的夾角一樣皆為

α 角度，我們就可接著利用雷射光點在此樣品的照射面積，與量測出的偏光片誤差角推算出此曲面樣品的曲率半徑為何，所以我們觀察偏光片的方位角偏差就等同於觀察入射面在曲面上的變化，進而了解曲面結構的關係。