

國立交通大學


機械工程學系

博士論文

以高階通量限制函數之壓力修正法

應用無結構性網格求解全速流流場

Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithms
Incorporating High-Resolution Schemes for
All-speed Flow Calculations



研究生：吳添成

指導教授：崔燕勇

中華民國九十八年一月

以高階通量限制函數之壓力修正法應用無結構性網格
求解全速流流場

**Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithms Incorporating
High-Resolution Schemes for All-speed Flow Calculations**

研究生：吳添成

Student : Tian-Cherng Wu

指導教授：崔燕勇

Advisor : Yeng-Yung Tsui

國立交通大學
機械工程學系
博士論文



Submitted to **Institute of Mechanical Engineering**
College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Doctor of Philosophy

in

Institute of Mechanical Engineering

January 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國 九十八 年 一 月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 機械工程 學系博士班 吳添成 君

所提論文：以高階通量限制函數之壓力修正法應用無結構性網格求解全速流場

Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithms
Incorporating High-Resolution Schemes for All-speed
Flow Calculations

合於博士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員：

錢景常

傅武雄

陳俊強

林石之

崔燕亭

指導教授：

系主任：

陳仁浩

教授

中華民國九十八年一月十二日

以高階通量限制函數之壓力修正法應用無結構性網格 求解全速流流場

研究生：吳添成

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系

摘 要

本文以壓力基底法發展可執行低速不可壓縮流到高速超音速可壓縮流之全速流流場計算方法，運用有限體積法、重置變數及任意邊形之無結構性網格來離散統御方程式，為了處理震波附近陡峭的梯度變化，採用全變量消去法(TVD)或正規化變數(NV)法導出之高階對流通量限制函數，通量限制子則由偵測兩個連續的梯度比來自動調整。在梯度的計算採用二階線性重置限制修正法，以強化計算過程的穩定性及解的準確度。

本文分別使用原始變數及守恆變數作為求解變數，以原始變數求解時，壓力修正方程式係由密度變量及速度變量各別與壓力變量之關係式代入連續方程式所導出，並藉由流場局部馬赫數來自動調整橢圓型式或雙曲線型式之壓力方程式。以守恆變數求解時，壓力修正方程式只有守恆速度($\rho\vec{v}$)變量與壓力變量之關係式，為了模擬超音速區域之雙曲線型式之流場特性及穩定計算過程，則使用上風型式之遲滯密度或遲滯壓力作修正。

採用一些策略來增加求解過程的穩定性，諸如(1)對流項使用一階隱式上風差分混合顯式高階差分之遲緩修正法；(2)將擴散項分解為只包含相鄰網格之隱式正交項，以及非正交部份之顯式垂直導數修正項並將其置於源項中；(3)採用不同的局部時步方式，所有控容體之時步由固定的 Courant 數來決定，即網格較小則時步較小；(4)以鬆弛法來進行線性方程的疊代。上述的方法會導致對角係數值的擴大，因此會使得係數矩陣具有對角佔優。

本文發展之計算解子允許網格為任意多邊形，計算所用之網格可以使用不同來源的網格產生方式，在本研究中亦發展一套整合式網格介面處理

程式，可以將不同方式產生之不同邊數之區塊網格予以結合，並轉換產出滿足吾人發展之計算解子所需計算域網格資料。

經由數種流場測試來驗證本文發展的方法，黏性流有(1)流經圓柱之低速流、(2)低速空穴流、(3)流經 NACA 0012 翼型外流場、(4)雙喉部噴嘴內流場等。非黏性流則包括(1)漸縮-漸擴噴嘴內流場、(2)流經下壁面圓弧之渠道流、(3)流經 NACA 0012 翼型外流場、(4)流經圓柱之高速流場、(5)流經三角柱之高速流場等。由測試結果證明，不論是原始變數或守恆變數求解方式所建構之流場解子，均能執行低速不可壓縮流到高速可壓縮流之層流流場計算，均能獲得準確的收斂解且能準確地捕捉高速流場中震波的位置及強度。



Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithms Incorporating High-Resolution Schemes for All-speed Flow Calculations

Student: Tian-Cherng Wu

Adviser: Dr. Yeng-Yung Tsui

Institute of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

Pressure-based algorithms applicable to all-speed flows, ranging from incompressible to supersonic flows, are developed in this thesis. The finite volume method is employed for discretization. The grids, which can be of arbitrary topology, are arranged in collocated manner. To tackle the abrupt change of gradient in the region of shock, either the total variation diminishing (TVD) scheme or the normalized variable (NV) scheme can be incorporated via the use of flux limiting function. These flux limiters are determined from the ratio of two consecutive gradients. To enhance solution accuracy, the gradients are calculated using a second-order linear reconstruction approach.

In this study, the mathematical formulation is based on either the primitive variables or the conservative variables. In the model using the primitive variables, a pressure-correction equation is obtained from the continuity equation by using the relations between the variations of the velocities and density and that of the pressure. The resulted equation is of mixed type, either elliptic or hyperbolic, depending on the local Mach number. The second model consider the variation of the pressure with the conserved velocities ($\rho\vec{V}$). To account for the hyperbolic character of the supersonic flows, either the density or the pressure is retarded in the upwind direction.

Several strategies are adopted to enhance the stability of the solution iteration procedure as follows: (1) The convective flux is composed of a upwind

part and an anti-diffusion part. The upwind part is treated implicitly and the other part explicitly; (2) The diffusive flux is divided into a part in the direction directed from the considering node to the neighboring node and a part normal to this direction. The former is tackled in an implicit manner while the latter is absorbed into the source term; (3) The time step for each control volume is based on the cell Courant number. With a fixed Courant number for all control volumes, the time steps are different for the control volumes. The smaller the cell volume, the smaller the time step; (4) The difference equations are under-relaxed during iteration. The above methods can enlarged the diagonal coefficients and ,thus, make the coefficient matrix more diagonal dominant.

The algorithm developed allows the control volumes of the meshes to be a polygon of arbitrary geometry. Different sources of grid generator can be adopted to generate computational meshes. An interface is developed to combine the meshes generated in different blocks using different grid generation methods and transfer the grid data into the format required by our computational code.

The methodology is validated via testing on a number of flows. For viscous flows there are (1) low-speed flows over a cylinder, (2) low-speed flows in a cavity, (3) flows over a NACA 0012 airfoil and (4) flows in a double throats. In inviscid flow, test cases include (1) flows in a convergent-divergent nozzle, (2) flows in a channel with a circular arc bump, (3) flows over a NACA 0012 airfoil, (4) high-speed flows over a cylinder, (5) high-speed flows over a triangle. Accurate results can be obtained effectively using the developed methods, regardless of the use of primitive or conservative variables, for the flows ranging from the incompressible to high-speed compressible flows. It is seen that the location and the strength of the shock waves in high-speed flow can be accurately predicted.

誌 謝

衷心感謝指導老師崔燕勇教授，在我博士學涯 7 年多來在論文研究上殷切耐心的指導與鼓勵，每每在山窮水盡疑無路時，總能適時的給予正確指引而出現柳暗花明的新轉機，讓我能走過面臨重重難題而百 Run 不得其解的恢心低潮期，在此再致上深深謝意。

感謝劉振隆博士提供 NACA 翼型網格產生程式及趙茂吉博士提供三邊形無結構性網格產生程式，以及在 CFD 領域上的討論，對我的論文研究助益斐淺。亦要感謝中山科學研究院一所(航空研究所)准予以公餘進修方式攻讀博士學位。

特別感謝父母親多年的養育之恩及永遠默默地支持我的愛妻筑萱，在我博士班的學涯中都由她獨攬家務及照料兩位聰明、活潑可愛的女兒斐蓁及冠誼，如今她們已是高二及小五了，沒有她的付出，我就無法專心地致力於研究工作，就沒有今日的我，僅以此小小的成就獻給她們。

最後感謝每一位曾在人生路上伴我成長的師長、同事、朋友、學弟伙伴們，謝謝您們！

吳添成 2009.01.14

于台中

目 錄

摘 要	i
目 錄	vi
表目錄	x
圖目錄	xi
符號說明	xxviii
第 1 章 緒 論	1
1.1. 簡介	1
1.2. 文獻回顧	6
1.3. 研究方向	17
1.4. 研究貢獻	19
1.4.1. 全速流流場解子程式發展	19
1.4.2. 整合式網格組合程式發展	19
1.4.3. 論文發表	20
1.5. 論文綱要	20
第 2 章 統御方程式	22
2.1. 積分型式統御方程式	22
2.2. 散度型式統御方程式	23
2.3. 張量型式統御方程式	24
第 3 章 數值方法	25
3.1. 傳輸方程式之離散	26
3.1.1. 時間項	26
3.1.2. 對流項	27
3.1.3. 擴散項	29
3.1.4. 源項	30
3.1.5. 線性代數方程	33
3.1.5.1. 動量方程式	34
3.1.5.2. 能量方程式	34

3.1.6. 鬆弛處理	35
3.2. 壓力、密度及速度耦合關係式	36
3.2.1. 面上質量流率的處理	36
3.2.2. 面上速度的處理	37
3.2.3. 面上密度的處理	39
3.2.4. 壓力修正線性代數方程	40
3.3. 邊界條件	45
3.4. 疊代殘值計算及收斂條件	48
3.5. 梯度計算模式	49
3.6. 求解程序	53
第 4 章 高階通量限制函數法	54
4.1. 簡介	54
4.2. 高階準確通量限制函數之對流項離散	57
4.3. 以特徵變數求對流通量之高階限制反擴散項	61
4.3.1. 雙曲線型系統方程式	62
4.3.2. 特徵變數通量限制子之計算	63
4.4. 求解程序	66
第 5 章 守恆變數求解法	68
5.1. 遲滯密度法	68
5.2. 遲滯壓力法	71
5.3. 傳輸方程式的離散	73
5.3.1. 對流項	73
5.3.2. 擴散項	74
5.3.3. 線性代數方程	75
5.4. 壓力、密度及速度耦合關係式	76
5.4.1. 面上質量流率的處理	76
5.4.2. 壓力修正線性代數方程	77
5.4.3. 邊界條件	79
5.4.4. 求解程序	79

第 6 章 網格產生.....	81
第 7 章 結果與討論.....	83
7.1. 以原始變數法求解.....	84
7.1.1. 非黏性流之驗證測試.....	84
7.1.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場.....	84
7.1.1.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場.....	89
7.1.1.3. NACA 0012 翼型外流場.....	105
7.1.2. 黏性流之驗證測試.....	107
7.1.2.1. 低速空穴流流場.....	107
7.1.2.2. 流經圓柱之低速流外流場.....	108
7.1.2.3. 雙喉部噴嘴內流場.....	110
7.1.2.4. NACA 0012 翼型外流場.....	114
7.2. 以特徵變數通量限制函數法求解.....	114
7.2.1. 非黏性流場之驗證測試.....	115
7.2.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場.....	115
7.2.1.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場.....	116
7.2.1.3. NACA 0012 翼型外流場.....	117
7.2.1.4. 流經圓柱之高速流外流場.....	118
7.2.1.5. 斜震波流場解析—流經三角柱之高速流場.....	118
7.2.2. 黏性流之驗證測試.....	120
7.2.2.1. 低速空穴流流場.....	120
7.2.2.2. 流經圓柱之低速流外流場.....	121
7.2.2.3. 雙喉部噴嘴內流場.....	121
7.2.2.4. NACA 0012 翼型外流場.....	122
7.3. 以守恆變數法求解.....	123
7.3.1. 遲滯壓力法.....	123
7.3.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場.....	123
7.3.1.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場.....	124
7.3.1.3. NACA 0012 翼型外流場.....	125
7.3.2. 以遲滯密度法求解.....	126

7.3.2.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場	126
7.3.2.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場.....	127
7.3.2.3. NACA 0012 翼型外流場	128
第 8 章 結論	130
第 9 章 參考文獻	133
附 表	150
附 圖	156
附錄 A：特徵變數限制法公式推導.....	310
附錄 B：整合式網格轉換產生程式(IGTP23D)發展及使用說明	315
附錄 C：二維翼型計算網格產生方法說明.....	331
附錄 D：正規化變數圖(NVD).....	333
附錄 E：Sweby 的 TVD 關係圖	338
附錄 F：無結構性網格之正規化變數計算法	342
簡 歷：	345



表 目 錄

	頁次
表 4-1：線性 NVD 與 TVD 限制函數關係式	150
表 4-2：非線性 NVD 與 TVD 限制函數關係式	151
表 7-1：圓柱低雷諾數外流場計算數值比較表	154
表 7-2：雙喉部噴嘴內流場計算數值比較表	155



圖目錄

圖 1-1：結構性網格示意圖	156
圖 1-2：四邊形無結構性網格示意圖	156
圖 1-3：三邊形無結構性網格示意圖	157
圖 3-1：對流項離散化之標示圖	157
圖 3-2：擴散項離散化 over-relaxed 法之標示圖	158
圖 3-3：壁面剪應力計算之示意圖	158
圖 3-4：對稱面垂直應力計算之示意圖	158
圖 3-5：雙喉部噴嘴出口流場(a)邊界條件以壁面剪應力方式處理(出口靠壁面處產生異常迴流)；(b)出口正交網格(出口仍產生小迴流)；(c)邊界條件直接解動量方程式(無迴流)	159
圖 3-6：雙喉部噴嘴出口正交網格	159
圖 3-7：邊界壓力計算之示意圖	160
圖 3-8：入口或出口邊界之參考點示意圖	160
圖 3-9：入口給定停滯邊界條件處理之示意圖	161
圖 3-10：出口給定靜壓力邊界條件處理之示意圖	161
圖 3-11：典型三角形無結構網格梯度計算之積分路徑標示圖	162
圖 4-1：對流項離散化之標示圖	162
圖 4-2：(a)流場原始變數示意圖；(b)流場正規化變數示意圖	163
圖 4-3：正規化變數圖(NVD)(a)對流界限準則(CBC)示意圖；(b)TVD 示意圖	163
圖 4-4：Sweby 的 TVD 示意圖	163
圖 4-5：SMART 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	164
圖 4-6：STOIC 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	164
圖 4-7：UMIST 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	164
圖 4-8：WACEB 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	165
圖 4-9：MUSCL 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	165

圖 4-10：GAMMA 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	165
圖 4-11：SUPERBEE 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	166
圖 4-12：MINMOD 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	166
圖 4-13：OSHER 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	166
圖 4-14：Koren 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	167
圖 4-15：CUBISTA 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	167
圖 4-16：H-QUICK 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	167
圖 4-17：CHARM 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	168
圖 4-18：Van-Leer 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	168
圖 4-19：OSPRES 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	168
圖 4-20：Hemker 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	169
圖 4-21：Van-Albada 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	169
圖 4-22：CLAM 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖	169
圖 5-1：遲滯壓力或密度處理之示意圖	170
圖 6-1：自由流流經圓柱的計算域網格	170
圖 6-2：自由流流經三角柱的計算域網格	171
圖 6-3：NACA 0012 翼型計算網格	171
圖 7-1：漸縮-漸擴噴嘴之幾何外形示意圖	172
圖 7-2：二維漸縮-漸擴噴嘴無結構性網格圖(a)200×20CV；(b)100×10 CV	172
圖 7-3：一維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CDS/UDS 混合法)	172
圖 7-4：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CDS/UDS 混合法)	173
圖 7-5：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(SMART)	173
圖 7-6：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(STOIC)	174
圖 7-7：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(UMIST)	174
圖 7-8：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(WACEB)	175
圖 7-9：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(MUSCL)	175
圖 7-10：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.25)	176
圖 7-11：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.5)	176
圖 7-12：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.75)	177

圖 7-13：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(SUPERBEE).....	177
圖 7-14：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(MINMOD)	178
圖 7-15：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(OSHER)	178
圖 7-16：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Koren).....	179
圖 7-17：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CUBISTA).....	179
圖 7-18：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(H-QUICK).....	180
圖 7-19：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CHARM).....	180
圖 7-20：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Van Leer).....	181
圖 7-21：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(OSPRE).....	181
圖 7-22：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Hemker).....	182
圖 7-23：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Van Albada).....	182
圖 7-24：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CLAM).....	183
圖 7-25：二維下壁面圓弧渠道(a)幾何外形示意圖；(b)次/穿音速流場計算網 格 90×30 CV；(C)超音速流場計算網格 240×80 CV	184
圖 7-26：Min=0.5 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (UDS/CDS 混合法).....	185
圖 7-27：Min=0.5 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE)	185
圖 7-28：Min=0.5 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada).....	186
圖 7-29：Min=0.675 穿音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈 圖(CDS/UDS 混合法).....	186
圖 7-30：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(SMART)	187
圖 7-31：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(STOIC)	187
圖 7-32：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(UMIST)	187
圖 7-33：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(WACEB).....	187
圖 7-34：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(MUSCL).....	188
圖 7-35：Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(GAMMA) (a) bm=0.25；(b) bm=0.5.....	188

圖 7-36 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(SUPERBEE)	
(a)dm=2 ; (b)dm=0.5	189
圖 7-37 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(MINMOD).....	189
圖 7-38 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(OSHER).....	189
圖 7-39 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Koren).....	189
圖 7-40 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CUBISTA).....	190
圖 7-41 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(H-QUICK).....	190
圖 7-42 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CHARM).....	190
圖 7-43 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Van Leer).....	190
圖 7-44 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(OSPRE).....	191
圖 7-45 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Hemker & Koren)	191
圖 7-46 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Van Albada).....	191
圖 7-47 : Min=0.675 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CLAM).....	191
圖 7-48 : (a)接觸(Attached)及脫離(Detached)斜震波之示意圖 ; (b)正規反射 波(Regular reflection)之示意圖 ; (c)馬赫反射波(Mach reflection)之 示意圖.....	192
圖 7-49 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (UDS/CDS 混合法).....	193
圖 7-50 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART).....	193
圖 7-51 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC).....	194
圖 7-52 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (UMIST).....	194
圖 7-53 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (WACEB).....	195
圖 7-54 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL).....	195
圖 7-55 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖	

(GAMMA , bm=0.5)	196
圖 7-56 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE)	196
圖 7-57 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)	197
圖 7-58 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)	197
圖 7-59 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Koren)	198
圖 7-60 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CUBISTA)	198
圖 7-61 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)	199
圖 7-62 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CHARM)	199
圖 7-63 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Leer)	200
圖 7-64 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRE)	200
圖 7-65 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Hemker & Koren)	201
圖 7-66 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada)	201
圖 7-67 : Min=1.65 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CLAM)	202
圖 7-68 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CDS/UDS 混合法)	202
圖 7-69 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART)	203

圖 7-70 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC).....	203
圖 7-71 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (UMIST).....	204
圖 7-72 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (WACEB)	204
圖 7-73 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL)	205
圖 7-74 : Min=1.4 馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈圖(GAMMA) (a) bm=0.25 ; (b) bm=0.5.....	206
圖 7-75 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE , dm=0.4)	206
圖 7-76 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)	207
圖 7-77 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)	207
圖 7-78 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Koren)	208
圖 7-79 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CUBISTA)	208
圖 7-80 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)	209
圖 7-81 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CHARM).....	209
圖 7-82 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Leer).....	210
圖 7-83 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRE).....	210
圖 7-84 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖	

(Hemker & Koren)	211
圖 7-85 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada).....	211
圖 7-86 : Min=1.4 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CLAM).....	212
圖 7-87 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CDS/UDS 混合法)	212
圖 7-88 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART).....	213
圖 7-89 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC).....	213
圖 7-90 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (UMIST).....	214
圖 7-91 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (WACEB)	214
圖 7-92 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL)	215
圖 7-93 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (GAMMA)	215
圖 7-94 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE)	216
圖 7-95 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)	216
圖 7-96 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)	217
圖 7-97 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Koren)	217
圖 7-98 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CUBISTA)	218

圖 7-99 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)	218
圖 7-100 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CHARM).....	219
圖 7-101 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Leer).....	219
圖 7-102 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRES).....	220
圖 7-103 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Hemker & Koren)	220
圖 7-104 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada).....	221
圖 7-105 : Min=1.6 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖 ; (b)壁面馬赫數分佈圖 (CLAM).....	221
圖 7-106 : 渠道內流場三邊形網格(a)厚度比 $t/c=10\%$ (15234 CV) ; (b)厚度比 $t/c=4\%$ (24562 CV)	222
圖 7-107 : Min=0.5 次音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖 ; (b)u 速度通量限 制子分佈圖	223
圖 7-108 : Min=0.675 穿音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖 ; (b)馬赫數等值 圖 ; (c)u 速度通量限制子分佈圖	224
圖 7-109 : Min=1.4 超音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖 ; (b)馬赫數等值圖 ; (c)u 速度通量限制子分佈圖	225
圖 7-110 : Min=1.65 超音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖 ; (b)馬赫數等值 圖 ; (c)u 速度通量限制子分佈圖	226
圖 7-111 : NACA 0012 翼型示意圖	226
圖 7-112 : NACA 0012 翼型 C-型四邊形無結構性網格	226
圖 7-113 : NACA 0012 翼型 O-型四邊形無結構性網格	227
圖 7-114 : NACA 0012 翼型 O-型四邊形與三邊形之混合網格	227
圖 7-115 : NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$, $\alpha=2^\circ$, $d_m=1.0$ (Van Albada)(a)	

馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈	227
圖 7-116：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada)	
(a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈	228
圖 7-117：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada)	
(a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈	228
圖 7-118：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.20$ ， $\alpha=0.0^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada)	
(a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈	228
圖 7-119：穴流(a)四邊形計算網格(QUSG); (b)三邊形計算網格(TUSG)	229
圖 7-120：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	229
圖 7-121：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 Van Albada 通量限制函數(a)流線圖；(b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	230
圖 7-122：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 SUPERBEE 通量限制函數(a)流線圖；(b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)	231
圖 7-123：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 Van Albada 通量限制函數(a)流線圖；(b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)	232
圖 7-124：圓柱外流場計算網格(a)混合網格(HUSG)；(b)四邊形網格(QUSG)	233
圖 7-125：圓柱邊界流場分離角定義示意圖	233
圖 7-126：圓柱低速流 $Re=20$ (Van Albada 限制函數，QUSG 網格) (a)流線圖；(b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u-速度分佈；(c)殘值收斂情形；(d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	234
圖 7-127：圓柱低速流 $Re=40$ (Van Albada 限制函數，QUSG 網格) (a)流線圖；(b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u-速度分佈；(c)殘值收斂情形；(d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	235

圖 7-128：圓柱低速流 $Re=20$ (Van Albada 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖； (b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形； (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	236
圖 7-129：圓柱低速流 $Re=40$ (Van Albada 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖； (b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形； (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	237
圖 7-130：圓柱低速流 $Re=20$ (SUPERBEE 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖； (b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形； (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	238
圖 7-131：圓柱低速流 $Re=40$ (SUPERBEE 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖； (b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形； (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖	239
圖 7-132：雙喉部噴嘴幾何外形	239
圖 7-133：雙喉部噴嘴計算域網格(315×40 CV)	240
圖 7-134：雙喉部噴嘴馬赫數等值圖(a) $Re_0=100$ ；(b) $Re_0=400$ ；(c) $Re_0=1600$	240
圖 7-135：雙喉部噴嘴 $Re_0=100$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖	241
圖 7-136：雙喉部噴嘴 $Re_0=400$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖	242
圖 7-137：雙喉部噴嘴 $Re_0=1600$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖	243
圖 7-138：雙喉部噴嘴，原始變數 SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖； (b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖	244
圖 7-139：雙喉部噴嘴，原始變數 Van Albada 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖； (b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖	245
圖 7-140：雙喉部噴嘴，原始變數限制函數法數值收斂情形(a) SUPERBEE；	

(b) Van Albada	246
圖 7-141 : NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$, 原始變數 SUPERBEE 限制函數($dm=0.2$)(a)馬赫數等值圖 ; (b)流線圖 ; (c)收斂殘值 ; (d)翼面壓力分佈比較圖	247
圖 7-142 : NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$, 原始變數 Van Albada 限制函數(a)馬赫數等值圖 ; (b)尾部流線圖 ; (c)收斂殘值 ; (d)翼面壓力分佈比較圖	247
圖 7-143 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法, 噴嘴中心軸馬赫數分佈圖	248
圖 7-144 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數法, 噴嘴中心軸馬赫數分佈圖	248
圖 7-145 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法, 噴嘴中心軸馬赫數分佈圖	249
圖 7-146 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數法, 噴嘴中心軸馬赫數分佈圖	249
圖 7-147 : C-D 噴嘴內流場, 無梯度修正之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈 ; (b)震波局部放大圖	250
圖 7-148 : C-D 噴嘴內流場, 梯度修正 1 次之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈 ; (b)震波局部放大圖	251
圖 7-149 : C-D 噴嘴內流場, 梯度修正 2 次之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈 ; (b)震波局部放大圖	252
圖 7-150 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD1 之計算殘值比較(a) $P_b=0.870P_o$; (b) $P_b=0.769P_o$; (c) $P_b=0.645P_o$	255
圖 7-151 : C-D 噴嘴內流場, 特徵變數 MD2, 計算殘值比較(a) $P_b=0.870P_o$; (b) $P_b=0.769P_o$; (c) $P_b=0.645P_o$	258
圖 7-152 : $M_{in}=0.5$ 次音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖	259
圖 7-153 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖	259
圖 7-154 : $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖	260
圖 7-155 : $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖	260

圖 7-156 : NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$, $\alpha=2^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(特徵變數法 , SUPERBEE 限制函數).....	261
圖 7-157 : NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.8$, $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(特徵變數法 , SUPERBEE 限制函數).....	261
圖 7-158 : NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$, $\alpha=1.0^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(特徵變數法 , SUPERBEE 限制函數).....	261
圖 7-159 : NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.2$, $\alpha=0.0^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(特徵變數法 , SUPERBEE 限制函數).....	262
圖 7-160 : NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$, $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(原始變數限制函數法).....	262
圖 7-161 : NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$, $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 翼表面壓力分佈(特徵變數限制函數法).....	262
圖 7-162 : NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$, $\alpha=1.25^\circ$, 原始變數及特徵變數通量限制法之翼表面壓力分佈比較圖	263
圖 7-163 : 圓柱外流場四邊形(128×8 CV)與三邊形(18556 CV)混合網格..	263
圖 7-164 : $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場 , 原始變數 UDS 法(a)馬赫數等值圖 ; (b)殘值收斂情形 ; (c)圓柱表面之壓力分佈	264
圖 7-165 : $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場 , 特徵變數 MD1, $dm=0.9$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 殘值收斂情形 ; (c)圓柱表面之壓力分佈.....	264
圖 7-166 : $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場 , 特徵變數 MD2, $dm=0.8$ (a)馬赫數等值圖 ; (b) 殘值收斂情形 ; (c)圓柱表面之壓力分佈	265
圖 7-167 : 斜震波示意圖	265
圖 7-168 : 斜震波 θ - β -M 關係圖(摘自 Wikipedia 網站).....	266
圖 7-169 : 三角柱外流場計算網格.....	266
圖 7-170 : $M_\infty=2.6$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖 ; (b)馬赫數等值圖 ; (c)流線圖.....	267
圖 7-171 : $M_\infty=2.54$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖 ; (b)馬赫數等值圖 ; (c)流線圖.....	267
圖 7-172 : $M_\infty=2.53$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖 ; (b)馬	

赫數等值圖；(c)流線圖	267
圖 7-173：M ∞ =2.52 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖	268
圖 7-174：M ∞ =2.50 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖	268
圖 7-175：M ∞ =2.40 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖	268
圖 7-176：三角柱附近流場之流線及速度向量分佈圖(M ∞ =2.53)	269
圖 7-177：穴流 Re=1000，特徵變數 MD-1, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	270
圖 7-178：穴流 Re=1000，特徵變數 MD-1, Van Albada 限制函數(a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	271
圖 7-179：穴流 Re=1000，特徵變數 MD-2, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	272
圖 7-180：穴流 Re=1000，特徵變數 MD-2, Van Albada (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)	273
圖 7-181：穴流 Re=1000，特徵變數 MD1, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)	274
圖 7-182：穴流 Re=1000，特徵變數 MD1, Van Albada (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)	275
圖 7-183：圓柱低速流 Re=20，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	276
圖 7-184：圓柱低速流 Re=40，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	276
圖 7-185：圓柱低速流 Re=20，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	

.....	277
圖 7-186：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	277
圖 7-187：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	278
圖 7-188：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	278
圖 7-189：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	279
圖 7-190：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈	279
圖 7-191：雙喉部噴嘴 $Re_0=100$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)	280
圖 7-192：雙喉部噴嘴 $Re_0=400$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)	281
圖 7-193：雙喉部噴嘴 $Re_0=1600$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)	282
圖 7-194：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖	283
圖 7-195：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖	284
圖 7-196：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法 (a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖	285
圖 7-197：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)	

對稱中心壓力分佈圖	286
圖 7-198：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1 數值收斂情形(a) SUPERBEE 限制函數；(b) Van Albada 限制函數	287
圖 7-199：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2 數值收斂情形(a) SUPERBEE 限制函數；(b) Van Albada 限制函數	288
圖 7-200：NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE 通量限制函數($dm=0.7$)(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖	289
圖 7-201：NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 通量限制函數($dm=1$)(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖	289
圖 7-202：NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$ ，特徵變數 MD1, Van Albada 通量限制函數(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖	290
圖 7-203：NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 通量限制函數(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖	290
圖 7-204：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)	291
圖 7-205：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)	291
圖 7-206：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法，加密網格)	292
圖 7-207：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯壓力法)	292
圖 7-208：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)	293
圖 7-209：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)	293
圖 7-210：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)	293
圖 7-211：渠道流場計算網格(256×64 CV, $t/c=10\%$)	294
圖 7-212： $Min=0.5$ 次音速流場壁面馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)	294
圖 7-213： $Min=0.5$ 次音速流場馬赫數等值圖(遲滯壓力法)	294
圖 7-214： $Min=0.5$ 次音速流場 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數法殘值收斂情況比較圖	295

圖 7-215 : Min=0.675 穿音速流場馬赫數等值圖(遲滯壓力法).....	295
圖 7-216:Min=0.675 穿音速流場隨 Mref 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯壓力法).....	296
圖 7-217 : Min=0.675 穿音速流場隨 Mref 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada , 遲滯壓力法).....	296
圖 7-218 : Min=0.675 穿音速流場隨 Mref 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE , 遲滯壓力法).....	297
圖 7-219:NACA 0012 次音速流場 $M_{\infty}=0.63$, $\alpha=2^{\circ}$, $dm=2.0$ (SUPERBEE) (a) 馬赫數等值圖 ; (b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)	297
圖 7-220 :NACA 0012 穿音速流場 $M_{\infty}=0.80$, $\alpha=1.25^{\circ}$, $dm=0.8$ (SUPERBEE) (a)馬赫數等值圖 ; (b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法).....	298
圖 7-221 :NACA 0012 穿音速流場 $M_{\infty}=0.85$, $\alpha=1.0^{\circ}$, $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖 ; (b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)	298
圖 7-222 :NACA 0012 超音速流場 $M_{\infty}=1.20$, $\alpha=0.0^{\circ}$, $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖 ; (b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)	298
圖 7-223 : 一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法).....	299
圖 7-224 : 一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法 , 加密網格).....	299
圖 7-225 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$, 遲滯密度法).....	300
圖 7-226 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$, 遲滯密度法).....	300
圖 7-227 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$, 遲滯密度法).....	300
圖 7-228 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$, 遲滯密度法).....	301
圖 7-229 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$, 遲滯密度法).....	301
圖 7-230 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$, 遲滯密度法).....	301
圖 7-231 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$, 遲滯密度法).....	302
圖 7-232 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$, 遲滯密度法).....	302
圖 7-233 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$, 遲滯密度法).....	302
圖 7-234 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$, 遲滯密度法).....	303
圖 7-235 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$, 遲滯密度法).....	303
圖 7-236 : 二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$, 遲滯密度法).....	303

圖 7-237：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$ ，遲滯密度法)	304
圖 7-238：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法)	304
圖 7-239：Min=0.5 次音速流場壁面馬赫數比較圖(遲滯密度法)	305
圖 7-240：Min=0.5 次音速流場馬赫數等值圖(遲滯密度法)	305
圖 7-241：Min=0.5 次音速流場 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數法殘值 收斂比較	305
圖 7-242：Min=0.675 穿音速流場隨參數 dm 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)	306
圖 7-243：Min=0.675 穿音速流場隨參數 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)	306
圖 7-244：Min=0.675 穿音速流場隨參數 M_{ref} 變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)	307
圖 7-245：Min=0.675 穿音速流場馬赫數等值圖(遲滯密度法)	307
圖 7-246：Min=0.675 穿音速流場壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)	307
圖 7-247：NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$ ， $\alpha=2^\circ$ ， $dm=2$ (SUPERBEE) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)	308
圖 7-248：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ， $dm=0.8$ (SUPERBEE) (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)	308
圖 7-249：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)	308
圖 7-250：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.20$ ， $\alpha=0.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)	309

符號說明

a	音速
A_p, A_c	線性方程矩陣之係數
B_c	方程式(3.48)中的係數
C	相鄰網格控容體心之位置
c	音速，溝槽圓突物之弦長
c_p	等壓比熱
c_v	等容比熱
\vec{d}	定義在 $\vec{\delta}_{PC}$ 方向上之向量
D	差分方程中的壓力係數
dm	密度限制函數的上限值
e, ε	單位體積之內能
\hat{e}	單位向量
f	熱通量向量
F^C	對流通量
F^D	擴散通量
h	單位質量之熱焓
k	熱傳導係數
K	音速平方的倒數($1/\gamma RT$)
M	馬赫數
\dot{m}	質量流率
m	每個控容體之邊數
\vec{n}	邊界單位法向量
p	絕對壓力
P	網格控容體心之位置
P_b	背壓

Pr	浦朗特常數
P_o	全壓(停滯點壓力)
P'	壓力修正量
Q_ϕ	線性方程矩陣右邊之係數(源項)
r	兩連續梯度比
R	通用氣體常數
S	微分方程式的源項
S_ϕ	傳輸方程式的源項
\vec{S}	面積向量(向外)
\vec{S}_f	控容體 f 面之面積向量(向外)
t	溝槽圓突物之高度(厚度)
T	絕對溫度
\mathbf{T}	Jacobian 矩陣
T_o	全溫(停滯點溫度)
u, v	在卡氏座標系統 x, y 方向之速度分量
\vec{V}	速度場
V_∞	遠場速度
w	權重因子
x, y	卡氏座標系統
$\vec{\delta}_{PC}$	從點 P 到 C 的距離向量
$\vec{\delta}_{BD}$	從點 B 到 D 的距離向量
ρ	密度
Ω	體積
μ	動黏滯係數
κ	熱傳導係數
$\dot{\mathbf{T}}$	應力張量
τ_w, τ_n	剪應力, 垂直應力
τ_{ij}	黏性應力張量(viscous stress tensor)

γ	等壓與等容比熱之比值($\gamma = c_p/c_v$)
γ_f	通量限制子(flux limiter)
Γ	擴散係數
α_ϕ	混合因子
β	入口流向與入口邊界向量之夾角，震波之偏移角
θ	壁面之偏移角
Θ	壁面或對稱面與卡氏座標 x 軸之夾角
ϕ	傳輸方程式之變數，如速度或溫度
ϕ_P, ϕ_D, ϕ_U	上游、下游及上上游格點之 ϕ 值
φ	特徵變數
$\varphi_P, \varphi_D, \varphi_U$	上游、下游及上上游格點之 φ 值
η_ϕ	鬆弛因子
ψ	通量限制函數
∇	梯度應算符號
Δ	變量
ΔV	網格體積
Δt	時間間隔



上標

o	前一次疊代之值
$*$, $**$	預測值，修正後之值
x , y , z	在卡氏座標系統 x , y , z 軸上之投影量
'	修正值
" , \perp	平行，垂直邊界

下標

$1, 2$	座標點之標示
B	所考量局部面的上游格點

C	相鄰網格格點
D	所考量局部面的下游格點
f	控容體 f 面之值
in	入口
i, j	卡氏座標系統在 x, y 軸上之單位向量
P	主要網格格點
U	所考量局部面的上上游格點
x, y	在卡氏座標系統 x, y 軸上之投影量
ϕ	任意原始變數，如速度、溫度、密度或壓力
o	停滯狀態
∞	遠場狀態

簡寫字

BICG	Bi-Conjugate Gradient
CBC	Convective Boundedness Criterion
CDS	Central Difference Scheme
CLAM	Curved-Line Advection Method
COPLA	Combination of Piecewise Linear Approximation
CPU	Computer Procedure Unit
CUBISTA	Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme
CUS	Cubic Upwind Scheme
CV	Control Volume
ENO	Essentially NonOscillatory
EULER	Exponential Upwinding or Linear Extrapolation Refinement
FCT	Flux-Corrected Transport
FVM	Finite Volume Method
HOT	High Order Term
HRS	High Resolution Scheme

HUSG	Hybrid UnStructured Grid
LODA	Local Oscillation-Damping Algorithm
LUDS	Linear Upwind Difference Scheme
LUS	Linear Upwind Scheme
MINMOD	Minimum Modulus
MUSCL	Monotonic Upwind Scheme for Conservation Law
NVD	Normalized Variable Diagram
NVSF	Normalized Variable and Space Formulation
PRIME	PRessure Implicit Momentum Explicit
PISO	Pressure Implicit with Split Operator
QUSG	Quadrilateral UnStructured Grid
SHARP	Simple High-Accuracy Resolution Program
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SIMPLEC	SIMPLE Consistent
SIMPLEM	SIMPLE-Modified
SIMPLER	SIMPLE-Revision
SIMPLEST	SIMPLE-ShorTened
SOUCUP	Second-Order Upwind-Central differencing-first-order Upwind
SMART	Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport
STOIC	Second and Third Order Interpolation for Convection
TUSG	Triangular UnStructured Grid
TVD	Total Variation Diminishing
UDS	Upwind Difference Scheme
UMIST	Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport
QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics
WACEB	Weighted-Average Coefficient Ensuring Boundedness

第 1 章 緒 論

1.1. 簡介

由於近年來電腦硬體科技的快速發展，快速且高記憶體容量之資料處理能力，使得計算流體力學的發展有長足的進步，由簡單的幾何形狀進步到複雜外形之流場模擬計算，進而包含邊界層紊流之模擬計算，並針對不同之雷諾數與馬赫數之流場發展適用之數值計算方法，致力於提昇流場計算準確度及效率的研究均有顯著的成效。

在實際應用上除了馬赫數小於 0.3 之低速流場採用不可壓縮流解子(incompressible flow solver)外，餘均必須使用可壓縮流解子(compressible flow solver)，然而在可壓縮流場中往往都包含了次音速(subsonic)、穿音速(transonic)及超音速(supersonic)等單獨或交互存在之複雜流場，由於次音速之統御方程為橢圓型式(elliptical type)與超音速之雙曲線型式(hyperbolic type)流場特性不同，故可壓縮流解子必須具備自動偵測流場特性進而調整統御方程型式之能力，另對於震波之模擬除要獲得精確的位置及強度外，亦要避免在梯度變化劇烈、陡峭之區域或震波前後之數值振盪產生，方能獲得準確的流場解析。

大部份發展用於求解可壓縮流場的數值計算方法大致可分為兩類：**密度基底法**(density based)及**壓力基底法**(pressure based)，不同基底法的使用均有其特定的馬赫速範圍，前者常用於解高馬赫速流場；後者則常用於解低馬赫速流場，然而若要發展全速流(all speeds flow)的求解方法，使其有能力完全處理不同的雷諾數或馬赫速流場範圍問題之模擬計算，則必須瞭解不同基底算則設計架構上之困難點，尤其是壓力在可壓縮流場中所扮演的角色。**密度基底法**傳統上都使用非穩態形式之 Navier-Stokes 或 Euler 方程式，這些方法皆使用密度作為主要變數，以連續方程式作為求解密度之傳輸方程式，其壓力則藉由狀態方程式來求得，通常應用在解高速可壓縮流場

[1-2]，然此方法用於解不可壓縮流或低馬赫數流場時，因為密度的變量非常小或幾近於常數，則其與速度之耦合關聯性會變得相當薄弱，因而連續方程式無法成為求解密度之傳輸方程式且會抑制速度場，因此必須設計一種機制能透過壓力場將連續方程與動量方程耦合起來，解決的方法為虛構狀態方程式或在連續方程式中加入人工可壓縮因子[3-8]；**壓力修正法**是將由動量方程式導出的壓力變量與速度變量的關係式代入連續方程式中，推導得到壓力修正方程式進而解出壓力場，其密度則藉由狀態方程式來求得，對於高速可壓縮流場而言，其速度的變量遠小於速度值本身，而密度的變化則非常大，此時壓力的變量主要來自於密度變量，故必須將密度變量轉變為壓力變量代入壓力修正方程式中，方能求解可壓縮流場。

由以上的討論可以知道，任何數值方法要有能力同時處理不可壓縮流及可壓縮流流場不同特性之統御方程型式，壓力則扮演著相當重要的角色，其影響速度與密度來滿足連續方程式，總之，經由使用所謂的虛擬或人工可壓縮因子之技巧，已有多種密度基底法可模擬全速流流場之發展被提出[3-4,8]，這些方法遭遇到的困難為如何避免艱難的矩陣求解效率而降低了收斂率，為了克服這些問題及確保在整個全速流場範圍內均能收斂，則致力於預先處理艱難矩陣的求解方法研究[4,8-12]。在另一研究領域許多學者則進行壓力基底法延伸至高馬赫數可壓縮流之研究，由於壓力基底法之壓力修正方程式本質上為橢圓型式之特性，故不適用於超音速或穿音速流場之雙曲線型式或混合系統之特性，如果沒有修正而企圖直接應用將造成計算過程不穩定或甚至發散現象，已有不少學者採用壓力基底法進行可壓縮流計算，配合使用交錯網格(staggered grid)法[13-14]、重置變數(collocated variables)法[15-20]或多重網格法等已有不同程度的貢獻與成就。壓力法不論在低速不可壓縮流或高速可壓縮流皆保有速度與壓力很強的耦合關聯性，經過最近數十年的發展已被廣泛用於工業界設計與分析[21]，對使用者而言，在面對複雜流場分析之工具需求為簡便(friendness)與功能強大(robustness)，壓力基底法已受到關注並被期待致力於計算方法的持續發展，

俾利成為更有用的工程設計分析工具。

壓力法在流場計算之數值方法建構方式，依求解變數型式可分為三類，一為以**原始變數**(primitive variables)求解穩態(steady state)或非穩態(unsteady state)之統御方程式，為 Issa 及 Lockwood 等人 [22]所提出，其延用求解不可壓縮流之方式，以連續方程式推導壓力修正方程式並作部份修訂，將密度的變量轉換為壓力變量，在求面上質量通量(mass flux)時係將密度及速度分別處理，此為壓力法解可壓縮流場之標準方式。一般對於面上密度之計算均採用一階上風差分法來近似，雖較穩定但其對震波之解析較模糊，為了得到較佳之震波解析，亦有人使用中央差分近似法[15-17]，但易造成計算過程不穩定甚至發散；而 Karki 等人[14]及 Demirdzic 等人[16]使用中央差分混合一階上風差分近似法，其混合因子則介於 0 與 1 之間，主要的目的無非是要兼顧增加解的精確度及疊代過程的穩定性；Moukalled 與 Darwish[23]則使用與對流變數相同之 SMART 高階限制函數差分法來處理面上密度。第二種為以**守恆變數**(conserved variables)求解非穩態之統御方程式，其求解方式與不可壓縮流類似，唯在求解動量方程式時，使用遲滯密度或遲滯壓力作為人工消散項代入係數中，藉以穩定此計算方法，McGuir 與 Page[24]及 Lien 等人[15]分別引用 Wornom 等人[25]提出之”遲滯壓力”及”遲滯密度”概念，結合 SIMPLE 壓力修正法，成功地應用於可壓縮流計算。第三種為**特徵變數**(characteristic variables)，基本上仍是以原始變數求解穩態或非穩態之統御方程式，只是運用 ENO 或 TVD 的技巧使用特徵變數並結合 Riemann 解子(solver)來計算面上的通量[26-27,48]，後續衍生性的研究在文獻報告中並不多。

在處理包含對流(convection)與擴散(diffusion)性質的流場模擬計算問題時，對於擴散項而言，採用二階準確之中央差分法幾乎是無異議的選擇，然而對於對流項而言，則有各種不同的處理策略，而其最重要的考量因素就是要能夠具有界限性(bounded)、精確性及穩定性的模擬方法。若從物理上而言，當對流項使用界限性差分法離散時，則其近似值絕不會超越局部

解的極大或極小值，即可抑制非物理性或過與不及的數值振盪現象。以一般流體問題純量性質的傳輸方程式為例，如多相流比率、紊流動能、質量比率等，其界限性的重要性就非常清楚，如果在 $k-\epsilon$ 紊流模式計算時產生負的紊流消散值，則會導致負的紊流黏滯係數，通常會造成災害性的影響。

自從發展一階上風差分法用來離散對流通量之後，由於不能滿足應用上的需求，故研究學者開始進行高階準確法之發展，由於「精確度」恰與「穩定及界限性」相互矛盾及抗衡，可謂魚與熊掌不可兼得，必須在兩者之間作適當地折衷，然而為了要成功地解決精確度的問題，則被迫必須面臨數值穩定及物理界限性之困難議題。為了克服這些源自於準確度、穩定性及界限性等三方面需求相互矛盾的問題，為了維持相當的準確度且抑制振盪現象，不同的高階界限差分法組合程序被提出，最熱門的兩支家族為全變量消滅(TVD)法[28-34]及正規化變數(NV)法 [35-39]，這些方法均使用已知之局部剖面解及不同的限制函數來調整對流項離散之差分法，其所使用之限制函數型式係由一維解的局部分佈剖面分析所推導得到，通常參照到的網格除了網格面相鄰之網格外，尚需一更上游之網格。許多研究者持續致力於發展可準確模擬對流佔優流場之高階準確解析法，此類之方法大概可分為通量混合法(flux blending method)及組合式通量限制函數法(composite flux limiter method)兩種類型，這兩種方法均企圖能在不影響準確度之情況下，獲得抑制數值振盪之流場預測解。

通量限制函數之發展從 1985 年由 Van Leer [40] 首先提出，係以守恆變數作為通量限制函數計算之關係變數，即通量限制函數為正規化守恆變數之函數。後來亦有學者[18,37-38,41-46]以原始變數或特徵變數作為通量限制函數計算之關係變數，發展高階單調之對流項差分方法，期獲得高精確且無數值振盪之模擬計算法，大部份均以密度基底法求解。使用特徵變數作為通量限制函數計算之關係變數在壓力基底法則不多見，例如 Kobayashi 與 Pereira [26] 以特徵變數內插方式代入 Roe 的 Riemann 近似解子用以計算對流通量，其依循類似 SIMPLE 之預測-修正方式來處理動量方程與連續

方程之耦合；而在 Issa 與 Javareshkian [27]的研究中，對流通量則使用與 Yee 等人[47]相同的方式並使用具 TVD 之 MINMOD 通量限制函數。Shyy 與 Thakur [48]則明確指出 TVD 差分法通常不完全適用於壓力基底法，其原因有二：首先因為壓力基底法為動量方程與連續方程(壓力修正方程)分別求解之順序疊代(sequential-iteration)求解法，其動量方程式中之壓力梯度係以顯項來處理並將其置於源項中，不像密度基底法是將變數之梯度視為通量(flux vector)的一部份，耦合連續方程、動量方程與能量方程同時求解統御方程；第二個原因為缺乏作為 TVD 限制函數法通量限制子(flux limiter)計算基礎的流場局部特徵值之定義。雖然如此，仍有不少學者嘗試以壓力基底法建構各種對流差分方法與機制，期能獲的類似密度基底法 TVD 之精確解。

使用壓力基底法在建構限制函數時，一般均採用守恆或原始變數來計算梯度比，此與適用於可壓縮流密度基底法所使用以特徵變數為基礎之限制函數則有所不同。由於穿過震波時只有 Riemann 變數之變量最小，相較之下守恆或原始變數之變量則非常大，經由 Mulder 與 Van Leer [49]及 Lin 與 Chieng [39]密度基底法的數值分析證明，至少在一維流場時使用 Riemann 變數確實可以獲得最高之精確度，Shyy 與 Thakur [48]嘗試使用特徵變數基礎之限制函數，以標準之 SIMPLE 壓力修正法，應用結構性非正交網格、重置變數之有限容積法求解可壓縮流，已可獲得不錯的結果，唯尚無發現用於無結構性網格之研究文獻。

流場計算需要將整個流場離散為細小的網格，而網格產生的種類大致可分為兩類：結構性網格(structured grid)與無結構性網格(unstructured grid) (參考圖 1-1、1-2、1-3)，各有其優劣點，結構性網格具有優先的方向及自動指標等方便引用的特性；可是遇到比較複雜的幾何外形時，則會遭遇許多限制及困難；早期大部分之流場解子均為使用結構性網格之有限體積法(FVM)，最近已有許多研究發展可應用於無結構性網格之有限體積法，近年來，無結構性網格產生技巧已被成功地應用在處理複雜幾何外形的流場計算，由於其能用任意形狀的多邊形來產生複雜幾何外形之網格，而且可以很容易地作局部加密，故其較結構性網格具有更大的彈性，但其在計算上

較複雜且需要較大的記憶空間及計算速度，然此問題則因電腦的快速發展而獲得解決。

本文主要的目標為發展一套全速流流場解子，以有限體積法(FVM)、應用重置變數(collocated variables)之任意邊形無結構性網格(unstructured grid)，引用可預測二維複雜幾何外形不可壓縮流的 SIMPLE 壓力修正方法[50]，加以延伸至可壓縮流，以原始變數及守恆變數兩種型式求解統御方程式並企圖嘗試以各種 TVD 或正規化變數(NV)之對流項高階準確差分法進行數值方法研究。期能獲得具有高階準確、無數值振盪、穩定及收斂性良好之全速流(all-speed flows)流場計算之數值方法與程式。

1.2. 文獻回顧

1974 年 Khosla 與 Rubin[51]提出一種空間二階準確中央差分近似法之修改型，以一階隱項差分法配合顯項之二階差分法來離散空間一階導數微分項，當收斂時則自然回復至二階準確中央差分法，此種方式可確保係數矩陣為對角佔優(diagonal dominate)，為無條件穩定法，後來的學者均引用此處理方式應用於有限容積法一階導數對流通量項之離散，並將這種處理方式稱之為遲緩修正法(deferred correction method)。

1979 年 Hafez 等人[52]以求解守恆形式的全勢能(potential)方程式為基礎，藉由稍微修改在超音速區域的密度來產生人工黏滯項(artificial viscosity)，使用上風差分法處理修正密度，再以中央差分法將網格中心之修正密度內插至網格面上，可解析流體流經圓柱及 NACA 0012 翼型之二維穿音速流場。

1983 年 Rhie 等人[53]提出控容面上速度計算之內插方式，將速度變量以壓力梯度變量之型式導入壓力修正方程式中。

1984 年 Sweby[54]提出在一階上風差分法加上一個反擴散限制通量之策略，推導 TVD 及二階準確 TVD 特性之單調界限準則及具有二階準確 TVD

界限性質之通用限制函數(limited function)，獲得二階高階準確無數值振盪之顯式純量微分法，同時對不同的限制函數，包括 Van Leer、Roe、Chakravarthy 與 Osher 等人所提出之限制函數，進行理論推導與模擬計算之比較，其使用通量限制函數 ψ 為 Y 軸；局部守恆梯度比(gradient ratio) r 為 X 軸之二維圖形表示方式，可清楚顯示通量限制函數(flux limiter function)是否具有 TVD 及二階準確 TVD 特性，即為後來常被人引用之 Sweby 的「TVD 關係圖」或「 Φ -限制函數圖」。經由不同學者所提出之限制函數模擬計算結果比較分析，Roe 的限制函數在線性情況下有優異的表現，Van Leer 的限制函數表現與 Roe 相當並具有更好的可靠度，由此說明限制函數表現的優略與流場系統的守恆律有關。

1984 年 Wornom[55]使用兩點式中央差分法來離散通量導數項，並應用遲滯密度(retarded density)的概念在超音速點加入消散項，以一維漸縮-漸擴噴嘴(C-D nozzle)測試此方法可執行次音速及超音速流之計算且有良好的效率，其計算結果雖無數值振盪，但對於震波強度的捕捉則顯不足。

1986 年 Rhie[13]以壓力法使用多重網格求解 Navier-Stokes，可用於解低速不可壓縮流及高速可壓縮流之全速流(all speeds flow)。

1986 年 Wornom 與 Hafez[25]使用遲滯密度(retarded density)或遲滯壓力(retarded pressure)作為人工消散項，配合原解次音速流場之兩點法(two-point method)求解有震波之穿音速流場，其使用之方式藉由遲滯密度代入連續方程式中以改變通量係數；而當使用遲滯壓力作為人工消散項時，於動量方程式中以遲滯壓力取代真實壓力，只有在利用狀態方程計算密度時才使用真實壓力。經由比較兩種方式計算結果，發現在使用遲滯壓力可得到不錯的結果，而在使用遲滯密度時則有輕微抹平現象。若同時使此兩種人工消散項，則在震波處會產生較嚴重的抹平現象。

1988 年 Gaskell 與 Lau[56]以正規化變數配合單調之限制條件推導出對流界限準則(CBC)，將其顯示在 NVD 圖上，可清楚檢視各種差分法是否具有界限性，並進而在 CBC 區域內提出以 QUICK 為架構配合曲率補償之三

階準確 SMART 對流項差分法，其具有界限性且在梯度變化劇烈處有不錯的表現，

1988 年 Leonard[37]以用於穩態對流方程有不錯特色，然而在劇烈階梯形剖面對流模擬時，則會產生非物理性的超估及數值振盪，尤其是在非線性流場此現象會導致嚴重的問題之三階準確之 QUICK 上風差分法為基礎，提出將網格面上對流變數使用正規化變數方式化為其相鄰網格及更上游網格正規化變數之函數，並發展出單調的解析準則而不會犧牲解的精確度。藉由具界限之 SHARP 非線性正規化變數關係式應用於包含有薄剪力層或混合層、震波及其他如前所述現象之流場模擬，SHARP 為顯性守恆控容通量之差分公式，可用於一至三維之橢圓、拋物線、雙曲線或混合之流場區域，經由斜階梯對流函數之測試並與一階上風法、二/三階非界限上風法比較，有不錯的結果。

1988 年 Majumdar[57]探討鬆弛參數在非交錯網格法的流場計算中之動量內插方法，在計算面上速度時可用相鄰網格中心點之速度值(無壓差效應時)以線性內插之方式，求出之值再與該面相鄰網格中心點之壓差效應結合，來近似面上速度，結果都能得到穩定的唯一值。

1988 年 Peric 等人[58]以有限容積之數值方法來作交錯網格與重置網格在二維不可壓縮流流場計算之比較，計算結果在收斂率、鬆弛參數之依附性、計算上的能力與準確性等方面，一般而言兩者均相當。而在某些情況重置網格法收斂較快，如果要考慮作非正交或多區塊網格時，重置網格較具優越性。對於大部份的不可壓縮流場計算，建議最佳的速度鬆弛因子為 0.8，壓力鬆弛因子為 0.3。

1988 年 Zhu 與 Leschziner [59]提出 QUICK 及一階上風混合之局部振盪緩和法(LODA)求解不可壓縮穩態流場，混合因子以類似 Gosman 與 Lai 的方式決定，由流場依動態調整。

1989 年 Barth 與 Jespersen[60]使用無結構性網格之多維單調線性重建程

序及 Roe 的通量函數，發展格心(cell-center)及格點(mesh-vertex)兩種高階上風有限體積差分法求解 Euler 流場，任何高階單調準確法皆以一階上風為基礎，再加上消散項，當在極值產生時，為了保持單調性避免振盪產生，就必須建立一套機制由高階上風回歸到一階上風法。其使用二階上風法並在二次項中加入一個限制因子來重建網格面上之近似值，再計算通量，限制因子之值介於 0 與 1 之間，此限制因子的計算方式為先行使用格點共用之網格中心面積平均值求得該格點上之近似值，利用流動方向及梯度比求得該格點之限制因子，再由局部網格所共構格點之限制因子中找出極小值，而此值即作為網格面上二階上風重建法之限制因子，以確保網格面上之近似值具界限性，其值介於局部網格與相鄰網格中心之極值範圍內。梯度之計算策略採用網格格點所包含之所有相鄰網格中心連線之積分路徑。

1989 年 Karki 等人[14]使用結構性之交錯網格，以壓力法求解任意外形之黏性全速流流場，為了要處理不可壓縮流與可壓縮流，在壓力與密度相依關係中，以壓力作為優先之主要變數，壓力場由可壓縮形式之 SIMPLER 算則中解出，壓力解出後再求出密度。

1990 年 Peraire 等人[61]，指出結構性網格雖然具有高效率的計算方法，但對於複雜幾何外形，則必須作座標曲線轉換及採用多區塊網格產生法，須花費相當多的時間精力去處理；而無結構性網格則可以很快地直接在物理空間產生複雜幾何外形之計算網格，並具有容易作局部加密及網格調適等功能，非常有彈性，由於需要額外儲存網格之點、線、面及其相鄰網格之關係，故計算程序較複雜且需要較大的記憶體及 CPU 時間。非結構性網格之離散方程式均使用積分方式之有限體積法或有限元素法。

1990 年 Mcguirk 及 Page [24]在解準一維非穩態的歐拉(Euler)方程式時，使用不可壓縮流之 SIMPLE 壓力修正算則，將遲滯壓力同時用於動量方程式及壓力修正方程式，以獲得雙曲線型式之統御方程式特性，遲滯壓力轉換為真實壓力之值係由局部馬赫數決定，計算結果對於震波的捕捉及計算時間上都有不錯的表現。另亦執行紊流軸對稱衝擊噴流之模擬計算，

結果可以精確地捕捉正震波。

1991 年 Leonard [38] 提出一種新的界限對流差分法 ULTIMATE 來模擬暫態對流傳輸方程，其以顯性守恆的控制體積差分公式為基礎，加入一種時間平均通用正規化限制函數，其目標是要獲得一個健全的方法，能夠得到精確單調的階梯型函數解而不會產生變形。首先以標準的測試問題，即以方波、正弦函數波及半橢圓形波等形函數，使用暫態純對流傳輸方程各別對一階上風差分法、二階中央差分法、二階上風差分法、Fromm 差分法及三階以上之差分法等 11 種不同線性差分方法進行測試，模擬結果除了一階上風差分法因具有強的擴散性而可獲得單調無振盪的解外，其餘方法均會產生數值振盪現象。另亦以相同問題對 MINMOD、Chakravarthy 與 Osher、MUSCL、Van Leer 的 CLAM、Roe 的 SUPERBEE、Super-C、Hyper-C 等 7 種非線性“震波捕捉”或“TVD”之差分方法進行測試，除了 Super-C 外，餘均滿足 Sweby 所提出的 TVD 準則，模擬結果就整體性能而言，MUSCL 有不錯的表現，Super-C、Hyper-C 對方形波之表現最佳，正弦波則以 Super-C 及 SUPERBEE 之表現最佳，半橢圓形波則以 MUSCL 及 CLAM 之表現最佳。Leonard 提出 ULTIMATE 之策略主要是將面上空間正規化變數差分法改以時間平均正規化變數差分法，經由測試結果顯示，對於高階之數值振盪問題有不錯的改善，可應用於任何高階差分法。

1991 年 Lin 與 Chieng [39] 使用密度基底法，以 Leonard 之正規化變數 (NV) 概念並以特徵變數為基底，發展一新的通量限制函數，使對流項面上之近似差分法可具有三階之準確度，其發展之通量限制函數為上風基底 MUSCL 型式之改良型，延伸自 SMART 與 SHARP 差分法之控容體通量公式概念。以守恆變數 (conserved variables)、原始變數 (primitive variables) 及特徵變數 (characteristic variables) 等三種不同基底之通量限制函數，驗證一維震波管、二維斜震波階梯渠道 (3 及 10 馬赫，震波角 59 度) 及 NACA 0012 翼型 (0.8 馬赫，攻角 0 度) 等情況，結果採用特徵變數基底之通量限制函數較其他兩種方式有較小的數值振盪現象，且其精確度與收斂性均優於二/三階

之 TVD 法及 Van Leer 的通量分離法。

1991 年 Zhu [62] 提出高階準確具界限性之 HELP 混合線性與拋物線差分近似法，使用有限體積壓力修正法求解穩態不可壓縮流，HELP 差分近似法係一階上風近似法結合在對流界限準則控制下之二階上風權重近似法，執行兩種線性及一種非線性流場之計算驗證，結果顯示此方法具有捕捉陡峭梯度的能力且能維持解的界限性。

1991 年 Zhu 與 Rodi [63] 提出二階上風、中央差分及一階上風混合法，由對流通量限制準則來調整差分方法，使用結構性網格解穴流及一維純量對流方程。

1993 年 Venkatakrisnan [64] 指出使用上風差分法與無結構性網格並結合限制函數，在求解穩態流場時會遭遇到收斂的問題，其以 Barth 與 Jespersen 之方法為基礎配合 Spekreijse 所提出之單調條件，以結構性網格有限體積法推導得出網格面上二階上風近似值，第二項中一維梯度計算採用中央差分、上風差分或下風差分等方式，會得到不同的限制函數，但都能滿足單調特性之條件。另以 Van Albada 之限制函數為基礎加以修改後再以同樣方式修改 Barth 與 Jespersen 之限制函數，俾可用於無結構性網格，可以改善收斂的問題。

1993 年 Lien 及 Leschziner [15] 為首先將 TVD 的技術應用於壓力基底法，以解不可壓縮流之 SIMPLE 壓力修正算則，使用非正交網格、重置變數之有限體積法，以守恆變數 (conserved variables) 運用流線指向並由馬赫數函數控制之遲滯密度法，延伸求解不可壓縮流之壓力修正法至可壓縮流，經由遲滯密度修訂動量方程式中之面上速度，如此處理則產生消散之機制，使不可壓縮流之方法在穿音速及超音速時具有穩定的功能。所有的通量變數均使用上風基底之 QUICK 或具 TVD 性質之 MUSCL 差分法，後者運用於所有的傳輸方程式，包括紊流 $k-\epsilon$ 模型之流場性質，經由非黏性流及紊流之穿音速流場模擬驗證，包括二維漸縮-漸擴噴嘴之正震波流場、二維溝槽下壁面圓弧突出物之斜震波與斜震波交互作用流場，以及流經溝槽下

壁面突出物末端產生震波誘生之邊界層流離等流場，證明此方法可執行全速流計算，第三種情況之計算結果與實驗值相近。

1993 年 Demirdzic 等人[16]，應用結構性、重置網格之有限容積法，所有變數皆置於控體之中心，密度是藉由狀態方程式與壓力作鏈結，進而修改壓力與速度偶合關係式，所以在可壓縮流中密度之變動就隱含在壓力項，引入壓力修正法之 SIMPLE 算則中，可用於解全速流。

1993 年 Parameswaran 等人[65]使用 SIMPLE 修改型之壓力法解可壓縮流，可以將震波捕捉在一個網格內。

1994 年 Lien 及 Leschzier [17]提出一種使用重置變數、有限體積、結構性非正交網格之標準 SIMPLE 壓力修正法，對流項採用二階上風、QUICK 及三階上風之權重法，由梯度來決定權重因子，類似 MUSCL 再加入一人工擴散項(artificial diffusion)，藉由遲滯密度將計算方法從不可壓縮流延伸至穿音速可壓縮流流場，遲滯密度的機制則由流場馬赫數偵測函數來控制，同時亦加入紊流模式包括低雷諾數之 $k-\varepsilon$ 渦流-黏滯變量(eddy-viscosity variant)及雷諾應力傳輸式(Reynolds-stress-transport closure)等，此方法必須使用守恆變數，可用於次音速及穿音速流場計算。

1994 年 Darwish 與 Moukalled [18]以 Leonard 所提出使用於均勻結構性網格發展與分析由高階準確近似差分法結合具有穩定與界限性之一階上風差分法組合而成高精確對流-擴散方法之正規化變數公式(NVF)架構，發展一正規化變數與空間之公式(NVSF)，推導 MINMOD (或 SOUCUP)、OSHER、MUSCL、CLAM、SMART、STOIC 等正規化變數與空間關係式，可用於非均勻結構性網格之模擬計算。1997 年[66]以 NVSF 架構修改扭曲中央差分法(Skew Central Difference)推導出具界限性之關係式並進行 4 種不同統御方程流場之驗證分析，證明具有解的界限性且比 SMART 有較高的精確度。[67]同時再運用此方法進行模擬計算在方形槽內偏心的圓形物自然對流現象。[68]使用 NVSF 架構，以對流界限準則之界限範圍及流線基底座標，重新推導幾種常用的高階準確法(HR)獲得一系列非常高階準確度(VHR)

之家族差分方法，包括 MINMOD、OSHER、MUSCL、CLAM、SMART、STOIC、EXPONENTIAL 及 SUPER-C 等，並進行 4 種不同統御方程流場之驗證分析，證明其具有比 HR 差分法有較佳之精確度，尤其當高扭曲網格之流場時效果更明顯。1998 年[69]調整扭曲非常高階準確度(VHR)之差分方法結合高階準確度(HR)之差分方法，得出另一種調適非常高階準確度(AVHR)之家族差分方法，主要以流線基底座標系統來進行正規化變數與空間位置，藉由一簡單的調適切換準則(即面上的梯度絕對值)去調整面上差分式之扭曲權重因子，經由驗證結果顯示，對於計算時間的節省有較佳的表現。

1994 年 Lien 及 Leschzier [70]提出一種穩態純量傳輸方程之單調(monotonic)對流項近似法，使用重置守恆變數、有限容積、結構性網格、遲滯密度之壓力修正法求解複雜紊流流場，所使用之 UMIST 單調近似法係以 QUICK 內插法為基礎，附加一連續且緊密(compact)的正規化變數(NV)限制函數，以確保內插法之單調性(monotonicity)，主要目的是要獲得精確及完全界限、加強穩定，在二方程(two-equation)紊流對流近似之模型方法下之流場解子，可用於次音速及超音速流場模擬。

1995 年 Chen 等人[21]討論與說明壓力基底法由不可壓縮流延伸至求解全速流之可壓縮流一致的表示公式，並建議採用共軛梯度法作為矩陣解子有助於加速無結構性網格之收斂性。強調壓力基底法已成為工業界各種領域設計與分析之 CFD 工具並被期待持續地發展成更有用的工程設計分析工具。

1996 年 Issa 等人[27]指出其為第一位將 TVD 技術應用特徵變數為基底之限制函數，以壓力基底之有限體積法求解非黏性之次及超音速流場。1998 年[71]其以原始變數標準之 SIMPLE 壓力修正法，應用結構性非正交網格、重置變數之有限容積法，對流項使用以特徵變數為基底之限制函數 TVD 差分法求解可壓縮流，包括二維下壁面圓弧渠道非黏性流之次、穿與超音速流場及渦輪葉片轉子黏性流場等計算驗證，結果與使用相同限制函數 TVD 之密度基底法相當，不像使用原始變數為基底之限制函數會產生數

值振盪現象。為了確保疊代過程的穩定及收斂，採用之壓力鬆弛因子為 0.1~0.2，其他變數則使用 0.2~0.5 之鬆弛因子。

1996 年 Kobayashi 與 Pereira[26]提出特徵變數基底之壓力修正法，用於全速流(all speeds)之計算，其將 ENO 技巧之架構結合壓力修正法，用特徵變數的重建(reconstruction)方式及類似 Riemann 解子來計算面上的通量，稱為 SIMPLENO 法。面上密度則採用一階上風差分法。用結構性網格以低速穴流、雙喉部噴嘴及高速渠道流場來測試具有全速流之計算能力

1998 年 Edward 等人[3]使用時間導數之預置矩陣，延伸對流上風分離法(AUSM)家族中之低擴散通量分離法，由高速流向下延伸至適用低速流，可解全速流。

1999 年 Jasak 等人[72]提出局部化 NVD 準則的修改，新型式的正規化平滑監控因子不需要網格面之”更上游網格”值，使一般標準的(結構性網格)界限性差分法可應用於任意多邊形之無結構性網格，基於上述之策略，另提出一種具有簡潔地計算分子架構，新的界限性中央差分法，即所謂的 GAMMA 差分法，其在 CBC 準則區域內以使用中央差分法為主，在 CDS 與 UDS 之間以一二次平滑曲線作聯結並用一常數 β_m 決定轉折點與 $\gamma(=\tilde{\phi}_c/\beta_m)$ 混合因子作差分法之切換，考慮數值方法的精確度及穩定性， β_m 之值通常依計算模擬問題選用介於 0.1 至 0.5 之間之值，並以穩態純對流方程，使用階梯形、正弦函數形及半橢圓形入口邊界條件作測試，與其他常用的差分法如 SFCD、Van Leer TVD、SUPERBEE、SOUCUP 及 SMART 等的計算結果比較，GAMMA 差分法與 SMART 法相當且優於其他方法。

2000 年 Lien [73]再運用 SIMPLE 壓力修正算則與遲滯密度提出全速流計算方法，其將在結構性網格之遲滯密度計算方法，以無結構性網格之有限容積法方式改寫，並執行不可壓縮流及可壓縮流之驗證，所有變數均採重置安排，對於棋盤式之振盪問題則使用類似 Rhie 及 Chow [53]的壓力權重內插方式克服，為了提昇計算之準確度，對流項使用二階上風差分法並配合調適加密網格。另在計算遲滯密度時使用之參數 M_{ref} 及 k 分別為 0.7 及

0.55。

2000 年 Moukalled 及 Darwish [74]將隔離式 SIMPLE 壓力修正求解法及其衍生系列方法，使用重置變數法預測全速流場之架構，重新作一整理並用統一的、簡潔的及易懂的標示，包括出現在 CFD 相關文獻中之 SIMPLE、SIMPLER、SIMPLEST、SIMPLEM、SIMPLEC、SIMPLEX、PRIME 及 PISO 等家族式方法，並對各種方法作差異性之比較說明，有助於 CFD 後續學者之參考應用。

2000 年 Song 等人[44]提出 WACEB 對流項高階界限差分法，以正規化變數方式在 TVD 之限制條件下建構具界限性之方法，求解不可壓縮流。

2000 年 Jawahar 與 Kamath [75] 提出新的梯度重建技巧及多維之限制子運用於密度基底算則之無結構性網格上風法，其提高解析度之策略為增加梯度計算之網格數，證明其方法即使在嚴重扭曲的三邊形網格階能得到穩態的收斂解。

2001 年 Moukalled 及 Darwish [23]採用有限容積壓力修正法，使用正規化變數及空間幾何內插公式(NVSF)並使用 SMART 差分法來限制對流通量及計算面上密度之高解析法，發展可增強捕捉震波特性的計算方法。證明提高面上密度近似之準確度，確可增加解的解析度。其中進行收縮-擴散二維噴嘴之計算驗證，雖使用具界限性之對流項 SMART 差分法，結果在震波後方仍有數值振盪現象產生，其稱此為所有高階準確法之特性。

2003 年 Hou 等人[76]提出新的對流界限準則(CBC)，不只確保界限性且具有高階準確性。其指出 Gaskell 與 Lau 所提出正規化變數之對流界限準則(GL-CBC)只確保界限性，而不考量精確度，Hou 等人則以 GL-CBC 為分析基礎，在 GL-CBC 之區域內再劃分出至少為二階以上準確的區域，稱此新的 CBC 為滿足界限性及高階準確性之充分及必要條件，並使用目前各學者提出之 10 種高階準確組合式界限差分法來驗證，包括 COPLA、EULER、CLAM、MINMOD、MUSCL、OSHER、SECBC、SMART、STOIC 及 WACEB

等，結果均滿足新的 CBC。

2003 年 Alves 等人[45]提出 CUBISTA 高階差分法用於不可壓縮流對流項之處理，為一具有收斂與通用界限之內插法，其準確度相當於在平滑流場使用均勻網格具有三階準確之著名的 SMART 差分法，藉由將 TVD 之限制代入隱式之時序法中用於求穩態流場，具有改善疊代法之收斂特性，特別是對於非穩態流場之問題。其引用 Moukalled 及 Darwish [23]所使用之正規化變數及空間幾何內插公式化(NVSF)方式，在對流界限準則區域內局部修改差分路徑，在接近下風差分法線段處修訂連線之斜率並採用對稱性限制函數，經由純對流型函數、牛頓流體流經背階管道流場及彈性黏流流經收縮管等模擬驗證並與 MINMOD、GAMMA、CLAM、WACEB、SMART 等方法作比較，雖然準確度相當，但卻具有良好的收斂性。

2003 年 Choi 等人[77]提出以格點為中心由相鄰網格中心所建構之控容體(node-centered)來離散統御方程式法，運用無結構性網格之壓力基底法用於預測全速流流場，面上速度則使用類似 Rhie 及 Chow 的壓力權重內插方式以克服棋盤式之振盪問題，可減少三維的記憶體及增加計算效率。

2004 年 Moukalled 與 Darwish [122]提出運用多重網格(multigrid)及質量守恆為基礎之壓力修正方程式，由單相流延伸到多相流之全速流計算方法，並比較 PISO、PRIME、SIMPLE、SIMPLEC、SIMPLEX 及 SIMPLEST 等方法之 CPU 效率。

2005 年 Luo 等人[4]修改 Harten、Lax 與 Van Leer 之關聯重建(contactrestoration)法延伸結合時間導數預置矩陣求解全速流流場(密度基底法)，以預置系統之特徵值為基礎，為了減少在低馬赫數時過度的數值擴散而修改速度之符號，以無結構性網格進行低速二維穴流、背階管流、穿音速 RAE2822 翼型及三維非黏性圓球及黏性流流經汽車等測試，證明具有準確、功能強及有效的全速流計算能力。

1.3. 研究方向

對於對流特性佔優之穩態流場，使用界限的高階準確法並結合有效的對流項遲緩修正法求解技術，已成為目前 CFD 預測方法之趨勢，大致可分為研究更高階的方法及延伸至無結構性網格等兩個方向，此種求解方式會面臨一個“修剪(clipping)”的問題，研究者必須要有所認知的現實問題是，通量限制函數雖然能具有保持陡峭的單調剖面解之優點，但相對地亦會削減局部的極值，過度壓制的限制函數並不利於這方面的發展，而是要發展一個具有簡單自動的鑑別機制，使得在接近真實極值時能放鬆限制函數之限制條件，且在其他產生過或不及的非物理數值振盪處又能維持限制功能。

本文研究方向為延伸解不可壓縮流具良好成效之壓力修正法，應用有限體積法、重置變數之無結構性網格求解可壓縮流。非穩態統御方程式的離散分別使用原始變數及守恆變數兩種不同的求解方式，配合 TVD 或正規化變數(NV)通量限制函數之高階解析法求解，在以原始變數求解時，通量限制子之決定機制則採用原始變數及特徵變數兩種型式，一為**原始變數限制函數法**，即直接以原始變數計算局部網格面上的梯度比(*gradient ratio*)或局部網格之正規化變數，再代入 TVD 或 NV 限制函數求得通量限制子(*flux limiter*)，進而求得該變數之高階反擴散量(*anti-diffusion term*)；另一種方式則為**特徵變數限制函數法**，首先將局部網格及其相鄰網格之格心變數，利用轉換矩陣法或直接展開法轉換為特徵變數，接著計算局部網格面上的梯度比或格心之正規化變數，再代入 TVD 或 NV 限制函數求得特徵變數通量限制子，進而再利用反置矩陣轉換回原始變數之高階反擴散量；而在以守恆變數求解時，則直接使用守恆變數來計算通量限制子。對於面上擴散項之近似均採用二階準確之中央差分法；而對流通量變數之近似則採用上風基底 TVD 或 NV 通量限制之單調界限性高階解析法，引用 Rubin 與 Khosla [51]的遲緩修正概念，以一階準確之隱項上風差分為擴散項，強化計算過程之穩定性，並配合具界限模式之通量限制函數之高階混合補償反擴散項，除了可確保程式的穩定性外，亦可準確捕捉震波之位置與強度及消除震波附近之數值震盪。另以 Rhie 與 Chow [53]及 Majumdar [57]的動量權重法來計算面上之速度及質量流率，以避免重置變數網格所產生之棋盤式振盪

解，穩定及增強程式的收斂性。對於梯度之計算模式則使用不同的策略進行測試研究，目標為提高準確度及避免扭曲網格或陡峭梯度變化所導致之低估或超估情況，有助於維持計算程式之穩定度及準確度。

在以原始變數求解或特徵變數通量限制函數求解時，計算方法中係由馬赫數控制因子，來自動處理次音速時橢圓型式及超音速時雙曲線型式之壓力修正方程式，因此可有效處理次音速、穿音速、超音速複雜流場之問題，配合由原始變數或特徵變數所求得之對流通量限制函數法來抑制高階準確法所衍生之非物理性之數值振盪。而在以守恆變數求解時，計算方法中使用「遲滯密度」或「遲滯壓力」之人工消散黏滯法，由局部的馬赫數控制函數來自動處理次音速時橢圓型式及超音速時雙曲線型式之流場特性，同樣地仍可應用守恆變數所求得之對流通量限制函數來抑制高階準確法所衍生之非物理性之數值振盪。而通量限制函數中所使用正規化變數或 TVD 梯度比之計算方式，因無法使用 Leonard [37] 以結構性網格推導之原始定義計算法，改採與 Jasak [78] 相同之無結構性網格計算法。

經由上述三種求解方式去分別探討各種不同適用於結構性網格的通量限制函數運用於無結構性網格之現象，將以一/二維漸縮-漸擴噴嘴及二維下壁面圓弧突出物之渠道流場進行總共 18 種方法之初步測試，篩選較佳的方法後再進行低速不可壓縮流至高速可壓縮流之計算，黏性流包括低速空穴流場、流經圓柱之低速外流場、流經 NACA 0012 翼型次/穿音速外流場、雙喉部噴嘴內流場；非黏性流則包括流經 NACA 0012 翼型次/穿/超音速外流場、流經圓柱之高馬赫數($M=6$)外流場、流經三角柱之超音速斜震波外流場等測試驗證，期能獲得具有準確、穩定、無數值振盪及收斂性良好之全速流場解子(all-speeds flow solver)。

計算所需之前處理即網格產生，必須配合計算解子的需求輸入必要的網格資料，不同的解子其所需要的網格資料與格式均不同，而目前雖已有許多商用工程軟體或個人發展的網格產生程式都可以很容易地產生簡單幾何外形的無結構性網格的基本資料元素，即格點座標及組成每一網格之點編號，但要將各區塊組合成一完整計算域並產生所有之網格幾何關係，諸如每一網格之體積、相鄰網格編號、面編號；每一格面的相鄰網格編號、

點編號與面向量、中央差分權重因子；邊界之編號、型式(入口、出口、壁面、對稱面或遠場)...等，實為一棘手且耗時的問題。為了解決無結構性網格產生的問題，必須發展一套可以適用二維與三維通用之網格整合程式，方可快速地將各簡單區塊的基本網格元素組合成單一計算域網格並產生所有的複雜網格輸入檔資料，簡化流場計算的程序、提昇效率與降低成本。

1.4. 研究貢獻

1.4.1. 全速流場解子程式發展

經由本文之研究成果，共完成了三種不同型式之層流(laminar)流場解子程式發展，包括：(1).原始變數求解法(具有 CDS/UDS 混合法、18 種型式高階通量限制函數法、二階上風法、二階上風限制函數法等之對流項差分選項)；(2).特徵變數求解對流項之高階限制反擴散通量法(具有 18 種型式高階通量限制函數法選項)；(3).守恆變數求解之遲滯密度法及遲滯壓力法(具有 CDS/UDS 混合法、18 種高階通量限制函數法等之對流項差分選項)。

在流場解子程式中均具有處理黏性流與非黏性流的全速流計算能力，可用於任意邊數所構成之無結構性網格複雜流場模擬，透過參數設定檔可選擇各種對流項差分法及梯度計算方式、邊界條件的設定(遠場馬赫數、全壓、全溫、背壓、流體入射攻角等)、流體性質的設定(雷諾數、CFL)及各種鬆弛因子、混合因子、收斂條件...等參數之設定等。經由各式流場測試驗證結果顯示，本文發展之流場解子成功地將源自求解不可壓縮流之壓力修正法延伸至可壓縮流的計算，並證明具有從低速至高速全速流流場自動調適統御方程式之計算能力，對於次音速、穿音速流及超音速且具有複雜震波交匯之內流場及外流場計算亦均有不錯之成效，同時對於震波位置與強度的捕捉能力亦相當精準。未來仍需再進一步加入紊流模式並延伸至三維流場解子，俾利應用於各種飛行器外流場及引擎內流場相關議題之研究。

1.4.2. 整合式網格組合程式發展

整合式網格組合程式(IGTP23D)則具有二維及三維之任意邊數無結構

性網格整合能力，只需簡單的格點座標與網格點關係，可將各種方式或商用軟體產生之多區塊無結構性網格整合為一完整計算域網格，產出符合流場計算解子所需之複雜網格輸入資料與格式，有效地簡化複雜計算域網格產生時間及成本，並已廣泛應用於本研究家族之二/三維不可壓縮流及可壓縮流流場計算網格產生。

1.4.3. 論文發表

發表 3 篇學術論文[20,46,79]。

1.5. 論文綱要

在第二章以積分型式、散度型式及張量型式表示黏性層流之 Navior-Stokes 統御方程式。

第三章中說明 SIMPLE 壓力修正法如何求解可壓縮流之數值方法，對於傳輸方程式中之時間項、對流項、擴散項、源項等離散成線性代數方程，則作詳細地推導與說明。壓力、密度及速度偶合關係式中面上質量流率、面上速度、面上密度的處理為本文之重點，流場之統御方程特性如何藉由馬赫數來自動調整，則在本章中說明之。另對於梯度計算模式及疊代殘值計算與收斂條件等亦納入本章中，最後則說明邊界條件之處理及求解程序。

第四章則以第三章的數值方法離散統御方程式之基本架構為基礎，說明對流項之差分方式如何引用高階通量限制函數差分法，修改傳輸方程離散之線性代數方程式及壓力修正方程式中源項之計算式。另以特徵變數來計算對流項之高階反擴散限制通量，說明原始變數與特徵變數間相互轉換的公式推導、特徵變數與限制子的計算方式、以及如何求得高階對流項反擴散限制通量，進而修改傳輸方程及壓力修正方程式中源項之計算式。並綜整文獻中之各種常用之線性與非線性高階限制函數。

第五章則說明守恆變數求解時如何藉由遲滯密度法或遲滯壓力法，應用 SIMPLE 算則及高階對流通量限制函數法，延伸至可壓縮流計算之數值方法。

第六章則簡要說明整合式網格產生之方式及三種混合多邊形網格之整合結果範例，詳細的程式流程則描述於附錄 B 中。

第七章以漸縮-漸擴噴嘴及下壁面圓弧突出物之渠道等內流場，以及流經 NACA 0012 翼型、流經圓柱之超音速流、流經三角柱之超音速流等外流場進行各種方法之非黏性流場計算驗證；以低速空穴流與雙喉部噴嘴內流場，以及流經圓柱之低速流與流經 NACA 0012 翼型等外流場進行黏性流場計算驗證。對於各種測試條件、結果作詳細地說明與討論。

在第八章則就本文研究成果作綜合性的重要結論與未來的研究建議。



第 2 章 統御方程式

使用非穩態(unsteady)、黏性(viscous)、層流(laminar)之 Navier-Stokes 方程式，應用重置變數無結構性網格及有限體積法，求解低馬赫數到高馬赫數之全速(all speeds)可壓縮流(compressible flow)流場，統御方程式包括質量守恆、動量守恆、能量守恆式及狀態方程式，表示方式大致可分為三種型態，即積分型式、散度型式及張量型式，三者雖表示方式不同但本質上是相同的，分別表示如后。本文採用積分型式統御方程式來進行離散公式之推導。

2.1. 積分型式統御方程式

積分型式之質量守恆、動量守恆、能量守恆式及狀態方程式，表示如下：

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\Omega + \int_S (\rho \vec{V} \vec{V} - \dot{\mathbf{T}}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} d\Omega + \int_S (\rho \vec{V} h - \mathbf{f}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla p + (\dot{\mathbf{T}} + p\mathbf{I}) : \nabla \vec{V}] d\Omega, \quad (2.3)$$

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

式中積分下標 s 表示面積分；積分下標 Ω 表示體積分； ρ 為密度； t 為時間； p 為靜壓力； \mathbf{I} 為單位張量； \vec{V} 為流體速度； h 為單位質量之熱焓(enthalpy)； $\dot{\mathbf{T}}$ 為應力張量(stress tensor)； T 為絕對溫度； R 為通用氣體常數。

對牛頓流體(Newtonian fluid)而言，應力張量 $\dot{\mathbf{T}}$ 可表為：

$$\dot{\mathbf{T}} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V}\right)\mathbf{I} + \mu[\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T] \quad (2.5)$$

其中 μ 為動黏滯係數(dynamic viscosity)。

從動量守恆方程式(2.2)，可由其與向量基底 \mathbf{I}_i 之內積推導得到卡氏座標速度各分量 V_i 之動量守恆方程式如下：

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \bar{V}_i}{\partial t} d\Omega + \int_S (\rho \bar{V} \bar{V}_i - \mathbf{t}_i) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = - \int_S p \mathbf{i}_i \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (2.6)$$

其中把壓力項從應力張量中獨立出來，俾利後續方程式之離散：

$$\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{i}_i \Rightarrow \mathbf{t}_i = \mu \nabla \bar{V}_i + \mu (\nabla \bar{V})^T \cdot \mathbf{i}_i - \left(\frac{2}{3}\right) \mu \nabla \cdot \bar{V} \mathbf{i}_i \quad (2.7)$$

根據 Fourier's 定理，熱通量向量 \mathbf{f} 定義如下：

$$\mathbf{f} = \kappa \nabla T \quad (2.8)$$

式中 k 為熱導係數，假設流體理想氣體，且其等壓及等容比熱 c_p 及 c_v 為常數，其比值為 γ ，在此假設下焓可寫為：

$$h = c_p T \quad (2.9)$$

所以式(2.3)則可改寫為以溫度 T 為變數之方程式。

2.2. 散度型式統御方程式

散度型式之質量守恆、動量守恆、能量守恆式，表示如下：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V} \otimes \bar{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{V}) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V} h) = \bar{V} \cdot \nabla p + k \nabla^2 T + \Phi \quad (2.12a)$$

或

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V} e) = k \nabla^2 T - p \nabla \cdot \bar{V} + \Phi \quad (2.12b)$$

其中 ρ 為密度； t 為時間； p 為靜壓力； e 為單位質量內能(internal energy)； h 為單位質量之熱焓(enthalpy)； T 為絕對溫度。內能與溫度的關係為 $e = c_v T$ ，

其中 c_v 為等容比熱；熱焓與溫度的關係為 $h=c_p T$ ； μ 與 k 分別為動黏滯係數及熱導係數；消散函數(dissipation function) Φ 可表示如下：

$$\Phi = \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{V})^2 \quad (2.13)$$

2.3. 張量型式統御方程式

張量型式(tensor notation)之質量、動量及能量守恆式，表示為：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j h) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.16a)$$

或

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j e) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.16b)$$

其中 k 熱導係數及 τ_{ij} 為黏性應力張量(viscous stress tensor)，可寫為：

$$\tau_{ij} = 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.17)$$

第 3 章 數值方法

壓力基底法之求解方式可分為半直接求解法(semidirect approach)及隔離求解法(segregated approach)等兩種不同的方法，半直接求解法由 Caretto 等人[80]所提出，其將動量與連續方程之離散式鏈結在一起成為一個系統同時求解，這種方式保證速度與壓力之間能緊密地關聯，雖有助於收斂率，然而由於需要大量的記憶體空間去儲存所有格點之各種係數，特別是多維及多項流的情形更顯龐大，儲存空間的問題必須藉由細分計算域方式解決，但在不同之次計算域間又遭遇到關聯性的問題且必須在各次計算域間疊代，導致收斂率的下降。SIMPLE 為 Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations 之字首字母縮寫，其為 Patankar 與 Spalding [50]所提出之的壓力修正法，即屬最常採用之隔離求解法，其各微分方程係各自離散求解，他的優點除了較半直接法需要的記憶體空間更小外，並且擁有更彈性簡易的方式去處理額外的偏微分方程(如紊流動能、紊流消散及濃度方程等)。此種方法的速度項係直接由對應的動量方程式解出，而沒有附屬的壓力統御方程式，藉由壓力修正方程式的推導巧妙地將離散化的動量方程及連續方程結合在一起，若為可壓縮流則必須藉由狀態方程式將密度變量轉變為壓力變量。當壓力(或壓力變量)場被求出後，速度及密度場隨即被更新以滿足連續方程式，因此在可壓縮流之計算中，壓力扮演雙重角色，各別透過狀態方程式及動量方程式，同時作用在密度與速度上，使連續方程式得以守恆。在低速流時，壓力梯度主要係由動量守恆式之速度所導致，密度的影響顯得非常小，因此可以視為不可壓縮流場；在超音速流時，速度的變量相較於速度本身則非常小，然而壓力的變化受到密度的影響則顯的非常大，事實上可視為壓力經由狀態方程式作用在密度上，使連續方程式得以守恆。

本文運用 SIMPLE 壓力修正法發展流場解子，利用數值方法改寫第二章之統御方程式，本節首先說明以原始變數法求解 Navier-Stokes 統御方程

之傳輸方程式的離散方法；壓力修正方程式中壓力、密度及速度偶合關係式；梯度的計算模式；疊代殘值的計算方式與收斂條件；邊界條件的處理及求解程序等分述如后。

3.1. 傳輸方程式之離散

以原始變數(u, v, w)求解之有限體積積分傳輸方程式可簡單表示如下：

$$\int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{transient} d\Omega + \int_S \underbrace{(\rho \vec{V} \phi)}_{Convection} - \underbrace{\Gamma_{\phi} \nabla \phi}_{Diffusion} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \underbrace{q_{\phi}}_{Source} d\Omega \quad (3.1)$$

其中積分下標 S 代表面積分；積分下標 Ω 代表體積分； ϕ 分別代表原始變數 (u, v, w) 或溫度 (T)；而擴散係數 Γ_{ϕ} 則分別代表動黏滯係數 (μ) 或熱傳導係數除於定壓比熱 (κ/c_p)。然在式 (2.1) 之連續方程式沒有擴散項及源項，它將用來推導壓力修正方程式；而其他沒有出現在式 (3.1) 左邊之項均納入源項中，以下分別就時間項、對流項、擴散項及源項等說明其差分之數值方法。

3.1.1. 時間項

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\Omega = \frac{(\rho \phi)_P - (\rho \phi)_P^o}{\Delta t} \Delta \Omega = \left(\frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \rho_P \right) \phi_P - \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} (\rho \phi)_P^o \quad (3.2)$$

其中上標 "o" 表示前一次疊代之值，故劃底線之部份以顯項來處理並置於源項中。

計算域必須被離散為網狀小區塊以進行流場分析，如果流場幾何形狀存在有窄小或狹長的區域，在流場的特性上變化將非常劇烈，故在網格的佈置上就必須特別加密處理，而此細密之網格將限制計算時步，大大地增加計算的時間。每一個網格的 CFL 常數 (Courant Friedrichs Lewy) 會影響計算的穩定性及收斂性問題，因此在每一步計算周期採用每個網格各別不同的時步，而不時均同的時步之概念開始被使用，這種技巧通常被稱為「局部時步 (local time step) 技術」，局部時步法允許用於不均勻網格的計算域，以避免受限於狹小網格而影響到整體之時步，採用了隨網格大小而調適的

時步，即最小的基本時步若設定為 Δt ，較大的網格的時步可能會有 2 或更多倍的基本時步 Δt ，因此對於到達靜態解具有加速收斂及增加穩定性之功效。

本文亦引用此種概念，對於一維之隱式雙曲線型方程式計算穩定性而言，CFL 常數當小於或等於 1 時為數值穩定性的準則指標，然而用於增加穩態流場計算之虛擬時間項時，其定義如下：

$$CFL = C \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.3)$$

其中 c 表示音速、 Δt 為數值時步、 Δx 為空間間隔。

在本文中二維計算域的 CFL 常數則以式(3.3)為基礎，近似轉換為採用已知之局部網格資料，定義為：

$$CFL = \frac{2}{nf \cdot \Delta\Omega \cdot \rho \cdot M} \sum_f |\dot{m}_f| \Delta t \quad (3.4)$$

其中 nf 表示每個網格的邊或面數目、 $\Delta\Omega$ 為網格面積、 M 為馬赫數、 \dot{m}_f 為通過面 f 的質量流率。

在實際執行程式計算時只要給定 CFL (約取 1 至 1000 之階數)，即可由上式計算每一個網格的局部時間間隔(local time step)，網格愈密則時間間隔愈小，如此可以增加疊代過程的穩定性。

3.1.2. 對流項

對任意變數 ϕ 之對流通量 F^C (Convection Flux) 可以表示為：

$$F^C = \int_S \rho \phi \vec{V} \cdot d\vec{S} \approx \sum_f (\rho \phi \vec{V})_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (3.5)$$

其中 \dot{m}_f 表示質量流率； ϕ_f 表示在控容面 f 中點之平均值，而此平均值要在確保重置網格法之穩定原則下，由相鄰兩個控容體中心之值 (ϕ_p 、 ϕ_c) 內插來近似(參考圖 3-1 之標註)。

對穩態流場而言，如何快速解出統御方程之離散線性代數方程的解是一個需要加以探討的議題，一種方式是加入非穩態時間之差分項並進行時序疊代，直到求得穩態的收斂解，對於具有界限之高階差分法而言，如果使用顯項時間之差分法，通常當所使用之 Courant 數小於 1 時，在時步上就會得到穩定的限制。另一種方式是使用穩態統御方程之離散線性代數方程求解，例如，當線性代數方程系統使用中央差分法來近似對流通量時，常會使疊代解子無法收斂，這是因為線性代數方程系統之係數矩陣不是對角佔優(diagonal dominate)矩陣，為了使疊代過程穩定且可獲得高階計算通量之簡單而有效率的近似法，Khosla 及 Rubin [51]提出遲緩修正法(deferred correction)概念，其為使用前一次疊代值之顯項高階近似法及由僅使用最近相鄰網格之低階隱項近似法之組合，如下所示：

$$F_f = F_f^L + (F_f^H - F_f^L)^* \quad (3.6)$$

其中 F_f^L 表示低階近似法，通常為一階上風法，而 F_f^H 表示高階近似法，"*"表示括弧內之值為前一次疊代求出之值，此顯項近似值正常來說均較隱項為小，故不會影響收斂性。這種方式的處理除了簡化了係數矩陣的複雜性，而且會得到一組對角佔優之係數矩陣，由於一階上風法使得在線性代數方程之主要係數恆大於 0 且佔優，使疊代過程較為穩定，括弧內之前一次疊代值則置於源項中，當收斂時，則低階近似項會相互抵消，僅存高階近似項，故最後即獲得高階之計算通量。

上式括弧內之值常會乘上一個介於 0 與 1 之間的常數因子，稱為兩種近似方法之混合因子；若乘上一個通量限制函數，則為單調高階近似法，此通量限制函數之值由格面上下游之梯度比的函數決定，函數之型式則有不同之組合，將於下一章中再詳細說明。幾乎所有使用控制容積之壓力修正法在計算面上通量時均運用遲緩修正法求解，本文亦使用此法求解統御方程。

由於本文使用無結構性網格，只有在相鄰網格面的兩個網格值可以被

直接使用，一般在對流項面上變數之近似值均採用一階準確之上風差分(UDS)、二階準確之中央差分(CDS)或兩者之混合差分法，本文為了保持高階準確及避免過大的數值振盪，係採用中央差分法及一階上風差分之混合遲緩修正法，可表示為：

$$\phi_f = \phi_f^{UDS} + \alpha_\phi (\phi_f^{CDS} - \phi_f^{UDS}) \quad (3.7)$$

$$F_f^C = F_f^{UDS} + \alpha_\phi (F_f^{CDS} - F_f^{UDS}) \quad (3.8)$$

其中

$$F_f^{UDS} = \phi_P \max(\dot{m}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.9)$$

$$F_f^{CDS} = \dot{m}_f [w_f \phi_C + (1 - w_f) \phi_P] \quad (3.10)$$

$$w_f = \frac{\delta_{Pf}}{\delta_{Pf} + \delta_{fC}} \quad (3.11)$$

其中 f 表示任一面之中點，P 代表網格中心；C 代表該面相鄰網格之中心(參考圖 3-1 之標註)，劃底線之部份以顯項來處理，即使用前一次疊代之值，將它放入源項中；另 α_ϕ 代表混合因子(blending factor)，其值介於 0 與 1 之間 (0=UDS；1=CDS)； w_f 為權重因子。

式(3.8)經整理後可得面上之對流通量表示如下：

$$F_f^C = \phi_P \max(\dot{m}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{m}_f, 0) + \frac{\alpha_\phi \{ \dot{m}_f [w_f \phi_C + (1 - w_f) \phi_P] - [\phi_P \max(\dot{m}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{m}_f, 0)] \}}{\quad} \quad (3.12)$$

其中劃底線之部份則以顯項來處理，將其置於源項中。

3.1.3. 擴散項

對任意變數 ϕ 之擴散通量 F^D (Diffusion Flux) 可以表示為：

$$F^D = -\int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \cdot d\vec{S} \approx \sum_f -(\Gamma_\phi \nabla \phi)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (3.13)$$

使用 over-relaxed 方法[81]來增加計算過程的穩定性， \vec{S}_f 為面向量； $\vec{\delta}_{PC}$ 為控容體中心格點 P 及其相鄰網格中心格點 C 之距離向量，方向為由 P 點到 C 點(參考圖 3-2 之標註)，令 $\vec{S}_f = \vec{d} + \vec{k}$ 代入式(3.13)可得：

$$\begin{aligned} F_f^D &= \Gamma_{\phi,f} \nabla \phi_f \cdot \vec{S}_f \\ &= \Gamma_{\phi,f} \nabla \phi_f \cdot \vec{d} + \Gamma_{\phi,f} \nabla \phi_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 \vec{d} 之定義如下：

$$\vec{d} \equiv \frac{|\vec{S}_f|}{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_d} \vec{e}_d = \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \vec{\delta}_{PC} \quad (3.15)$$

將式(3.15)代入式(3.14)的右邊第一項，得擴散項之離散式如下：

$$F_f^D = \frac{\Gamma_{\phi,f} |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (\phi_C - \phi_P) + \frac{\Gamma_{\phi,f} \nabla \phi_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \quad (3.16)$$

其中劃底線之部份為垂直導數項(cross-derivative term)以顯項來處理置於源項中，此項在正交網格時為零。

3.1.4. 源項

源項之體積分則直接由控容體中心 P 之比源值(specific source value)乘於控容體(CV)之體積：

$$Q_\phi^q = \int_\Omega q_\phi d\Omega \approx (q_\phi)_P \Delta\Omega \quad (3.17)$$

另外在動量方程式中之壓力項處理方式如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{1}{\Delta\Omega} \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_\Omega (\nabla^i p) d\Omega \\ &= \frac{1}{\Delta\Omega} \int_S p (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \cong \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_f p_f (\vec{e}_i \cdot \vec{S}_f) \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中下標或下標 i 代表在 \vec{e} 方向之微分。

另在源項中之顯式擴散項 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ 及 $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ 其離散方式與式(3.18)類似。

散度之處理：散度之物理意義為單位體積之體積變化率，以控容體(CV)而言，其離散方式表示如下：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V} &= \frac{1}{\Delta\Omega} \int_{\Delta\Omega} \nabla \cdot \vec{V} d\Omega = \frac{1}{\Delta\Omega} \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \cong \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f \\ &= \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_f \frac{\rho_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f}{\rho_f} = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_f \frac{\dot{m}_f}{\rho_f} = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_f \dot{q}_f\end{aligned}\quad (3.19)$$

壁面剪應力之處理 (參考圖 3-3 之標註)：壁面之法向量 \vec{n} 、垂直壁面速度 $\Delta\vec{V}^\perp$ 及平行壁面速度 $\Delta\vec{V}''$ 表示如下：

$$\vec{n} = -\frac{\vec{S}_f}{|\vec{S}_f|} = -\sin\Theta \hat{i} + \cos\Theta \hat{j} \quad (3.20a)$$

$$\Delta\vec{V}^\perp = (\Delta\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.20b)$$

$$\Delta\vec{V}'' = \Delta\vec{V} - \Delta\vec{V}^\perp \quad (3.20c)$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_p - \vec{V}_w \quad (3.20d)$$



其中 \vec{V}_p 為與壁面相鄰網格中心之速度； \vec{V}_w 則為壁面之速度。剪應力 $\vec{\tau}_w$ 及以卡氏坐標表示之剪力 $f_{s,x}$ 、 $f_{s,y}$ 可寫為：

$$\vec{\tau}_w = \frac{\mu}{\vec{\delta}_{pw} \cdot \vec{n}} \Delta\vec{V}'' \quad (3.21a)$$

$$f_{s,x} = \vec{\tau}_w \cdot \vec{S}_f \cos\Theta \quad (3.21b)$$

$$f_{s,y} = \vec{\tau}_w \cdot \vec{S}_f \sin\Theta \quad (3.21c)$$

對稱面之正向應力之處理(參考圖 3-4 之標註)：壁面之法向量 \vec{n} 、垂直壁面速度 $\Delta\vec{V}^\perp$ 及平行壁面速度 $\Delta\vec{V}''$ 同上，正向應力 $\vec{\tau}_n$ 及以卡氏坐標表示之正向力 $f_{n,x}$ 、 $f_{n,y}$ 可寫為：

$$\bar{\tau}_n = \frac{2\mu}{\bar{\delta}_{pw} \cdot \bar{n}} \Delta \bar{V}^\perp \quad (3.22a)$$

$$f_{n,x} = \bar{\tau}_n \left| \bar{S}_f \right| \sin \Theta \quad (3.22b)$$

$$f_{n,y} = -\bar{\tau}_n \left| \bar{S}_f \right| \cos \Theta \quad (3.22c)$$

依式(3.20a)來處理壁面之剪應力及式(3.21a)對稱面之正向應力，於雙喉部噴嘴黏性流場計算時，因為在該處之網格非正交網格且相當扁斜，會在出口靠近上壁面處產生異常之渦流區(如圖 3-5a 所示)，即使將出口刻意佈置成正交網格(如圖 3-6 所示)，仍會產生迴流只是範圍較小(如圖 3-5b 所示)。為了解決此問題則修改動量方程式中黏滯項邊界條件處理的方式，改以直接計算動量方程式中之擴散項之垂直導數項(cross derivative term)及黏性應力項(viscous stress)，而壁面速度梯度則使用相鄰邊界網格之值，在處理入口、出口、對稱面或壁面邊界時，先計算隱式項係數 A_C ，如下所示(參考圖 3-7 之標註)：

$$A_{C,b} = \frac{\Gamma_{\phi,b} \left| \bar{S}_b \right|^2}{\bar{\delta}_{pb} \cdot \bar{S}_b} + \max(-\dot{m}_b, 0) \quad (3.23)$$

其中 $\bar{\delta}_{pb}$ 表示由格點 P 到邊界 b 的距離向量； \bar{S}_b 為邊界之面向量； \dot{m}_b 為邊界的質量流率。擴散項之垂直方向導數項 Q_D 及黏性應力項 $q_{s,u}$ 、 $q_{s,v}$ 與 $q_{s,w}$ 分別表示為：

$$Q_D = \Gamma_{\phi,b} \nabla \phi_b \cdot (\bar{S}_b - \bar{d}) \quad (3.24)$$

$$q_{s,u} = \sum_C \mu_b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{V} \right)_b \cdot S_b^x + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot S_b^y + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot S_b^z \right] \quad (3.25a)$$

$$q_{s,v} = \sum_C \mu_b \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{V} \right)_b \cdot S_b^y + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S_b^x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot S_b^z \right] \quad (3.25b)$$

$$q_{s,w} = \sum_C \mu_b \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \bar{V} \right)_b \cdot S_b^z + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot S_b^x + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot S_b^y \right] \quad (3.25c)$$

將其均納入源項中

$$Q_\phi = \sum_{C=1}^n Q_{\phi,C} + Q_D + A_{C,b} \phi_P + q_{s,\phi} \quad (3.26)$$

最後令 $A_{C,b} = 0$ 。經由邊界處理方式的改變就解決了出口迴流問題(如圖 3-5c 所示)，因此後續之測試均採用此方法來進行黏性流場之邊界處理。

在邊界上之壓力處理方式如下(參考圖 3-7 之標註)：

$$p_b - p_P = \nabla p_P \cdot \vec{\delta}_{Pb} \quad (3.27)$$

其中 $\vec{\delta}_{Pb}$ ，代表 P 到 b 之距離向量，壓力梯度可由下式處理：

$$\nabla p_P = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(p_b \vec{S}_b + \sum_{f \neq b} p_f \vec{S}_f \right) \quad (3.28)$$

將式(4.63b)代入式(4.63a)，得到邊界上之壓力為：

$$p_b = \frac{\left(p_P + \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_{f \neq b} p_f \vec{S}_f \cdot \vec{\delta}_{Pb} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\Delta\Omega} \vec{S}_w \cdot \vec{\delta}_{Pb} \right)} \quad (3.29)$$

另亦可由 $\nabla P \cdot \vec{n} = 0$ 求出壓力。

3.1.5. 線性代數方程

將上述所有控容面上之對流與擴散通量及源項合併後，即將傳輸方程式離散成如下之代數方程式：

$$A_P \Phi_P = \sum_C A_C \Phi_C + Q_\phi, \quad (3.30a)$$

其中

$$A_C = \frac{\Gamma_{\phi,f} |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta} \cdot \vec{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0) \quad (3.30b)$$

$$A_P = \sum_C A_C + \frac{\Delta\Omega_P}{\Delta t} \rho_P^o \quad (3.30c)$$

$$Q_\phi = \sum_{f=1}^n -\alpha_\phi \left\{ \dot{m}_f [w_f \phi_C + (1-w_f) \phi_P] - [\phi_P \max(\dot{m}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{m}_f, 0)] \right\} \quad (3.30a)$$

$$+ \sum_{f=1}^n \Gamma_{\phi,f} \nabla \Phi_f (\vec{S}_f - \vec{d}) + q_{\phi,P} \Delta \Omega_P + S_\phi + \frac{\Delta \Omega_P}{\Delta t} (\rho \phi)_P^o$$

其中 A_c 包含了對流項與擴散項之貢獻， A_P 為相鄰網格係數 A_c 之和，而源項 Q_ϕ 則包含了所有的顯項部份。

3.1.5.1. 動量方程式

式(3.30a)若用來表示動量方程式時，其中變數 ϕ 為卡氏坐標在 x 與 y 方向之速度 u 與 v ， Γ_ϕ 則為動黏滯係數 μ ，而 q_ϕ 則為壓力項 $q_{P,x}$ 、 $q_{P,y}$ 與 $q_{P,z}$ 及 S_ϕ 則為應變項 $q_{s,x}$ 、 $q_{s,y}$ 與 $q_{s,z}$ ，分別表示如下：

$$q_{P,x} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.31a)$$

$$q_{P,y} = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.31b)$$

$$q_{P,z} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.31c)$$

$$q_{s,x} = \sum_C \mu_f \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)_f \cdot S_f^x + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot S_f^y + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot S_f^z \right] \quad (3.32a)$$

$$q_{s,y} = \sum_C \mu_f \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)_f \cdot S_f^y + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S_f^x + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot S_f^z \right] \quad (3.32b)$$

$$q_{s,z} = \sum_C \mu_f \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)_f \cdot S_f^z + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot S_f^x + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot S_f^y \right] \quad (3.32c)$$

3.1.5.2. 能量方程式

式(3.30a)若用來表示動量方程式時，其中變數 ϕ 為純量溫度 T ， Γ_ϕ 則為熱傳導係數除於定容比熱 (κ/c_p)，亦可寫成動黏滯係數除於浦朗特數 (μ/P_r)， $S_\phi=0$ ，而 q_ϕ 則包含壓力所作的功 $q_{P,w}$ 及應變力轉為內能之消散項 q_{dis} ，表示如下：

$$q_{p,w} = \frac{1}{c_p} (\vec{V} \cdot \nabla p) \quad (3.33a)$$

$$q_{dis} = \frac{\Phi}{c_p} \quad (3.33b)$$

其中 Φ 為消散函數(dissipation function)，如式(2.13)所示。

3.1.6. 鬆弛處理

以穩態統御方程式求解穩態流場時，暫態導數項對於線性方程矩陣對角佔優之效益影響是不存在的，為了使疊代解子在疊代過程能夠較穩定，則必須以其他的方式來強化對角佔優，Patankar [82]提出之鬆弛(under-relaxation)機制具有增強係數矩陣對角佔優之正面效果。

線性代數系統原型如式(3.30a)，假設如果 Φ 在前一次疊代時以式(3.30a)求解會產生不穩定現象，因此我們只讓 Φ^{n+1} 以 η_ϕ 的比率變量作改變，可表示為

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \eta_\phi (\Phi^{new} - \Phi^n) \quad (3.34)$$

其中 Φ^{new} 就是原式之結果， η_ϕ 為鬆弛因子(Under-Relaxation Factor)且其值介於0與1之間，因為前一次疊代之值通常在係數矩陣及源項更新後就不需要了，故新的解可寫為

$$\Phi_P^{new} = \frac{1}{A_P} \left[\sum_C A_C \Phi_C^{n+1} + Q_\phi \right] \quad (3.35)$$

將式(3.35)代入式(3.34)，可得到：

$$\Phi_P^{n+1} = \Phi_P^n + \eta_\phi \left\{ \frac{1}{A_P} \left[\sum_C A_C \Phi_C^{n+1} + Q_\phi \right] - \Phi_P^n \right\} \quad (3.36)$$

$$\therefore \underbrace{\frac{A_P}{\eta_\phi}}_{A_P^*} \Phi_P^{n+1} = \sum_C A_C \Phi_C^{n+1} + \underbrace{Q_\phi + \frac{1-\eta_\phi}{\eta_\phi} A_P \Phi_P^n}_{Q_\phi^*} \quad (3.37)$$

其中上標 n+1 代表新值，而 n 則代表前一次疊代之舊值，故 A_p^* 及 Q_ϕ^* 為新修訂之係數，由於對角係數 A_p^* 大於原係數 A_p 且係數 A_c 不變，故增強了係數矩陣對角佔優特性。

將所有計算域之網格所組成之聯立代數就是我們所要求解之矩陣代數方程式：

$$[A]\{\Phi\} = \{Q\} \quad (3.38)$$

整個計算域共有 N 個網格，每個控容體網格之邊數為 m，故有 N 條方程式聯立，求解 N 個未知數，在這種系統之係數矩陣[A]中，每條方程式只有 m+1 個非零係數，由於使用無結構性網格，此係數矩陣並非規則之對角五帶寬矩陣，而為稀疏矩陣，在此使用較有效率之雙共軛法矩陣解子(BICG) [83]。

3.2. 壓力、密度及速度偶合關係式

一般在處理可壓縮流時，連續方程式是被作為密度的傳輸方程式，而在本文中因使用處理不可壓縮流相當成功的 SIMPLE 運算法則，所以其仍被用來作為推導壓力修正方程式之橋樑。

3.2.1. 面上質量流率的處理

根據 Patankar 所提的 SIMPLE 算則[50]，將前次疊代的壓力 p^* 代入式 (3.30a) 動量方程式中，可解出速度場 V^* ，此時之速度與壓力場，以及當時的密度所求出之質量流率 \dot{m}_f^* ，未必滿足連續方程式，即存在一質量殘值 Q_m^* ：

$$(\rho_p^* - \rho_p^o) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^* = Q_m^* \quad (3.39)$$

因此質量流率必須作修正，使其滿足連續方程式之需求。

以不可壓縮流而言，質量流率之修正量係由面上速度之修正而求得，說明如下：

$$\dot{m}_f^{**} = [\rho^* (V^* + V') \cdot \vec{S}]_f \quad (3.40)$$

$$\dot{m}'_f = \rho^* V'_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.41)$$

然而對可壓縮流而言，質量流率與垂直面上之速度分量 \vec{V}_n 及密度均有關，相對於不可壓縮流，密度的變化顯得非常大，所以質量流率之修正必須包含速度與密度之修正量，速度與密度之修正量要各別導出與壓力修正量的關係之後，再利用連續方程式導出壓力修正方程式，說明如下：

$$\dot{m}_f^{**} = [(\rho^* + \rho') (V^* + V') \cdot \vec{S}]_f \quad (3.42)$$

$$\dot{m}'_f = (\rho^* V' + \rho' V^* + \underline{\rho' V'})_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.43)$$

式(3.43)表示質量流率的修正量，劃有底線之項目為次階誤差，因較其它兩項更快趨近於零，所以將它忽略。

3.2.2. 面上速度的處理

將式(3.30a)之壓力項由源項中提出，可寫成下式：

$$\vec{V}_p = \frac{\sum_c A_c \vec{V}_c + Q'}{A_p} - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_p \nabla p_p = \vec{H}_p - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_p \nabla p_p \quad (3.44)$$

其中 Q' 表示不含壓力項之源項，控容體面上的速度由Rhie與Chow [53]所提出之線性內插權重(linear interpolation weighting)方法來處理：

$$\vec{V}_f = \vec{H}_f - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_f \nabla p_f \quad (3.45a)$$

其中

$$\vec{H}_f = \vec{V}_f + \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_f \nabla p_f \quad (3.45b)$$

將式(3.45b)代入式(3.45a)得：

$$\vec{V}_f = \overline{\vec{V}_f} + \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_f \overline{\nabla p_f} - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_f \nabla p_f \quad (3.46a)$$

$$\vec{V}_f = \overline{\vec{V}_f} - (D_f \nabla p_f - D_f \overline{\nabla p_f}) \quad (3.46b)$$

其中

$$D_f = \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_P + \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_C \right] \quad (3.46c)$$

(3.45a)及(3.46a)式中劃頂線之項目表示其為由控容體心格點 P 及周圍相鄰網格體心格點 C 之內插值，如下所示：

$$\overline{\nabla p_f} = w_p \nabla p_C + (1 - w_p) \nabla p_P \quad (3.46d)$$

$$\overline{\vec{V}_f} = w_p \vec{V}_C + (1 - w_p) \vec{V}_P \quad (3.46e)$$

所以質量流率可表為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f &= \rho_f \overline{\vec{V}_f} \cdot \vec{S}_f \\ &= \rho_f \overline{\vec{V}_f} \cdot \vec{S}_f - \rho_f D_f (\nabla p_f \cdot \vec{S}_f - \overline{\nabla p_f} \cdot \vec{S}_f) \end{aligned} \quad (3.47)$$

值得注意的是 $(D_f \nabla p_f - D_f \overline{\nabla p_f})$ 項對於面上速度而言，基本上其為三階平滑項 (third-order smooth term) [17]，由於將質量流率代入對流項 F_f^C ，壓力梯度差對於動量方程式而言，為一個四階人工消散項。將 \vec{S}_f 以 \vec{d} 取代之也許會改變人工黏滯性 (artificial viscosity)，但不會影響二階準確度，故質量流率之計算方式如下：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f &= \rho_f \overline{\vec{V}_f} \cdot \vec{S}_f - \rho_f D_f (\nabla p_f \cdot \vec{d} - \overline{\nabla p_f} \cdot \vec{d}) \\ &= \rho_f \overline{\vec{V}_f} \cdot \vec{S}_f - B_C [(p_C - p_P) - \overline{\nabla p_f} \cdot \vec{\delta}_{PC}] \end{aligned} \quad (3.48a)$$

其中

$$B_C = \rho_f D_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\overline{\vec{\delta}_{PC}} \cdot \vec{S}_f} \quad (3.48b)$$

令修正後之速度及壓力場為 V^{**} 及 p^{**} 代入式(3.44)，根據的 SIMPLE 算則之技巧，其速度修正量與壓力修正量之關係如下：

$$\vec{V}'_p = -\left(\frac{\Delta\Omega}{A_p}\right)_p \nabla p'_p \quad (3.49a)$$

$$p'_p = p_p^{**} - p_p^* \quad (3.49b)$$

同理由式(3.45a)，面上的速度修正量亦可表為：

$$\vec{V}'_f = \vec{V}_f^{**} - \vec{V}_f^* = -\left(\frac{\Delta\Omega}{A_p}\right)_f \nabla p'_f = -D_f \nabla p'_f \quad (3.50)$$

3.2.3. 面上密度的處理

參考 Karki 等人[14]或 Demirdzic 等人[16]對可壓縮流密度修正量 ρ' 的處理方式如下，假設等熵流場：

$$\rho' \cong \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right) p' \quad (3.51a)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial p} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\gamma RT} = K \quad (3.51b)$$

式(3.51b)中 γ 表示為定壓比熱與定容比熱之比 ($\gamma = c_p / c_v$)； a 表示為音速，雖在此假設等熵流場，其只是為了推導出密度隨壓力變化的關係(亦可使用其它關係式推導)，並不會影響最後收斂之解，即計算模擬之流場不一定要為等熵流場。

一般對於面上密度之計算均採用一階上風差分法來近似，雖較穩定但其對震波之解析較模糊，為了得到較佳之震波解析度亦有人使用中央差分近似法[15-17]，易造成計算過程不穩定甚至發散，而 Karki 等人[14]及 Demirdzic 等人[16]使用中央差分混合一階上風差分近似法，其混合因子則介於 0 與 1 之間，主要的目的無非是要增加解的精確度及疊代過程的穩定性，由於增加面上密度之準確度雖可提昇解的精確度，然而在穿音速尤其

是震波交匯的複雜流場中，密度的變化非常劇烈，處理不慎則必會造成計算過程不穩定甚至發散，故必須小心處理，原則上馬赫數愈大其特性愈接近一階上風差分近似法，本文面上密度近似法亦配合對流項之處理方式，採用中央差分混合一階上風差分近似法，對於面上密度的處理模式表示如下：

$$\rho_f^* = \rho_f^{*UDS} + \alpha_\rho (\rho_f^{*CDS} - \rho_f^{*UDS}) \quad (3.52a)$$

$$\rho'_f = (Kp')_f = (Kp')_f^{UDS} + \alpha_\rho [(Kp')_f^{CDS} - (Kp')_f^{UDS}] \quad (3.52b)$$

(3.52a)及(3.52b)式中， α_ρ 為密度之混合因子，其值介於0到1之間，通常馬赫數愈高其值愈小。

3.2.4. 壓力修正線性代數方程

採用 SIMPLE 算則，動量及能量傳輸方程式與連續方程式交互疊代法，在每一次疊代程序中包括預測(predictor)與修正(corrector)兩個步驟，在預測階段使用前次的壓力值代入動量方程式得到速度場 \vec{V}^* ，在修正階段速度及壓力場配合滿足連續方程式而修調，對可壓縮流而言，連續方程式可以被視為密度的傳輸方程式，不同型式的連續方程式可以被離散為：

$$(\rho_p - \rho_p^o) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f = 0 \quad (3.53a)$$

或

$$\rho' \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f = 0 \quad (3.53b)$$

統御方程式的偶合系統以隔離(segregated)的方法依序地交互疊代求解，動量方程式首先被解出而獲得速度場，通常所獲得的速度解不會滿足連續的條件而必須予以調整，此處質量流率可以被表示為：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f &= \dot{m}_f^* + \dot{m}'_f \\ &= \rho_f^* \vec{V}_f^* \cdot \vec{S}_f + (\rho_f^* \vec{V}'_f + \rho'_f \vec{V}_f^*) \cdot \vec{S}_f \end{aligned} \quad (3.54)$$

其中上標之“*”符號定義為目前值(prevaling values)，上標之“”符號則為修正量將式(3.50)及式(3.52b)代入式(3.54)中可以進一步推得質量流率之修正量為：

$$\dot{m}'_f = -\rho_f^* \left(\frac{\overline{\Delta\Omega}}{A_p} \right)_f \nabla p'_f \cdot \vec{S}_f + \frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f^*} (Kp')_f \quad (3.55a)$$

或寫為：

$$\dot{m}'_f = -\rho_f^* D_f \nabla p'_f \cdot \vec{S}_f + \frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f^*} K_f p'_f \quad (3.55b)$$

在這個方程式中右邊第一項代表壓力修正量的擴散項；第二項則代表對流項，在不可壓縮流時是不存在有對流項。這兩項的係數比恰正比於馬赫數的平方，在低馬赫數時擴散項佔優，此方程式的物理特性則猶如不可壓縮流之橢圓型(elliptic type)特性；當在高馬赫數時對流項為佔優，而其物理特性為雙曲線型(hyperbolic type)之特徵，使用如上述對於對流項與擴散項的處理方式(如式(3.8)及式(3.16))，因此，質量流率之修正式可以寫成：

$$\dot{m}'_f = [B_C (p'_P - p'_C) - \rho_f^* D_f (\overline{\nabla p'})_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})] + \frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f^*} (Kp')_f \quad (3.55c)$$

$$\begin{aligned} \dot{m}'_f = & \left[B_C + \frac{K_P}{\rho_f^*} \left((1 - \alpha_\rho) \max(\dot{m}_f^*, 0) + (1 - w_f) \alpha_\rho \dot{m}_f^* \right) \right] p'_P + \\ & \left[\frac{K_C}{\rho_f^*} \left(\dot{m}_f^* \alpha_\rho w_f - (1 - \alpha_\rho) \min(\dot{m}_f^*, 0) \right) - B_C \right] p'_C + \\ & \left[-\rho_f^* D_f (\overline{\nabla p'})_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \right] \end{aligned} \quad (3.55d)$$

式(3.55a)是本文之重要關係式，可以得到很重要的關係：

1. 首先我們來看右邊第一項為控體任一面兩邊壓力修正量之差的貢獻，故可視為擬似擴散項；而第二項為該面上本身壓力修正量的貢獻，故可視為擬似對流項，意味著如果壓力修正量 $P'+C$ ，C 為任意常數，將不會滿足(3.55a)式之解。就不可壓縮流而言，質量流率的修正量僅為速

度修正量的函數，換言之即是壓力修正量梯度的函數，所以只會出現擬似擴散項；就可壓縮流而言，質量流率的修正量則為速度與密度修正量的函數，所以會多出擬似對流項。

2. 如果我們將(3.55a)式右邊第二項係數正常化，使 P'_f 之權重因子化為 1；則第一項的權重因子將會正比於 $(C/V)^2 = M^{-2}$ (M 為馬赫數)，此權重因子本文稱之為馬赫數控制因子(Mach number factor)。當在次音速流動時，則此項因子明顯的大於 1，所以第一項佔優，而忽略第二項。反之若在可壓縮流時具有高的馬赫數，則第一項將遠小於 1，所以第二項將佔優。
3. 由於壓力修正方程式在次音速流場時，其行為為橢圓型式(elliptic type)，而在超音速流場時則為雙曲線型式(hyperbolic type)，本文之方法由馬赫數控制因子來自動調整流場特性，可以解決穿、超音速流場及震波附近高梯度變化之計算問題，故可以滿足全速流流場之計算需求。

修正後之速度場滿足連續方程式：

$$\text{令 } (\rho_p^{**} - \rho_p^o) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{得 } \sum_f \dot{m}'_f + Q_m^* = 0 \quad (3.57a)$$

$$\text{其中 } Q_m^* = \rho' \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^* \quad (3.57b)$$

將式(3.52b)及式(3.55d)之 ρ' 及 \dot{m}'_f 之代入式(3.57a)可得到壓力修正方程式：

$$A_p p'_p = \sum_{C=1}^n A_C p'_C + S_1 + S_2 \quad (3.58)$$

其中

$$A_p = \sum_{C=1}^n B_C + \sum_{f=1}^n \max(\dot{m}_f^*, 0) \frac{K_p}{\rho_f^*} + K_p \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (3.59a)$$

$$A_C = B_C - \min(\dot{m}_f^*, 0) \frac{K_C}{\rho_f^*} \quad (3.59b)$$

$$S_1 = -\sum_{f=1}^n \dot{m}_f^* \quad (3.59c)$$

$$\begin{aligned} S_2 = & -\sum_{f=1}^n \rho_f^* D_f \overline{\nabla p'_f} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \\ & + \sum_{f=1}^n \min(\dot{m}_f^*, 0) \frac{\alpha_\rho}{2\rho_f^*} (K_C p'_C - K_P p'_P) \\ & + \sum_{f=1}^n \max(\dot{m}_f^*, 0) \frac{\alpha_\rho}{2\rho_f^*} (K_P p'_P - K_C p'_C) \end{aligned} \quad (3.59d)$$

式(3.58)中之 A_c 與式(3.30b)類似，包含了擬似對流項與擴散項之貢獻，而 A_P 不會如同動量方程式之係數關係，等於相鄰網格係數之和，這並非我們所樂見，此意味著當相鄰網格之值相等時，中心 P 點之值竟會不同(理應相同)。所幸當所有相鄰網格之值皆為零時，則中心 P 點之值亦為零，此恰好滿足壓力修正方程式的收斂條件。

源項區分為兩個部份，第一個部份為 S_1 稱為質量殘值，係以當時之速度場所得之控容體質量流率不守恆殘值；第二個部份為 S_2 包括了擴散通量的垂直導數項(cross-derivative term)及對流通量的反擴散項(antidiffusion term)，由於本部份在疊代過程中係以顯項來處理，在每一時步之初始值為零，因為我們都知道一旦達到收斂解後，壓力變量即會消失，故大部份的學者均將本項簡化而予以忽略[46,84]。在我們的經驗中，若包括對流通量的反擴散項可能會導致些微的不穩定情形，就好像當殘值降至某一階時仍不會消失，因此，我們將對流通量的反擴散項從 S_2 中完全刪除。相反的，從無結構性網格的計算經驗中，若包括了擴散通量的垂直導數項會使得求解的疊代過程更加穩定，同時也強化了收斂性，特別是在當非正交網格情況惡劣時。考量壓力修正方程式為持續修正之近似求解方法，在第一步只有 S_1 項納入求解，即

$$A_P p_P^{(1)} = \sum_{C=1}^n A_C p_C^{(1)} + S_1 \quad (3.60)$$

當獲得第一步壓力修正量 $p^{(1)}$ 時，用第一步壓力修正量 $p^{(1)}$ 之值來計算在 S_2

中的擴散通量的垂直導數項，然後再用下式求解第二步壓力修正量 $p^{(2)}$

$$A_p p_p^{(2)} = \sum_{C=1}^n A_c p_c^{(2)} + S_2^{(1)} \quad (3.61)$$

如果需要的話可以參照第二步求解法進行更多次的修正，特別是在非常扭曲的網格時，通常只要兩次的修正即足可獲得穩定的收斂解[84]。

系統的統御方程式以隔離(segregated)的方式順序地求解，因為使用無結構性網格，故由微分方程所離散而成之系統幾何線性方程為稀疏且非帶狀之係數矩陣，此時通常用於結構性網格之主要對角矩陣(TDMA)線性疊代法及 Stone 的 SIP 全域法，則不適用於非帶狀之係數矩陣系統。近年來，預置條件之共軛法矩陣解子被證明具有效率及可靠性，適用於非帶狀之係數矩陣系統，由於 Fletcher [83]所提出的不完全 Cholesky 分解預置條件之雙共軛法(BICG)矩陣解子，具有處理從傳輸方程式及壓力修正方程式所得到的非對稱矩陣之能力，故在本文之計算中使用其作為矩陣解子，若遇到發散情形時，壓力修正方程式則改用高斯法(Gauss-Seidel relaxation)之矩陣解子。

為了保持類似 SIMPLE 統御方程式隔離疊代計算過程的數值穩定性，吾人對於求解線性壓力修正方程式之修正壓力時，採用了一些特別的處理技巧，修正壓力量必須根據不同的流場型態，與位於入口或出口邊界之參考點作校正(如圖 3-8 所示)，此方式均可應用於原始變數或守恆變數之求解算則。區分為三種流場型態，第一種為入口及出口之流速均為次音速流場，其參考點位置取位於出口端邊界之中心點網格中心，如此可滿足出口背壓為給定值之邊界條件(注意：並非每一出口邊界點均相同，由流場計算結果自行調整，只有參考點為定壓)，即在所有網格之修正壓力求出後與參考點的修正壓力相減，故參考點的修正壓力量為 0，亦即該點的壓力值不變。第二種為超音速入口流場，該參考點則取位於入口邊界之中心點，如此與超音速的邊界條件一致，即所有的入口邊界變數均為給定值；最後一種為次音速入口及超音速出口，此種流場在參考點的選用在對應物理邊界條件上則較為困難，故需要特別的處理，此種型態的流場則出現在雙喉部噴嘴之

內流場，處理方法為：首先將參考點設定在入口端，因為入口端假設為一很大的氣源儲槽，出口端則採所有變數均外插方式，當第一個喉部尚未到達音速時，入口邊界仍由外界環境佔優，直至第一個喉部到達音速時流場之質量流率已為定值，此時再將此限制條件移除，完全由統御方程來決定流場壓力修正量，即無任何參考點。

3.3. 邊界條件

- (1).入口：以不可壓縮流而言，通常是給定入口速度與溫度。可壓縮流若於次音速入口時，由特徵值 u 、 u 、 $u+c$ 、 $u-c$ 只有一個為負值，可知只有一個邊界條件由內點外插至入口，其餘則需由上游給定邊界條件，對噴嘴之內流場而言通常給定停滯壓力 P_0 、停滯溫度 T_0 ；若為超音速入口時，特徵值 u 、 u 、 $u+c$ 、 $u-c$ 均為正值，故所有變數均為給定之邊界條件(其中 c 表示音速)。
- (2).出口：以不可壓縮流而言，出口速度梯度為零及給定其它所有之純量值。可壓縮流若於次音速出口時，其特徵值 u 、 u 、 $u+c$ 、 $u-c$ 只有一個為負值，故僅能給定一個邊界條件，其餘變數則利用內點外插至出口，對噴嘴之內流場而言通常給定出口靜壓力(即背壓 P_b)；若於超音速出口時，特徵值 u 、 u 、 $u+c$ 、 $u-c$ 均為正值，所有變數均為由內點外插至出口。
- (3).固定壁面：動量方程式若為黏性流體時，採用無滑移邊界條件；若為非黏性流體時，則採用滑移邊界條件。能量方程式則給定壁面溫度(T_w)或熱通量。
- (4).對稱面：垂直於對稱面或軸之速度梯度為零。

以上所述之邊界條大部份階可直接引用，或其實行之方式均可見諸於文獻中，然而對於應用壓力修正法解可壓縮流的算則時，本文參考 Demirzic 等人[16]之方式將邊界條件代入計算中，說明如下：

- (1).給定入口停滯壓力 P_0 、停滯溫度 T_0 ：

為了說明此邊界條件，就以西面(w)為例，參考圖 3-9 之標註，停滯壓

力 p_o 及停滯溫度 T_o 之定義如下：

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2 + v^2}{\gamma RT^*} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.62)$$

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2 + v^2}{\gamma RT^*} \right) \quad (3.63)$$

流入方向與入口邊界法向量之夾角為 β ，則

$$\tan \beta = \frac{v}{u} \quad \text{or} \quad v = u \tan \beta \quad (3.64)$$

在開始計算之前，入口處之速度 u_w, v_w 由式(3.62)及(3.63)並使用當時壓力及溫度之值計算而得，而此值即作為動量方程式此次疊代已知邊界速度之值，然而用來近似入口對流通量之質量通率不是由此速度計算而得，而是由上一次之質量守恆計算所得之值。一旦解完動量方程後，以所得之速度 u^* 及 v^* 計算更新計算域所有面上之質量通率，由於入口之新質量通率由 u_w, v_w 計算而得。在 SIMPLE 算則中此質量通率必須作修正，因密度視為已知，故此處之修正量僅含速度之變量，速度之變量表示如下：

$$u'_w = \left(\frac{\partial u^*}{\partial p} \right)_w p', \quad v'_w = u'_w \tan \beta \quad (3.65)$$

其中 $\left(\frac{\partial u^*}{\partial p} \right)_w$ 由式(3.62)推導而得：

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial p} \right)_w = - \frac{\gamma RT}{u^* \gamma (1 + \tan^2 \beta) p_o \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^{*2} (1 + \tan^2 \beta)}{\gamma RT} \right]^{(1-2\gamma)/(\gamma-1)}} \quad (3.66)$$

故此邊界之質量通率修正量以壓力修正量之表示式為：

$$\dot{m}'_w = (\rho^* \vec{V}' \cdot \vec{S})_w = \left[\rho^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial p} \right) (S_f^x + \tan \beta S_f^y) \right]_w \overline{p}'_w \quad (3.67)$$

其中劃頂線之值表示由內點外插之近似值，本文採零階外插近似，即 \overline{p}'_w 以 P'_p 代入壓力修正方程式，故邊界之相鄰網格之係數 A_p 要更新。

一旦壓力修正方程解完後，整個計算域包含邊界之速度、壓力及質量

通率值均予以更新，而此更新之邊界質量流率及由式(3.62)及(3.64)並使用前一次疊代之壓力及溫度計算而得之新的入口速度，而新的入口溫度則由式(3.63)求得，此速度及溫度則作為下一次疊代時之已知值，當收斂時質量通率修正量為零，故此速度與計算質量通率之速度即相吻合。

(2). 給定出口靜壓力 P_b :

為了說明此邊界條件，此處以東面(E)為例，參考圖 3-10 之標註。假設出口邊界除了壓力之外所有速度及變數值均由內點外插，則壓力修正方程對於相鄰邊界之控容體的係數 A_p 必須作修正，根據壓力已知之定義邊界壓力修正量 P'_E 為零，但除非到達收斂時，東面之速度與質量通率之修正量將不為零。

面上速度之計算與式(3.46a)類似，表示如下：

$$\vec{V}_e = \vec{V}_e + \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_e (\nabla p_e - \nabla p'_e) \quad (3.68)$$

故其速度修正量可表示為：

$$\vec{V}'_e = - \left(\frac{\Delta\Omega}{A_p} \right)_e \nabla p'_e \quad (3.69)$$

由式(3.43)可得到東面邊界之質量通率為：

$$\dot{m}'_e = (\rho^* \vec{V}' + \rho' \vec{V}^*)_e \cdot \vec{S}_e \quad (3.70)$$

式(3.68)-(3.70)中劃頂線之部份表示其值由外插而得，此處採零階外插來近似之，而密度之計算方式亦比照式(3.52a)及式(3.52b)，其中中央差分(CDS)表示由 P 點採零階外插方式求得，而上風差分(UDS)表示其值即為 P 點之值，故壓力修正方程式，邊界之相鄰網格之係數 A_p 要修訂。

(3). 超音速出口：

如果在出口處為超音速，則出口處之所有變數值均由內點外插，所以其速度及質量通率亦要作修正，處理方式同式(3.68)-(3.70)，唯出口壓力修正量 P'_E 不為零。

3.4. 疊代殘值計算及收斂條件

由於 SIMPLE 算則係採預估及修正之壓力修正疊代模式，將原本偶合之 Euler 或 Navier-Stokes 統御方程式分離成各自獨立的線性方程求解，如 u-動量方程式、v-動量方程式、壓力修正方程式(質量守恆式)、能量方程式等，當所有方程式解之總殘值均小於某一合理殘值時，則滿足收斂條件，即相當於計算域內所有之網格均滿足質量守恆、動量守恆及能量守恆。

本文所使用之疊代殘值(residual)計算方式說明如下：

假設任意變數 Φ 之線性方程為：

$$A_p \Phi_p = \sum_C A_C \Phi_C + Q_\phi \quad (3.71)$$

則整個計算域之 Φ 線性方程總殘值為：

$$R_\phi = \sum \left| A_p \Phi_p - \left(\sum_C A_C \Phi_C + Q_\phi \right) \right| \quad (3.72)$$

其中 $\Phi=1$ 表示 u 動量方程式； $\Phi=2$ 表示 v 動量方程式； $\Phi=3$ 表示壓力修正方程式； $\Phi=5$ 表示能量方程式。由於各方程式之殘值數值大小基準不一，故必須予以正規化處理，將方程式之總殘值各別除於其入口處平均速度(\bar{u}_{in})或平均溫度(\bar{T}_{in})與總質量流率(\dot{M}_{in})乘積之值，即各別除於其入口處之動量通量或能量通量，如下所示：

$$\text{入口總質量流率：} \dot{M}_{in} = \sum_{bf} \dot{m}_{bf} \quad (3.73a)$$

$$\text{壓力修正方程之正規化因子：} NOM_p = \dot{M}_{in} \quad (3.73b)$$

$$\text{u-動量方程之正規化因子：} NOM_u = \bar{u}_{in} \cdot \dot{M}_{in} \quad (3.73c)$$

$$\text{v-動量方程之正規化因子：} NOM_v = NOM_u \quad (3.73d)$$

$$\text{壓力修正方程之正規化因子：} NOM_p = \dot{M}_{in} \quad (3.73e)$$

$$T \text{ 能量方程之正規化因子： } NOM_T = \bar{T}_{in} \cdot \dot{M}_{in} \quad (3.73f)$$

$$\text{所以正規化後之總殘值為： } \bar{R}_\phi = \frac{R_\phi}{NOM_\phi} \quad (3.74)$$

當 $\max(\bar{R}_\phi) \leq \lambda$ 時，則滿足收斂條件， λ 通常取 $1e-3$ [85]。

3.5. 梯度計算模式

網格中心的梯度計算公式為：

$$\int_{\Omega} \nabla \phi d\Omega = \oint_{d\Omega} \phi \bar{\mathbf{n}} d\Omega \quad (3.75)$$

其中 ϕ 表示任一純量變數， Ω 表示局部網格之面積， $\bar{\mathbf{n}}$ 表示積分路徑之法向量，以三角形網格 A 為例(參考圖 3-11 之標示)，網格中心梯度估算與其圍線積分之路徑有關，由上式可推得：

$$\nabla \phi_A = \frac{1}{\Omega_A} \oint_{d\Omega} \phi \bar{\mathbf{n}} d\Omega \quad (3.76)$$

於求解上式時，在選擇路徑及求面積法則必須能滿足下列限制條件：

- (A). 當 ϕ 為線性變數時，則 $\nabla \phi_A$ 必須為解析解。
- (B). 對於任意多邊形網格， $\nabla \phi_A$ 必須能夠被定義。

Barth 與 Jespersen [60] 提出三種不同積分路徑之策略並證明是否滿足限制條件，積分路徑詳如圖 3-11 所示：

- (1). 沿著網格 A 之邊緣路徑積分，含局部網格共使用 4 個網格，並使用相鄰網格之中點近似法則來計算積分式即邊緣 $e(v_1, v_2)$ 中點之 ϕ_e 值採 ϕ_A 及 ϕ_B 的算術平均數，即

$$\phi_e = \frac{\phi_A + \phi_B}{2} \quad (3.77)$$

- (2). 沿著網格 A 之所有相鄰網格(即 B、C 及 D)之格心連線路徑積分，含局部網格共使用 4 個網格，並使用梯形法則來計算積分式，即

$$\phi_{e,BC} = \frac{\phi_B + \phi_C}{2} \quad (3.78)$$

(3).沿著網格 A 所有共用格點之相鄰網格之格心連線路徑積分，含局部網格共使用 4 個以上的網格，並使用梯形法則來計算積分式。

Barth 與 Jespersen 指出策略(1)除了邊緣相鄰網格中心之連線恰中分該邊緣時，否則不滿足限制條件(A)；策略(2)滿足限制條件(A)，但當網格 A 為扭曲網格時，即相鄰網格 B、C、D 之格心連線重疊為一直線之時，則不滿足限制條件(B)；策略(3)均滿足限制條件(A)與(B)。

本文在計算梯度採用之策略為使用策略(1)之積分路徑，並依據網格之不同使用相鄰網格之中點近似法則(四邊形網格)或使用格點梯形法則(三邊形網格)來計算積分式，其中局部網格之格點變數值計算，係採用共用該格點之所有網格中心值之面積倒數平均值，故其涵括之網格數與策略(3)相同但計算面積之效率較高，唯仍較中點近似法則需要較多的計算時間，為了克服此問題以縮短共用該格點之網格蒐尋時間，於網格系統資料中先利用 Linked List 動態矩陣[123]之概念，於計算之初即以下列方式尋找並儲存其關聯，後續用到時即可快速找出共點之網格編號，即 $N_c = \text{NofJ}(N_i)$ 表示格點編號 N_i 之共點網格數及 $L_i = \text{LofJ}(N_i, i)$, $i=1,2,\dots,N_c$ ，表示格點編號 N_i 之第 i 個共點網格編號。

共點之網格數目在二維時 4 邊形網格或三維之 6 面體網格約為 4 或 8，故 $\text{LofJ}(N_i, N_c)$ 之矩陣大小則為格點數乘以 4 或 8，尚不算大且數目均一致。但當使用二維 3 邊形或三維之 4 面體網格時，則此矩陣空間則變得非常不一致且共點之網格數目數量有時可達 60 個以上，若使用 $N_i \times 60$ 則需要非常大的記憶體，若使用 Linked list 之動態矩陣，則可節省大量的儲存空間，例如有 10000 個格點為例，使用一般的矩陣則需 $10000 \times 60 = 600000$ 個記憶空間；若使用 Linked list 之動態矩陣則需 $12000 \times 20 = 240000$ ，可節省 360000 個記憶空間，若網格愈密則差異更大。

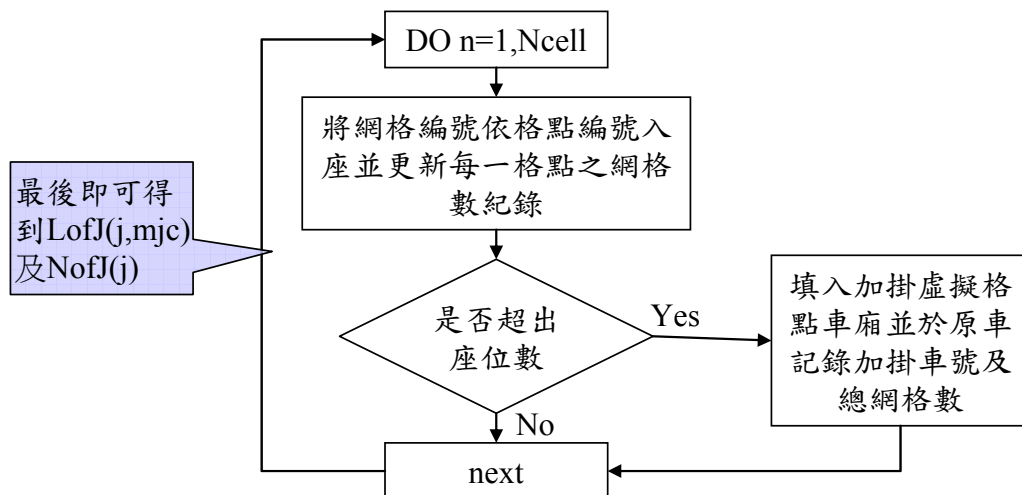
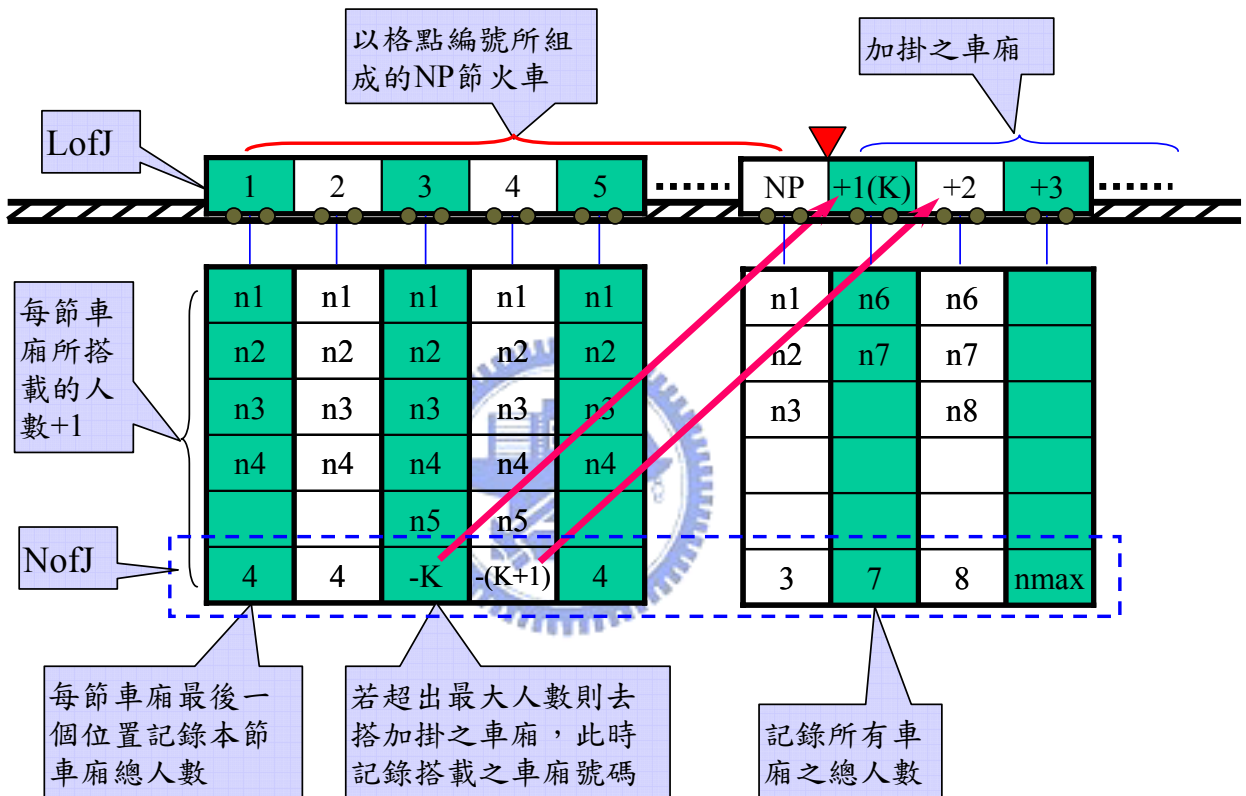
共用格點之網格關聯尋找之概念及 Fortran 程式摘要說明如下：

CALLofJ副程式流程圖

本副程式主要在處理共點之網格集合：

利用Linked List概念來儲存集合之資料，可節省大量的記憶體空間，以下用火車之概念來說明：

1. 首先要定義有多少節車廂及每部車廂可容納多少人。
2. 車廂數的設定通常取總格點數的1.2倍；而每部車廂可容納人數：二維4邊形網格取10；3邊形則取30。三維6邊形網格取10；4邊形網格取40。



如前所述，在計算擴散項及質量流率時必須先決定各變數的梯度，而梯度的估算方法對於解的精確性有顯著的關聯，計算梯度最簡單的方法就是運用高斯理論(Gauss theorem)，如下所示(參考圖 3-1 所示)：

$$\nabla \phi_p = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum \phi_f \bar{\delta}_f \quad (3.79)$$

其中總合係控容體所有面之面上變數與面向量乘積之總合，面上變數值可以使用最簡單的相隣網格中心之兩點中央線性內插法來估得，即

$$\phi_f = w\phi_c + (1-w)\phi_p \quad (3.80)$$

其中 w 為權重因子。

上述之線性內插法通常被認為在用於梯度計算時是低階準確，因為只有含概最鄰近的兩個網格，為了提高準確度則必須引入更多的鄰近網格 [41,60,75]，參考 Mathur 與 Murthy [86] 所用之線性重置二階準確法來獲得面上之變數值，可平滑估計值，不致產生過於高估/低估之值，有助於程式之穩定性：

$$\phi_f = \frac{1}{2} [(\phi_p + \nabla \phi_p^{(1)} \cdot \bar{\delta}_{pf}) + (\phi_c + \nabla \phi_c^{(1)} \cdot \bar{\delta}_{cf})] \quad (3.81)$$

其中 $\bar{\delta}_{pf}$ 與 $\bar{\delta}_{cf}$ 為距離向量分別從面心 f 指向格點 P 與 C ，梯度 $\nabla \phi^{(1)}$ 係使用如式(3.80)簡單內插法所獲得之 $\phi_f^{(1)}$ 值計算而得，而面心之變數值 ϕ_f 可能沒有界限於局部網格之相隣周圍網格之最大與最小值之中，可能會導致獲得較周圍網格超高或超低估算之值，繼而得到異常的梯度變化值，因此，特別加入了限制條件，如下所示：

$$\phi_f = \min(\max(\min\{\phi_c\}, \phi_f), \max\{\phi_c\}) \quad (3.82)$$

其中 $\{\phi_c\}$ 是含括所有局部網格之周圍相隣網格。

3.6. 求解程序

求解程序為先解動量方程式得到預估的速度場，接著解壓力修正方程式，在此階段使用得出的壓力修正量更新速度場及壓力場，最後再求解能量方程式以獲得溫度場，而密度場則藉由狀態方程式求得，如此完成一次完整的步序，持續相同的步序一直到收斂為止。求解步驟分述如下：

1. 給初始入口速度 V_{in} 、面上質量流率 \dot{m}_f^* ，猜初始壓力場 p_p^* (絕對壓力場)、溫度場 T_p^* ，而密度場 ρ_p^* 由狀態方程式求出。
2. 計算動量方程式之係數，計算每一個網格加總之動量方程式殘值，利用矩陣解子求出內點速度場 V_p^* ，並由邊界條件更新邊界點速度。
3. 計算面上速度 V_f^* 、密度 ρ_f^* 及更新面上質量流率 \dot{m}_f^* 。
4. 計算壓力修正方程式之係數，並計算每一個網格加總之質量殘值，利用矩陣解子求出內點壓力修正值 p' ，並更新邊界點之壓力修正量。
5. 修正網格中心點速度 V_p^{**} 、面上質量流率 \dot{m}_f^{**} ，及網格中心之壓力場 p_p^{**} 。
6. 非黏性(等熵)流場則由停滯溫度 T_o 或總焓 (H_o) 及速度場 V_p^{**} 更新溫度場 T_p^{**} ；黏性流場則由能量方程式解出溫度場 T_p^{**} ，再由狀態方程式更新密度場 ρ_p^{**} ，並計算每一個網格加總之能量方程式殘值。
7. 將求得的 p_p^{**} 當作新的 P_p^* ，重覆步驟 2-7，直到動量方程式之加總之殘值、能量方程式之加總之殘值及壓力修正方程式之加總質量殘值滿足收斂條件(小於 $1.e-3$)為止。

第 4 章 高階通量限制函數法

4.1. 簡介

在發展數值模擬方法的過程中，對於出現在傳輸統御方程式中一階導數對流項(convective term)之離散處理是計算流體力學最棘手、也最具挑戰性的研究議題之一，此問題不只要如何導出具有足夠精確度的方法，而且亦要能夠確保在追求高精確度的情況下不致影響數值穩定度。使用一階上風法(UDS)及類似方法，如 Hybrid 及 Power-Law [87]等，雖可獲得很好的穩定度，但具有很強的數值擴散性而使得精確度降低。為了獲得較高的精確度，至少須使用高於一階之方法，如二階準確之上風兩點差分法(LUDS)、Leonard [88]之三階準確之上風兩點及一點下風插分法(QUICK)，這些方法已被廣泛的使用，其結果雖較一階上風法準確，但因為其不具有界限特性，在求解變數梯度變化劇烈的區域會產生數值振盪。所以許多 CFD 之研究者 [18,37-38,42-43,45-46,89]致力於發展理想的高階準確方法，期望能夠在合理的計算效益下，擁有高精確度(accuracy)、高穩定性(stability)及界限特性(boundedness)的對流項離散模式。

所謂高階準確法(high-resolution scheme)即是加入了界限的特性，期能獲得在震波或梯度變化陡峭區域精確而無數值振盪的解，其主要的架構為以高階內插剖面(interpolation profile) [88]及結合一單調準則去重新估算位於網格面上的通量，而高階重新估算法通常為上風基底之高階內插剖面。為了滿足單調性，近年來有一些概念被提出，大部份均為使用結構性網格之架構，例如 Borris 與 Book [90-93]的通量修正傳輸法(FCT)，採用一階準確之單調差分法為基礎，再結合受限制的反擴散通量，建構成高階準確法；Van Leer [88-89,94-95]的守恆律單調上游-中心(upstream-centered)法，藉由多區段限制函數重建通量之程序來加強單調性；Harten [30,32-33]提出以單調性作為流場中離散變數之量測指標並稱之為 TVD，此準則亦以通量限制

函數被 Sweby [54] 引用於 $r-\psi$ 關係圖；Leonard [36-38,88] 使用面上正規化變數 $\tilde{\phi}_f$ 與其上游網格正規化變數 $\tilde{\phi}_c$ 之關係提出他的單調準則。以上所述之各種單調準則，儘管在執行面有所不同，但可以證明有其相關性且甚至於有時候是相同的，然而在結構性網格架構上這些不同方式的轉換並不會造成執行上的困難，對於無結構性網格而言這種情況就顯得更複雜，而高階法就不如結構性網格進步，特別的原因在於單調準則需要依賴局部網格(local cell)及其上上游網格(far upstream cell)之資料，這些在結構性網格系統中可以輕易獲得，但在無結構性網格系統時就有困難，為了克服此問題，基於不同型式的單調準則，已有許多方法被提出[18,78,96]且有不同程度的進展。

高階準確法大概可分為通量混合法(flux blending method)及組合式通量限制函數法(composite flux limiter method)兩種類型，這兩種方法均要確保局部網格面上之估算值是介於相鄰網格之界限值內，企圖能在不影響準確度之情況下獲得抑制振盪之流場預測解。通量混合法係在一階上風法後再加入某種反擴散通量，使得這種方法具有敏銳的梯度解析能力且無過與不及之振盪解，例如 Borris 與 Brook 的通量修正傳輸法(FCT) [90-93]；或者是在非界限性高階準確法之中加入某種擴散機制來抑制振盪，例如 Chapman 的過濾補償方法(FRAM) [97]、Peric 等人[58,98]的通量混合法及 Zhu 與 Leschziner [62] 的 QUICK 與一階上風混合之局部震盪緩和法(local oscillation damping algorithm)等，其中混合因子的決定為本法成功應用之關鍵，而且由於是多步驟的算則，通量混合的處理技術需要較多的計算時間及經常無法在精確度與界限性之間獲得最佳化的混合因子，雖然此法可以獲得較一階上風準確法高的精確度，但當企圖模擬細部梯度變化時，仍會產生某種程度的擴散現象。

如眾所皆知的只有一階準確之上風法完全符合界限性準則(CBC)的充分條件，故能保證具有解的界限性(boundedness)，明顯的，高階差分法為了符合界限性準則，必須是非線性的分段架構組合(即視局部解的分佈而定)，**組合式通量限制函數法**，在網格面上的對流通量會隨著具有界限準則的通

量限制函數而調整，例如在空氣動力的流場模擬時，為了精確地補捉震波，以 TVD 通量限制函數為基礎所使用的差分方法，即屬此類型高階準確解析法。例如 Roe [29,99]或 Harten [30]之 MINMOD 限制函數及 Van Leer [89]之諧和限制函數等，這種方法所使用的通量限制函數為非線性，可藉由 Sweby [54]所提出之通量限制函數圖或 Leonard [37]所提出之正規化變數 (NV)及正規化變數圖(NVD)或對流界限準則(CBC)等，提供了發展**組合式通量限制函數法**之重要架構工具，簡化了履行高階準確解析法中高精確度與界限性之關聯性。

通量限制函數可以分為線性及非線性兩種型式，線性法則以 Kappa 公式(如 Van Leer [40]及 Roe [100]所提及之方式)為基礎，其由 CDS、QUICK、CUS、LUS 及 Fromm [1]等差分法組合而成；而非線性法則延伸 Kappa 公式以致能夠獲得一個通用的通量限制函數，確保在維持穩定度之情況下獲得高階界限差分值，目前常見的限制函數有 SMART [56]、STOIC [101]、H-QUICK [42]、UMIST [70]、WACEB [44]、Koren [102]、CUBISTA [45]、SUPERBEE [29]、MINMOD [30]或 SOUCUP [63]、OSPRE [42]、Van Albada [103]、MUSCL [28]、CHARM [104]、GAMMA [72]、Chakravarthy & Osher [31]、Hemker & Koren [105]、CLAM (HLPA) [89]及 Van Leer[89]等，其共同的特性即是在界限極值以外的時候均強制回歸到一階上風差分法，故會犧牲一些準確度。

不論是藉由 NVD 或 TVD 之架構要去創造產生新的差分方法，大概可分為下列三個步驟：

- (1).選定基本的差分方法，此方法可以是不具界限性，但必須具有準確及穩定性，此基本的差分方法只有在具界限性之區間會被採用。
- (2).採用某種偵測方式來判斷界限問題的區間，可以使用 TVD 法之「平滑監測值 r 」或 NVD 之「正規化變數 $\tilde{\phi}$ 」來達成偵測之目的。
- (3).最後，依據 TVD 或 NVD 之具界限性準則，來調適改變具界限性區間內

所使用之差分法。

4.2. 高階準確通量限制函數之對流項離散

對無結構性網格而言，只有局部網格面上之兩個相鄰網格可以被直接引用，因此最方便的面上差分方式就是上風差分或中央差分法，本文則使用中央差分/上風差分混合法，在第三章式(3.7)對流通量離散式中之 α_ϕ 為固定式混合因子，其值介於 0 與 1 之間(0=UDS；1=CDS)，即流場中梯度變化不論是在平滑或劇烈之區域均使用相同的對流項差分準確度，往往在流場中有震波存在時，為了維持計算過程的穩定性及抑制數值振盪，必須大幅調降混合因子，結果則造成整體的準確度連帶降低。若能依流場梯度變化情形來自動調整混合因子，在梯度變化平緩之區域使用高階準確差分；而只有在梯度變化劇烈或陡峭區域回歸至一階準確差分，使其既能產生高階準確又能具有解的界限性，如此就能獲得高準確度、高穩定性及界限性的對流項離散模式。

現在將式(3.7)中固定式混合因子 α_ϕ 改寫為隨流場梯度變化之限制函數 $\psi(r)$ ，表示如下：

$$\phi_f = \phi_f^{UDS} + \psi(r_f)(\phi_f^{CDS} - \phi_f^{UDS}) \quad (4.1)$$

為了說明方便，則假設流動方向為由局部網格 P 流向下游格點 D(如圖 4-1 所示)，所以

$$\phi_f^{UDS} = \phi_P \quad (4.2a)$$

$$\phi_f^{CDS} = \frac{\phi_P + \phi_D}{2} \quad (4.2b)$$

將式(4.2)代入式(4.1)展開後可以得到面上對流項的高階限制差分式為：

$$\phi_f = \phi_P + \psi(r_f)\left(\frac{\phi_D - \phi_P}{2}\right) \quad (4.3)$$

式(4.3)中劃底線項相當於上風差分法之反擴散項(anti-diffusion term)，其中 ϕ_p 與 ϕ_D 分別表示相對於 f 面之上游格點 P 與下游格點 D 之值， $\psi(r)$ 則表示隨梯度比 r 而變化之通量限制函數(flux limiter function)，其值界於 0 與 2 之間，當 $\psi(r) = 0$ 、1 及 2 時分別代表上風差分(UDS)、中央差分(CDS)及下風差分法(DDS)，由式(4.3)可知所有的高階法均可以表示為 CDS、UDS 及 DDS 之混合式。

參照 Roe [29]所提出之 TVD 方法，面上之差分值可以寫成一階上風差分之擴散項(diffusion term)與一個反擴散項(anti-diffusion term)之和，而此反擴散項為高階差分與一階上風差分之差再乘上一非線性之通量限制函數 $\psi(r)$ ，即所謂的高階對流通量限制差分法，其中 r 之計算方式採用上風型式之連續梯度(consecutive gradient)比(如圖 4-2(a)所示)：

$$r_f = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} \quad (4.4)$$

依據 Leonard [37]所提出正規化變數(NV)之定義：

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (4.5)$$

所以各格點及面上原始變數之正規化變數分別為：

$$\tilde{\phi}_P = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad (4.6a)$$

$$\tilde{\phi}_D = 1, \quad (4.6b)$$

$$\tilde{\phi}_U = 0, \quad (4.6c)$$

$$\tilde{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (4.6d)$$

其相對映的局部正規化變數示意圖，如圖 4-2(b)所示。

將式(4.3)及式(4.4)正規化後可推得

$$\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_p + \psi(r_f) \left(\frac{1 - \tilde{\phi}_p}{2} \right) \quad (4.7)$$

$$r_f = \frac{\tilde{\phi}_p}{1 - \tilde{\phi}_p} \quad (4.8)$$

由式(4.7)顯示，網格面上的正規化變數值 $\tilde{\phi}_f$ 恰僅為其上游網格 $\tilde{\phi}_p$ 之函數。從正規化變數圖(NVD)上可以很清楚地顯示 Gaskell 與 Lau [56]所提出之對流界限準則(CBC)區域(如圖 4-3(a)所示)及滿足 Harten [30]的 TVD 限制條件之範圍(如圖 4-3(b)所示)，因此若高階非線性差分法之限制函數在圖 4-3(a)所示之陰影區域內時，只表示具有界限性，但不完全滿足 TVD 之限制，必須再將其範圍縮小為圖 4-3(b)所示之陰影區域才具有 TVD 性質。

Sweby [54]亦證明藉由在一階上風通量差分法附加一受限制之反擴散通量，可獲得無數值振盪之二階準確差分法，推導出要滿足下列 TVD 條件之限制函數範圍：

$$0 \leq \left(\frac{\psi(r)}{r}, \psi(r) \right) \leq 2 \quad (4.9)$$

其用二維座標圖標示出局部守恆梯度比 r 與限制函數 $\psi(r)$ 之關係，可清楚研判所採用之任何限制函數是否具有 TVD 特性，這種圖示即通稱為 Sweby 的 TVD 關係圖(如圖 4-5 所示)。

透過式(4.7)及(4.8)可以很容易地將各種限制函數 $\psi(r)$ 對映到 NVD 上的正規化變數函數，常用的 NV 與 TVD 型式之線性差分法綜整如表 4-1 及非線性之限制函數則綜整如表 4-2 所示，而其表示在 NVD 或 Sweby 的 TVD 關係圖上之函數分佈，則分別如圖 4-5 到圖 4-22 所示。由表 4-2 中可明顯的看出，使用 TVD 型式的限制函數在程式的建構上變的容易許多且更有效率，而在使用正規化變數建構程式時的 IF 敘述結構就顯的有些多餘且耗時。

以高階對流項差分式(4.7)而言，必須先計算局部網格面上之梯度比方能代入限制函數得到限制子(limiter)，而梯度比在結構性網格系統可直接由式(4.4)或式(4.8)求得，然而在無結構性網格系統因為無法直接找到上上游網格 ϕ_u ，故無法直接引用，必須另尋求解決方案。假設流場變數為線性分佈，

虛構一上游格點 U，其位於距離局部網格 P 之 $-\vec{\delta}_{pD}$ 處(如圖 4-1 所示)，其中 $\vec{\delta}_{pD}$ 為格點 P 到下游格點 D 之距離向量，因此可以推得：

$$\phi_U = \phi_D - 2\nabla\phi_p \cdot \vec{\delta}_{pD} \quad (4.10)$$

將式(4.10)代入式(4.6a)，可以得到局部網格之正規化變數 $\tilde{\phi}_p$ ：

$$\tilde{\phi}_p = 1 - \frac{\phi_D - \phi_p}{2\nabla\phi_p \cdot \vec{\delta}_{pD}} \quad (4.11)$$

上式與 Jasak [78]提出 Gamma 差分法時所使用之正規化變數 $\tilde{\phi}_p$ 計算方式相同，將式(4.11)代入式(4.8)就可以獲得梯度比，接著就可以使用表 4-2 中的限制函數。

經由以上的說明吾人可以很清楚地瞭解通量限制函數的使用及其在無結構性網格中梯度比的計算方式，接著要進行傳輸方程之離散工作，由於在時間項、擴散項與第三章所述之離散方式相同，只有置於源項中的對流項之高階反擴散通量需要修訂，因此代數方程式(3.30a)中之源項則必須改寫為：

$$Q_\phi = \sum -\psi(r_f) \left\{ \dot{m}_f [w_f \phi_C + (1-w_f)\phi_p] - [\phi_p \max(\dot{m}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{m}_f, 0)] \right\} + \sum \Gamma_{\phi,f} \nabla \Phi_f (\vec{S}_f - \vec{d}) + q_{\phi,p} \Delta \Omega_p + S_\phi + \frac{\Delta \Omega_p}{\Delta t} (\rho\phi)_p^o \quad (4.12)$$

其中 $\psi(r_f)$ 就是限制函數。

另外在壓力修正方程式中密度的處理方式亦同樣使用高階限制函數法，故密度的處理則改為：

$$\rho_f = \max\left(\frac{\dot{m}_f}{|\dot{m}_f|}, 0\right) \left[\rho_p + \frac{\psi(r_f)}{2} (\rho_C - \rho_p) \right] + \min\left(\frac{\dot{m}_f}{|\dot{m}_f|}, 0\right) \left[\rho_C + \frac{\psi(r_f)}{2} (\rho_p - \rho_C) \right] \quad (4.13)$$

值得注意的，當使用通量限制函數法時密度限制子 $\psi(r_f)$ 之值會介於 0 與 2 之間(0=UDS；1=CDS；2=DDS)，雖然密度之差分準確階數會隨流場梯

度變化而自動調整，因為在疊代過程中密度的變化是非常劇烈的，當密度限制子 $\psi(r_f) > 1$ 時，則表示面上密度近似值趨向於下風值(downwind value)，此種情況則與超音速流的雙曲線型特性相違背，可能造成在高馬赫數流場中具有強震波處產生嚴重的數值振盪，且導致不易收斂之情況。因此為了避免發生這種情形，在密度的限制子必須加以限制使其最大值(dm)小於1，即：

$$\psi(r_f) = \max[\psi(r_f), dm] \quad (4.14)$$

因此質量流率之修正式則改寫成：

$$\begin{aligned} \dot{m}'_f = & B_C(p'_P - p'_C) - \rho_f^* D_f \overline{\nabla p'_f} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) + \\ & \max\left(\frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f^*}, 0\right) \left[K_P p'_P + \frac{\psi(r_f)}{2} (K_C p'_C - K_P p'_P) \right] + \\ & \min\left(\frac{\dot{m}_f^*}{\rho_f^*}, 0\right) \left[K_C p'_C + \frac{\psi(r_f)}{2} (K_P p'_P - K_C p'_C) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

故壓力修正線性方程式中之 S_2 式(3.59d)則修改為：

$$\begin{aligned} S_2 = & - \sum_{f=1}^n \rho_f^* D_f \overline{\nabla p'_f} \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \\ & + \sum_{f=1}^n \min(\dot{m}_f^*, 0) \frac{\psi(r_f)}{2 \rho_f^*} (K_C p'_C - K_P p'_P) \\ & + \sum_{f=1}^n \max(\dot{m}_f^*, 0) \frac{\psi(r_f)}{2 \rho_f^*} (K_P p'_P - K_C p'_C) \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3. 以特徵變數求對流通量之高階限制反擴散項

本文在對流項之離散式係使用隱式上風高階差分法，即一階上風隱式項再加上一高階顯式反擴散項，反擴散項之值則由局部網格面上的限制函數來控制，本文對於高階通量限制函數法之高階反擴散量之計算方式有兩種不同的策略，一為前節所述的原始變數限制函數法，已於前節中說明，另一種方式則為特徵變數限制函數法，首先利用局部網格及其相鄰網格之

密度(ρ)、速度(u, v)、壓力(p)及內能(ε)等將主要求解變數轉換為特徵變數，再使用特徵變數為基底代入 TVD 或 NVD 限制函數求得特徵變數通量限制子，再利用反置矩陣轉換為統御方程式中之各原始變數之高階反擴散項量，俾代入下一次疊代之對流差分項及質量流率面上密度計算時使用。

特徵變數為基底之高階反擴散項轉換公式簡要說明如下，詳細之公式推導則參考附錄 A。

4.3.1. 雙曲線型系統方程式

二維非黏性流體準線性守恆式表示為：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (4.17)$$

其相當於 Euler 統御方程式，其中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ (\gamma-1)\varepsilon/\rho & u & 0 & \gamma-1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & p/\rho & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ (\gamma-1)e/\rho & 0 & v & \gamma-1 \\ 0 & 0 & p/\rho & v \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

此處以原始變數(密度 ρ 、速度 u 與 v 、內能 ε)作為相依變數，另狀態方程式為：

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad (4.19)$$

其中 γ 為比熱常數。

定義矩陣 P：

$$P = k_1 A + k_2 B \quad (4.20)$$

其中 k_1 與 k_2 為任意實數，因為存在有一個如下之相似矩陣，故此系統為雙曲線型系統(hyperbolic system)，

$$T^{-1}PT = \Lambda \quad (4.21)$$

此處 Λ 為一由 P 的特徵值所形成的對角矩陣

$$\lambda_{1,2} = k_1 u + k_2 v, \quad \lambda_{3,4} = \lambda_1 \pm kc, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (4.22)$$

其中 c 為音速，矩陣 T 及 T^{-1} 分別表示如下：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho/c & \rho/c \\ 0 & k_2 & k_1/k & -k_1/k \\ 0 & -k_1 & k_2/k & -k_2/k \\ -c^2/\gamma(\gamma-1)\rho & 0 & c/\gamma & c/\gamma \end{bmatrix}, \quad (4.23a)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} (\gamma-1)/\gamma & 0 & 0 & -(\gamma-1)\rho/c^2 \\ 0 & k_2/k^2 & -k/k^2 & 0 \\ c/2\gamma\rho & k_1/2k & k_2/2k & (\gamma-1)/2c \\ c/2\gamma\rho & -k_1/2k & -k_2/2k & (\gamma-1)/2c \end{bmatrix} \quad (4.23b)$$

矩陣 T 的第 j 列為矩陣 P 的右特徵向量(right eigenvector)，相當於特徵值 λ_j 。

4.3.2. 特徵變數通量限制子之計算

在計算式(4.1)對流通量時，反擴散項是以原始變數為基底，接下來吾人將證明如何由特徵變數來決定反擴散項量。令 ϕ^l 為原始變數矩陣(即 ρ, u, v , 及 ε)， T_{lm} 及 T_{lm}^{-1} 為由式(4.23)推導而來的相似轉換矩陣，特徵變數之定義如下：

$$\phi^l = T_{lm}^{-1} \phi^m \quad (4.24)$$

將式(4.3)乘以 T_{lm}^{-1} 可以得到

$$\phi_f^m = \phi_p^m + \frac{\gamma_f^m(r^m)}{2} \Delta \phi^m \quad (4.25)$$

其中 $\gamma_f^m(r^m)$ 為相對映特徵變數 ϕ^m 的通量限制函數，而

$$\Delta \phi^m = \phi_D^m - \phi_P^m \quad (4.26)$$

梯度比 r^m 係以特徵變數為基底：

$$r^m \equiv \frac{\phi_P^m - \phi_U^m}{\phi_D^m - \phi_P^m} = \frac{\tilde{\phi}_P^m}{1 - \tilde{\phi}_P^m} \quad (4.27)$$

非結構性網格之正規化變數 $\tilde{\phi}_p^m$ 的計算方式與原始變數相同，即

$$\tilde{\phi}_p^m = 1 - \frac{\phi_D^m - \phi_P^m}{2\nabla\phi_P^m \cdot \bar{\delta}_{PD}} \quad (4.28)$$

將式(4.28)代入式(4.27)可得到特徵變數之梯度比，再代入諸如 SUPERBEE 或 Van Albada 等 TVD 或 NVD 之限制函數，即可獲得網格面上各特徵變數之限制子 $\gamma_f^m(r^m)$ 。值得注意的是，在某些流場問題會產生計算過程的不穩定現象，為了防止計算過程的收斂問題及抑制這種不穩定現象，對流通量必須要有更多的限制，加入更多的擴散機制。可藉由將限制函數局限在小於 1 以下 ($\gamma_{\max} < 1$)，以達到增加穩定性的效果。

$$\gamma_f^m = \max(\gamma_f^m, \gamma_{\max}) \quad (4.29)$$

另外當限制函數 γ_f 愈小於 1 即表示這種方法愈趨向上風差分法；愈大於 1 即表示愈趨向下風差分法。

接著由式(4.25)乘上 T_{lm} 就可以從特徵變數轉回到原始變數而得到下式：

$$\phi_f^l = \phi_P^l + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_m (T_{lm})_f [\gamma_f^m(r^m) \Delta\phi^m]}_{\text{anti-diffusion terms}} \quad (4.30)$$

其中總合值為 4 個特徵變數相乘後之合。

為了求得式(4.28)之正規化特徵變數，必須先求得 ϕ_D, ϕ_P 及 $\nabla\phi_P$ ，而本文在計算格點 D、P 及 U 之特徵變數的方式有兩種，其對計算結果將有很大的影響，第一種方式為矩陣轉換法(以下簡稱為 MD1)，特徵變數由下式計算而得：

$$\phi_D = T_P^{-1} \phi_D, \quad \phi_P = T_P^{-1} \phi_P, \quad \phi_U = T_P^{-1} \phi_U \quad (4.31)$$

其中矩陣 T^{-1} 係採用上游格點 P 上之原始變數值，用以計算特徵變數 ϕ_D 、 ϕ_P 及 ϕ_U 之值；另外一種比較簡單的方式，即直接計算法(簡稱為 MD2)，由式(4.24)直接導出之型式：

$$\phi^l = \begin{bmatrix} (\gamma-2)\rho/\gamma \\ (k_2u - k_1v)/k^2 \\ k_1u/2k + k_2v/2k + c/\gamma \\ -(k_1u/2k + k_2v/2k) + c/\gamma \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

格點 D、P 及 U 之特徵變數係直接由該點的原始變數代入求得。在局部網格 P 之梯度 $\nabla\phi_p$ 計算時，不只格點 D、P 及 U，其餘所有的相鄰網格都必須先使用 MD1 或 MD2 轉換為特徵變數，再利用 3.5 節之梯度計算方式求得，故所需花費之計算時間較長。

在計算特徵變數時有兩個常數 k_1 及 k_2 必須先給定，通常採用面向量的單位向量之 X 與 Y 方向分量，使用此方式必須要對網格的每個面均重複計算，另一種方式則為使用單一方向，即局部網格 P 之壓力梯度向量，是很合適的選擇，如此使得計算時間更節省，後續之計算則均採用此方式，即：

$$\begin{aligned} k_1 &= \nabla p_p^x / |\nabla p_p|, k_2 = \nabla p_p^y / |\nabla p_p| \\ k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

經由上述之推導傳輸方程之離散代數方程式(4.65a)中之源項則必須改寫為：

$$\begin{aligned} Q_\phi &= \sum -\dot{m}_f \left\{ \sum_m \frac{1}{2} (T_{lm})_f [\gamma_f^m(r^m) \Delta\phi^m] \right\} \\ &+ \sum \Gamma_{\phi,f} \nabla\phi_f (\bar{S}_f - \bar{d}) + q_{\phi,p} \Delta\Omega_p + S_\phi + \frac{\Delta\Omega_p}{\Delta t} (\rho\phi)_p^o \end{aligned} \quad (4.34)$$

其中在解 u 動量方程式時 $l=2$ ；v 動量方程式時 $l=3$ ；而當解能量方程式時 $l=4$ 且對流項之反擴散項必須再除以定容比熱常數 c_v ，如下式所示：

$$\begin{aligned} Q_\phi &= \sum -\frac{\dot{m}_f}{c_v} \left\{ \sum_m \frac{1}{2} (T_{lm})_f [\gamma_f^m(r^m) \Delta\phi^m] \right\} \\ &+ \sum \Gamma_{\phi,f} \nabla\phi_f (\bar{S}_f - \bar{d}) + q_{\phi,p} \Delta\Omega_p + S_\phi + \frac{\Delta\Omega_p}{\Delta t} (\rho\phi)_p^o \end{aligned} \quad (4.35)$$

面上密度的處理則改為：

$$\rho_f = \phi_f^1 = \phi_p^1 + \frac{1}{2} \sum_m (T_{lm})_f [\gamma_f^m(r^m) \Delta\phi^m] \quad (4.36)$$

而在密度修正量的部份因為無法計算修正量的特徵變數，因其不會改變收斂解，所以直接將其捨去，因此質量流率之修正式則改寫成：

$$\dot{m}'_f = B_C(P'_p - P'_C) - \rho_f^* D_f \overline{\nabla P}'_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (4.37)$$

故壓力修正線性方程式中式(3.59d)之 S_2 只剩下垂直導數擴散項：

$$S_2 = - \sum_{f=1}^n \rho_f^* D_f \overline{\nabla P}'_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (4.38)$$

4.4. 求解程序

高階通量限制函數法之求解步驟如下：

1. 給初始入口速度 V_{in} 、面上質量流率 \dot{m}_f^* ，猜初始壓力場 P_p^* (絕對壓力場)、溫度場 T_p^* ，而密度場 ρ_p^* 由狀態方程式求出。
2. 計算動量方程式之係數，計算每一個網格加總之動量方程式之殘值，利用矩陣解子求出內點速度場 V_p^* ，並由邊界條件更新邊界點速度。
3. 計算面上速度 V_f^* 、密度 ρ_f^* 及更新面上質量流率 \dot{m}_f^* 。
4. 計算壓力修正方程式之係數，計算每一個網格加總之質量殘值，利用矩陣解子求出內點壓力修正值 p' ，並更新邊界點壓力修正值。
5. 修正網格中心點速度 V_p^{**} 、面上質量流率 \dot{m}_f^{**} ，及網格中心之壓力場 p_p^{**} 。
6. 非黏性(等熵)流場則由停滯溫度 T_o 或總焓 (H_o) 及速度場 V_p^{**} 更新溫度場 T_p^{**} ；黏性流場則由能量方程式解出溫度場 T_p^{**} ，再由狀態方程式更新密度場 ρ_p^{**} ，同時計算每一個網格加總之能量方程式之殘值。
7. (1)若使用原始變數法：計算每一個控容面的限制因子 $\psi(r)$ ，以作為下一疊代之對流項差分式及面上密度時使用；(2)若使用特變變數法：以矩陣轉換法(MD1)或直接計算法(MD2)將原始變數轉換為特徵變數，並用以計算每一個控容面的特徵變數通量限制因子 $\gamma_f^m(r^m)$ ，再將其轉換回原始變數之高階反擴散項量，以作為下一疊代之對流項差分式及質量流率之面上密度計算時使用。

- 將求得的 P_p^{**} 當作新的 P_p^* ，重覆步驟 2-8，直到動量方程式之加總之殘值、能量方程式之加總之殘值及壓力修正方程式之加總質量殘值滿足收斂條件(小於 $1.e-3$)為止。



第 5 章 守恆變數求解法

本文亦嘗試採用守恆變數(conserved variable)來求解動量方程式，壓力修正方程式則與不可壓縮流之推導方式相同，只是密度的變化是與守恆速度($\rho\bar{v}$)的變化結合在一起，本文參考 Wornom 與 Hafez [25]提出之遲滯密度(retarded density)及遲滯壓力(retarded pressure)法，將不可壓縮流之壓力修正法延伸至可壓縮流之計算。當使用遲滯密度法時，以遲滯密度來修正動量方程式中面上的速度，可使不可壓縮流橢圓形型式之傳輸方程產生在穿音速及超音速時之消散機制，來求解可壓縮流；而當使用遲滯壓力法時，動量方程式及壓力修正方程式中之壓力均使用遲滯壓力，以獲得同樣的效果，可用來求解可壓縮流。

5.1. 遲滯密度法

採用不可壓縮流之壓力修正求解方式結合遲滯密度之人工黏滯法，延伸至可壓縮流之計算方法，使其具有震波補捉的能力。使用本法必須有三個基本要件：首先要使用非穩態型式之 Navier-Stokes 統御方程式，其時間項之離散則採用一階差分法；其次假設總焓 H 守恆，所以不需求解能量方程式；第三則非採用原始變數(primitive variables)求解，而改用守恆變數(conserved variables)，因此變數之變動量可表示如下：

$$(\rho V_i) = (\rho V_i)^* + (\rho V_i)' \quad (5.1)$$

使用具有二階人工消散特性之”遲滯密度”方式，其基本概念可以用二維的全勢能方程(potential equation)說明之，二維的全勢能方程之守性式表示如下：

$$(\tilde{\rho}\Phi_x)_x + (\tilde{\rho}\Phi_y)_y = 0 \quad (5.2)$$

其中 $\tilde{\rho}$ 即為遲滯密度，依據 Hafez 等人[52]所提出之定義，在一維的情況為：

$$\tilde{\rho} \equiv \rho - \bar{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \quad (5.3)$$

Wornom 等人[25]亦使用遲滯密度之人工黏滯法配合原解次音速流場之兩點法(two-point method)求解穿音速流場，其使用之方式藉由遲滯密度代入連續方程式中以改變通量項，如下所示：

$$\rho_i + (\tilde{\rho}u)_x = 0 \quad (5.4)$$

其中

$$\tilde{\rho} = \rho - \mu \Delta x \rho_x \text{ 或 } \tilde{\rho}_i = \rho_i - \mu_{i-1/2} (\rho_i - \rho_{i-1}) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i-1/2} &= \alpha \max[0, 1 - (M_c / M_{i-1/2})^2], \\ M_c &= 0.975, M_{i-1/2} = \frac{1}{2} (M_i + M_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

式(5.5)中之 α 表示對上風基底的馬赫數控制函數 μ 再予以鬆弛處理，大於 1 則增強遲滯效應，小於 1 則鬆弛遲滯效應； M_c 為參考馬赫數，表示當對流面上之局部馬赫數大於參考馬赫數 M_c 時，則使用遲滯密度，若局部馬赫數小於參考馬赫數 M_c 時，則遲滯密度等於真實密度； $M_{i-1/2}$ 表示為面上馬赫數，其近似值則採用中央差分法(CDS)。

Lien 等人[15]以解不可壓縮流之 SIMPLE 壓力修正法，運用遲滯密度延伸至求解可壓縮流，其運用方式所有的通量變數均使用上風基底，並以遲滯密度修訂動量方程式中之面上速度，如此處理則可產生消散之機制，使不可壓縮流之方法在穿音速及超音速時具有穩定的功能，以一維情況來說明，對流守恆變數通量的梯度可以表示如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{\rho u \phi}}{\tilde{\rho}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho u \phi}{\rho - \bar{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x} \right) = \frac{\partial (u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial \left[\bar{\mu} \left(\frac{u \phi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \right]}{\partial x} + HOT \quad (5.7)$$

上式之右邊項為左邊項之展開式，HOT 表示為高階項，而劃底線之項則代表一個相當於是上風基底的消散機制項。

二維遲滯密度之計算方式可寫為(參考圖 5-1(a)之標註)：

$$\tilde{\rho} = \rho - \bar{\mu}\rho_s\Delta s = \rho - \bar{\mu}[\cos(\beta)\rho_x\Delta x + \sin(\beta)\rho_y\Delta y] \quad (5.8)$$

其中

$$\cos(\beta) = u/\sqrt{u^2 + v^2}, \quad \sin(\beta) = v/\sqrt{u^2 + v^2}, \quad (5.9)$$

$$\bar{\mu} = \max\{0, k[1 - (\frac{M_{ref}}{M_f})^2]\} \quad (5.10)$$

其中 M_{ref} 之值介於 0.975~1.1， k 值之設定原則：若流場中有正震波，則設 $k=1$ ；若有強的斜震波，則設 $k=0.6$ ， M_f 為網格面上之局部馬赫數。

Lien [73]再運用上述方式由結構性網格修訂至無結構性網格， M_{ref} 之值取 0.7， k 之值則取 0.55。

本文運用此概念於無結構性網格系統，採用之方式為依據一維遲滯密度之定義 $\tilde{\rho} = \rho - \bar{\mu}\rho_s\Delta s$ ，先求得網格中心之遲滯密度，再利用內插法得到網格面上的遲滯密度及體積流率，而二維網格中心之遲滯密度計算方式類似 Lien 的方法，以三角形網格說明如下(參閱圖 5-1(b)之標註)：

$$\tilde{\rho}_p = \rho_p - \bar{\mu}_f\rho_s\Delta s = \rho_p - [\bar{\mu}_{f,C1}\cos(\theta_1)\rho_{d_1}\Delta d_1 + \bar{\mu}_{f,C2}\cos(\theta_2)\rho_{d_2}\Delta d_2] \quad (5.11)$$

其中 C_1 及 C_2 對 f 格面而言為上游網格， θ_1 及 θ_2 分別為相鄰網格中心之向量 $\bar{\mathbf{d}}_{C_1P}$ 及 $\bar{\mathbf{d}}_{C_2P}$ 與局部網格中心速度向量 \vec{V}_p 之夾角，即

$$\cos\theta_1 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{C_1P} \cdot \vec{V}_p}{|\bar{\mathbf{d}}_{C_1P}| |\vec{V}_p|}, \quad \cos\theta_2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{C_2P} \cdot \vec{V}_p}{|\bar{\mathbf{d}}_{C_2P}| |\vec{V}_p|} \quad (5.12)$$

對局部網格 P 之相鄰網格作逐一檢測，如果兩向量之內積 $\bar{\mathbf{d}}_{C_iP} \cdot \vec{V}_p > 0$ ，則表示相鄰網格 C_i 對 f 格面而言為上游網格，所以在計算局部網格 P 的遲滯壓力時，該網格 C_i 會有相當的貢獻，必須予以加總。若 $\bar{\mathbf{d}}_{C_iP} \cdot \vec{V}_p \leq 0$ ，則表示相鄰網格 C_i 對 f 格面而言為下游網格，則不予考慮，藉由 $\bar{\mathbf{d}}_{C_iP} \cdot \vec{V}_p$ 準則可很容

易判別上下游關係。式(5.10)中所使用之 μ_f 計算式中對流面上的局部馬赫數述採用中央差分法(CDS)。

5.2. 遲滯壓力法

McGuirk 及 Page [24]提出以守恆變數($\rho\vec{V}$)求解動量方程式並採用非穩態之統御方程式離散，其優點有二：其一為由含時間項之方程式可以直接獲得單位體積之性質變化，不像原標準方法為了得到新的速度，必須將時間的變量除以密度；其二為動量的變化可以重新詮釋為質量流率的變化，將壓力與質量流率鏈結在一起且質量守恆式之時間項只有密度，此較原標準型有利於穿音速流場問題解析。然而此方式在超音速流的物理上是不正確的，因為壓力與質量流率鏈結之統御方程式無法模擬雙曲線型式特性，在所有的速度下，壓力修正方程式基本上都還是橢圓形的特性，為了解決這個問題，其採用 Wornom 與 Hafez [25]提出”遲滯壓力”之人工黏滯法概念，於動量方程式及壓力修正方程式中使用遲滯壓力，以獲得雙曲線型式之統御方程式特性，俟獲得新的動量及遲滯壓力後，再將遲滯壓力轉換為真實壓力以求出密度，而遲滯壓力轉換為真實壓力之值係由局部馬赫數決定，一維遲滯壓力之定義為：

$$\tilde{P} = P + \mu\Delta x P_x \quad \text{或} \quad \tilde{P}_i = P_i + \mu_{i-1/2}(P_i - P_{i-1}) \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i-1/2} &= k \max[0, 1 - (M_{ref}/M_{i-1/2})^2] \\ \text{其中,} \quad M_{i-1/2} &= \frac{1}{2}(M_i + M_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中 \tilde{P} 表示遲滯壓力； P 表示真實壓力； $M_{i-1/2}$ 為上游網格面上的局部馬赫數，採用中央差分近似法； μ 為遲滯壓力與真實壓力之影響函數，其計算方式與遲滯密度法中所使用之 μ 函數相同，唯參考馬赫數 M_{ref} 及常數 k 之設定須隨不同流場狀況調設。

動量方程式及壓力修正方程式中之壓力均為遲滯壓力，然而由於密度之變量係以狀態方程式與真實壓力作鏈結，只有在真實壓力為遲滯壓力之

顯性函數關係時才成立，因此由真實壓力轉換為遲滯壓力則為隱性函數關係，如下所示：

$$\tilde{P}_i = P_i + \mu_{i-1/2}(\tilde{P}_i - \tilde{P}_{i-1}) \quad (5.15)$$

所以真實壓力之計算由上式轉換後可推得：

$$P_i = \tilde{P}_i - \mu_{i-1/2}(\tilde{P}_i - \tilde{P}_{i-1}) \quad (5.6)$$

通常在發展使用遲滯壓力之壓力修正法時均將參考馬赫數 M_{ref} 及常數 k 設定為 1，經由測試結果顯示在噴嘴喉部附近會有非物理性的膨脹波，Wornom [55] 曾嘗試 $M_{ref}=0.9$ 希望在音點之前就給予消散項，但結果仍不理想，McGuirk 與 Page [24] 則修改 μ 函數變為：

$$\mu_{i-1/2} = \max\{0, k_1[1 - (M_{ref1}/M_{i-1/2})^2], k_2[1 - (M_{ref2}/M_{i-1/2})^2]\} \quad (5.17)$$

上式中第一項之參考馬赫數 $M_{ref1}=1$ 及常數 $k_1=1$ ，而第二項 $M_{ref2}=0.7$ ， $k_2=0.7$ ，但是如果壓力隨流動方向增加時， k_2 則局部設為 0。經由以上的修訂之後可改善上述的問題。

本文運用遲滯壓力之概念於無結構性網格系統，採用之方式為依據一維遲滯壓力之定義 $\tilde{P} = P + \mu \Delta s P_s$ ，利用 $P_i = \tilde{P}_i - \mu_{i-1/2}(\tilde{P}_i - \tilde{P}_{i-1})$ 公式求得真實壓力，再由狀態方程式計算密度，而二維網格中心之真實壓力計算方式類似遲滯密度的方法，以三角形網格說明如下(參閱圖 5-1(b)之標註)：

$$P_p = \tilde{P}_p - \bar{\mu}_f \tilde{P}_s \Delta s = \tilde{P}_p - [\bar{\mu}_{f,C1} \cos(\theta_1) \tilde{P}_{d1} \Delta d_1 + \bar{\mu}_{f,C2} \cos(\theta_2) \tilde{P}_{d2} \Delta d_2] \quad (5.18)$$

其中 C_1 及 C_2 對 f 格面而言為上游網格， θ_1 及 θ_2 分別為相鄰網格中心之向量 \vec{d}_{C1P} 及 \vec{d}_{C2P} 與局部網格中心速度向量 \vec{V}_p 之夾角，計算方式同前。其中 μ 函數之網格面上局部馬赫數(local Mach number)之近似法，則使用中央差分法(CDS)；而 k_1 、 k_2 、 M_{ref1} 及 M_{ref2} 等常數之值則視不同流場調設，期獲得高準確且無振盪之數值解。

5.3. 傳輸方程式的離散

以守恆變數 $(\rho u, \rho v, \rho w)$ 求解之有限容積傳輸方程式可簡單表示如下：

$$\int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{transient}} d\Omega + \int_S \underbrace{(\bar{\mathbf{V}}\phi)}_{\text{Convection}} - \underbrace{\Gamma_{\phi} \frac{\nabla \phi}{\rho}}_{\text{Diffusion}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \int_{\Omega} \underbrace{q_{\phi}}_{\text{Source}} d\Omega \quad (5.19)$$

其中積分下標 s 代表面積分；積分下標 Ω 代表體積分； ϕ 分別代表守恆變數 $(\rho u, \rho v, \rho w)$ 或溫度 (T) ；而擴散係數 Γ_{ϕ} 則分別代表動黏滯係數 (μ) 或熱傳導係數 (κ) 。然在式(2.1)之連續方程式沒有擴散項及源項，它將用來推導壓力修正方程式；而其他沒有出現在式(5.19)左邊之項均納入源項中，有關時間項、源項、邊界條件及梯度的計算方式同前，對流項及擴散項之型式與不可壓縮流的處理方式相當，簡要說明如下：

5.3.1. 對流項

對任意守恆變數 ϕ 之對流通量 F^C (Convection Flux) 可以表示為：

$$F^C = \int_S \phi \bar{\mathbf{V}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \approx \sum_f (\phi \bar{\mathbf{V}})_f \cdot \bar{\mathbf{S}}_f = \sum_f \dot{q}_f \phi_f = \sum_f F_f^C \quad (5.20)$$

其中 \dot{q}_f 表示體積流率； ϕ_f 表示在控容體 f 面中點之差分值，差分方式採用中央/上風混合差分法或高階通量限制函數差分法：

$$\phi_f = \phi_f^{UDS} + \alpha_{\phi} (\phi_f^{CDS} - \phi_f^{UDS}) \quad (5.21a)$$

$$F_f^C = F_f^{UDS} + \alpha_{\phi} (F_f^{CDS} - F_f^{UDS}) \quad (5.21b)$$

其中

$$F_f^{UDS} = \phi_P \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{q}_f, 0) \quad (5.21c)$$

$$F_f^{CDS} = \dot{q}_f [w_f \phi_C + (1 - w_f) \phi_P] \quad (5.21d)$$

其中 f 表示任一面之中點， P 代表網格中心； C 代表該面相鄰網格之中心，

劃底線之部份以顯項來處理，將它放入源項中；另 α_ϕ 代表混合因子(blending factor)，其值介於 0 與 1 之間(0=UDS；1=CDS)，或通量限制子(flux limiter) $\psi(r)$ ，其值介於 0 與 2 之間(0=UDS；1=CDS；2=DDS)。經整理後可得面上之對流通量表示如下：

$$F_f^C = \phi_p \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_c \max(-\dot{q}_f, 0) + \alpha_\phi \left\{ \dot{q}_f [w_f \phi_c + (1 - w_f) \phi_p] - [\phi_p \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_c \max(-\dot{q}_f, 0)] \right\} \quad (5.22a)$$

或

$$F_f^C = \phi_p \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_c \max(-\dot{q}_f, 0) + \psi(r) \left\{ \dot{q}_f [w_f \phi_c + (1 - w_f) \phi_p] - [\phi_p \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_c \max(-\dot{q}_f, 0)] \right\} \quad (5.22b)$$

5.3.2. 擴散項

對任意變數 ϕ 之擴散通量 F^D (Diffusion Flux) 可以表示為：

(1). 若使用遲滯壓力法

$$F^D = - \int_S \Gamma_\phi \left(\frac{\nabla \phi}{\rho} \right) \cdot d\vec{S} \approx \sum_f - \left(\Gamma_\phi \frac{\nabla \phi}{\rho} \right)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (5.23a)$$

(2). 若使用遲滯密度法

$$F^D = - \int_S \Gamma_\phi \left(\frac{\nabla \phi}{\tilde{\rho}} \right) \cdot d\vec{S} \approx \sum_f - \left(\Gamma_\phi \frac{\nabla \phi}{\tilde{\rho}} \right)_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (5.23b)$$

同樣使用 over-relaxed 法[81]增加計算的穩定性，可推得擴散項之離散式如下：

(1). 若使用遲滯壓力法

$$F_f^D = \frac{\Gamma_f |\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \left[\left(\frac{\phi}{\rho} \right)_C - \left(\frac{\phi}{\rho} \right)_P \right] + \Gamma_f \left(\frac{\nabla \phi}{\rho} \right)_f (\vec{S}_f - \vec{d}) \quad (5.24a)$$

(2). 若使用遲滯密度法

$$F_f^D = \frac{\Gamma_f |\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{PC} \cdot \bar{S}_f} \left[\left(\frac{\phi}{\bar{\rho}} \right)_C - \left(\frac{\phi}{\bar{\rho}} \right)_P \right] + \Gamma_f \left(\frac{\nabla \phi}{\bar{\rho}} \right)_f (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (5.24b)$$

其中劃底線之部份以顯項來處理，將其置於源項中。

5.3.3. 線性代數方程

將所有控容面上之對流與擴散通量及源項合併後，即可將傳輸方程式離散成如下之代數方程式：

$$A_p \Phi_p = \sum_C A_C \Phi_C + Q_\phi, \quad (5.25)$$

$$A_C = \frac{\Gamma_{\phi,C}}{\rho_C} \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{PC} \cdot \bar{S}_f} + \max(-\dot{q}_f, 0) \quad (5.26)$$

$$A_p = \sum_{f=1}^n \left[\frac{\Gamma_{\phi,P}}{\rho_P} \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{PC} \cdot \bar{S}_f} + \max(\dot{q}_f, 0) \right] + \frac{\Delta \Omega_P}{\Delta t} \quad (5.27)$$

$$Q_\phi = \sum_{f=1}^n -\alpha_\phi \left\{ \dot{q}_f [w_f \phi_C + (1-w_f) \phi_P] - [\phi_P \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{q}_f, 0)] \right\} + \sum_{f=1}^n \Gamma_{\phi,f} \left(\frac{\nabla \phi}{\rho} \right)_f (\bar{S}_f - \bar{d}) + q_{\phi,P} \Delta \Omega_P + \frac{\Delta \Omega_P}{\Delta t} \phi_P^o \quad (5.28a)$$

若使用遲滯密度法時，線性代數方程中的 ρ 都必須改用 $\bar{\rho}$ 。其中 A_C 包含了對流項與擴散項之貢獻， A_p 為相鄰網格係數 A_C 之和，而源項 Q_ϕ 則包含了所有的顯項部份。若對流項之離散方式使用 CDS/UDS 之混合法，則 α_ϕ 為 CDS/UDS 之混合因子；若使用第四章所述之高階限制函數法，則以限制函數 $\psi(r)$ 取代 α_ϕ ，如下式所示：

$$Q_\phi = \sum_{f=1}^n -\psi(r) \left\{ \dot{q}_f [w_f \phi_C + (1-w_f) \phi_P] - [\phi_P \max(\dot{q}_f, 0) - \phi_C \max(-\dot{q}_f, 0)] \right\} + \sum_{f=1}^n \Gamma_{\phi,f} \left(\frac{\nabla \phi}{\rho} \right)_f (\bar{S}_f - \bar{d}) + q_{\phi,P} \Delta \Omega_P + \frac{\Delta \Omega_P}{\Delta t} \phi_P^o \quad (5.28b)$$

為了使疊代過程較穩定，離散程式之鬆弛處理及線性方程求解方式，與原始變數求解法相同。

5.4. 壓力、密度及速度偶合關係式

以守恆變數($\rho u, \rho v, \rho w$)求解動量方程，而壓力修正方程式與不可壓縮流之推導方式相同，只是密度的變化不是單獨處理，而是與守恆速度($\rho \vec{V}$)的變化結合在一起，在求解可壓縮流時，為了使不可壓縮流橢圓形型式之壓力修正方程產生在穿音速及超音速時之消散機制，必須使用遲滯密度來修正動量方程式中面上的速度，或在動量方程式及壓力修正方程式中均使用遲滯壓力。

5.4.1. 面上質量流率的處理

以不可壓縮流而言，質量流率之修正量係由面上速度之修正而求得，說明如下：

$$\dot{m}_f^{**} = [\rho^* (V^* + V')] \cdot \vec{S}_f \quad (5.29)$$

$$\dot{m}'_f = \rho^* V'_f \cdot \vec{S}_f \quad (5.30)$$

然而對可壓縮流而言，質量流率與垂直面上之速度分量 \vec{V}_n 及密度均有關，相對於不可壓縮流，密度的變化顯得非常大，所以質量流率之修正必須包含速度與密度之修正量，若以守恆變數求解時，其壓力修正方程式與不可壓縮流一樣，只是其速度之修正式已隱含密度之修正量，說明如下：

$$\dot{m}_f^{**} = [(\rho \vec{V})^* + (\rho \vec{V})'_f] \cdot \vec{S}_f = (\rho \vec{V})^*_f \cdot \vec{S}_f + (\rho \vec{V})'_f \cdot \vec{S}_f \quad (5.31)$$

$$\Rightarrow \dot{m}'_f = (\rho \vec{V})'_f \cdot \vec{S}_f \quad (5.32)$$

面上的密度與速度修正量可表為：

(1). 若使用遲滯壓力法時：

$$(\rho\vec{V})'_f = (\rho\vec{V})_f^{**} - (\rho\vec{V})_f^* = -\left(\overline{\frac{\Delta\Omega}{A_p}}\right)_f \nabla\tilde{P}'_f = -D_f \nabla\tilde{P}' \quad (5.33a)$$

(2). 若使用遲滯密度法時：

$$(\rho\vec{V})'_f = (\rho\vec{V})_f^{**} - (\rho\vec{V})_f^* = -\left(\overline{\frac{\Delta\Omega}{A_p}}\right)_f \nabla P'_f = -D_f \nabla P' \quad (5.33b)$$

由於密度已和速度結合為守恆變數，因此在傳輸方程式中對流項的離散式則必須將質量流率 \dot{m}_f 改為體積流率 \dot{q}_f ，通過面上的質量流率 \dot{m}_f 之計算方法與式(3.48a)相同，只是若使用遲滯壓力法時則式(3.48a)中之壓力必須改用遲滯壓力，而通過面上的體積流率 \dot{q}_f 之計算方法表示如下：

(1). 若使用遲滯壓力法時：

$$\dot{m}_f = \rho_f \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f - B_C [(\tilde{p}_C - \tilde{p}_P) - \overline{\nabla\tilde{p}_f} \cdot \bar{\vec{\delta}}_{PC}] \quad (3.34a)$$

$$\dot{q}_f = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \approx \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f = \frac{\dot{m}_f}{\rho_f} \quad (5.34b)$$

(2). 若使用遲滯密度法時：

$$\dot{m}_f = \rho_f \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f - B_C [(p_C - p_P) - \overline{\nabla p_f} \cdot \bar{\vec{\delta}}_{PC}] \quad (3.34c)$$

$$\dot{q}_f = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \approx \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f = \frac{\dot{m}_f}{\tilde{\rho}_f} \quad (5.34d)$$

5.4.2. 壓力修正線性代數方程

將式(5.33)代入式(5.32)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{m}'_f &= (\rho \vec{V})'_f \cdot \vec{S}_f = - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla p'_f \cdot \vec{S}_f \\
&= - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} (p'_C - p'_P) - \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla p'_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d})
\end{aligned} \tag{5.35}$$

若使用遲滯壓力法時 p 必須改為 \tilde{p} ，其中劃底線之部份則以顯項處理。

修正後之速度場滿足連續方程式：

$$(\rho_P^{**} - \rho_P^o) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \tag{5.36a}$$

$$\sum_f \dot{m}'_f + Q_m^* = 0 \tag{5.36b}$$

其中

$$Q_m^* = \rho' \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^* \tag{5.36c}$$

整理後可推得所要的壓力修正方程式如下：

$$A_p p'_P = \sum_C A_C p'_C + S_1 + S_2 \tag{5.37}$$

其中

$$A_p = \sum_{f=1}^n \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} + K_p \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \tag{5.38}$$

$$A_C = \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \frac{|\vec{S}_f|^2}{\vec{\delta}_{PC} \cdot \vec{S}_f} \tag{5.39}$$

$$S_1 = - \sum_{f=1}^n \dot{m}_f^* \tag{5.40}$$

$$S_2 = \sum_{f=1}^n \left(\frac{\Delta \Omega}{A_p} \right)_f \nabla p'_f \cdot (\vec{S}_f - \vec{d}) \tag{5.41}$$

式中若使用遲滯壓力法時 p 必須改為 \tilde{p} ， A_C 包含了擬似擴散項之貢獻，而 A_p

為相鄰網格係數 A_c 之和，與不可壓縮流之型式相同，故必須藉由遲滯密度或遲滯壓力之人工消散項之機制，方能模擬雙曲線型式之超音速流場特性。式(5.37)之壓力修正線性方程式亦使用雙共軛法矩陣解子(BICG) [83]。

5.4.3. 邊界條件

邊界條件的處理與原始變數求解法相同皆可直接引用。

5.4.4. 求解程序

本文發展之守恆變數求解法則有兩種類型，即遲滯壓力法及遲滯密度法，求解步驟說明如下：

1. 給初始入口速度 V_{in} 、面上質量流率 \dot{m}_f^* ，猜初始壓力場 p_p^* 或 \tilde{p}_p^* (遲滯壓力法時)、溫度場 T_p^* ，而密度場 ρ_p^* 由狀態方程式求出。
2. 計算動量方程式之係數，並計算每一個網格加總之動量方程式殘值，利用矩陣解子求出內點速度場 $(\rho V)_p^*$ ，並由邊界條件更新邊界點速度。
3. 計算面上速度 $(\rho V)_f^*$ 及更新面上質量流率 \dot{m}_f^* 。
4. 計算壓力修正方程式之係數，並計算每一個網格加總之質量殘值，利用矩陣解子求出內點壓力修正值 p' ，並更新邊界點之壓力修正量。
5. 修正網格中心點速度 $(\rho V)_p^{**}$ 、面上質量流率 \dot{m}_f^{**} 及網格中心之壓力場 p_p^{**} 或 \tilde{p}_p^{**} (遲滯壓力法時)。
6. 由停滯溫度 T_0 或總焓 (H_0) 及速度場 $V_p^{**} [= (\rho V)^{**} / \rho^*]$ 更新溫度場 T_p^{**} 。
7. (1)若使用遲滯壓力法：在動量方程式及壓力修正方程式中所使用的壓力為遲滯壓力 \tilde{p} ，在求解密度前須先將遲滯壓力 \tilde{p} 轉換為真實壓力 p 後，再由狀態方程式更新密度場 ρ_p^{**} 與體積流率 \dot{q}_f^{**} 。(2)若使用遲滯密度法：由狀態方程式更新密度場 ρ_p^{**} ，再利用真實密度 ρ_p^{**} 求出遲滯密度 $\tilde{\rho}_p^{**}$ ，計算通過面上的體積流率 \dot{q}_f^{**} 。

8. 若搭配使用限制函數法，則計算每一個控容面的限制因子 $\psi(r)$ ，以作為下一疊代之對流項差分式時使用。
9. 將求得的 p_p^{**} 或 \tilde{p}_p^{**} 當作新的 p_p^* 或 \tilde{p}_p^* ，重覆步驟2-9，直到動量方程式之加總殘值及壓力修正方程式之加總質量殘值滿足收斂條件(小於 $1.e-3$)為止。



第 6 章 網格產生

無結構性網格在二維流場多採用 3 邊形或 4 邊形，在三維則為 4 面體或 6 面體，當然亦有任意邊形或混合式網格，但其產生方式就較複雜。故無結構性網格之計算解子(solver)均採用有限體積法(FVM)求解。

流場計算分析工作依程序可概分為三個部份，一是前處理即網格產生、二是流場計算即計算解子、三是後處理即是流場性質顯示。無結構性網格之產生有很多技巧及方式，然而，因其是流場計算分析工作之前處理，產生之網格必須能依照一定的格式正確地輸入計算解子以進行流場計算，雖然已具有簡單外形之 3 邊或 4 邊形網格之產生工具，鑑於對複雜外形網格之產生須投入大量時間，以區塊網格方式產生後再合併處理，網格常需配合計算需求而調整亦相當費時；且目前在市面上雖有許多發展相當成熟且可快速產生網格之商業化工程分析軟體，可以快速產生二維或三維之複雜外形無結構性網格，例如 MSC.Patran、FLUENT、CATIA、SolidWork 或其他 Advancing Front 網格產生程式等，但因其格式均搭配其自身之計算解子(solver)，對吾人自行發展計算程式所需之網格格式而言，無法直接使用，然而其亦有一些問題，如網格之疏密控制或任意邊形之混合網格需求等。

為了解決網格產生問題，吾人發展一套網格產生處理程式，可以將不同方式產生之不同形狀(3 邊(面)至 6 邊(面))、相鄰區塊之網格，整合為一組滿足吾人所發展之計算解子所需網格，大大地縮短前處理時間。

建置完成網格整合產生處理程式之後，只需要獲得無結構性網格最基本的元素，即「格點(vertices) x, y, z 座標」及「構成網格之格點編號」，就可經由本套網格產生處理程式輕易且快速地獲得所需之網格資料，程式架構詳參附錄 B。

以下就簡單列舉三個案例說明：

(1).自由流流經一圓柱之計算域網格：

圓柱直徑為 1，遠場邊界為半徑 50 的外圓，在圓柱表面先佈置 8 層之

四邊形網格，分為上下兩個區塊來產生網格，外圍區塊則以 Advancing from 方法產生之三邊形網格，靠近圓柱周圍及尾流區之部份則作局部加密，俾能清楚捕捉流場的特性。

當各別區塊之網格產生後，藉由點座標及網格的構成點編號所得到的簡單網格資料，利用吾人自行發展的 IGTP23D 網格整合程式進行網格的組合，組合成一完整的計算域網格及產生計算解子所需之網格輸入資料，如圖 6-1 所示。

(2).自由流流經一三角柱之計算域網格：

三角柱為一邊長為 2 的正三角形，遠場邊界為半徑 50 的外圓，在三角柱表面附近先佈置 20 層之四邊形網格，分為 6 個區塊來產生網格，其中上方之區塊則分別由 2 個次區塊先行組成後再映像至下方並對稱於 $y=0$ ，外圍區塊則以 Advancing from 方法產生之三邊形網格，同樣的在靠近圓柱周圍及尾流區部份則作局部加密，俾能清楚捕捉流場的特性。

當各別區塊之網格產生後，藉由點座標及網格的構成點編號所得到的簡單網格資料，利用吾人自行發展的 IGTP23D 網格整合程式進行網格的組合，組合成一完整的計算域網格及產生計算解子所需之網格資料，如圖 6-2 所示。

(3).NACA 0012 外流場計算域網格：

在 NACA 0012 翼型附近佈置 O-型四邊形網格，外圍遠場則佈置三邊形粗疏網格，再利用吾人自行發展的 IGTP23D 網格整合程式進行網格的組合，組合成一完整的計算域網格，如圖 6-3 所示。

第 7 章 結果與討論

本文發展之流場解子(solver)共有三種求解類型，原始變數求解法(含 CDS/UDS 混合法及通量限制函數法)、特徵變數通量限制函數法、守恆變數求解法(含遲滯密度及遲滯壓力法)等，每一種類型又可選用多種不同的對流項差分法，為了測試是否可準確地預測自低速不可壓縮流到高速可壓縮流之全速(all speed)流場，以下將就此三種求解類型分別進行非黏性流與黏性流之流場測試。

首先以**原始變數求解法**求解非穩態之統御方程式，就一維與二維漸縮-漸擴噴嘴，來對震波之捕捉及對數值振盪之抑制效果進行測試；接著以二維下壁面圓弧之渠道內流場，來進行次音速、穿音速及超音速流場之測試，測試的方法包括 CDS/UDS 混合差分法、原始變數之各種高階準確限制函數差分法等，再從中選擇較佳之方法去進一步執行其他求解類型之測試，由測試結果顯示 SUPERBEE [106]限制函數具有較緊密(compact)的變化，雖準確度較高但數值振盪較劇烈；而 Van Albada [103]限制函數則具有較平滑的變化，故擴散性較大且數值振盪較輕微，因此後續**特徵變數通量限制法**，僅就 SUPERBEE 與 Van Albada 此兩種代表性的限制函數進行測試；另以**守恆變數求解**時使用遲滯壓力法及遲滯密度法等，亦搭配 SUPERBEE 與 Van Albada 通量限制函數差分法進行流場計算測試。在擴散項或擬似擴散項均使用二階準確之中央差分法。

本文以**原始變數法求解**之測試流場：黏性流包括低速空穴流、流經圓柱之低速流外流場、流經 NACA 0012 翼型外流場、雙喉部噴嘴內流場等；非黏性流則有一/二維漸縮-漸擴噴嘴、流經下壁面圓弧之渠道內流場、流經 NACA 0012 翼型外流場等。以**特徵變數通量限制法求解**之測試流場：黏性流包括低速空穴流、流經圓柱之低速流外流場、流經 NACA 0012 翼型外流場、雙喉部噴嘴內流場等；非黏性流則有流經 NACA 0012 翼型外流場、流經圓柱之高速流與流經三角柱之高速流外流場等。以**守恆變數求解**之測試

流場包括非黏性流之一/二維漸縮-漸擴噴嘴、流經下壁面圓弧之渠道內流場、流經 NACA 0012 翼型外流場等。

測試範圍包括內/外流場，黏性流體從低速不可壓縮流到高速可壓縮流、非黏性流體則從次音速、穿音速到超音速流場，來充分證明本文發展之流場解子具有全速流流場計算能力。三種求解類型之計算結果分述如后。

7.1. 以原始變數法求解

以一維與二維漸縮-漸擴噴嘴，來對震波之捕捉及對數值振盪之抑制效果進行測試；接著以流經下壁面圓弧之渠道內流場來進行次音速、穿音速及超音速流場之測試。擴散項或擬似擴散項均使用二階準確之中央差分法，而對流項則分別測試 UDS/CDS 混合差分法、18 種不同型式之高階準確限制函數差分法等方法。完成後再接續以 SUPERBEE 與 Van Albada 此兩種代表性的限制函數進行非黏性流之渠道內流場及流經 NACA 0012 翼型外流場；黏性流之低速空穴流、流經圓柱之低速流外流場、流經 NACA 0012 翼型外流場、雙喉部噴嘴內流場等。計算結果分述如后。

7.1.1. 非黏性流之驗證測試

7.1.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場

一般為了測試可壓縮流求解方式是否能準確的計算震波的強度及其位置，最典型的範例即為一維漸縮-漸擴(C-D)噴嘴之計算，且有解析解可作正確的比較，在以往的文獻中[24,107-108]應用不同的求解方法，均有相當準確的結果，所以本文亦不例外循序漸進，首先進行一維漸縮-漸擴噴嘴之計算驗證。

當出口壓力(即背壓)低於入口壓力時，流體即開始由入口向出口流動，當流體為次音速時在漸縮段為加速，而在漸擴段為減速；當流體為超音速時在漸縮段為減速，而在漸擴段為加速。因此當背壓稍微低於入口壓力時，

流體由入口開始加速至喉部，然後再減速至出口。當背壓繼續降至某一值恰好使流體在喉部到達音速(馬赫數 $M=1$)時，此現象稱為阻塞(choked)，之後因流體未超音速，故經漸擴段減速至出口。若背壓繼續降低，則流體經過喉部後仍繼續加速，由於喉部流體速度已達音速，故下游之訊息無法向上游傳遞，所以當背壓繼續降低時，在喉部之前之流場均不會改變，且流量亦不再增加。在漸擴段由於流體加速而壓力降低，為了滿足在出口時流體壓力要等於背壓之物理現象，故流場會自動在距離出口前的某一位置產生急遽地變化，速度由超音速變為次音速，而壓力由低變高，此現象即稱為正震波，而震波位置由背壓決定。故當震波產生時有次音速與超音速流場同時存在，所以大家才常用它來測試數值方法對於震波捕捉之能力。

噴嘴之幾何外形如圖 7-1 所示，噴嘴總長為 10 公尺，喉部位於中段，面積為 0.5 平方公尺；而進出口之面積相同均為 1 平方公尺，其截面積之分佈函數為：

$$\begin{aligned}
 A(x) &= A_{throat} + (A_i - A_{throat})\left(\frac{5-x}{5}\right)^2, \quad \text{for } 0 \leq x \leq 5 \\
 A(x) &= A_{throat} + (A_o - A_{throat})\left(\frac{5-x}{5}\right)^2, \quad \text{for } 5 \leq x \leq 10
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

其中 x 是距離入口端之軸長， A_{throat} 、 A_i 、 A_o 分別為喉部、入口及出口之面積，二維噴嘴之計算網格採 100×10 CV 四邊形無結構性網格如圖 7-2(b) 所示。有關準一維漸縮-漸擴噴嘴之解析解求解方式，可參考吳的碩士論文 [109]。

由於密度的變化隨著速度的增加而變大，以壓力修正法解可壓縮流之文獻中，密度大部份以一階上風差分法來近似控容面上之值，雖在疊代求解過程較穩定，但亦相對付出精確度較低之代價，Demirdzic 等人 [110] 及 Karki 等人 [14] 則將密度比照對流項之處理，使用中央差分與上風差分混合方式，吳 [109] 曾進行密度混合因子對於計算解之影響測試，當密度混合因子愈高，愈接近解析解，若流場中無震波之區域，其密度混合因子應使用 1.0，即 CDS 之二階準確來近似面上密度，可以得到精確的計算解；當流場

中有震波之區域時，當密度混合因子愈高，愈接近解析解，唯其馬赫數之分佈曲線於震波前後有較大的數值振盪，而當密度混合因子愈小，雖其馬赫數之分佈曲線於震波前後趨向平滑，但相對的損失對於震波極值捕捉之精確度，後續之計算所使用之密度差分方法則視流場狀況調整，期能獲的穩定收斂及高準確度的計算結果。

以中央與上風(CDS/UDS)混合差分法及 18 種高階限制函數差分法等方式，分別執行三種不同背壓之一維(網格為 100 CV)及二維(網格為 100×10 CV)漸縮-漸擴噴嘴模擬計算測試，研究分析限制函數之使用是否能獲得預期之界限解。計算程式所使用之鬆弛因子 $\eta_u=0.4$ 、 $\eta_v=0.4$ 、 $\eta_p=0.2$ ，在網格面上之對流變數 u 、 v 及 ρ 均使用上述差分法，若計算過程發散或無法收斂時，則將 ρ 改使用 CDS/UDS 混合差分法，混合因子在 $Pb=0.870Po$ 及 $Pb=0.769Po$ 時取 $\alpha_\rho=0.5$ ； $Pb=0.645Po$ 時取 $\alpha_\rho=0.4$ ；或視情況再將 ρ 改使用一階上風差分法，經由以往之研究經驗得知，當降低密度之差分準確度雖可以抑制震波後之數值振盪，唯準確度愈低則震波強度亦相對有愈大的抹平現象。

測試結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	<p>一維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試：計算結果如圖 7-3 所示，當降低 CDS/UDS 之混合因子，即降低 CDS 之權重，可以抑制震波前後之數值振盪，唯其值愈低則震波強度亦相對有抹平現象，不過其準確度已高於一階準確解。</p> <p>(1).$Pb=0.870Po$ 時：混合因子取$\alpha_u=0.9$、$\alpha_\rho=0.5$；</p> <p>(2).$Pb=0.769Po$ 時：混合因子取$\alpha_u=0.8$、$\alpha_\rho=0.5$；</p> <p>(3).$Pb=0.645Po$ 時：混合因子取$\alpha_u=0.7$、$\alpha_\rho=0.4$。</p>
	<p>二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試：計算結果如圖 7-4 所示，其結果與一維之解相當。</p> <p>(1).$Pb=0.870Po$ 時：混合因子取$\alpha_u=0.9$、$\alpha_v=1.0$、$\alpha_\rho=0.5$；</p>

	<p>(2).$P_b=0.769P_o$ 時：混合因子取 $\alpha_u=0.8$、$\alpha_v=1.0$、$\alpha_\rho=0.5$；</p> <p>(3).$P_b=0.645P_o$ 時：混合因子取 $\alpha_u=0.7$、$\alpha_v=1.0$、$\alpha_\rho=0.4$。</p>
SMART	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，結果無法收斂，殘值降至某一殘值時即無法再降，計算結果如圖 7-5 所示，在震波後有振盪現象。
STOIC	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，結果無法收斂，殘值降至某一殘值時即無法再降，計算結果如圖 7-6 所示，在震波後有振盪現象。
UMIST	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-7 所示，在震波後有振盪現象。
WACEB	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-8 所示，在震波後有振盪現象。
MUSCL	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-9 所示，在震波後有振盪現象。
GAMMA	<p>執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u、v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，分別使用不同的參數 bm：</p> <p>(1).$bm=0.25$ 時計算結果如圖 7-10 所示，在震波後有振盪現象。</p> <p>(2).$bm=0.50$ 時計算結果如圖 7-11 所示，在震波後之振盪現象較減緩。</p> <p>(3).$bm=0.75$ 時計算結果如圖 7-12 所示，在震波後之振盪現象更小。</p>
SUPERBEE	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-13 所示，在震波後有振盪現象。
MINMOD	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對

(SOUCUP)	流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-14 所示，在震波後有振盪現象。
OSHER	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-15 所示，在震波後有振盪現象。
Koren	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-16 所示，在震波後有振盪現象。
CUBISTA	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-17 所示，在震波後有振盪現象。
H- QUICK	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-18 所示，在震波後有振盪現象。
CHARM	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-19 所示，在震波後有振盪現象。
Van-Leer harmonic	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-20 所示，在震波後有振盪現象。
OSPRES	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-21 所示，在震波後有振盪現象。
Hemker & Koren	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-22 所示，在震波後有振盪現象。
Van Albada	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果如圖 7-23 所示，只有在 P_b 為 $0.645P_o$ 時於震波後有輕微振盪現象。
CLAM (HLPA)	執行三種不同背壓之二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算

結果如圖 7-24 所示，在震波後有振盪現象。

綜合以上 19 種不同方式之對流項差分方法可以得到以下結論：

- (1).CDS/UDS 混合差分法及高階限制差分法等雖均可捕捉到震波強度的及位置，其中 CDS/UDS 混合差分法在震波前後均會產生振盪現象；其他 18 種高階限制差分法不如預期會得到 TVD 之界限解，除了 SMART 與 STOIC 無法收斂外，餘均可得到收斂解，但在震波後仍會產生振盪現象。其中以 SUPERBEE 振盪較大；而 Van Albada 則相當平滑，故兩者可謂是兩極化之情況，後續之測試則不再進行所有限制函數之測試，僅以此兩種限制函數來作樣本。
- (2).限制函數之使用並未能獲得預期之界限解，仍然會產生振盪現象且降低了震波強度。
- (3).當降低密度之差分準確度雖可以抑制震波後之數值振盪，唯準確度愈低則震波強度亦相對有愈大的抹平現象。

由準一維及二維流場之計算結果顯示，不管低速或高速均與解析解相當吻合，並對震波強度及位置之捕捉均有不錯的結果，證明本文之方法可執行低、高速全速流場之計算。

就數值振盪而言，在震波之後大部份方法仍有振盪現象，亦或有很大的抹平現象，Moukalled 與 Darwish [23]採用有限容積壓力修正法，使用正規化變數及空間幾何內插公式(NVSF)並使用 SMART [56]差分法來限制對流通量及計算面上密度之高解析法，發展可增強捕捉震波特性和之計算方法，其中亦進行漸縮-漸擴二維噴嘴之計算驗證，雖使用具界限性之對流項 SMART 差分法，結果在震波後仍有數值振盪現象產生，其稱此為所有高階準確法計算漸縮-漸擴二維噴嘴之特性。

7.1.1.2.流經下壁面圓弧之渠道內流場

通常用下壁面圓弧突出物之渠道內流場來測試流場解子對次音速、穿

音速、超音速三種不同型式之非黏性流場解析能力，此測試流場之幾何外形如圖 7-25 所示，溝槽之長高比為 3：1，其中央有一突出圓弧，其所對應的弦長為渠道總長的三分之一，另突出圓弧之高度-弦長比(t/c)在次音速 ($M_{in}=0.5$)及穿音速($M_{in}=0.675$)流場為 10%；超音速則分別執行 $M_{in}=1.6$ (t/c=10%)與 $M_{in}=1.4$ 及 $M_{in}=1.65$ (t/c=4%)三種狀況之測試。

因為假設非黏性理想流體，其總焓為常數，表示如下：

$$H_o = h + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = c_p T + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \quad (7.2)$$

其中 h_o 為單位質量總焓，可以藉由此守恆式直接求出溫度場，故不需解式(2.3)之能量方程式。

在以下之流場測試計算所使用之網格系統為左右對稱於突出物中心，以四邊形無結構性網格為主，另為了驗證本文發展的流場解子具有執行任意邊形無結構性網格之計算能力，故亦進行三邊形無結構性網格系統之計算驗證。

為節省計算時間在次音速及穿音速流場測試使用 90×30 之均勻無結構型網格進行測試，收斂殘值定為 $1E-3$ ，鬆弛因子 η_u 與 $\eta_v=0.6$ 、 $\eta_p=0.1$ ，分別以中央差分/一階上風混合差分法及高階限制函數差分法等進行測試，以高階限制函數法差分法執行模擬測試時，面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用本文所述之各種高階限制函數差分法，若無法收斂或發散則嘗試將面上密度之限制函數之最大值(dm)予以設限，極值 dm 愈小數值計算過程愈穩定，當降為 0 時即為一階上風差分法，但相對的，當 dm 減小時表示準確度亦隨之降低，由測試結果顯示密度近似值之限制函數極值對計算過程的穩定度有關。

7.1.1.2.1. 次音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.5$ ，在入口處假設為均勻流、除了壓力外其餘遠場之

變數為已知；在出口處則除了壓力為已知外，其餘變數則由內點外插求得；上下壁面速度則使用相切之條件且質量通率為零。因為無震波且整個流場為次音速，故流場變數必然會對稱於突出物之中心。

在次音速流場各種方法之計算結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	以中央差分及上風差分混合法執行模擬測試，混合因子取 $\alpha_u=0.95$ 、 $\alpha_v=0.95$ 、 $\alpha_p=0.9$ ，計算結果如圖 7-26 所示。
SMART	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，結果無法收斂，殘值降至 $1.9e-3$ 即無法再降，下壁面最大馬赫數約 0.682。
STOIC	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，結果無法收斂，殘值降至 $3.1e-3$ ， ρ 改用 CDS/UDS 混合差分法，混合因子 0.9，下壁面最大馬赫數約 0.685。
UMIST	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
WACEB	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
MUSCL	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
GAMMA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法： (1). $bm=0.25$ ，下壁面最大馬赫數約 0.682。 (2). $bm=0.5$ ，下壁面最大馬赫數約 0.680。
SUPERBEE	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈圖如圖 7-27 所示。
MINMOD (SOUCUP)	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.681。
OSHER	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。

Koren	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
CUBISTA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
H- QUICK	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
CHARM	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
Van-Leer harmonic	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
OSPRE	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
Hemker & Koren	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。
Van Albada	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈圖如圖 7-28 所示。
CLAM (HLPA)	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，下壁面最大馬赫數約 0.682。

綜合以上 19 種不同方式之對流項差分方法可以得到以下結論：

- (1). 以 CDS/UDS 混合差分法及高階限制函數法差分法等，在次音速流場之計算結果大致均相當且下壁面最大馬赫數約介於 0.680 至 0.685 之間，流場大致呈現左右對稱分佈，通常加密網格會得到更準確的解析結果。
- (2). 在各種方法中除了 SMART 及 STOIC 兩種限制函數法無法收斂外，其餘均有不錯的穩定性及收斂性。

7.1.1.2.2. 穿音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.675$ ，其邊界條件及網格系統與上述次音速流場同，

因有震波產生，以各種方法進行對震波位置之捕捉測試，看是否能捕捉到正確的位置。在穿音速流場各種方法之計算結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	面上之對流變數 u 、 v 及 ρ 均使用 CDS/UDS 混合差分法執行模擬測試，混合因子取 $\alpha_u=0.9$ 、 $\alpha_v=0.9$ 、 $\alpha_\rho=0.9$ ，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-29 所示，計算結果顯示對震波之捕捉雖有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.37。
SMART	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，收斂殘值降至 $3.3e-3$ 即無法再下降，震波前之最大馬赫數約 1.22，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-30 所示。
STOIC	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法時，收斂殘值降至 $1.72e-2$ 即無法再下降，將密度限制函數最大值降為 0.8 時結果亦同，震波前之最大馬赫數約 1.30，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-31 所示。
UMIST	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-32 所示。
WACEB	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法時，收斂殘值降至 $14e-3$ 即無法再下降，將密度限制函數最大值 dm 降為 1 時即可收斂，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-33 所示。
MUSCL	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-34 所示。
GAMMA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法： (1). $bm=0.25$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.27，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-35(a)所示；

	(2). $bm=0.5$ ，計算結果顯示在震波處有較大的抹平現象，震波前之最大馬赫數只有約 1.18，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-35(b)所示。
SUPERBEE	(1).面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示在震波後有很大的振盪現象，震波前之最大馬赫數約 1.31，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-36(a)所示。 (2).嘗試將密度限制函數最大值 dm 持續調降至 0.5 時，觀察是否可改善振盪現象，雖有改善振盪現象，但收斂殘值均降至 $1.8E-3$ 即無法再下降，震波前之最大馬赫數約 1.29，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-36(b)所示。
MINMOD (SOUCUP)	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示在震波處有些微的抹平現象，震波前之最大馬赫數約 1.24，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-37 所示。
OSHER	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.26，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-38 所示。
Koren	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-39 所示。
CUBISTA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-40 所示。
H- QUICK	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-41 所示。
CHARM	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-42 所示。
Van-Leer harmonic	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬

	赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-43 所示。
OSPRES	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.28，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-44 所示。
Hemker & Koren	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.26，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-45 所示。
Van Albada	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示在震波處有較大的抹平現象，震波前之最大馬赫數約 1.20，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-46 所示。
CLAM (HLPAS)	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，震波前之最大馬赫數約 1.26，計算結果之壁面馬赫數分佈如圖 7-47 所示。

綜合以上 19 種不同方式之對流項差分方法可以得到以下結論：

- (1). 各種方法之計算結果對於靠下壁面處之震波捕捉均有不錯的能力且下壁面最大馬赫數約介於 1.20 至 1.31 之間，通常加密網格會得到更準確的解析結果。
- (2). CDS/UDS 混合差分法計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，其計算時間亦較有效率，不像其他方法需持續估算每個網格或面上之限制因子，唯在所有網格均使用相同的混合因子，則會降低在梯度變化較小處的準確度；而在梯度變化較大或陡峭處產生過與不及之振盪。
- (3). 高階限制差分法雖能正確地捕捉到震波的位置並得到輕微數值振盪或無振盪的解，但由於有較大的擴散抹平現象，故強度之捕捉仍不夠精準。另不易收斂的問題，依然為使用 SMART 及 STOIC 時的現象。

7.1.1.2.3. 超音速內流場之計算

最後進行超音速流場之測試，分別執行 $M_{in}=1.65$ 與 $M_{in}=1.4$ ($t/c=4\%$)

及 $M_{in}=1.6$ ($t/c=10\%$)三種狀況之計算。入口假設為均勻流，出口亦為超音速，因此入口所有的條件均已知，而出口所有的值均由內點外插。當 $t/c=4\%$ 時，因為馬赫偏移角度 θ 約為 9.15° ，由馬赫數-偏移角度-斜震波偏移角度 ($M-\theta-\beta$)之關係圖[111]，可求得 $M=1.65$ 時 $\theta_{max}=15.6^\circ$ ； $M=1.4$ 時 $\theta_{max}=9.5^\circ$ ，因 θ 未超過上述兩種狀況馬赫數之最大值(θ_{max})，故斜震波緊貼(Attached)著圓弧起點(參考圖 7-48(a)所示)，該震波打到上壁面反射回來，於壁面處形成正規反射波(參考圖 7-48(b)所示)。當 $t/c=10\%$ 時，馬赫偏移角度 θ 約為 22.62° ，而 $M=1.6$ 時 $\theta_{max}=14.6^\circ$ ，因為馬赫偏移角度已超過該馬赫數之最大值(θ_{max})，故斜震波向外脫離(Detached)圓弧起點，於接近壁面處形成相當於正震波之弓形斜震波(參考圖 7-48(a)所示)，故其後有一小區域為次音速，該震波打到上壁面反射回來，亦由於馬赫偏移角度已超過該馬赫數之最大值(θ_{max})，故於壁面處形成三叉狀之弧形馬赫反射波(參考圖 7-48(c)所示)，圖 7-48 係摘自 Modern Compressible Flow 一書[111]。

為了在超音速流場中之震波、反射震波及震波交匯之捕捉，所以使用 $240 \times 80 CV$ 之均勻無結構型網格進行測試，測試結果分述如下：

案例一之計算結果與討論：($t/c=4\%$ 、 $M=1.65$ 、鬆弛因子 η_u 與 $\eta_v=0.8$ 、 $\eta_p=0.025$ 、收斂殘值定為 $1E-3$)

測試結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	面上之對流變數 u 、 v 及 ρ 均使用 CDS/UDS 混合差分法執行模擬測試，混合因子取 $\alpha_u=0.9$ 、 $\alpha_v=0.9$ 、 $\alpha_\rho=0.5$ ，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-49 所示，計算結果顯示對震波之捕捉雖有不錯的表現。
SMART	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.6 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉雖有不錯的表現，唯在震波後有些微振盪現象，計

	算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-50 所示。
STOIC	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉雖有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-51 所示。
UMIST	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-52 所示。
WACEB	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-53 所示。
MUSCL	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-54 所示。
GAMMA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法， $bm=0.5$ 及 $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-55 所示。
SUPERBEE	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時才可收斂，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-56 所示。
MINMOD (SOUCUP)	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-57 所示。
OSHER	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-58 所示。
Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算

	結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-59 所示。
CUBISTA	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-60 所示。
H- QUICK	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-61 所示。
CHARM	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-62 所示。
Van-Leer harmonic	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-63 所示。
OSPRES	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-64 所示。
Hemker & Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-65 所示。
Van Albada	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-66 所示。
CLAM (HLPA)	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-67 所示。

案例二之計算結果與討論： $(M=1.4、t/c=4\%、$ 鬆弛因子 η_u 與 $\eta_v=0.6、\eta_p=0.05、$ 收斂殘值定為 $1E-3)$

測試結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	面上之對流變數 u 、 v 及 ρ 均使用 CDS/UDS 混合差分法執行模擬測試，混合因子取 $\alpha_u=0.9$ 、 $\alpha_v=0.9$ 、 $\alpha_\rho=0.6$ ，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-68 所示，計算結果顯示對震波之捕捉雖有不錯的表現。
SMART	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.5 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-69 所示。
STOIC	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-70 所示。
UMIST	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-71 所示。
WACEB	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時亦同，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-72 所示。
MUSCL	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.6$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-73 所示。
GAMMA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法， $bm=0.25$ 與 0.5 及 $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-74 所示。
SUPERBEE	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0 時才可收斂，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-75 所示。

MINMOD (SOUCUP)	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-76 所示。
OSHER	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-77 所示。
Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-78 所示。
CUBISTA	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-79 所示。
H- QUICK	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-80 所示。
CHARM	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-81 所示。
Van-Leer harmonic	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-82 所示。
OSPRES	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-83 所示。
Hemker & Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-84 所示。
Van Albada	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.5$ ，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-85 所示。
CLAM	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，

(HLPA)	dm=0.6，計算結果顯示對震波之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-86 所示。
--------	--

案例三之計算結果與討論：(M=1.6、t/c=10%、鬆弛因子 η_u 與 $\eta_v=0.8$ 、 $\eta_p=0.025$ 、收斂殘值定為 1E-3)

測試結果分述如下：

差分法	計算結果綜合分析比較
CDS/UDS 混合差分法	面上之對流變數 u、v 及 ρ 均使用 CDS/UDS 混合差分法執行模擬測試，混合因子取 $\alpha_u=0.8$ 、 $\alpha_v=0.8$ 、 $\alpha_\rho=0.4$ ，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-87 所示，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現。
SMART	面上對流變數 u、v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.2 時亦同，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-88 所示。
STOIC	面上對流變數 u、v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.2 時亦同，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-89 所示。
UMIST	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，dm=0.4，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-90 所示。
WACEB	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.2 時亦同，計算結果顯示對震波之偏

	移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-91 所示。
MUSCL	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-92 所示。
GAMMA	面上對流變數 u 、 v 及 ρ 之近似值均使用限制函數差分法， $bm=0.5$ 及 $dm=0.4$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-93 所示。
SUPERBEE	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.2 時亦同，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-94 所示。
MINMOD (SOUCUP)	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.4$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-95 所示。
OSHER	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-96 所示。
Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法，無法收斂，將 dm 降至 0.2 時亦同，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-97 所示。
CUBISTA	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-98 所示。
H-QUICK	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=$

	0.2，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-99 所示。
CHARM	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-100 所示。
Van-Leer harmonic	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-101 所示。
OSPRES	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.4$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-102 所示。
Hemker & Koren	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.4$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-103 所示。
Van Albada	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.4$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-104 所示。
CLAM (HLPA)	面上對流變數 u 及 v 之近似值使用限制函數差分法， $dm=0.2$ ，計算結果顯示對震波之偏移、馬赫反射及交匯作用現象之捕捉有不錯的表現，計算結果之馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-105 所示。

由以上三種不同情況計算所得結果，可看出本文發展之程式使用不同的對流項差分方式，對於超音速流場各種複雜震波之偏移、馬赫反射、正規反射及交匯作用之現象，均能作正確而清晰的捕捉。

7.1.1.2.4. 三邊形網格測試

為了驗證本文發展的解子具有處理任意邊形網格之計算能力，以三邊形網格進行次音速、穿音速及超音速測試，計算使用之網格如圖 7-106 所示。

在 $M_{in}=0.5$ 次音速使用 SUPERBEE 限制函數法，四邊形 256×64 CV 與三邊形網格 15234 CV 之壁面馬赫數比較如圖 7-107(a)所示，其與 Parameswaran [65]用 TVD 法的計算結果相當接近；圖 7-107(b)所示為 u 速度通量限制子的分佈圖，由圖中可以看到在梯度變化較大處，其值則小於 0.5，表示該處之差分準確階數受到限制而降低，目的在抑制極值的產生。

在 $M_{in}=0.675$ 穿音速使用 SUPERBEE 限制函數法，四邊形 256×64 CV 與三邊形網格 15234 CV 之壁面馬赫數比較如圖 7-108(a)所示，其與 Parameswaran [65]用 TVD 法的計算結果相當接近；圖-108(b)為馬赫數等值圖；圖 7-108(c)所示為 u 速度通量限制子的分佈圖，由圖中可以看到在梯度變化較大處，其值則小於 0.5，表示該處之差分準確階數受到限制而降低，尤其在震波處則接近於一階上風，目的在抑制數值振盪的產生。

在 $M_{in}=1.4$ 超音速使用 SUPERBEE 限制函數法，四邊形 200×80 CV 與三邊形網格 24562 CV 之壁面馬赫數比較如圖 7-109(a)所示，其與 Eidelman 等人[112]用 Godunov 法的計算結果相當接近；圖 7-109(b)為馬赫數等值圖；圖 7-109(c)所示為 u 速度通量限制子的分佈圖，由圖中可以看到在梯度變化較大處，其值則小於 0.5，表示該處之差分準確階數受到限制而降低，尤其在震波處則接近於一階上風，目的在抑制數值振盪的產生。

在 $M_{in}=1.65$ 超音速使用 SUPERBEE 限制函數法，四邊形 200×80 CV 與三邊形網格 24562 CV 之壁面馬赫數比較如圖 7-110(a)所示，其與 Moukalled 等人[23]用 SMART 法的計算結果相當接近；圖 7-110(b)為馬赫數等值圖；圖 7-110(c)所示為 u 速度通量限制子的分佈圖，由圖中可以看到在梯度變化較大處，其值則小於 0.5，表示該處之差分準確階數受到限制而

降低，尤其在震波處則接近於一階上風，目的在抑制數值振盪的產生。

7.1.1.2.5. 測試結果綜合分析

由次音速、穿音速及超音速二維流場之驗證結果顯示，原始變數法具有處理全速流場之計算能力，經由適當地調設相關參數，對震波強度及位置之捕捉均有不錯的結果。

另密度的差分近似法對於數值振盪的抑制與疊代過程的收斂性而言，在壓力基底法的隔離求解中扮演了關鍵性的角色，由於密度在可壓縮流中的變化非常大，前一次的值與下一次疊代值可能差異相當大，尤其在複雜的震波交匯流場模擬時更顯敏感，因此只要控制不當往往就造成發散，故在計算時要特別注意 dm 值的設定。

7.1.1.3. NACA 0012 翼型外流場

NACA 0012 之翼型參照 GAMM workshops [113] 的文獻在尾緣之部份加以延伸 0.0089 之弦長，使其尖銳化至零厚度，再正規化弦長為 1，如圖 7-111 所示。NACA 0012 為上下表面對稱之翼形，其曲面方程式如下：

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = 5t(0.2969\tilde{x}^{0.5} - 0.126\tilde{x} - 0.3516\tilde{x}^2 + 0.2843\tilde{x}^3 - 0.1015\tilde{x}^4) \quad (7.3)$$

其中

\tilde{x} 為距離前緣之弦長，在 $\tilde{x}=0$ 參照到弦長 C_1

\tilde{y} 為上表面之座標參照到弦長 C_1

$t=0.12$ (NACA 0012 之厚度參數)

對於此封閉翼剖面而言， $0 \leq \tilde{x} \leq 1.008930411365$ ，取封閉剖面之弦長 C 為參考長度，因此無因次化之座標則為：

$$x = \frac{\tilde{x}}{1.0089}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{1.0089} \quad (7.4)$$

注意此延伸後之相對厚度 t 則變為 0.12/1.0089。

本文中計算所使用之網格有 C-型四邊形無結構性網格(21240 CV, 如圖 7-112 所示)、O-型四邊形無結構性網格(如圖 7-113 所示及 O-型與三角型之混合網格(如圖 7-114 所示)等, 在上下翼表面上各佈置 128 個網格。

參照 GAMM workshops 的文獻[113], 採用四種不同的實例來測試本文發展之解子對二維非黏性可壓縮流流經 NACA 0012 翼型外流場之解析能力, 流速範圍包括次音速、穿音速及超音速等流場, 其相對應的自由流馬赫數及攻角分別為(i) $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$; (ii) $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$; (iii) $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$; (iv) $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 。在第(ii)及第(iii)的測試實例中, 於翼型上/下表面均會產生震波, 必須使用通量限制機制來避免或抑制出現於震波前後的數值振盪; 測試實例(i)則為次音速平滑流場不會出現任何的震波, 因此通常不需要使用任何的密度限制(即 $dm=2$)。大部份的無結構性網格數值方法的文獻[75,114]中均採用第(ii)個狀況來作為主要測試實例, 因其在上面有一道很強的震波而在下表面則有一個弱震波; 在測試實例(iii), 因為有兩道強震波的存在, 故通量限制機制更需要被考慮; 測試實例(iv)為一超音速對稱流場, 位於翼型前方有一道弧形震波(bow shock), 而在尾部則有兩道魚尾型震波。

以 C-型四邊形網格, 採用 Van Albada 限制函數進行原始變數通量限制法測試, 在 $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ 時 $dm=1$, 計算結果如圖 7-115 所示, 與 Amaladas 等人[114]之結果非常接近。在 $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ 時 $dm=0.6$, 計算結果如圖 7-116 所示, 在上表面有一強震波可以很準確地捕捉到; 而下表面之弱震波則有些微抹平現象。在 $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ 時 $dm=0.6$, 計算結果如圖 7-117 所示, 在上/下表面均可以很準確地捕捉到強震波。最後在 $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 時 $dm=0.6$, 計算結果如圖 7-118 所示, 其為一超音速對稱流場, 位於翼形前方有一道弧形震波(bow shock), 而在尾部則有兩道魚尾型震波。

7.1.2. 黏性流之驗證測試

7.1.2.1. 低速空穴流流場

本測試條件為雷諾數 1000 之層流，以上邊界來驅動空穴流流場，本流場亦被廣泛地被用來作為測試流場解子，計算域之幾何外形為邊長為無因次長度單位 1 的正方形，邊界條件為無滑動壁面邊界，除了上壁面以無因次速度單位 1 由左向右移動外，其餘所有壁面均為靜止，此項測試乃由 Ghia 等人[115]所提出，其使用渦度-流線函數公式及 157×157 之結構性網格來進行計算。本文則使用 8100 個控容體之四邊形無結構性網格(具有 8281 個格點)及 5146 個控容體之三邊形無結構性網格(具有 2674 個格點)，如圖 7-119 所示，來進行可壓縮全速流場計算解子測試，此流場屬低速不可壓縮流，一般而言均採用不可壓縮流解子，本文發展之程式可依流場特性自動調整壓力修正方程式之型式，對於低速流仍可得到非常良好的計算結果。

分別採用 SUPERBEE 及 Van Albada 通量限制子($dm=1$)進行四邊形網格及三邊形網格的計算，測試結果(a)流線圖；(b)流場向量圖；(c)在中心線 $x=0.5, y=0.5$ 之 v, u 速度分佈與 Chia 等人之計算結果比較圖；(d)計算殘值收斂情形，四邊形網格 SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-120 所示；Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-121 所示。三邊形網格 SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-122 所示；Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-123 所示。在沿著垂直中心線上之 u -速度及水平中心線上之 v -速度值分佈量化的比較結果，其與 Ghia et al. [115] 之計算結果相當一致，同時亦與二階準確之中央差分法(CDS)結果一致，另一階準確之上風差分法(UDS)則顯得擴散性相當強。本文所發展之全速流解子計算結果可達二階準確且與 Ghia 等人的結果相當接近，顯示低速流的計算能力相當不錯，速度分佈剖面顯示相當陡峭且無數值振盪情形。

7.1.2.2. 流經圓柱之低速流外流場

在流體力學中自由流流經一固定圓柱的穩態黏性流場分析也許是最簡單且無價值的古典問題，對於在圓柱後面那一種無局限區域的黏性流現象研究已有一段很長的歷史，可以追溯到 19 世紀，在這個流場中可以觀察到最基本的現象之一為低雷諾數下的層流分離。當雷諾數大於某一特定值時，在圓柱表面的下游兩側會產生流離情形，流離現象的產生主要肇因於對流渦度的作用較擴散渦度強，一旦流離發生，即會形成兩個屬於自然現象的對稱駐渦流(standing eddies)，而流場隨著雷諾數(Re)的不同會呈現不同的渦流形態。當雷諾數從某一外觀上對稱於圓柱前後之緩流，由初始較小值穩定地增加到 2.5 左右時，在尾流處開始產生回流區，流體沿著渦流再流回到圓柱背面，在此區域內會由兩個駐渦流包圍而成，在 $Re \gg 10$ 時尾部渦流不再保持穩態，當渦流交互地離開圓柱表面，周期性的渦流向下游流動，他們的尺寸會隨著雷諾數的增加而成長。與這種現象有關的研究已經有很多的文獻報告[35,116-120]，從各種的研究文獻中常見到雷諾數 20 與 40 的流體分離情形的分析報告。

一般計算流體力學所觀注的重點在於顯示預測外觀尺寸非常小的回流區，或當微小的雷諾數變化所產生的流體分離現象，故在尾流區的網格必須適度的加密到足以能夠準確地捕捉微小的流場特性，我們已預先知道自然發展貼附於圓柱後方洄旋渦流及出現於低雷諾數下之流離現象，吾人將一圓柱置於 50 倍圓柱直徑的外圓中心來模擬上下游之遠場邊界，並採用兩種型態的網格來進行本流場之測試，即四邊形網格(QUSG)及四邊與三邊之混合網格(HUSG)，如圖 7-124 所示。

為了預測流體沿圓柱表面流動之分離點，以壁面之渦度變化作為判斷流離之指標，根據渦度的定義為 2 倍的角速度

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (7.5)$$

以二維流場而言可簡化為：

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.6)$$

此處正規化壁面渦度之計算式為：

$$\omega = \frac{\nabla \times \vec{V}}{|\vec{V}_\infty|} = \frac{-\Delta V_t}{|\vec{V}_\infty| \Delta n} = \frac{V_t}{|\vec{V}_\infty| d_n}, \quad d_n = \vec{\delta}_{PW} \cdot \frac{\vec{S}_f}{|\vec{S}_f|} \quad (7.7)$$

當渦度為零之點即為分離點，分離點與前停滯點之夾角即稱之為分離角，故分離角 θ 之定義為以入流停滯點為 0 度，如圖 7-125 所示。

阻力係數之計算方式則為投影在 x 方向之所有壁面剪應力 $\bar{\tau}_w^x$ 與壓力 P_w^x 之積分和再除於動壓與特徵長度之乘積，此處特徵長度為圓柱之直徑 $D=1$ ，計算式如下：

$$C_D = \frac{\sum_w (\bar{\tau}_w^x + P_w^x)}{\frac{1}{2} \rho_\infty \bar{V}_\infty^2 D} \quad (7.8)$$

另圓柱後方渦流泡(vertex bubble)終點之位置，可藉由 x 軸上之 u -速度分佈來決定之，渦流泡內之速度為負值(方向朝前)；而渦流泡外之速度則為正值(方向朝後)，因此當速度值為 0 時即為渦流泡終點。

圖 7-126 及圖 7-127 分別為雷諾數 20 及 40 使用 QUSG 網格及 Van Albada 限制函數計算所得之(a)流線圖；(b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形；(d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖；而圖 7-128 及圖 7-129 則為使用 HUSG 網格計算所得之結果；另使用 HUSG 網格及 SUPERBEE 限制函數計算所得之結果，則如圖 7-130 及圖 7-131 所示。本文所發展的原始變數限制函數法可以清楚地預測流體沿圓柱表面在流經分離角之後的流離，以及貼附於圓柱後方的上下兩個對稱於 $y=0$ 之渦流所形成的泡狀渦流現象，藉由沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈及沿著圓柱表面的壁面渦度分佈情形，我們可以很容易地獲得分離角度及泡狀渦流區終點的長度。

表 7-1 所示為本文計算結果與學者 Takami 與 Keller [35]、Tritton(exp)

[116]、Nieuwstadt 與 Keller [117]、Coutanceau 與 Bouard [118]、Fornberg [119] 及 Braza[120]等人所計算及實驗結果的量化數據比較情形，其中包括黏性阻力係數 C_D 、泡狀渦流終點位置 X_E 及流體分離角度 θ_{sep} ，計算結果與參考文獻之結果相當接近。

7.1.2.3. 雙喉部噴嘴內流場

用雙喉部噴嘴(double-throat nozzle)來作為高速黏性層流內流場的計算驗證，由於發生在兩喉部之間的壓縮波會造成流離現象，故此物理現象恰可用來測試流場解子對於震波/邊界層相互影響的流場解析能力，本流場問題即為 GAMM Workshop [113]作為流場解子的標準測試案例之一。

雙喉部噴嘴案例之主要設計目的在於有良好的邊界條件計算域，可產生強烈的穩態、層流及壓縮流的流體黏性交互作用現象，首先藉由簡單的收縮-擴散噴嘴即可產生超音速流，然後再透過凹面曲線壁形成一個收縮流道，在此具有部份超音速流的噴嘴擴散-收縮區段，預期產生壓縮波、震波及流體分離現象，最後流經第二個喉部後經由第二個擴散段快速的膨脹流出。

7.1.2.3.1. 噴嘴幾何外形

此平面對稱噴嘴幾何外形如圖 7-132 所示，壁面係由 5 個區段的多項式曲線所組成，除了在 $x = x_2$ 及 $x = x_5$ 兩處的斜率或曲率為不連續外，其餘均為連續的斜率。第一個喉部位於 $x = 0$ 處，在 $x = 0$ 之喉部面積之 1/2 設定為參考長度 1，第二個喉部位於 $x = x_5$ 處，喉部面積的 1/2 為 1.6。其每一壁面區段之曲線方程式分述如后：

(1). 曲線III(第一個喉部區)：

$$x_3 \leq x \leq x_4, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 2.3 \quad (7.9a)$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} x^2 \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x_3 + x_4}{3} x + x_3 x_4 \right), \quad a = -0.03 \quad (7.9b)$$

$x = x_3$ 及 $x = x_4$ 為反曲點($y'' = 0$)，喉部的曲率半徑為

$$R = \frac{1}{a x_3 x_4} = \frac{1}{0.276} \quad (7.9c)$$

(2). 曲線II(收縮段)：

$$x_2 \leq x \leq x_3, \quad x_2 = -10 \quad (7.10a)$$

$$y = y(x_3) + y'(x_3)(x - x_3) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right)^2 \right] \quad (7.10b)$$

(3). 曲線I(等截面入口)：

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad (7.11a)$$

$$y = y(x_2) \quad (7.11b)$$

(4). 曲線IV(擴散-收縮段)：

$$x_4 \leq x \leq x_5, \quad x_5 = 7 \quad (7.12a)$$

$$y = y(x_4) + (x - x_4) \left[y'(x_4) + A_5 X^2 + B_5 X^3 \right] \quad (7.12b)$$

$$X = (x - x_4) / (x_5 - x_4)$$

$$A_5 = 4C_5 - 3y'(x_4)$$

$$B_5 = -3C_5 + 2y'(x_4)$$

$$C_5 = [y(x_5) - y(x_4)] / (x_5 - x_4)$$

$$y(x_5) = 1.6 \quad (7.12c)$$

(5). 曲線V(擴散段)：

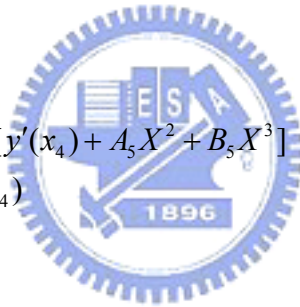
$$x_5 \leq x \leq x_6, \quad x_6 = 14 \quad (7.13a)$$

$$y = y(x_5) + [y(x_6) - y(x_5)] z^3 (2 - z) \quad (7.13b)$$

$$z = (x - x_5) / (x_6 - x_5)$$

$$y(x_6) = 5.85 \quad (7.13c)$$

注意：在 $x = x_5$ 及 $x = x_6$ 之 $y'' = 0$ 。



7.1.2.3.2. 邊界條件

- 入口：入口處邊界條件為給定停滯壓力(P_o)及停滯溫度(T_o)，平行流入口， y 方向垂直速度 $v=0$ ，水平方向速度採用外插方式來處理，整個入口段(曲線I)假設為非黏性流；
- 出口：流體在出口處屬於快速膨脹狀態且大部份為超音速區域，假設邊界均受上游影響係合理的，故出口邊界條件則全部的變數均採由內點外插至出口之方式處理；
- 壁面：在固定壁面除了入口段(曲線I)外，餘均採用無滑移邊界條件及壁面溫度均給定為停滯溫度(T_o)。

7.1.2.3.3. 測試條件

雷諾數的定義 $Re_o = a_o L \rho_o / \mu$ ，其中參考長度 $L=I$ (第一個喉部面積的1/2)，下標“o”表示參考到儲壓槽的條件情況。本文測試條件為 $Re_o = 100、400$ 與 1600 三種雷諾數及浦朗特常數(Prandtl number)為 0.72 。

壁磨擦係數：

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_o a_o^2} \quad (7.14)$$

其中 τ_w 為壁面剪應力； ρ_o 為停滯點密度； a_o 為音速，分別表示如下：

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} \approx \mu \frac{V_t''}{\Delta n} \quad (7.15)$$

$$\rho_o = \frac{P_o}{RT_o} \quad (7.16)$$

$$a_o^2 = \gamma RT_o \quad (7.17)$$

計算網格則使用 315×40 四邊形無結構性網格，在靠近壁面部份作局部加密，網格之佈置如圖 7-133 所示。參數設定如下：CFL=1000；鬆弛因子

$\eta_u = \eta_v = \eta_T = 0.5$; $\eta_p = 0.1$; $dm=2$; 壓力修正次數 $kpcor=2$; 梯度修正次數 $kgcor=1$ (1 表示無修正)。

7.1.2.3.4. 測試結果討論

各雷諾數的計算結果，其馬赫數等值圖間隔馬赫數(ΔM)為 0.2 如圖 7-134 所示，圖中將馬赫數 1 及 2 之等值曲線作特別標示，由於本流場具有低雷諾數，流體黏性效果特別顯著，雷諾數 100 時在出口處次音速流分佈約佔 1/4，流體從第一個喉部後方之擴散段壁面處產生流離並形成一個渦流區，當雷諾數增加到 400 時次音速區域減少並在 $x = 5$ 處產生一個正震波 (normal shock)，對於最大雷諾數的情況此流體分離所形成的渦流區變得較薄而導致邊界層的厚度減少，一個較弱的斜震波在 $x = 3$ 至 $x = 6$ 之間形成，隨後緊接著一個由中心面反射的強震波，由於受到反射的強震波與黏性邊界層的交互作用而可以在靠近第二個喉部處發現二次的流體分離渦流區，如圖 7-135 至圖 7-137 所示。

由三種雷諾數之計算結果可以獲得流體分離點 X_s 及再接觸點 X_r 之位置如表 7-2 所示，與 GAMM Workshop [113] 之研究人員所得到的結果相當一致。

各種方法計算所得(a)沿著壁面之壓力分佈、(b)摩擦係數(skin friction coefficient)分佈、(c)沿著對稱中心面之壓力與(d)馬赫數分佈，SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-138 所示；Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-139 所示，差異並不大且其與 GAMM Workshop [113] 在某些點的數據比較亦相當吻合，顯示本文發展之解子對於黏性次音速、穿音速及超音速且與邊界層流混雜之複雜流場具有良好的解析能力。另數值收斂情形則如圖 7-140 所示。

7.1.2.4. NACA 0012 翼型外流場

採用下述兩種參數條件來進行黏性流流經 NACA 0012 翼型之測試：(i) $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$ ；(ii) $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$ 。低雷諾數測試實例 (i) 最主要的特性為在翼型上表面具有一個很大的流體分離渦流區，主要目的在於驗證本文發展的計算解子可以精確地解析此複雜的流場特性。計算域由翼型上/下表面各佈置 128 個 O-型四邊形網格所構成(如圖 7-113 所示)，在翼型附近網格作局部加密。使用 SUPERBEE 限制函數來進行測試 ($dm=2$)，計算結果如圖 7-141 所示，在翼型上表面有一個很大的渦流，其大小幾乎佔了翼弦長的 50%，與文獻之比較相當吻合[75]；其表面壓力 C_p 分佈情形亦與 Jawahar 等人[75]用密度基底法之高階限制法之比較亦相近。

第二種計算實例，自由流馬赫數 $M_\infty=0.50$ 、攻角 $\alpha=0^\circ$ 、雷諾數 $Re_\infty=5000$ ，由於此雷諾數接近穩定層流的上限，故可視為一困難的測試例子[75]。採用與第一種實例相同的網格，在此雷諾數下流體由初始的對稱於 $y=0$ 軸之流動發展至出現輕微地不對稱現象，採用 Van Albada 限制函數 $dm=0.5$ ，計算結果如圖 7-142 所示，由流線圖可以看到在翼型尾緣處有輕微地不對稱渦流交互地出現在 $y=0$ 軸的兩側，其翼表面之壓力分佈則仍顯示具有對稱性，這種現象也許是因為渦流位於遠離翼剖面的某些距離，且其核心在尾緣之後，故不會對其上游的流體特性造成明顯的影響所致。翼表面之壓力分佈與文獻[75]之比較則均相當一致，如圖 7-142(d)所示。

7.2. 以特徵變數通量限制函數法求解

本文以特徵變數通量限制法求解之測試流場在非黏性流包括二維漸縮-漸擴(C-D)噴嘴、流經下壁面圓弧之渠道內流場、流經 NACA 0012 翼型外流場、流經圓柱之高速外流場與流經三角柱之高速外流場；黏性流則有低速空穴流、流經圓柱之低速流外流場、流經 NACA 0012 翼型外流場、雙喉部噴嘴內流場等。

7.2.1. 非黏性流場之驗證測試

7.2.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場

為了測試式(3.81)之梯度修正計算法之效果，以二維漸縮-漸擴(C-D)噴嘴來進行原始變數與特徵變數之 Van Albada 與 SUPERBEE 限制法計算，C-D 噴嘴的截面積隨 x -軸之變化函數如式(7.1)所示，此 C-D 噴嘴的幾何外形為對稱位於 $x=5$ 的喉部，邊界條件入口處為全壓 P_0 、全溫 T_0 。所計算得出之速度及出口處之背壓 P_b ，背壓採用 $0.87P_0$ 、 $0.769 P_0$ 與 $0.769 P_0$ 等三種，梯度修正法則有無修正、一次修正及二次修正等三種情況。測試所使用之網格為 201-20 四邊形無結構性均勻網格，如圖 7-2(a)所示。

特徵變數 MD1 之 Van Albada 限制法在各種梯度修正次數條件下之計算結果如圖 7-143 所示；特徵變數 MD1 之 SUPERBEE 限制法在各種梯度修正次數條件下之計算結果如圖 7-144 所示；特徵變數 MD2 之 Van Albada 限制法在各種梯度修正次數條件下之計算結果如圖 7-145 所示；特徵變數 MD2 之 SUPERBEE 限制法在各種梯度修正次數條件下之計算結果如圖 7-146 所示。

以各種特徵變數之 Van Albada 與 SUPERBEE 限制法、原始變數之 Van Albada 通量限制法及一階上風差分法(UDS)之計算結果進行比較，無梯度修正之計算結果如圖 7-147 所示；1 次梯度修正之計算結果如圖 7-148 所示；2 次梯度修正之計算結果如圖 7-149 所示。另特徵變數 MD1 通量限制法之計算殘值收斂情況如圖 7-150 所示；特徵變數 MD2 通量限制法之計算殘值收斂情況如圖 7-151 所示。通常在獲得良好的數值振盪抑制，則伴隨著會損失部份的震波強度。

由計算結果可以獲得以下結論：

- (1). 在各種梯度修正的條件下，以原始變數之 Van Albada 限制函數法與特徵變數 MD2 之 SUPERBEE 限制函數法兩者的結果相當。
- (2). 特徵變數 MD1 之 Van Albada 限制法配合 1 次之梯度修正，在震波之捕

捉及計算效益之經濟考量下是較佳的選項。

- (3).使用特徵變數 MD2 具有較強的數值擴散現象，所以在 Van Albada 限制法時幾乎可以完全抑制震波前與後之數值振盪，對於加密網格則是不錯的選擇。即使是在 SUPERBEE 限制法時雖有輕微的數值振盪現象，仍不失為好的方法。
- (4).梯度修正次數對收斂性亦有不同程度的影響(如圖 7-150 及 7-151 所示)，特徵變數 MD2 具有較佳的收斂性。
- (5).梯度修正在震波之捕捉上確有抑制數值振盪之效果。

7.2.1.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場

使用四邊形網格進行特徵變數通量限制函數測試，在次音速($M_{in}=0.5$)流場，特徵變數通量限制函數使用 SUPERBEE，MD1 及 MD2 之 dm 均不予限制，計算如果之壁面馬赫數分佈與原始變數通量限制函數所得之結果比較如圖 7-152 所示，其與 Parameswaran 等人[65]用 TVD 法所得之結果大致相當，唯在下壁面中段及後段之馬赫數有偏低現象。

在穿音速($M_{in}=0.675$)流場，特徵變數通量限制函數同樣均使用 SUPERBEE，MD1 及 MD2 之 dm 均不予限制，計算如果之壁面馬赫數分佈與原始變數通量限制函數所得之結果比較如圖 7-153 所示，其與 Parameswaran 等人[65]用 TVD 法所得之結果大致相當，MD2 方法所得之結果解的擴散性較大，故震波強度極值較低，但其在震波後之振盪則非常小。

當超音速流場時($M_{in}=1.4$ 及 1.65)，與前面情況類似 MD2 方法擴散性較大，而特徵變數 MD1 法與原始變數法($dm=0.6$)之結果相當，此時 MD1 之 dm 則必須加以限制($dm=1$)， $M_{in}=1.4$ 之壁面馬赫數分佈如圖 7-154 所示； $M_{in}=1.65$ 之壁面馬赫數分佈如圖 7-155 所示。由比較結果顯示特徵變數法對複雜之震波交匯流場之解析與原始變數法相當。

7.2.1.3. NACA 0012 翼型外流場

同樣採用與原始變數法相同之四種實例來測試特徵變數通量限制函數法之解子對二維非黏性可壓縮流流經 NACA 0012 翼型外流場之解析能力，包括次音速、穿音速及超音速等流場，其相對應的自由流馬赫數及攻角分別為(i) $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ ；(ii) $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ ；(iii) $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ ；(iv) $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 。

首先使用 C-型四邊形網格(如圖 7-112 所示)，以 SUPERBEE 限制函數來測試特徵變數通量限制法，在 $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ 時 MD1 之 $dm=0.9$ ，而 MD2 之 $dm=2$ ，計算結果如圖 7-156 所示，MD1 與 MD2 之結果相當，在上表面之極值與 Amaladas 等人[114]之結果比較則有些微擴散現象。在 $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ 時 MD1 之 $dm=0.8$ ，而 MD2 之 $dm=1$ ，計算結果如圖 7-157 所示，MD2 在上表面之震波捕捉有較大的擴散現象，對於下表面之弱震波則 MD1 與 MD2 均有些微抹平現象，與原始變數通量限制法相同。在 $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ 時 MD1 之 $dm=0.8$ ，而 MD2 之 $dm=1$ ，計算結果如圖 7-158 所示，MD1 在上/下表面均可以很準確地捕捉到強震波且無數值振盪現象，而 MD2 對於強震波則有較大的擴散現象。在 $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 時 MD1 之 $dm=0.6$ ，而 MD2 之 $dm=1$ ，計算結果如圖 7-159 所示，結果均相當。

接著以使用 O-型四邊形與三邊形之混合網格(如圖 7-114 所示)進行 $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ 之測試，採用 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數來測試原始變數通量限制法與特徵變數通量限制法，原始變數通量限制法在 SUPERBEE 時 $dm=0.4$ ，而在 Van Albada 時 $dm=0.6$ ，計算結果如圖 7-160 所示。特徵變數通量限制法 MD1 在 SUPERBEE 時 $dm=0.9$ ，MD2 時 $dm=2$ ；特徵變數通量限制法 MD1 在 Van Albada 時 $dm=1$ ，MD2 時 $dm=2$ ，計算結果如圖 7-161 所示。原始變數通量限制法與特徵變數通量限制法之翼表面壓力分佈比較如圖 7-162 所示，特徵變數 MD1 通量限制法配合 SUPERBEE 限制子與原始變數通量限制法均有不錯之結果。

7.2.1.4. 流經圓柱之高速流外流場

流場之遠場馬赫數 $M_\infty = 6.0$ 流經一直徑為 1 的圓柱，計算網格採用圓柱附近佈置一層 128 個網格共計 8 層的四邊形網格(128×8 CV)混合 18556 個三邊形網格，如圖 7-163 所示。

當使用原始變數法時必須所有變數均使用一階上風差分法(UDS)才能進行計算，其結果如圖 7-164 所示。在圓柱前約 0.27 處產生一弓形強震波，震波之後則形成局部次音速區，流體隨即加速達至超音速，一直到圓柱後緣產生上下對稱之震波，流體發生流離現象而產生次音速尾流。

使用特徵變數法配合 Van Albada 限制函數及一次梯度修正，則可以在較高階準確度的條件下進行此超高馬赫數流場之模擬計算，特徵變數方法 MD1 其最高限制函數值可設為 0.9；而特徵變數方法 MD2，則可設為 0.8，大於此值則均會發散。特徵變數方法 MD2 及 MD1 之計算結果分別如圖 7-165 及圖 7-166 所示。特徵變數方法 MD1 在圓柱前約 0.24 處產生一弓形強震波，其尾流之震波強度明顯較上風法之結果強，先形成收縮再擴散，猶如 C-D 噴嘴形，在此震波所形成的噴嘴內流體由次音速到達喉部處形成音速，再經由擴散段持續加速。特徵變數方法 MD1 的喉部位置較早形成(約在圓柱後 0.38 處)，而方法 MD2 在圓柱前約 0.25 處產生一弓形強震波，其尾流的喉部位置則較後(約在圓柱後 0.53 處)。雖然特徵變數法之收斂情形在 10^{-3} 左右即持平，然其較原始變數法具有極佳的超高馬赫數流場解析及震波捕捉能力。

7.2.1.5. 斜震波流場解析—流經三角柱之高速流場

當一超音速自由流流經一向上折角 θ 時會產生如圖 7-167 所示的斜震波(摘自 Modern Compressible Flow [111]一書)，而此震波的物理型態及其斜震波角度(β)則會因自由流之馬赫數(M_1)及壁面折角(deflection angle: θ)而有所差異，當還處於接觸斜震波(Attached Shock)的情況下($\theta < \theta_{max}$)會滿足所謂

的 θ - β - M 關係式，如下所示：

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (7.18)$$

其中 $\gamma=1.4$ 。

若已知一馬赫數 M_1 ，則存在有一個最大壁面折角 θ_{max} ，如果物理幾何外形折角大於最大壁面折角(即 $\theta > \theta_{max}$)，則不會有直線的斜震波解，而此情況下斜震波會產生彎曲變形且脫離壁面，即所謂的脫離震波(Detached Shock)，以下吾人就針對此一物理現象進行超音速流流經一正三角柱之流場探討，以驗測本文發展之解子具有震波捕捉之能力。三角柱之迎流角為60度，故其物理壁面折角(θ)為30度，對於一固定折角時超音速自由流之馬赫數(M_1)由高遞減時，斜震波角度(β)會由小遞增，直到形成接觸斜震波(Attached Shock)的最小值 M_{min} 時，其所對映的 $\theta = \theta_{max}$ ，當馬赫數持續減少到小於 M_{min} 時則斜震波會脫離三角柱而產生曲形之脫離震波(Detached Shock)，馬赫數愈小，其與三角柱前緣之距離則愈遠。由 θ - β - M 關係曲線圖[111]壁面折角(θ)為30度時，可得知自由流之馬赫數(M_1)在介於2.4~2.6之間會產生折角恰為30度之極大值 θ_{max} ，由Wikipedia網站資料庫查得之 θ - β - M 關係曲線圖如圖7-168所示，可以較明確看出要使 $\theta_{max}=30$ 時 M_1 必須大於2.5，另由式(7.18)可得到當自由流之馬赫數(M_1)=2.5192時 $\theta_{max}=30$ 度，震波角 $\beta=64.8$ 度。

本項測試之計算網格使用7202個外場三邊形網格及近場3600個四邊形網格所組合而成的混合無結構性網格(如圖7-169所示)，採用MD-1特徵變數通量Van Albada限制函數法(dm=0.8)進行測試，測試的自由流馬赫數(M_1)由2.6開始進行並持續下降至2.4(如圖7-170~圖7-175所示)，由計算結果顯示可以發現當馬赫數 $M_1=2.53$ 時(如圖7-172所示)斜震波已到達接觸震波之極限，即三角柱之前緣頂點之馬赫數恰等於1，此與理論值2.5192相當接近，誤差只有在0.4%以內。 $M_1=2.52$ 時斜震波已開始脫離三角柱前緣形成脫離型震波(如圖7-173所示)，馬赫數遞減時，其脫離現象愈明顯，

如 $M_1=2.4$ 時(如圖 7-175 所示)，測試結果完全滿足 $\theta-\beta-M$ 關係式，另在 $M_1=2.53$ 時三角柱附近之流線及速度向量分佈如圖 7-176 所示，背部有形成不規則的低速渦流現象。由測試結果顯示本流場解子除具有高速接觸斜震波及脫離之曲線震波解析能力外，同時亦可處理極低速之背部渦流現象，充份證明具有全速流之計算能力。

7.2.2. 黏性流之驗證測試

7.2.2.1. 低速空穴流流場

本測試條件與前節原始變數求解法測試情況相同，以特徵變數通量限制法(包括 MD1 及 MD2 兩種方法)，採用 SUPERBEE 及 Van Albada 通量限制子($dm=1$)進行四邊形網格及三邊形網格的計算，測試結果(a)流線圖；(b)流場向量圖；(c)在中心線 $x=0.5, y=0.5$ 之 v, u 速度分佈與 Chia 等人[115]之計算結果比較圖；(d)計算殘值收斂情形：使用四邊形網格在 MD1 及使用 SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-177 所示；Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-178 所示。在 MD2 及使用 SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-179 所示；Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-180 所示。另外使用三邊形網格在 MD1 與 SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-181 所示；在 MD2 與 Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-182 所示。沿著垂直中心線上之 u -速度及水平中心線上之 v -速度值分佈量化的比較結果，其與 Ghia 等人[115] 之計算結果相當一致且無數值振盪情形。

在本測試案例的計算結果顯示，不論是原始變數或特徵變數通量限制法均能執行低速流場計算，唯在特徵變數限制法之 MD2 特徵變數求解方式所得到的計算結果有不易收斂之現象，故在低速流時 MD1 特徵變數求解方式優於 MD2。

7.2.2.2. 流經圓柱之低速流外流場

以混合網格分別採用 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數來進行特徵變數通量限制法之測試，參數設定為 CFL = 1000、梯度修正次數 kgc_{or} = 1(即無修正)、壓力修正次數 kpc_{or} = 3、鬆弛因子 $\eta_u = \eta_v = \eta_T = 0.5$ ； $\eta_p = 0.1$ ，各種條件下計算結果之(a)流線圖、(b)下游中心線之 u-速度分佈、(c)收斂殘值及(d)圓柱表面之壓力分佈：圖 7-183 及圖 7-184 為特徵變數 MD1 使用 Van Albada 通量限制法在 Re=20 及 Re=40 之計算結果；圖 7-185 及圖 7-186 為特徵變數 MD2 使用 Van Albada 通量限制法在 Re=20 及 Re=40 之計算結果；圖 7-187 及圖 7-188 為特徵變數 MD1 使用 SUPERBEE 通量限制法在 Re=20 及 Re=40 之計算結果；圖 7-189 及圖 7-190 為特徵變數 MD2 使用 SUPERBEE 通量限制法在 Re=20 及 Re=40 之計算結果。

由計算結果與前節原始變數法比較顯示，原始變數法的收斂殘值在 10^{-3} 即持平，而特徵變數法則可以再下降至 10^{-5} 以下；SUPERBEE 限制子所得之渦流泡長度較 Van Albada 限制子所得之渦流泡長度長。採用相同的限制子在原始變數或特徵變數所得之結果差異不大。

表 7-1 所示為本文計算結果與學者 Tritton(exp) [116]、Takami 與 Keller [35]、Nieuwstadt 與 Keller [117]、Coutanceau 與 Bouard [118]、Fornberg [119] 及 Braza[120]等人所計算及實驗結果的量化數據比較情形，其中包括黏性阻力係數 C_D 、泡狀渦流終點位置 X_E 及流體分離角度 θ_{sep} ，本文計算結果與參考文獻之結果相當接近。

7.2.2.3. 雙喉部噴嘴內流場

計算網格同樣使用 315×40 四邊形無結構性網格，參數設定如下：

- (1) 特徵變數 MD1 限制法：CFL=1000；鬆弛因子 $\eta_u = \eta_v = \eta_p = 0.5$ ； $\eta_T = 0.8$ ；dm=2；壓力修正次數 kpc_{or}=3；梯度修正次數 kgc_{or}=2(2 表示修正 1 次)。
- (2) 特徵變數 MD2 限制法：CFL=1000；鬆弛因子 $\eta_u = \eta_v = \eta_p = 0.5$ ； $\eta_T = 0.8$ ；

$dm=2$ ；壓力修正次數 $kpcor=3$ ；梯度修正次數 $kgcor=1$ (1 表示無修正)。

各雷諾數的計算結果，其馬赫數、壓力及溫度等值圖， $Re_0=100$ 如圖 7-191 所示； $Re_0=400$ 如圖 7-192 所示； $Re_0=1600$ 如圖 7-193 所示。沿著壁面之壓力分佈、摩擦係數(skin friction coefficient)分佈、沿著對稱中心面之壓力與馬赫數分佈如圖 7-194 至圖 7-197 所示，與原始變數通量限制函數法之計算結果差異並不大且其與 GAMM Workshop [113]的數據比較亦相當吻合，顯示本解子對於黏性次音速、穿音速及超音速且與邊界層流混雜之複雜流場同樣具有良好的解析能力。另數值收斂情形則在 MD1 時如圖 7-198 及 MD2 時如圖 7-199 所示。

由原始變數及兩種特徵變數法進行 SUPERBEE 與 Van Albada 兩種限制函數所計算之三種雷諾數結果，可以獲得流體分離點 X_s 及再接觸點 X_r 之位置如表 7-2 所示，與 GAMM Workshop [113]之研究人員所得到的結果相當一致。



7.2.2.4. NACA 0012 翼型外流場

與原始變數法同樣採用下述兩種條件來進行黏性流流經 NACA 0012 翼型之計算：(i) $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$ ；(ii) $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$ 。

在第一個案例時，使用 SUPERBEE 限制函數來進行測試，在特徵變數 MD1 計算時 $dm=0.7$ ；特徵變數 MD2 時 $dm=1$ ，計算結果如圖 7-200 及圖 7-201 所示，在翼型上表面同樣可以解析一個很大的渦流；其表面壓力 C_p 分佈情形亦與 Jawarhar 等人[75]用密度基底法之高階限制法之比較亦相近；由收斂情形比較結果顯示特徵變數 MD2 有較佳的收斂性。

第二種案例時，特徵變數 MD1 時採用 Van Albada 限制函數 $dm=0.8$ ；特徵變數 MD2 時採用 SUPERBEE 限制函數 $dm=2$ ，計算結果如圖 7-202 及圖 7-203 所示，由流線圖可以看到在翼型尾緣處有輕微地不對稱渦流交互地出現在 $y=0$ 軸的兩側，其翼表面之壓力分佈則仍顯示具有對稱性。翼表面

之壓力分佈與文獻[75]之比較則均相當一致。

7.3. 以守恆變數法求解

最後以守恆變數求解非穩態之 Euler 統御方程式，本文使用遲滯壓力法及遲滯密度法等方式，分別搭配 SUPERBEE 與 Van Albada 通量限制函數法，就一維與二維漸縮-漸擴噴嘴、流經下壁面圓弧之渠道內流場及流經 NACA 0012 翼型外流場，來對震波之捕捉及對數值振盪之抑制效果進行流場計算測試。擴散項或擬似擴散項之處理方式則與原始變數法或特徵變數通量函數法相同，均使用二階準確之中央差分法。

守恆變數求解法包括遲滯壓力法及遲滯密度法兩種，因使用非穩態方程離散式，時間項已扮演對角佔優之功能，故在解動量方程式時不需再使用遲滯修正因子，而時間間隔通常取 $\Delta t=1.E-4$ ，若網格密度加密時則 Δt 要再縮小($\Delta t=1.E-5$)。對非黏性流之驗證測試計算結果分述如下：

7.3.1. 遲滯壓力法



7.3.1.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場

以中央差分與上風差分混合法執行三種不同背壓之一/二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試，一維網格為 100 CV，二維網格為 100×10 CV，測試結果分述如下：

(1). 一維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試：

- (A). 面上之密度近似法使用 CDS(即 $\alpha_\rho=1.0$)及速度項(ρu 、 ρv)之混合因子取 $\alpha_u=\alpha_v=0.9$ ， $M_{ref1}=1.0$ 及 $k_1=1.5$ ，計算結果如圖 7-204 所示，在喉部附近之後會有非物理性之膨脹波現象。
- (B). 當於計算遲滯壓力之馬赫數影響因子 μ 時加入 $M_{ref2}=0.6$ 及 $k_2=0.6$ ，如式(5.17)之計算式，則可以消除喉部之後的擴散現象，可以得到不

錯之結果，如圖 7-205 所示。

(C).通常 M_{ref1} 設定為 1， k_1 之參數值必須大於 1 才不會發散且其值愈大 ($k_1=1.5$)，抑制震波前後之振盪效果愈佳。

(D).另若加密網格至 200 個網格則可得到更佳的结果，此時計算之時間間隔則需減小為 $dt=1.E-5$ ，如圖 7-206 所示。

(2).二維 C-D 噴嘴流場模擬測試：

參數設定 $\eta_u=1.0$ 、 $\eta_v=1.0$ 、 $\eta_p=0.2$ 、 $\alpha_u=0.9$ 、 $\alpha_v=1.0$ 、 $\alpha_p=0.8$ 。

(A). $P_b=0.870P_o$ 時： $M_{ref1}=1$ 、 $k_1=0.9$ 、 $M_{ref2}=0.7$ 、 $k_2=0.7$ ，計算結果如圖 7-207 所示。

(B). $P_b=0.769P_o$ 時：先進行 $M_{ref1}=1$ 、 $k_1=1$ 、 $M_{ref2}=1$ 、 $k_2=1$ ，計算結果如圖 7-208 所示，在喉部附近之後會有非物理性之膨脹波現象。當 $M_{ref1}=1$ 、 $k_1=0.9$ 、 $M_{ref2}=0.7$ 、 $k_2=0.7$ ，計算結果如圖 7-209 所示，非物理性之膨脹波現象已改善且完全無任何振盪現象。再將 k_1 調整為 0.8，則結果亦相當，如圖 7-210 所示。

由準一維及二維流場之計算結果顯示，不管低速或高速均與解析解相當吻合，並對震波強度及位置之捕捉均有不錯的結果，證明本文之方法可執行低、高速全速流場之計算。

7.3.1.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場

進行次音速 ($M_{in}=0.5$) 及穿音速 ($M_{in}=0.675$) 之測試，突出圓弧之高度-弦長比 (t/c) 為 10%。計算網格則採用 $256 \times 64 CV$ 之四邊形網格，其為前後對稱且中間加密之網格，如圖 7-211 所示。

在超音速部份由於流場中有複雜之震波反射及交匯，使用本方法無法進行流場計算，尚待進一步探討原因及謀求解決之道。

7.3.1.2.1. 次音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.5$ ，分別以 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數進行測試，次音速非黏性流場測試結果之壁面馬赫數分佈圖如圖 7-212 所示；馬赫數等值圖如圖 7-213 所示，參數設定 $M_{ref}=1$ 、 $k=1$ 及 $dm=2$ (表示不作任何限制)，不論採用何種通量限制函數，其所得之解及收斂情況均相當，圖 7-214 所示。故本法對於求解次音速非黏性可壓縮流場有不錯之結果。

7.3.1.2.2. 超音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.675$ ，同樣使用 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數差分法進行測試，測試結果分述如下：

- (1). M_{ref1} 及 k_1 均設為 1，SUPERBEE 限制函數計算結果之馬赫數等值圖如圖 7-215 所示及各種 M_{ref2} 、 k_2 及限制函數計算結果之壁面馬赫數分佈圖如圖 7-216 所示，計算結果顯示 k_2 值愈大則震波極值愈高，相對的數值振盪也愈大。
- (2). 其中 Van Albada 限制函數計算結果之壁面馬赫數分佈圖如圖 7-217 所示；SUPERBEE 限制函數計算結果之壁面馬赫數分佈圖如圖 7-218 所示。
- (3). SUPERBEE 限制函數配合 $M_{ref2}=0.6\sim 0.7$ 、 $k_2=0.6\sim 0.7$ 對震波之捕捉有不錯的表現，而 Van Albada 限制函數配合 $M_{ref2}=0.6\sim 0.7$ 、 $k_2=0.6\sim 0.7$ 則有更好的抑制震波之後的振盪效果。

7.3.1.3. NACA 0012 翼型外流場

採用與前節原始變數法或特徵變數通量限制函數法相同的測試條件，即以四種不同的實例來測試本文發展之守恆變數求解之解子對二維非黏性可壓縮流流經 NACA 0012 翼形外流場之解析能力，自由流馬赫數及攻角分別為(i) $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ ；(ii) $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ ；(iii) $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ ；(iv)

$M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 。

以 O-型四邊形網格採用 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數進行遲滯壓力法測試，在 $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ 時之參數設定 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=2$ ，SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-219 所示；在 $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=0.8$ ，SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-220 所示；在 $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=1$ ，Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-221 所示；最後在 $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=1$ ，Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-222 所示。所得結果與原始變數通量限制法相當。

7.3.2. 以遲滯密度法求解

7.3.2.1. 漸縮-漸擴噴嘴內流場

以中央差分與上風差分混合法執行三種不同背壓之一/二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試，一維網格為 100 CV，二維網格為 100×10 CV，測試結果分述如下：

(1). 一維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試：

- (A). 在 $M_{refl}=1$ 時， k_1 必須小於 1 才不會發散且其值愈小($k_1=0.675$)，抑制震波前後之振盪效果愈佳。
- (B). 當面上之密度近似法混合因子使用 $\alpha_\rho=0.8$ 及速度項混合因子使用 0.6 時，可以得到較佳之結果，馬赫數分佈如圖 7-223 所示。
- (C). 若加密網格至 200 個網格時，則可得到更佳的结果，時間間隔則需減小為 $dt=1.E-5$ ，馬赫數分佈如圖 7-224 所示。

(2). 二維流場模擬之 K 值測試：

$$(M_{refl}=1.、\Delta t=1E-4、\eta_u=1.0、\eta_v=1.0)$$

- (A). $Pb=0.870Po$ 時： $\eta_\rho=0.2$ 、 $\alpha_u=0.8$ 、 $\alpha_v=1.0$ 、 $\alpha_\rho=0.8$ ， k 由 1.0 調整至 0.6，計算結果詳如圖 7-225 至圖 7-229，當 $k=0.6$ 時震波之捕捉效果最好。

(B). $Pb=0.769Po$ 時： $\eta_p=0.2$ 、 $\alpha_u=0.7$ 、 $\alpha_v=1.0$ 、 $\alpha_\rho=0.8$ ， k 由 0.9 調整至 0.5，計算結果詳如圖 7-230 至圖 7-234，當 $k=0.6$ 時震波之捕捉效果最好。

(C). $Pb=0.645Po$ 時： $\eta_p=0.1$ 、 $\alpha_u=0.6$ 、 $\alpha_v=1.0$ 、 $\alpha_\rho=0.8$ ， k 由 0.8 調整至 0.6，計算結果詳如圖 7-235 至圖 7-238，當 $k=0.6$ 時震波之捕捉效果最好。

(D). 由計算結果可知：

(a). 當震波強度愈強時，CDS/UDS 之混合因子必須作調降，即 UDS 所佔之比例增加，否則會造成發散現象。

(b). 在本漸縮-漸擴噴嘴之流場模擬所使用之混合因子於 Pb 為 0.870 時混合因子設為 0.8；0.769 Po 時混合因子設為 0.7；0.640 Po 時混合因子設為 0.6，可維持較佳之穩定度，而在相同測試條件狀況下， k 值通常取介於 0.5~1.0 之間之值，在不發散之情況下， K 值愈小震波之捕捉效果愈好。

(3). 二維漸縮-漸擴噴嘴模擬測試：

(A). 由上述之 K 值測試結果可以獲得最佳之計算情況，如圖 7-238 所示。

(B). 在計算過程中發現有兩個主要參數會影響計算之收斂性，即壓力修正方程之鬆弛因子及 k 值，在使用此方法時要特別注意參數之調整特性。

由準一維及二維流場之計算結果顯示，不管低速或高速均與解析解相當吻合，並對震波強度及位置之捕捉均有不錯的結果，證明本文之方法可執行低、高速全速流場之計算。就數值振盪而言，遲滯密度法在一維流場幾乎可得到無數值振盪之結果，而在二維流場亦可得到不錯的計算結果。

7.3.2.2. 流經下壁面圓弧之渠道內流場

使用與遲滯壓力法相同之計算網格，另在超音速部份由於流場中有複雜之震波反射及交匯，使用本方法亦無法進行流場計算，尚待進一步探討原因及謀求解決之道。

7.3.2.2.1. 次音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.5$ ，分別搭配 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數進行測試，次音速非黏性流場測試結果之壁面馬赫數分佈及馬赫數等值圖如圖 7-239 及圖 7-240 所示。不論是利用遲滯壓力法或遲滯密度法之守性變數求解，所有參數包括 $M_{ref}=1$ 、 $k=1$ 及 $dm=2$ 等均不需作任何限制，且不論採用何種通量限制函數，其所得之解及收斂情況(如圖 7-241)均相當。故遲滯壓力法或遲滯密度之守性變數求解法對於次音速非黏性可壓縮流場有不錯之結果。

7.3.2.2.2. 超音速內流場之計算

入口馬赫數 $M_{in}=0.675$ ，其邊界條件及網格系統與上述次音速流場相同。面上對流速度及密度之近似值則使用 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數差分法進行測試，詳細結果分述如下：

以 SUPERBEE 限制函數法來進行測試，測試結果如下：

- (1). 當 $M_{ref}=1$ 、 $k=1$ 時， dm 值愈小數值振盪幅度愈小，如圖 7-242 所示。
- (2). 當 M_{ref} 及 dm 相同之情況下， k 值愈小則數值振盪幅度愈大，如圖 7-243 所示。
- (3). 當 k 及 dm 相同之情況下， M_{ref} 值愈小則數值振盪幅度愈小，如圖 7-244 所示。
- (4). 由以上結果綜合研究顯示在超音速流場 $M=0.675$ ，參數之設定 $M_{ref}=0.9$ ， $k=1$ ， $dm=0.8$ 可得到較佳的結果，其與 Parameswaran [65] 的計算結果相近。其馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈如圖 7-245 及圖 7-246 所示。

7.3.2.3. NACA 0012 翼型外流場

採用與前節原始變數法或特徵變數通量限制函數法相同的測試條件，自由流馬赫數及攻角分別為 (i) $M_{\infty}=0.63$ 、 $\alpha=2^{\circ}$ ；(ii) $M_{\infty}=0.80$ 、 $\alpha=1.25^{\circ}$ ；(iii) $M_{\infty}=0.85$ 、 $\alpha=1.0^{\circ}$ ；(iv) $M_{\infty}=1.2$ 、 $\alpha=0.0^{\circ}$ 。

以 O-型四邊形網格採用 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數進行測試，在 $M_\infty=0.63$ 、 $\alpha=2^\circ$ 時之參數設定為 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=2$ ，SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-247 所示；在 $M_\infty=0.80$ 、 $\alpha=1.25^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=0.5$ 、 $dm=0.8$ ，SUPERBEE 通量限制子之計算結果如圖 7-248 所示；在 $M_\infty=0.85$ 、 $\alpha=1.0^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=1$ ，Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-249 所示；最後在 $M_\infty=1.2$ 、 $\alpha=0.0^\circ$ 時 $M_{refl}=1$ 、 $k=1$ 、 $dm=1$ ，Van Albada 通量限制子之計算結果如圖 7-250 所示。由計算結果顯示不論在次音速或超音速流場均有不錯表現，尤其在穿音速流場對震波的捕捉有非常不錯的結果。



第 8 章 結論

由前一章對各種流場以原始變數法、特徵變數限制函數法及守恆變數法等求解類型之各種方式計算分析驗證結果，可以得到下列幾點結論：

1. 本文所發展之**原始變數法**之流場解子，使用 SIMPLE 算則之壓力修正法結合正規化變數(NV)法或全變量消去法(TVD)之高階通量限制函數法，應用重置變數無結構性網格，並採有限體積積分法來離散統御方程式，藉由壓力修正方程式中之馬赫數控制因子，可自動隨流場特性而調整統御方程式之型式，確實可求解低速至高速之全速流流場；在**守恆變數法**之流場解子藉由遲滯壓力或遲滯密度來解決超音速場計算時之不穩定現象，確實可求解非黏性低速至高速之全速流流場。
2. 本文發展之**原始變數法**解子，可依需求選用各種不同的對流項差分法，包括 CDS/UDS 混合法及 18 種高階限制函數法等；**特徵變數限制函數法**解子，則有 18 種限制函數可供選擇；**守恆變數法**之遲滯壓力或遲滯密度解子，亦可選用與原始變數法相同的對流項差分法。可有效地滿足各種不同的流場計算需求。
3. 原則上在次音速流場中，不論是採用原始變數法或守恆變數法求解時，對流項之差分法使用 CDS/UDS 混合法或任何高階限制函數法，所得到的結果均相當。而在穿音速或超音速具有震波的流場中，高階限制函數法則具有抑制數值震盪的功效，在各種的限制函數中，SUPERBEE 的特性具有較緊密(compact)的變化，雖準確度較高但數值振盪較劇烈；而 Van Albada 限制函數則具有較平滑的變化，故擴散性較大且數值振盪較輕微，其他的情形則介於兩者之間。
4. 本文亦證明所發展的流場解子，有能力執行任意多邊形的無結構性網格之計算。
5. 本文之方法採用高階之 TVD 或 NV 限制函數依流場梯度變化情形自動調

整中央差分法與一階準確上風差分之混合比例，來近似面上對流通量之變數，從計算結果可以發現在震波前後均有抑制數值振盪的效果，雖有些微的強度損失，但卻可得到令人滿意的震波解。

6. 使用特徵變數 MD1 之 Van Albada 限制函數法配合梯度修正限制法，在震波之捕捉及計算效益之經濟考量下是較佳的選項。使用特徵變數 MD2 具有較強的數值擴散現象，所以在 Van Albada 限制法時幾乎可以完全抑制震波前與後之數值振盪，對於加密網格則是不錯的選擇。即使是在 SUPERBEE 限制法時雖有輕微的數值振盪現象，仍不失為好的方法。
7. 以守恆變數法求解之遲滯密度法或遲滯壓力法而言，其在一維或二維之噴嘴內流場、渠道及 NACA 0012 非黏性流之次音速與超音速流場計算，對於震波位置與強度的捕捉均有不錯之結果，且對於震波前後的數值振盪抑制效果亦相當良好，唯在超音速之複雜震波交匯之渠道內流場則面臨困難，計算過程均產生發散，未來仍需再深入研究尋求解決之方法。
8. 由本文之計算結果可以發現面上密度之近似法，對程式的穩定性及解的精確度有很大的關係。原則上若在沒有震波現象或梯度變化陡峭之不連續流場，應採用完全的中央差分法來近似之；若有震波之流場中，則需混合少許的一階上風差分，則可消除震波不連續處之數值振盪，震波的強度越強則一階上風差分的比例就要隨之增加。雖然亦採用 NVD 或 TVD 之限制函數加以調適，但在疊代計算過程中仍難以避免無預期的數值劇烈變化，故即始使用限制函數差分法，密度的限制子仍需依流場特性而加以限制，一階上風差分的比例愈高則愈穩定。
9. 本文發展之通量限制法可以很容易地使用各種 TVD 或 NV 限制函數，且有兩種不同的變數基底來求得原始變數法之限制子，即原始變數或特徵變數基底，兩種方法之優劣無一般性之區分，會隨不同流場之不同而異，一般而言特徵變數基底法之收斂速度較快。
10. 梯度之計算方式對於震波強度及位置的捕捉有密切的關聯，若採用格點

平均法，則會有很強的擴散性；若採用相鄰網格內插法，則視近似差分法之準確度而異，若在有震波區域之附近，二階以上之準確近似法容易造成過與不及的預估值，有時甚至會導致解的數值振盪或疊代過程的發散現象，故藉由二階準確近似之修正法及與相鄰網格之極值限制，不但可維持高階準確，亦可抑制計算過程發散之效果。

11. 本文在網格之處理所發展之無結構性網格整合程式，具有二維或三維之混合任意多邊形網格組合能力，有效地縮減複雜流場網格產生之時間，並經由流場測試證明所整合網格之正確性及計算解子具有處理混合網格之能力。
12. 未來仍需再進一步延伸至紊流模式及三維流場解子之發展，俾利應用於各種飛行器外流場及引擎內流場相關議題之研究與分析。



第 9 章 參考文獻

- [1] Jacob E. Fromm, "A method for reducing dispersion in convective difference schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 3, pp. 176-189 (1968).
- [2] Robert W. MacCormack, "The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering", *AIAA Paper*, 69-354 (1969).
- [3] Jack R. Edward and Meng-Sing Liou, "Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at All Speeds", *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 9, pp. 1610-1617 (1998).
- [4] H. Luo, J. D. Baum and R. Lohner, "Extension of Harten-Lax-Van Leer scheme for flows at all speeds", *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 6, pp. 1160-1166 (2005).
- [5] A. J. Chorin, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, vol. 2, pp. 12-26 (1967).
- [6] A. Rizzi and L. E. Eriksson, "Computation of Inviscid Incompressible Flow with Rotation," *J. Fluid Mech.*, vol. 153, no. 3, pp. 275-312 (1985).
- [7] D. Choi and C. L. Merkle, "Application of Time-Iterative Schemes to Incompressible Flow," *AIAA Journal*, vol 23, pp. 1518-1524 (1985).
- [8] J. M. Weiss and W. A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Time-Accurate Flows on Unstructured Meshes," *AIAA Journal*, vol. 33, No. 11, pp. 2050-2057 (1995).
- [9] V. Venkatakrishnan, "Preconditioned conjugate gradient methods for the compressible Navier-Stokes equations", *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 7, pp. 1092-1100 (1991).
- [10] Y. H. Choi and C. L. Merkle, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 105, No. 2, pp. 207-223 (1993).
- [11] E. Turkel, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 72, No. 2, pp. 277-298 (1987).

- [12] L. D. Daily and R. H. Pletcher, "Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time-Accurate Navier-Stokes Algorithm," AIAA Paper, 95-1668, Jan. (1995).
- [13] C. M. Rhie, "A Pressure-Based Navier-Stokes Solver Using the Multigrid AIAA Paper, 86-0207 (1986).
- [14] K. C. Karki and S. V. Patankar, "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations", AIAA Journal, Vol. 27, No. 9, pp. 1167-1174 (1989).
- [15] F. S. Lien and M. A. Leschziner, "A pressure-velocity solution strategy for compressible flow and its application to shock/boundary-layer interaction using second-moment turbulence closure", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, pp. 717-725 (1993).
- [16] I. Demirdzic, Z. Lilek and M. Preic, "A Collocated Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 16, pp. 1029-1050 (1993).
- [17] F. S. Lien and M. A. Leschziner, "A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 114, pp. 123-148 (1994).
- [18] M. S. Darwish and F. H. Moukalled, "Normalized variable and space formulation methodology for high-resolution schemes", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 26, pp. 79-96 (1994).
- [19] M. S. Darwish and F. Moukalled, "An efficient very-high-resolution scheme based on an adaptive-scheme strategy", Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 34, pp. 191-213 (1998).
- [20] Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, "A Pressure-Based Unstructured Grid Calculation for Compressible Flow", The 10th National Computational Fluid Dynamics Conference Hua-Lien, August, pp. A3-1- 8, 2003.(利用壓力法之無結構性網格可壓縮流計算)
- [21] Yen-Sen Chen, Huan-Min Shang and Chien-Pin Chen, "Unified CFD Algorithm with a pressure based method", 6th ISCFD, September (1995).
- [22] R. I. Issa and F. C. Lockwood, "On the prediction of two-dimensional

- supersonic viscous interactions near walls”, AIAA Journal, Vol. 15, No. 2, pp. 182-188 (1977).
- [23] F. Moukalled and M. Darwish, “A High-Resolution Pressure-Based Algorithm for Fluid Flow at All Speeds”, Journal of Computational Physics, Vol. 168, pp. 101-133 (2001).
- [24] James J. McGuirk and Gary J. Page, “Shock Capturing Using a Pressure-Correction Method”, AIAA Journal, Vol. 28, No. 10, pp. 1751-1657 (1990).
- [25] Stephen F. Wornom and Mohamed M. Hafez, “Calculation of quasi-one-dimensional flows with shocks”, Computers and Fluids, Vol. 14, No. 2, pp. 131-140 (1986)
- [26] M. H. Kobayashi and J. C. F. Pereira, “Characteristic-based pressure correction at all speeds”, AIAA Journal, Vol. 34, No. 2, pp. 272-280 (1996).
- [27] R. I. Issa and M. H. Javareshkian, “Application of TVD schemes in pressure-based finite-volume methods”, Proceedings of the Fluids Engineering Division Summer Meeting, Vol. 3, American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 159-164 (1996).
- [28] Bram Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method”, Journal of Computational Physics, Vol. 32, pp. 101-136 (1979).
- [29] P. L. Roe, “Fluctuations and signals - A framework for numerical evolution problems”, Numerical Methods for Fluid Dynamics, Proceedings Conference, Reading, pp. 219-257 (1982).
- [30] Ami Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, Journal of computational physic, Vol. 49, pp. 357-393 (1983).
- [31] S. R. Chakravarthy and S. Osher, “High resolution of the OSHER upwind scheme for the Eluer equations”, AIAA paper, 83-1943 (1983).
- [32] Ami Harten, “On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes”, SIAM Journal Numerical Analysis, Vol. 21, No. 1, February, pp. 1-23 (1984).
- [33] Ami Harten and Stanley Osher, “Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, I ”, SIAM Journal Numer. Anal. , Vol. 24, No. 2, pp. 279-309, April (1987).

- [34] H. C. Yee, "Construction of explicit and implicit symmetric TVD scheme and their applications", *Journal of Computational Physics*, Vol. 68, pp. 151-179 (1987).
- [35] H. Takami and H. B. Keller, "Steady Two-Dimensional Viscous Flow of an Incompressible Fluid Past a Circular Cylinder", *Phys. Fluids Suppl. II*, pp. 51-56 (1969).
- [36] B. P. Leonard, "A survey of finite differences with upwinding for numerical modelling of the incompressible convection diffusion equation", C. Taylor and K. Morgan, *Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow*, Pineridge Press, Swansea, U. K., Vol.2, pp. 1-35 (1981).
- [37] B. P. Leonard, "Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 1291-1318 (1988).
- [38] B. P. Leonard, "The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 88, pp. 17-74 (1991).
- [39] Heng Lin and Ching-Chang Chieng, "Characteristic-based flux limiters of an essentially third-order flux-splitting method for hyperbolic conservation laws", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 13, pp. 287-307 (1991).
- [40] B. Van Leer, "Upwind difference methods for aerodynamics governed by the Euler equations", *Lectures in applied mathematics*, (B. Engquist, S. Osher, R. Sommerville eds.), Vol. 22, Part II, pp. 327-336, AMS, Providence, RI. (1985).
- [41] Dartzi Pan and Jen-Chieh Cheng, "A second-order upwind finite-volume method for the EULER solution on unstructured triangular meshes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, pp. 1079-1098 (1993).
- [42] N. P. Waterson and H. Deconinck, "A unified approach to the design and application of bounded higher-order convection schemes", VKI Preprint 1995-21 (1995).
- [43] S. K. Choi, H. Y. Nam and M. Cho, "Evaluation of a high-order bounded convection scheme: three-dimensional numerical experiment", *Numerical*

Heat Transfer, Part B, Vol. 28, pp. 23-38 (1995).

- [44] B. Song, G. R. Liu, K. Y. Lam and R. S. Amano, "On a higher-order discretization scheme", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 32, pp. 881-897 (2000).
- [45] M. A. Alves, P. J. Oliveira and F. T. Pinho, "A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 41, pp. 47-75 (2003).
- [46] Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, "A Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithm Using High-Resolution Schemes for All-Speed Flows", *Numer. Heat Transfer, B*, vol. 53, pp. 75-96 (2008).
- [47] H. C. Yee , R. F. Warming and A. Harten, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 327-360 (1985).
- [48] W. Shyy and S. Thakur, "Controlled variation scheme in a sequential solver for recirculating flows", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 25, No. 3, pp. 273-286 (1994).
- [49] W. A. Mulder and B. Van Leer, "Experiments with implicit upwind methods for the Euler equations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 59, pp. 232-246 (1985).
- [50] S. V. Patankar and D. B. Spalding, "A calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *International Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806 (1972).
- [51] S. G. Rubin and P. K. Khosla, "A diagonally dominant second order accurate implicit scheme", *Computers and Fluids*, Vol. 2, pp. 207-209 (1974).
- [52] M. Hafez, J. South and E. Murman, "Artificial compressibility methods for numerical solutions of transonic full potential equation", *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 78-1148R, pp. 838-844 (1979).
- [53] C. M. Rhie and W. L. Chow, "Numerical Study of Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525-1532 (1983).
- [54] P. K. Sweby, "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol. 21, No. 5,

October, pp. 995-1011 (1984).

- [55] S. F. Wornom, "A two-point difference scheme for computing steady-state solutions to the conservative one-dimensional Euler equations", *Computers and Fluids*, Vol. 12, No. 1, pp. 11-30 (1984).
- [56] P. H. Gaskell and A. K. C. Lau, "Curvature-compensated convective transport: SMART, A new boundedness-preserving transport algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 8, pp. 617-641 (1988).
- [57] S. Majumdar, "Role of Under-relaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 125-132 (1988).
- [58] M. Peric, R. Kessler and G. Scheuerer, "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Collocated Grids", *Computers & Fluids* Vol. 16, No. 4, pp. 389-403 (1988).
- [59] J. Zhu and M. A. Leschziner, "A local oscillation-damping algorithm for higher-order convection schemes", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 67, pp. 355-366 (1988).
- [60] Timothy J. Barth and Dennis C. Jespersen, "The Design and application of upwind schemes on unstructured meshes", *AIAA Paper*, 89-0366 (1989).
- [61] J. Peraire, K. Morgan and J. Peiro, "Numerical grid generation", *Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture series 1990-06*, June, pp. 11-15 (1990).
- [62] J. Zhu, "A low-diffusive and oscillation-free convective scheme", *Communications In Applied Numerical Methods*, Vol. 7, pp. 225-232 (1991).
- [63] J. Zhu and W. Rodi, "A low-diffusive and bounded convection scheme", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 92, pp. 87-96 (1991).
- [64] V. Venkatakrishnan, "On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions", *AIAA Paper*, 93-0880 (1993).
- [65] S. Parameswaran and Ilker Kiris, "A Steady Shock-Capturing Pressure-Based Computational Procedure for inviscid Two-Dimensional Transonic Flows", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 23, pp. 221-236

(1993).

- [66] F. Moukalled and M. Darwish, “New bounded skew central difference scheme, Part II : Application to natural convection in an eccentric annulus”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 31, pp. 111-133 (1997).
- [67] F. Moukalled and M. Darwish, “New bounded skew central difference scheme, Part I : Formulation and testing”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 31, pp. 91-110 (1997).
- [68] F. Moukalled and M. Darwish, “A New family of streamline-based very-high-resolution schemes”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 32, pp. 299-320 (1997).
- [69] F. Moukalled and M. S. Darwish, “New family of adaptive very high resolution schemes”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 34, pp. 215-239 (1998).
- [70] F. S. Lien and M. A. Leschziner, “Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 19, pp. 527-548 (1994).
- [71] R. I. Issa and M. H. Javarehshkian, “Pressure-Based Compressible Calculation Method Utilizing Total Variation Diminishing Schemes”, AIAA Journal, Vol. 36, No. 9, pp. 1652-1657 (1998).
- [72] H. Jasak, H. G. Weller and A. D. Gosman, “High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31, pp. 431-449 (1999).
- [73] Fue-Sang Lien, “A pressure-based unstructured grid method for all-speed flows”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 33, pp. 355-374 (2000).
- [74] F. Moukalled and M. Darwish, “A unified formulation of the segregated class of algorithms for fluid flow at all speeds”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 37, pp. 103-139 (2000).
- [75] P. Jawahar and Hemant Kamath, “A high-Resolution Procedure for Euler and Navier-Stokes computations on unstructured grids”, Journal of Computational Physics, Vol. 164, pp. 165-203 (2000).
- [76] Hou Ping-Li, Tao Wen-Quan and Yu Mao-Zheng, “Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau”, Engineering

Computations, Vol. 20, No. 8, pp. 1023-1043 (2003).

- [77] Hyung-Il Choi, Dohyung Lee and Joo-Sung Maeng, “A Node-Centered Pressure-Based Method for All Speed Flows on Unstructured Grids,” Numerical Heat Transfer, B vol. 44, pp. 165–185 (2003).
- [78] Hrvoje Jasak, “Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows”, PhD thesis, Imperial College, University of London, June (1996).
- [79] Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, “Use of Characteristic-Based Flux Limiters in a Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithm Incorporating High-Resolution Schemes”, Numerical Heat Transfer, B vol. 55, pp. 14–34 (2009).
- [80] L. S. Caretto, R. M. Curr, and D. B. Spalding, “Two Numerical Methods for Three Dimensional Boundary Layers,” Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 1, pp. 39 (1972).
- [81] Samir Muzaferija, “Adaptive Finite Volume Method for Flow Prediction Using Unstructured Meshes and Multigrid Approach”, PhD thesis, Imperial College, University of London, March (1994).
- [82] Suhas V. Partankar, “Computer analysis of fluid flow and heat transfer”, C. Taylor and K. Morgan, Computational Techniques in Transient and Turbulent Flow, Pineridge Press, Swansea, U. K., Vol.2, pp. 223-252 (1981).
- [83] R. Fletcher, “Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems”, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 506, pp. 773-789 (1976).
- [84] Y.-Y. Tsui and Y.-F. Pan, “A Pressure-Correction Method for Incompressible Flows Using Unstructured Meshes”, Numer. Heat Transfer B, vol. 49, pp. 43-65 (2006).
- [85] W. K. Anderson, J. L. Thomas, and B. Van Leer, “Comparison of Finite Volume Flux Vector Splitting for the Euler Equations”, AIAA J., vol. 24, No. 9, pp. 1453-1460 (1986).
- [86] S. R. Mathur and J. Y. Murthy, “A pressure-Based method for unstructured meshes”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 31, 195-215 (1997).
- [87] D. B. Spalding, “A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expression Involving Both First and Second Derivatives”, Int. J. Numer.

- Meth. Eng., vol. 4, pp. 551-559 (1972).
- [88] B. P. Leonard, “A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic interpolation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, pp. 59-98 (1979).
- [89] Bram Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, pp. 361-370 (1974).
- [90] J. P. Boris and D. L. Brook, “Flux corrected transport I : SHASTA, A fluid transport algorithm that works”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 11, pp. 38-69 (1973).
- [91] D. L. Brook, J. P. Boris and K. Hain, “Flux corrected transport II : Generalizations of the method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 18, pp. 248-283 (1975).
- [92] J. P. Boris and D. L. Brook, “Solutions of the continuity equation by the method of flux corrected transport”, *Journal of computational physics*, Vol. 16, pp. 85-129 (1976).
- [93] J. P. Boris and D. L. Brook, “Flux corrected transport III: Minimal-error FCT algorithms”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 20, pp. 397-431 (1976).
- [94] Bram Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference scheme for ideal compressible flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 263-275 (1977).
- [95] Bram Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 276-299 (1977).
- [96] C. W. S. Bruner, “Parallelization of the Euler Equations on Unstructured Grids”, *AIAA paper 97-1894* (1997).
- [97] M. Chapman, “FRAM nonlinear damping algorithm for the continuity equation”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 44, pp. 84-103 (1981).
- [98] M. Peric, “Analysis of pressure-velocity coupling on nonorthogonal grids”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 17, pp. 63-82 (1990).
- [99] P. L. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes”, *Journal of computational Physics*, Vol. 43, No. 7, pp. 357-372

(1981).

- [100] P. L. Roe, “Characteristic-based schemes for the Euler equations”, *Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 337-365 (1986).
- [101] M. S. Darwish, “A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 24, pp. 353-371 (1993).
- [102] B. Koren, “A robust upwind discretization method for advection, diffusion and source terms”, *Numerical Methods for Advection-Diffusion Problems*, Ed. C. B. Vreugdenhil & B. Koren, Vieweg, Braunschweig, pp. 117-138 (1993).
- [103] G. D. Van Albada, B. Van Leer and W. W. Roberts, “A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics”, *Astron. Astrophysics*, Vol.108, pp. 76-84 (1982)
- [104] G. Zhou, “Numerical Simulations of Physical Discontinuities in Single and Multi-fluid Flows for Arbitrary Mach Numbers”, PhD Thesis, Chalmers University of Tech., Goteborg, Sweden (1995).
- [105] P. W. Hemker and B. Koren, “Multigrid, Defect Correction and UpwindSchemes for the Steady avier-Stokes Equations,” Synopsis, HERMES Hypersonic Reseach Program Meeting, Stuttgart, Germany, Nov. (1987).
- [106] P. L. Roe, “Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows”, in E. Engquist, S. Osher, and R. J. C. Sommerville (eds.), *Large Scale Computations in Fluid Mechanics, Part 2 (Lectures in Applied Mathematics, vol. 22)*, pp. 163-193, American Mathematics Society, Providence, RI (1985).
- [107] Meng-Sing Liou, “Solutions of One-Dimensional Steady Nozzle Flow Revisited”, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 5, pp. 625-627 (1988).
- [108] S. Parameswaran, “Steady Shock-Capturing Method Applied to One-Dimensional Nozzle Flow”, *AIAA Journal*, Vol. 27, NO. 9, pp. 1292-1295 (1989).
- [109] 吳添成, “利用壓力法之非結構性網格可壓縮流計算”, 國立交通大學碩士論文(2001).
- [110] I. Demirdzic, Z. Lilek and M. Preic, “Fluid flow and heat transfer test

- problems for non-orthogonal grids: bench-mark solutions”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 329-354 (1992).
- [111] John D. Anderson, “*Modern Compressible Flow*”, McGraw-Hill Publication Company, New York, 2nd edition (1990).
- [112] Shmuel Eidelman, Phillip Colella and Raymond P. Shreeve, “Application of the Godunov Method and its Second-Order Extension to Cascade Flow Modeling”, *AIAA Journal*, Vol. 22, NO. 11, pp. 1609-1615 (1984).
- [113] M. O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux and H. Viviand, “Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows”, *Notes on Numer. Fluid Mech.*, Vol. 18, Braunschweig; Wiesbaden, Vieweg (1987).
- [114] J. R. Amaladas and H. Kamath, “Accuracy Assessment of Upwind Algorithms for Steady-State Computations”, *Comput. Fluids*, vol. 27, No. 8, pp. 941-962 (1998).
- [115] U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin, “High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and A Multigrid Method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387-411 (1982).
- [116] D. J. Tritton, “Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers”, *J. Fluid Mech.*, vol. 6, pp. 547-567 (1959).
- [117] F. Nieuwstadt and H. B. Keller, “Viscous Flow Past Circular Cylinder”, *Comput. Fluids*, vol. 1, pp. 59-71 (1973).
- [118] M. Coutanceau and R. Bouard, “Experimental Determination of the Main Features of the Viscous Flow in the Wake of a Circular Cylinder in Uniform Translation. Part 1. Steady Flow”, *J. Fluid Mech.*, vol. 79, pp. 231-256 (1977).
- [119] B. Fornberg, “A Numerical Study of Steady Viscous Flow past a Circular Cylinder”, *J. Fluid. Mech.*, vol. 98, pp. 819-855 (1980).
- [120] M. Braza, P. Chassaing, and H. Ha Minh, “Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder”, *J. Fluid Mech.*, vol. 165, pp. 79-130 (1986).
- [121] R. M. Beam and R. F. Warming, “An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation-Law Form”, *J. Comput. Phys.*, vol. 22, pp. 87-110 (1976).
- [122] F. Moukalled and M. Darwish, “Pressure-Based Algorithms for Multifluid

Flow at Aii Speeds- Part I: Mass Conservation Formulation”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 45, pp. 495-522 (2004).

- [123] Rainald Lohner, “Some Useful Data Structures for the Generation of Unstructured Grids”, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 4, pp. 123-135 (1988).
- [124] R. F. Warming and R. M. Beam, “On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws”, SIAM-AMS Proceedings, Vol. 11, pp. 85-129 (1978).
- [125] J. L. Steger and R. F. Warming, “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods”, Journal of Computational Physics, Vol. 40, pp. 263-293 (1981).
- [126] R. Magnus and H. Yoshihara, “Inviscid Transonic Flow Over Airfoils”, AIAA Journal, Vol. 8, No. 12, pp. 2157-2162 (1970).
- [127] S. G. Rubin and P. K. Khosla, “Polynomial interpolation method for viscous flow calculations”, Journal of computational physics, Vol. 24, pp. 217-244 (1977).
- [128] Joseph L. Steger, “Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries”, AIAA Journal, Vol. 16, No. 7, pp. 679-686, July (1978).
- [129] Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Albert C. Reynolds, “Numerical Analysis”, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts (1979).
- [130] S. T. Zalesak, “Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids”, Journal of Computational Physics, Vol. 31, pp. 335-362 (1979).
- [131] J. L. Steger and R. F. Warming, “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Difference Methods”, J. Comput. Phys., vol. 40, pp. 263-293, 1981.
- [132] R. W. MacComack, ”A Numerical Method for Solving the Equation of Compressible Viscous Flows”, AIAA Journal, Vol. 20, No. 9, pp. 1275-1281 (1982).
- [133] Ron-Ho Ni, “A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equation”, AIAA Journal, Vol. 20, pp. 1565-1571 (1982).
- [134] S. A. E. G. Falle, “The method of characteristics applied to problems in

- cosmical gas dynamics”, Numerical Methods for Fluid Dynamics, eds. KW Morton and MJ Baines, Academic Press, London, pp. 481-517 (1982).
- [135] S. Osher, “Shock modelling in aeronautics”, Numerical Methods for Fluid Dynamics, eds. KW Morton and MJ Baines, Academic Press, London, pp. 179-217 (1982).
- [136] Stefan Schreier, “Compressible Flow”, A Wiley-Interscience Publication, New York (1982).
- [137] S. Osher and S. Chakravarthy, “High resolution schemes and the entropy condition”, SIAM Journal Numerical Analysis Vol. 21, No. 5, pp. 955-984 (1984).
- [138] Stanley Osher, “Riemann solver, the entropy condition and difference scheme approximations”, SIAM Journal Numerical Analysis, Vol. 21, No. 2, pp. 217-235, April (1984).
- [139] A. Jameson and V. Venkatakrishnan, “Transonic flows about oscillating airfoils using the Euler equations”, AIAA Paper, 85-1514 (1985).
- [140] H. C. Yee and A. Harten, “Implicit TVD schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates”, AIAA Paper, 85-1513 (1985).
- [141] Sukumar R. Chakravarthy and Stanley Osher, “A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws”, AIAA Paper, 85-0363 (1985).
- [142] Ami Harten, “Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III”, Journal of computational physics, Vol. 71, pp. 231-303 (1987).
- [143] Catherine M. Maksymiuk and Thomas H. Pulliam, “Viscous transonic airfoil workshop results using ARC2D”, AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, AIAA-87-0415 (1987).
- [144] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz, “Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations”, Journal of Computational Physics, Vol. 72, pp. 449-466 (1987).
- [145] S. P. Vanka, “Second-order upwind differencing in a recirculating flow”, AIAA Journal, Vol. 25, pp. 1435-1441 (1987).

- [146] S. P. Spekreijse, "Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservations laws", *Mathematics of computation*, Vol. 49, pp. 135-155 (1987).
- [147] Stephen F. Davis, "A simplified TVD finite difference scheme via artificial viscosity", *SIAM Journal Sci. Stat. Comput.*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-18, January (1987).
- [148] J. P. Van Doormaal, G. D. Raithby, and B. H. McDonald, "The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows", *ASME J. Turbomachinery*, vol. 109, pp. 268-277 (1987).
- [149] Shih-Hung Chang and Meng-Sing Liou, "A comparison of ENO and TVD schemes", *AIAA Paper*, 88-3707-CP (1988).
- [150] S. Parameswaran, "Steady Shock-Capturing Method Applied to One-Dimensional Nozzle Flow", *AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1292-1295, Sep. (1989).
- [151] B. P. Leonard and S. Mokhtari, "Beyond first-order upwinding: The ultra-sharp alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection", *International Journal Numerical Methods Eng.*, Vol. 30, pp. 729-766 (1990).
- [152] I. Demirdzic and M. Preic, "Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrarily Shaped Domains with Moving Boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 10, pp. 771-790 (1990).
- [153] C. P. Chen, Y. Jiang, Y. M. Kim and H. M. Shang, "A computer code for multiphase all-speed transient flows in complex geometries", *NASA Contractor Report*, MAST version 1.0, October (1991).
- [154] Hyeong-Mo Koo and Seung O. Park, "Extension and application of the QUICKER scheme to a non-uniform rectangular grid system", *Communications In Applied Numerical Methods*, Vol. 7, pp. 111-122 (1991).
- [155] M. H. Kobayashi and J. C. F. Pereira, "Numerical comparison of momentum interpolation methods and pressure-velocity algorithms using non-staggered grids", *Communications In Applied Numerical Methods*, Vol. 7, pp. 173-186 (1991).

- [156] Nobuyuki Taniguchi and Toshio Kobayashi, "Finite volume method on the unstructured grid system", *Computers and Fluids*, Vol. 19, No. 3/4, pp. 287-295 (1991).
- [157] Y.-Y. Tsui, "A Study of Upstream-Weighted High-Order Differencing for Approximation to Flow Convection", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 13, pp. 167-199 (1991).
- [158] A. Dadone and B. Grossman, "Characteristic-Based, Rotated Upwind Scheme for the Euler Equations", *AIAA J.*, vol. 30, No. 9, pp. 2219-2226 (1992).
- [159] Frederic Coquel and Meng-Sing Liou, "Field by field hybrid upwind splitting methods", *AIAA-93-3302-CP*, pp. 51-61 (1993).
- [160] H. Paillere, H. Deconinck, R. Struijs, P. L. Roe, L. M. Mesaros and J. D. Muller, "Computations of inviscid compressible flows using fluctuation-splitting on triangular meshes", *AIAA-93-3301-CP* (1993).
- [161] Heng Lin and Ching-Chang Chieng, "Comparisons of TVD schemes for turbulent transonic projectile aerodynamics computations with a two-equation model of turbulence", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, pp. 365-390 (1993).
- [162] P. Van Ransbeeck and Ch. Hirsch, "New upwind dissipation models with a multidimensional approach", *AIAA-93-3304-CP*, pp. 81-91 (1993).
- [163] W. M. Eppard and B. Grossman, "A multi-dimensional kinetic-based upwind solver for Euler Equations", *AIAA-93-3303-CP* (1993).
- [164] William J. Rider, "On improvements to symmetric TVD algorithms: method development", *AIAA-93-3300-CP*, pp. 26-35 (1993).
- [165] C. H. Marchi and C. R. Maliska, "A Nonorthogonal Finite-Volume Method for the Solution of All Speed Flows Using Co-located Variables", *Numer. Heat Transfer B*, vol. 26, pp. 293-311 (1994).
- [166] Dartzi Pan and Jen-Chieh Cheng, "Incompressible flow solution on unstructured triangular meshes", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 26, pp. 207-224 (1994).
- [167] T. S. Wang, S. Warsi and Y. S. Chen, "CFD assessment of the pollutant environment from RD-170 propulsion system testing", *AIAA Paper*, 95-0811 (1995).

- [168] Y. N. Jeng and U. J. Payne, "An Adaptive TVD Limiter", *J. Comput. Phys.*, vol. 118, pp. 229-241 (1995).
- [169] P. Batten, F. S. Lien and M. A. Leschziner, "A positivity-preserving pressure-correction method", 15th International Conf. On Numerical Methods in Fluid Dynamics, Monterey, CA (1996).
- [170] V. Venkatakrishnan, "Perspective on unstructured grid flow solvers", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 3, March, pp. 533-547 (1996).
- [171] Andreas C. Haselbacher, James J. McGuirk and Gary J. Page, "Finite-volume discretisation aspects for viscous flows on mixed unstructured grids", AIAA-97-1946, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1997).
- [172] Chung-Hsiung Lin and C. A. Lin, "Simple high-order bounded convection scheme to model discontinuities", *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 3, March, pp. 563-565 (1997).
- [173] E. S. Politis and K. C. Giannakoglou, "A pressure-based algorithm for high-speed turbomachinery flows", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 25, pp. 63-80 (1997).
- [174] Yong G. Lai, "An unstructured grid method for a pressure-based flow and heat transfer solver", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, pp. 267-281 (1997).
- [175] Karl W. Schulz and Yannis Kallinderis, "Unsteady flow structure interaction for incompressible flows using deformable hybrid grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 143, pp. 569-597 (1998).
- [176] 吳尚威, "利用壓力修正法解可壓縮流", 國立交通大學碩士論文 (1998).
- [177] Q. Zhou and M. A. Leschziner, "An improved particle-locating algorithm for Eulerian-Lagrangian computations of two-phase flows in general coordinates", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 25, pp. 813-825 (1999).
- [178] M. A. Alves, F. T. Pinho and P. J. Oliveira, "Effect of a high-resolution differencing scheme on finite-volume predictions of viscoelastic flows", *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 93, pp. 287-314 (2000).
- [179] Yong G. Lai, "Unstructured grid arbitrarily shaped element method for

- fluid flow simulation”, AIAA Journal, Vol. 38, No. 12, December, pp. 2246-2252 (2000).
- [180] 潘燕峰, “利用任意形狀非結構性網格之壓力修正流場分析法”, 國立交通大學碩士論文(2000).
- [181] B. Yu, W. Q. Tao, D. S. Zhang and Q. W. Wang, “Discussion on numerical stability and boundedness of convective discretized scheme”, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 40, pp. 343-365 (2001).
- [182] Hans Johnston and Jian-Guo Liu, “Accurate, stable and efficient Navier-Stokes solvers based on explicit treatment of the pressure term”, Journal of Computational Physics, Vol. 199, No. 1, pp. 221-259 (2004).
- [183] Kyu Hong Kim and Chongam Kim, “Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows, Part I : Spatial discretization”, Journal of Computational Physics, Vol. 208, No. 2, pp. 527-569 (2005).
- [184] Kyu Hong Kim and Chongam Kim, “Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows, Part II : Multi-dimensional limiting process”, Journal of Computational Physics, Vol. 208, No. 2, pp. 570-615 (2005).
- [185] Steven J. Ruuth and Willern Hundsdorfer, “High-order linear multistep methods with general monotonicity and boundedness properties”, Journal of Computational Physics, Vol. 209, No. 1, pp. 226-248 (2005).
- [186] Zhengfu Xu and Chi-Wang Shu, “Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes”, Journal of Computational Physics, Vol. 205, No. 2, pp. 458-485 (2005).
- [187] William R. Wolf and Joao Luiz F. Azevedo, “High-Order Unstructured Grid ENO and WENO Schemes Applied to Aerodynamic Flows,” AIAA Paper, 2005-5115, June (2005).

附表

表 4-1：線性 NVD 與 TVD 限制函數關係式

差分法	NVD	TVD	備註
UDS	$\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = 0$	
DDS	$\tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = 2$	
CDS	$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(1 + \tilde{\phi}_c)$	$\psi(r) = 1$	K=1
QUICK	$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$	$\psi(r) = \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}$	K=1/2
CUS	$\tilde{\phi}_f = \frac{5}{6}\tilde{\phi}_c + \frac{1}{3}$	$\psi(r) = \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}$	K=1/3
Fromm	$\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c + \frac{1}{4}$	$\psi(r) = \frac{1}{2}(r+1)$	K=0
LUS	$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = r$	K=-1
	$\tilde{\phi}_f = \frac{1}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{4}$	$\psi(r) = \frac{3}{2}$	
	$\tilde{\phi}_f = \frac{3}{8}\tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = -\frac{5}{4}r$	
	$\tilde{\phi}_f = 3\tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = 4r$	
	$\tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = 2r$	
	$\tilde{\phi}_f = \frac{7}{4}\tilde{\phi}_c$	$\psi(r) = \frac{3}{2}r$	

表 4-2：非線性 NVD 與 TVD 限制函數關係式

差分法	NVD	TVD	備註
SMART (圖 4-5)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{6} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 3\tilde{\phi}_c$ $\frac{5}{6} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{6}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{5}{6}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(2, \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}, 4r)\}$	具界限 非 TVD 分段函 數
STOIC (圖 4-6)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{5} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 3\tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{2} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{5}, \tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_c + 1)$ $\frac{5}{6} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{2}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{5}{6}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min[2, 4r, \max(1, \frac{1}{4}r + \frac{3}{4})]\}$	具界限 非 TVD 分段函 數
UMIST (圖 4-7)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{6} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{2} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{6}, \tilde{\phi}_f = \frac{5}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{1}{8}$ $\frac{5}{6} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{2}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{5}{6}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(2, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}r, \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}, 2r)\}$	具界限 TVD 分 段函數
WACEB (Lin Chung-Hsiung) (圖 4-8)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{3}{10} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$ $\frac{5}{6} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{3}{10}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{5}{6}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(2, \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}, 2r)\}$	具界限 TVD 分 段函數

差分法	NVD	TVD	備註
MUSCL (圖 4-9)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{4} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$ $\frac{3}{4} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{4}, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c + \frac{1}{4}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{3}{4}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(2, \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}, 2r)\}$	具界限 TVD 分段函數
GAMMA (圖 4-10)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c \geq \beta m, \tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_c + 1)$ $\beta m > \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c(1 + \frac{1 - \tilde{\phi}_c}{2\beta m})$	$\psi(r) = \max\{0, \min(1, \frac{r}{\beta m(r+1)})\}$	具界限 TVD 分段函數
SUPERBEE (圖 4-11)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{3} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{2} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{3}, \tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_c + 1)$ $\frac{2}{3} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{1}{2}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{2}{3}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(r, 2), \min(2r, 1)\}$	具界限 TVD 分段函數
MINMOD (SOUCUP) (圖 4-12)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{1}{2} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{1}{2}, \tilde{\phi}_f = \frac{1}{2}(\tilde{\phi}_c + 1)$	$\psi(r) = \max\{0, \min(r, 1)\}$	具界限 TVD 分段函數
OSHER (圖 4-13)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{2}{3} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{2}\tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{2}{3}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(r, 2)\}$	具界限 TVD 分段函數
Koren (圖 4-14)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{2}{7} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c$ $\frac{4}{5} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{2}{7}, \tilde{\phi}_f = \frac{5}{6}\tilde{\phi}_c + \frac{1}{3}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{4}{5}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(2, \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}, 2r)\}$	具界限 TVD 分段函數

差分法	NVD	TVD	備註
CUBISTA (圖 4-15)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $\frac{3}{8} \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \frac{7}{4}\tilde{\phi}_c$ $\frac{3}{4} \geq \tilde{\phi}_c > \frac{3}{8}, \tilde{\phi}_f = \frac{3}{4}\tilde{\phi}_c + \frac{3}{8}$ $1 > \tilde{\phi}_c > \frac{3}{4}, \tilde{\phi}_f = 1$	$\psi(r) = \max\{0, \min(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}r)\}$	具界限 TVD 分段函數
H- QUICK (圖 4-16)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \frac{3\tilde{\phi}_c}{2\tilde{\phi}_c + 1}$	$\psi(r) = 2 \times \frac{r + r }{3r + 1}$	具界限 非 TVD 連續函數
CHARM (圖 4-17)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 \geq \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c(\tilde{\phi}_c^2 - \frac{5}{2}\tilde{\phi}_c + \frac{5}{2})$	$\psi(r) = \frac{r(r+3)}{(r+1)^2}, r > 0$ $\psi(r) = 0, r \leq 0$	具界限 TVD 連續函數
Van-Leer harmonic (圖 4-18)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c - \tilde{\phi}_c^2$	$\psi(r) = \frac{r + r }{r + 1}$	具界限 TVD 連續函數
OSPRE (圖 4-19)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = \frac{3\tilde{\phi}_c(1 - \tilde{\phi}_c)}{4(\tilde{\phi}_c^2 - \tilde{\phi}_c + 1)}$	$\psi(r) = \frac{3(r^2 + r)}{2(r^2 + r + 1)}$	具界限 TVD 連續函數
Hemker & Koren (圖 4-20)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0,$ $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c + \frac{\tilde{\phi}_c(\tilde{\phi}_c^2 - 3\tilde{\phi}_c + 3)}{10\tilde{\phi}_c^2 - 10\tilde{\phi}_c + 4}$	$\psi(r) = \frac{(r^2 + 2r)}{(2r^2 - r + 2)}$	具界限 TVD 連續函數
Van Albada (圖 4-21)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0,$ $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c + \frac{\tilde{\phi}_c(1 - \tilde{\phi}_c)}{4\tilde{\phi}_c^2 - 4\tilde{\phi}_c + 2}$	$\psi(r) = \frac{(r^2 + r)}{(r^2 + 1)}$	具界限 TVD 連續函數
CLAM (HLP) (圖 4-22)	$\tilde{\phi}_c \geq 1 \text{ or } \tilde{\phi}_c \leq 0, \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ $1 > \tilde{\phi}_c > 0, \tilde{\phi}_f = 2\tilde{\phi}_c - \tilde{\phi}_c^2$	$\psi(r) = \max\{0, \frac{2r}{r+1}\}$	具界限 TVD 連續函數

表 7-1：圓柱低雷諾數外流場計算數值比較表

作者	Re=20			Re=40		
	C_D	X_E	θ_{sep}	C_D	X_E	θ_{sep}
原始變數 Van Albada 限制法 (QUSG)	2.03636	1.418	137.015	1.5232	2.751	126.565
原始變數 Van Albada 限制法 (HUSG)	2.07687	1.341	137.434	1.5865	2.603	126.689
原始變數 SUPERBEE 限制 法 (HUSG)	2.29717	1.497	135.564	1.58064	2.685	126.369
特徵變數(MD1) Van Albada 限制法 (HUSG)	2.12375	1.399	136.838	1.60519	2.630	126.730
特徵變數(MD2) Van Albada 限制法 (HUSG)	2.12362	1.396	136.849	1.60503	2.630	126.752
特徵變數(MD1) SUPERBEE 限制 法 (HUSG)	2.12362	1.433	136.170	1.57446	2.723	126.216
特徵變數(MD2) SUPERBEE 限制 法 (HUSG)	2.12075	1.434	136.194	1.57344	2.725	126.239
Takami, Keller[35]	2.0027	1.435	-	1.5359	2.825	-
Tritton(exp)[116]	2.0225	-	-	1.504	-	-
Nieuwstadt, Keller[117]	2.053	1.393	-	1.550	2.6785	-
Coutanceau, Bouard[118]	-	-	133.88	-	-	126.75
Fornberg[119]	2.0001	1.41	-	1.4980	2.74	-
Braza[120]	-	1.3909	137.06	-	2.60	125.31

表 7-2：雙喉部噴嘴內流場計算數值比較表

作者	Re _o =100	Re _o =400	Re _o =1600	
	X _S /X _R	X _S /X _R	X _{S1} /X _{R1}	X _{S2} /X _{R2}
原始變數 Van Albada 限制子	3.027/4.839	2.997/6.261	3.426/4.701	8.110/8.351
原始變數 SUPERBEE 限制子	3.023/4.835	2.988/6.207	3.418/4.701	8.083/8.315
特徵變數(MD1) Van Albada 限制子	3.024/4.816	2.998/6.246	3.428/4.708	8.114/8.322
特徵變數(MD1) SUPERBEE 限制子	3.028/4.806	2.972/6.184	3.428/4.707	8.090/8.318
特徵變數(MD2) Van Albada 限制子	3.035/4.810	3.032/6.265	3.437/4.674	8.122/8.198
特徵變數(MD2) SUPERBEE 限制子	3.041/4.803	2.993/6.262	3.406/4.669	8.046/8.248
O. Labbe' [113]	3.000/4.8125	3.000/6.188	3.438/4.688	8.063/8.188
J. L. Thomas, et al. [113]	3.004/4.820	2.986/6.221	3.432/4.709	8.077/8.216
J. N. Scott, M.R. Visbal [113]	2.951/4.811	3.005/6.241	3.432/4.728	8.043/8.234
D. Schwamborn [113]	2.970/4.848	2.962/6.230	3.424/4.739	8.006/8.280

附圖

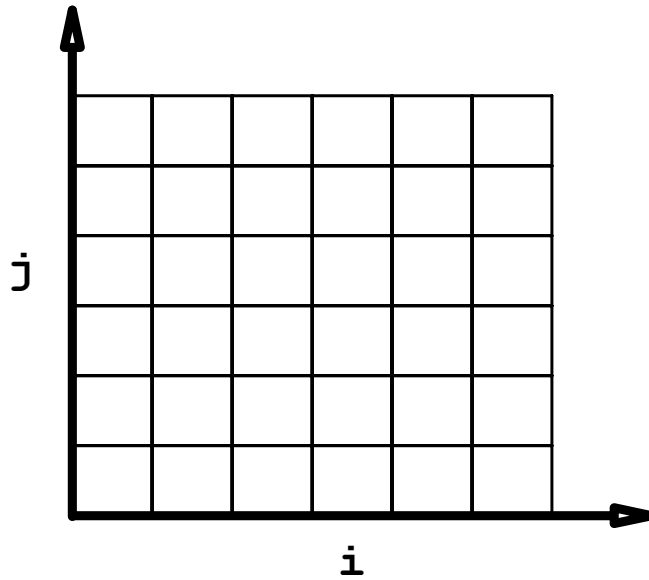


圖 1-1：結構性網格示意圖

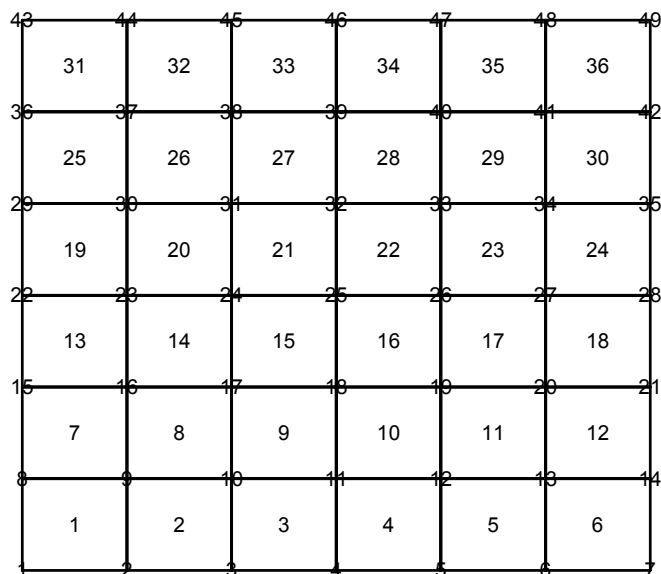


圖 1-2：四邊形無結構性網格示意圖

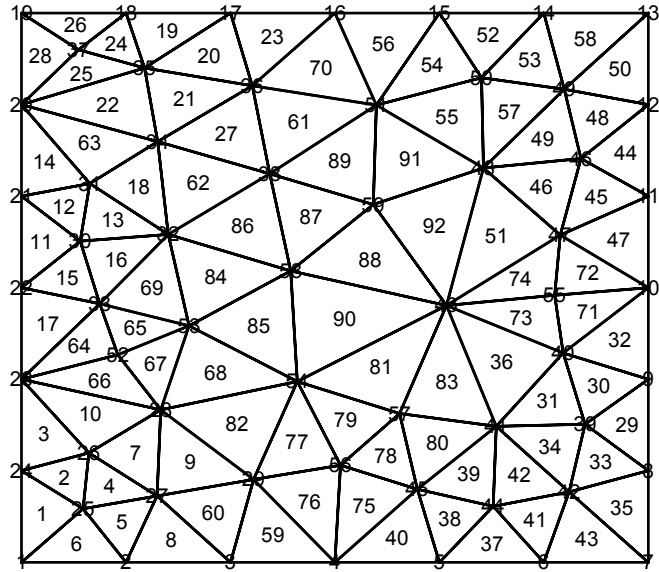


圖 1-3：三邊形無結構性網格示意圖

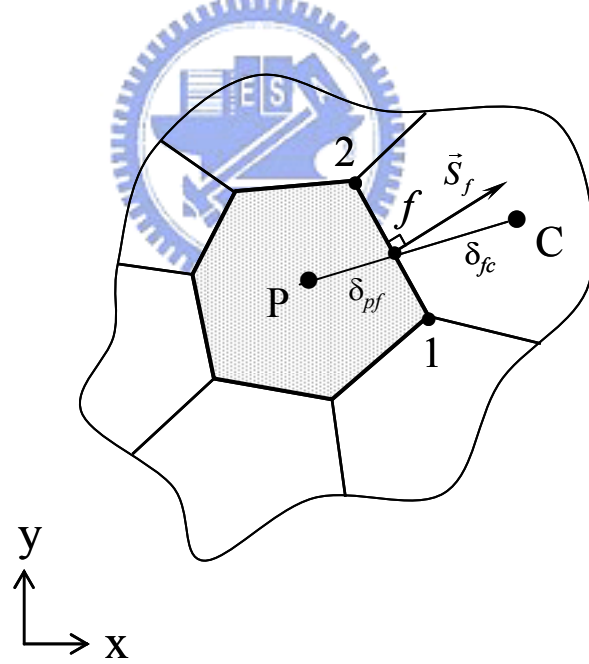


圖 3-1：對流項離散化之標示圖

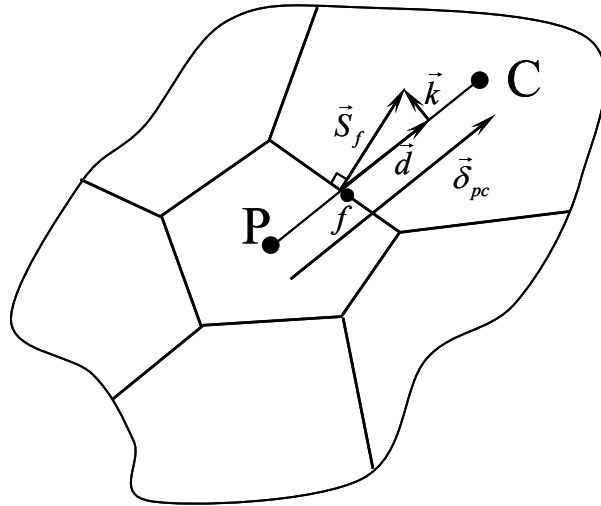


圖 3-2：擴散項離散化 over-relaxed 法之標示圖

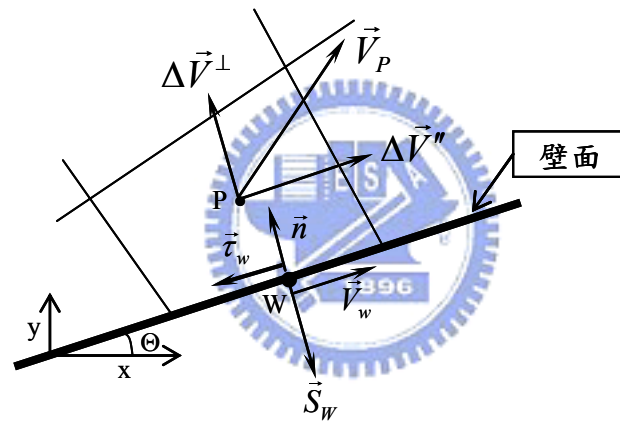


圖 3-3：壁面剪應力計算之示意圖

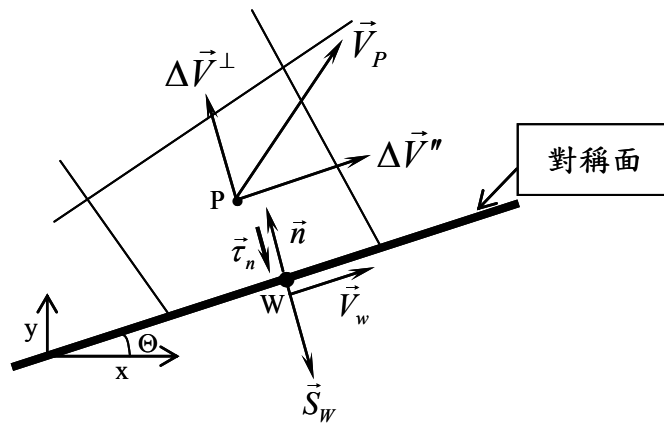


圖 3-4：對稱面垂直應力計算之示意圖

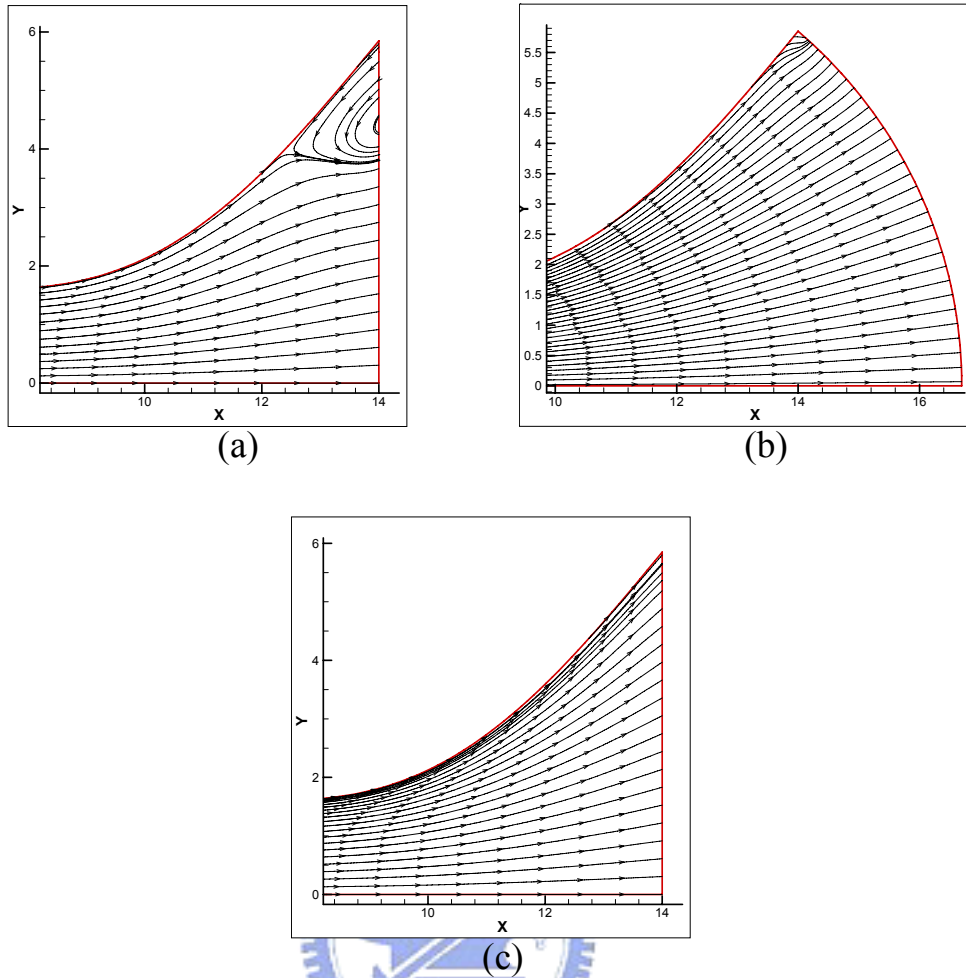


圖 3-5：雙喉部噴嘴出口流場(a)邊界條件以壁面剪應力方式處理(出口靠壁面處產生異常迴流)；(b)出口正交網格(出口仍產生小迴流)；(c)邊界條件直接解動量方程式(無迴流)

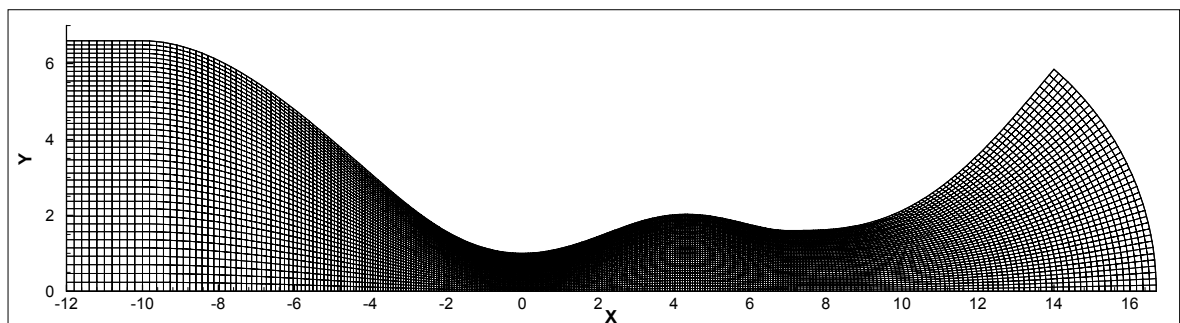


圖 3-6：雙喉部噴嘴出口正交網格

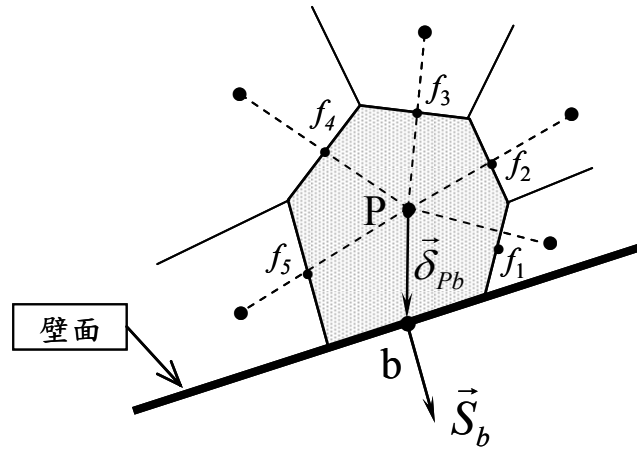


圖 3-7：邊界壓力計算之示意圖

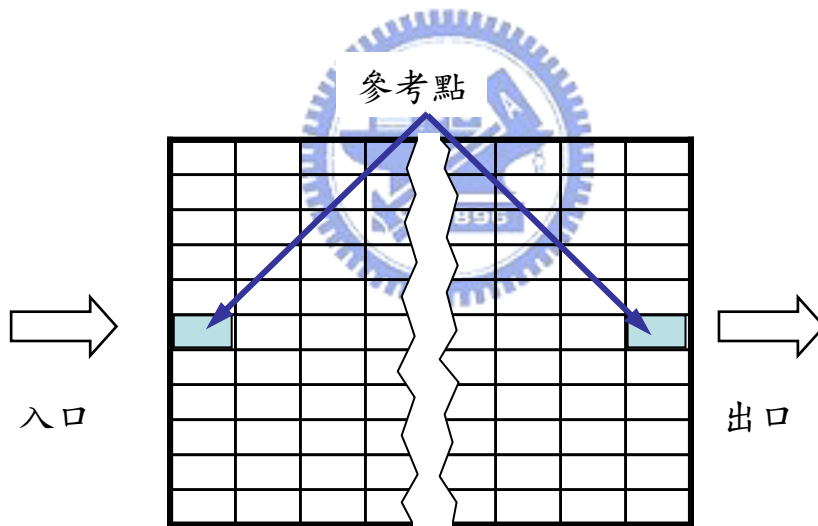


圖 3-8：入口或出口邊界之參考點示意圖

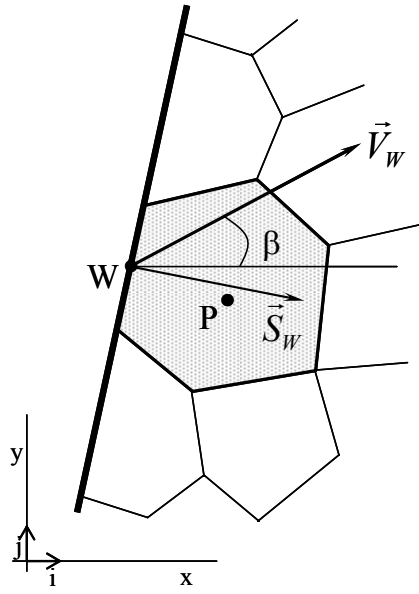


圖 3-9：入口給定停滯邊界條件處理之示意圖

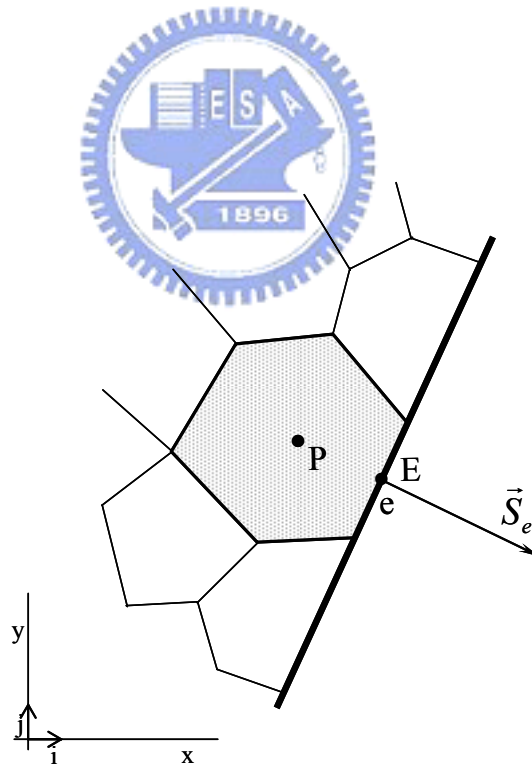


圖 3-10：出口給定靜壓力邊界條件處理之示意圖

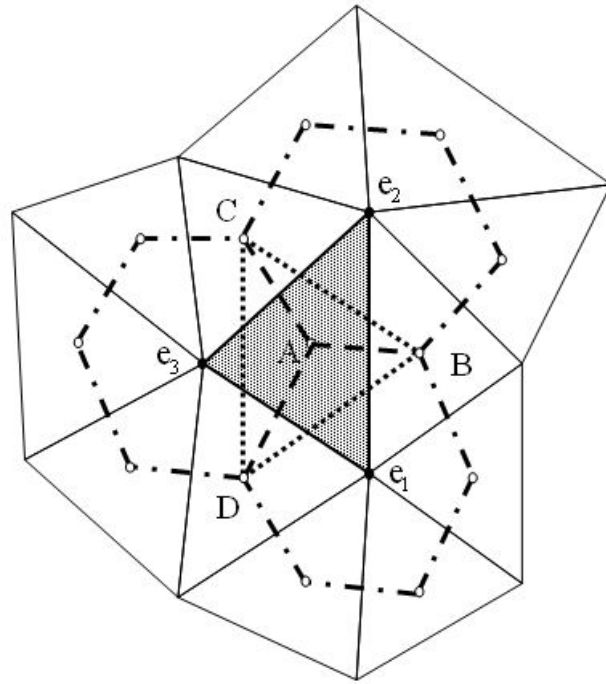


圖 3-11：典型三角形無結構網格梯度計算之積分路徑標示圖

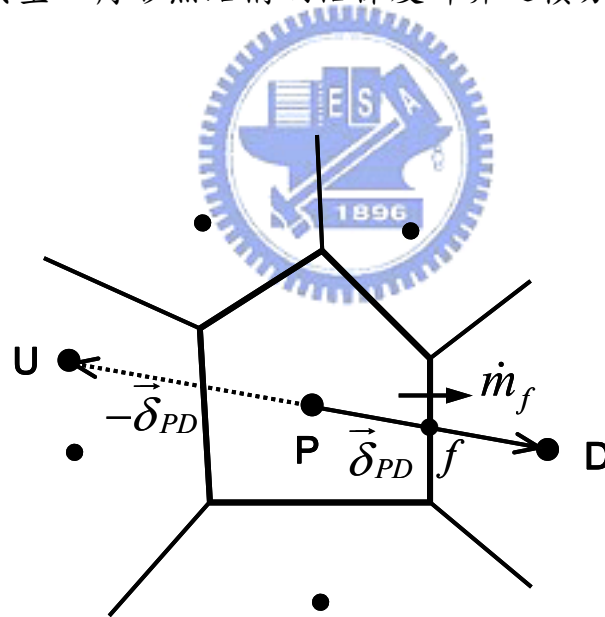


圖 4-1：對流項離散化之標示圖

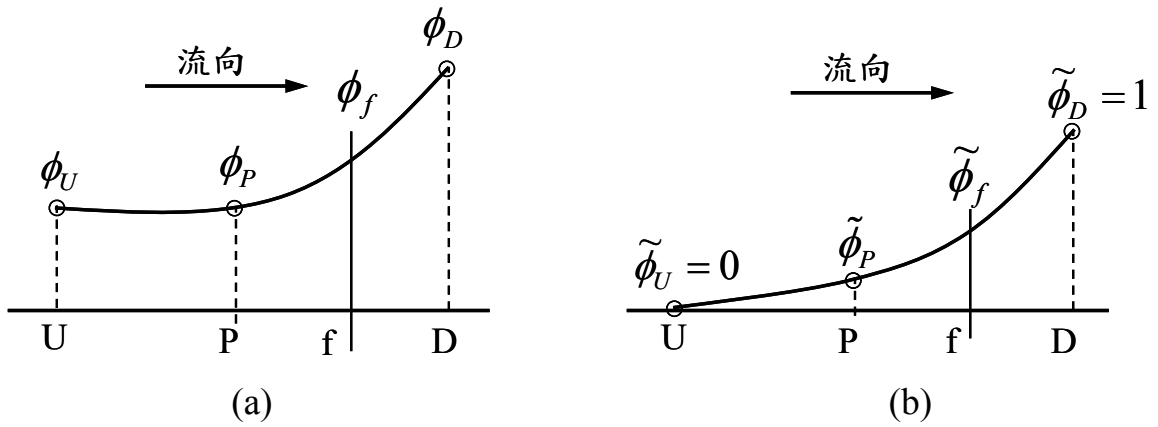


圖 4-2：(a)流場原始變數示意圖；(b)流場正規化變數示意圖

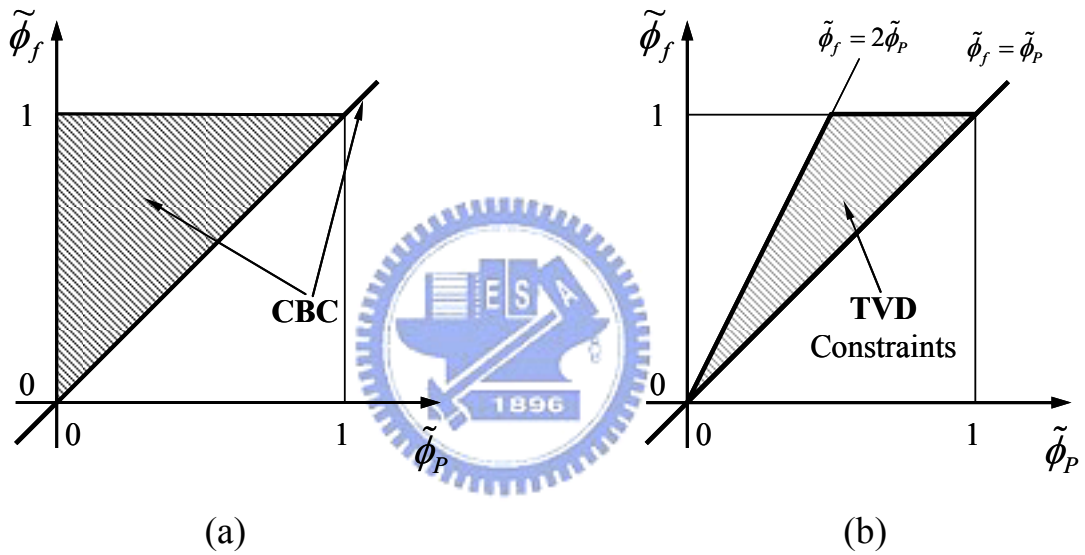


圖 4-3：正規化變數圖(NVD)(a)對流界限準則(CBC)示意圖；(b)TVD 示意圖

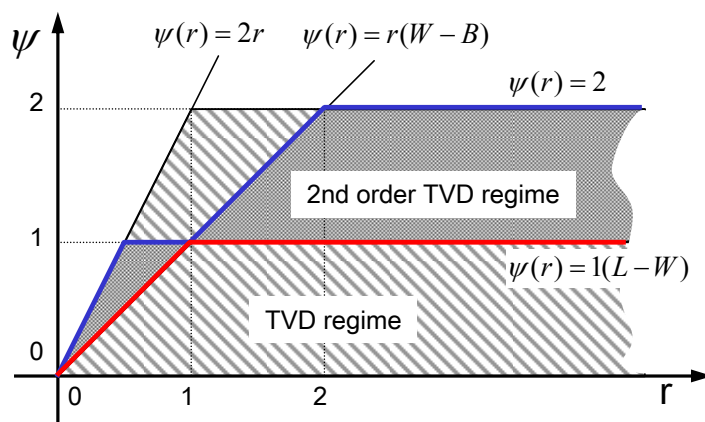
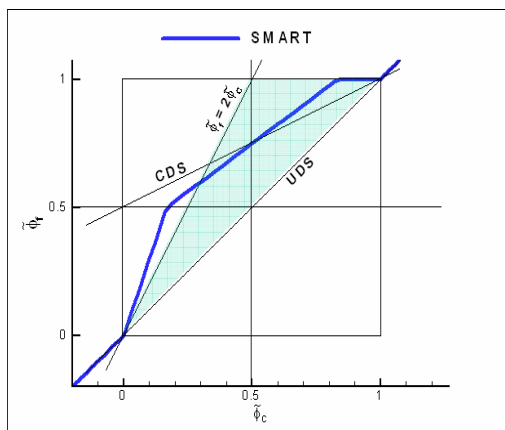
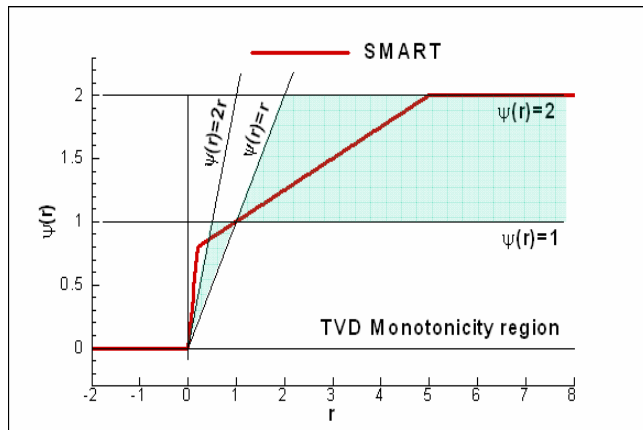


圖 4-4：Sweby 的 TVD 示意圖

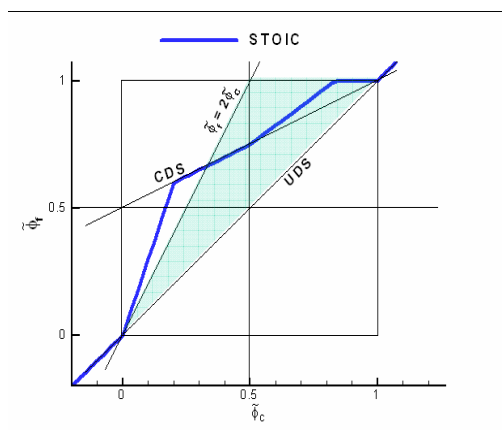


(a)

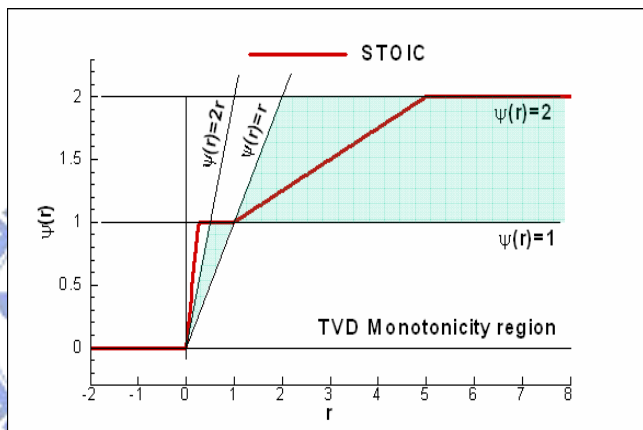


(b)

圖 4-5：SMART 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

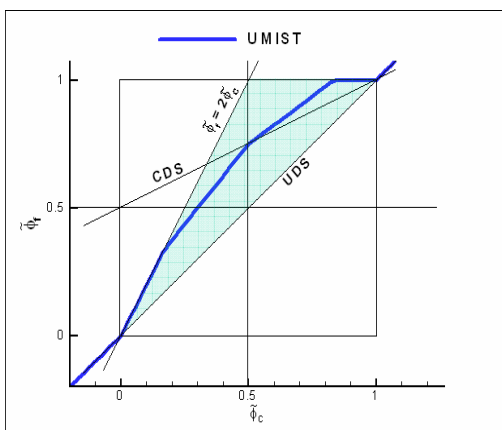


(a)

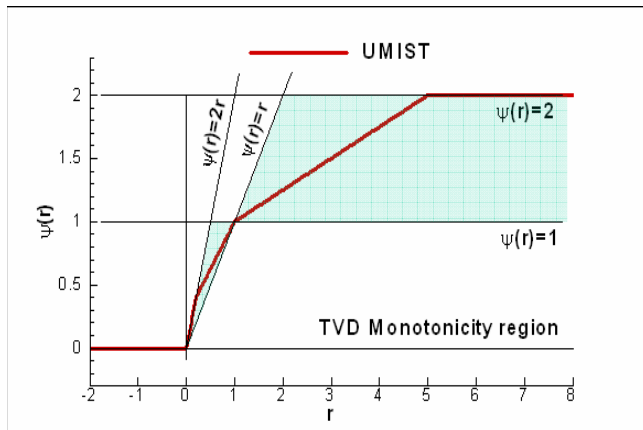


(b)

圖 4-6：STOIC 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

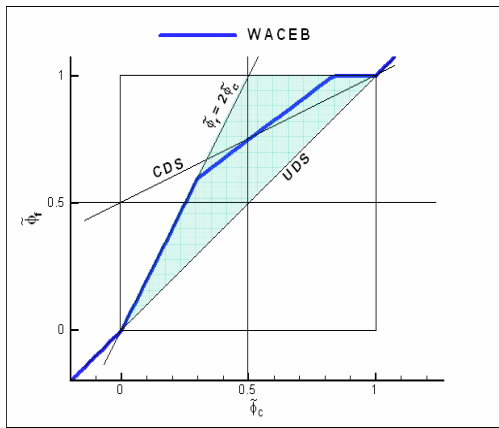


(a)

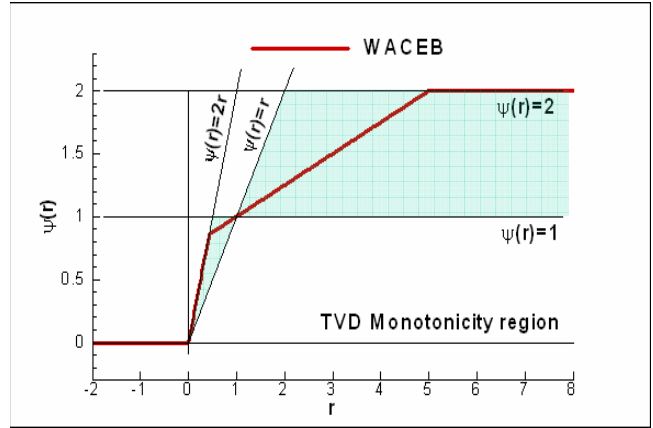


(b)

圖 4-7：UMIST 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

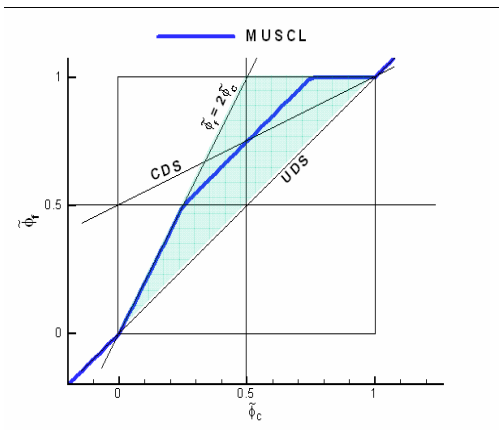


(a)

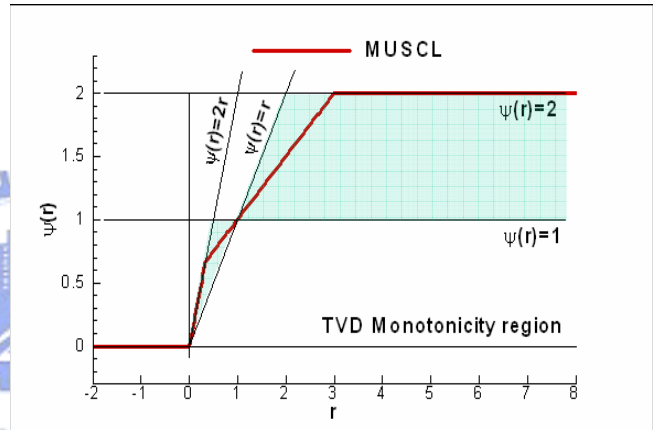


(b)

圖 4-8：WACEB 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

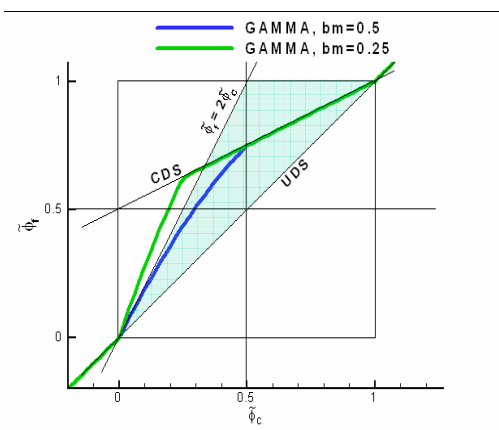


(a)

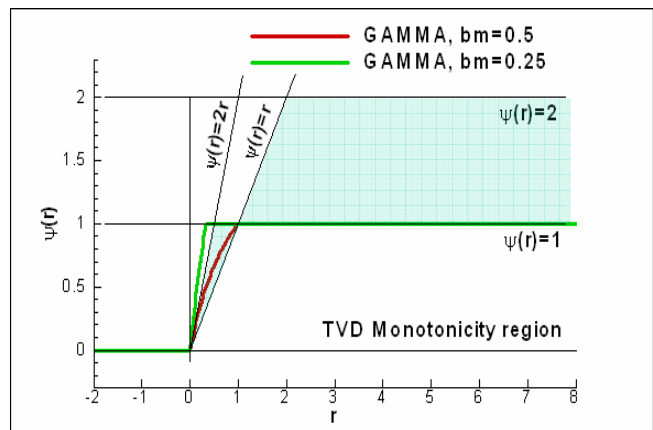


(b)

圖 4-9：MUSCL 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

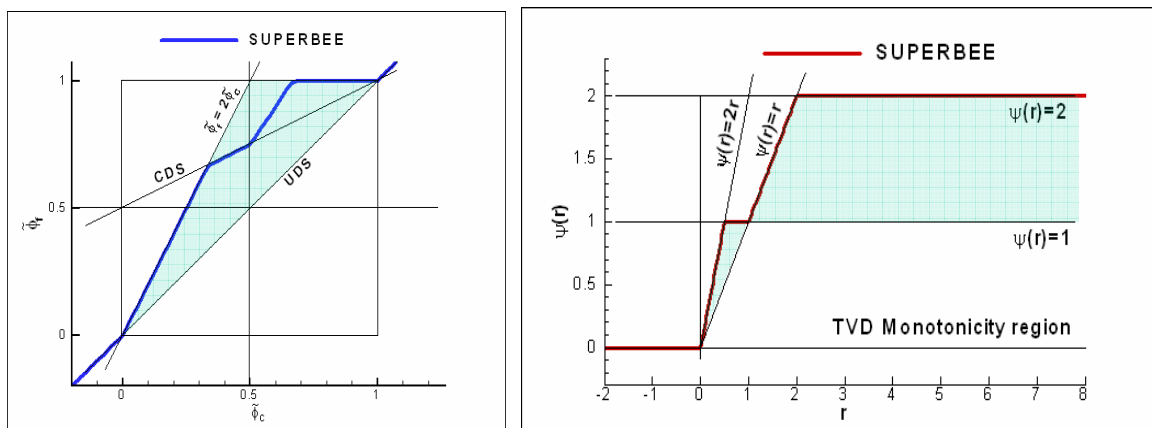


(a)



(b)

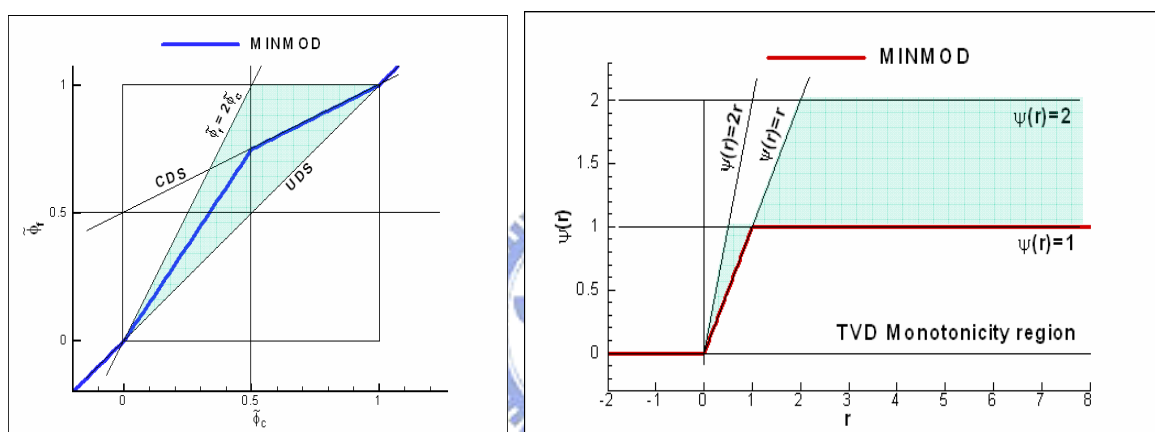
圖 4-10：GAMMA 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖



(a)

(b)

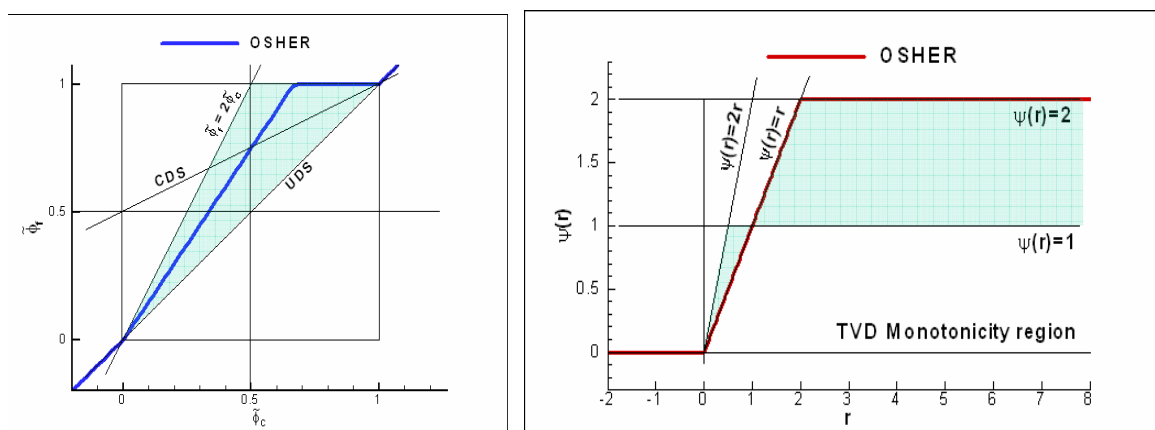
圖 4-11：SUPERBEE 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖



(a)

(b)

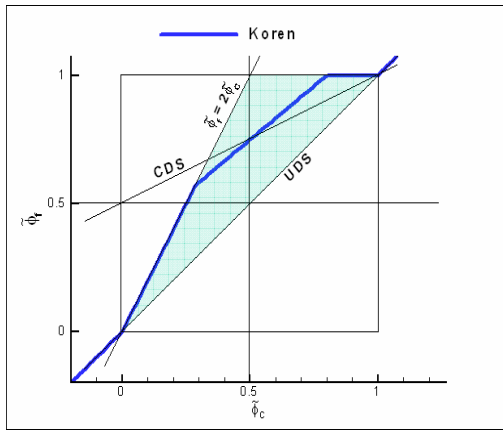
圖 4-12：MINMOD 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖



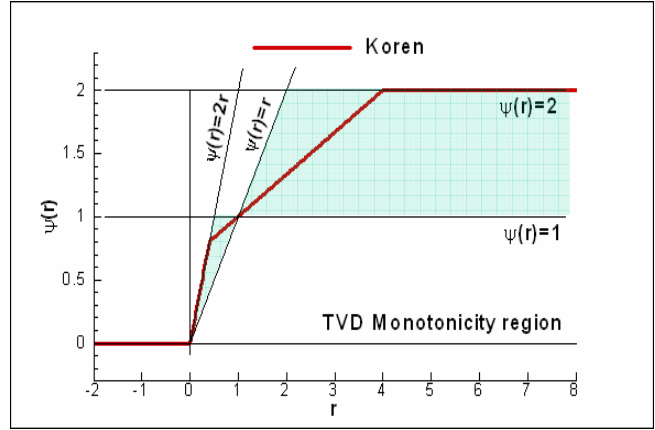
(a)

(b)

圖 4-13：OSHER 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

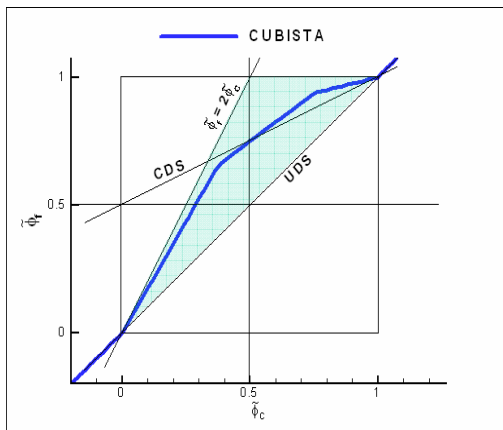


(a)

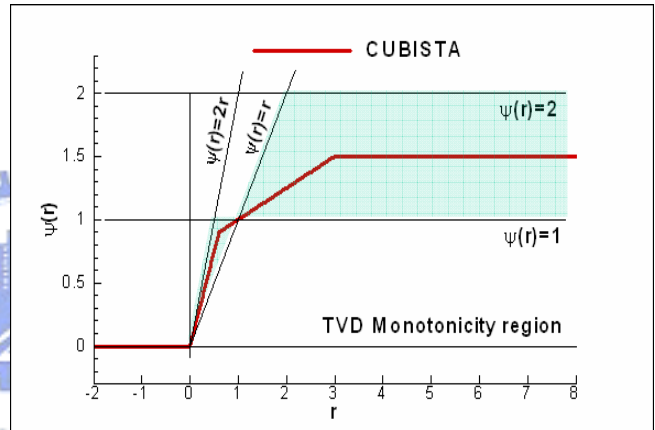


(b)

圖 4-14：Koren 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

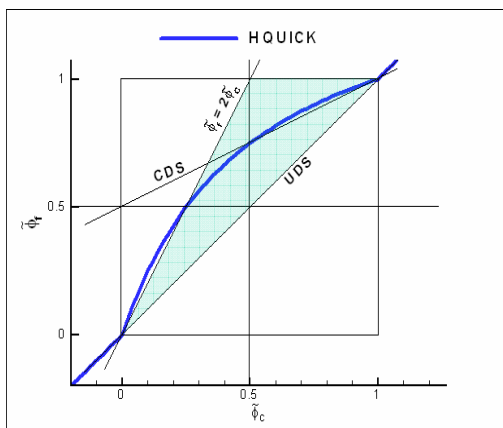


(a)

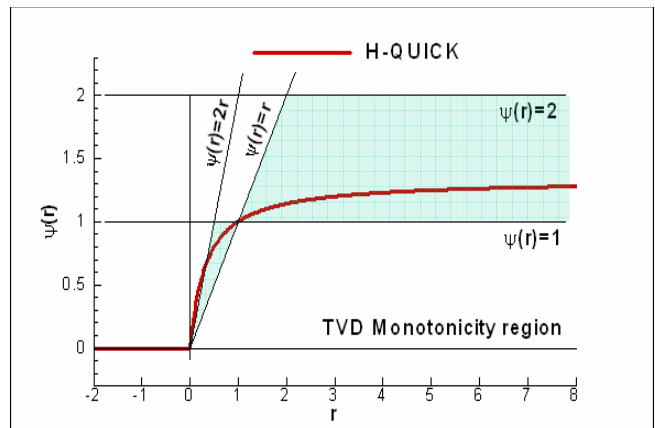


(b)

圖 4-15：CUBISTA 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

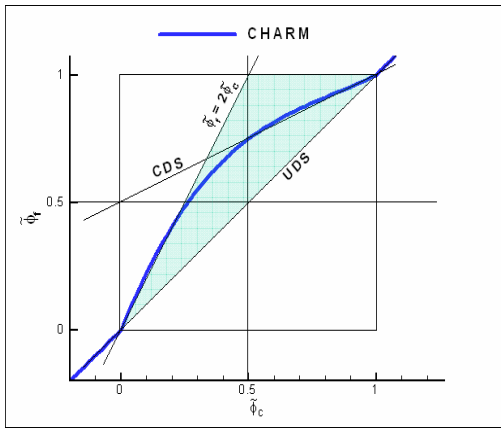


(a)

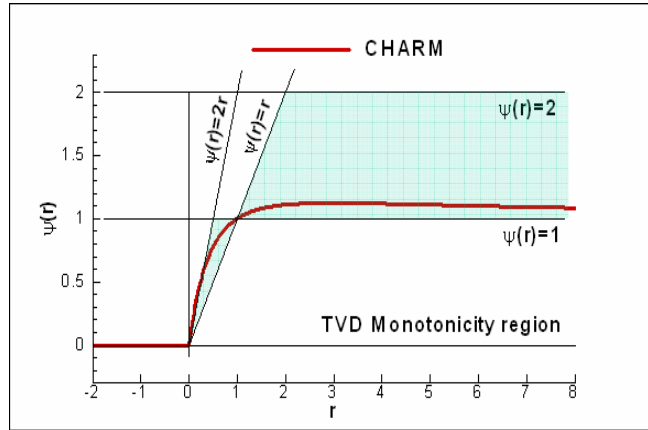


(b)

圖 4-16：H-QUICK 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

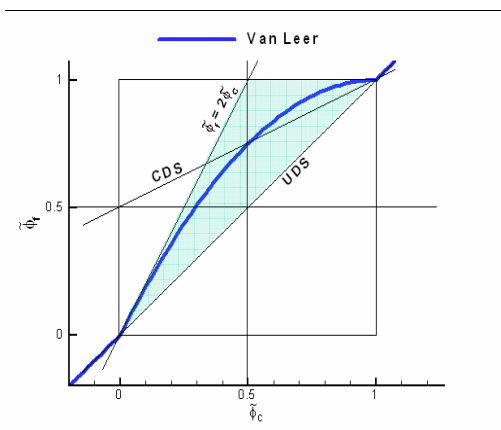


(a)

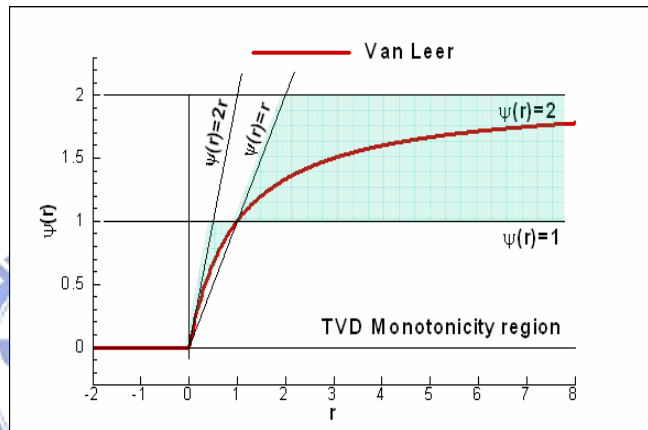


(b)

圖 4-17：CHARM 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

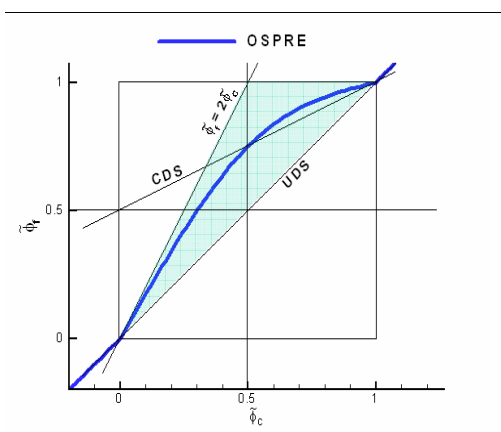


(a)

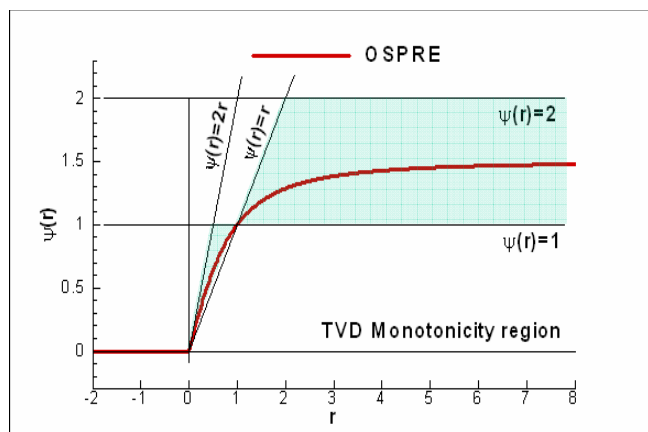


(b)

圖 4-18：Van-Leer 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

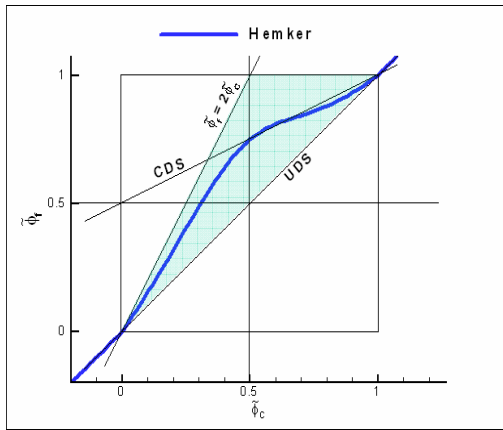


(a)

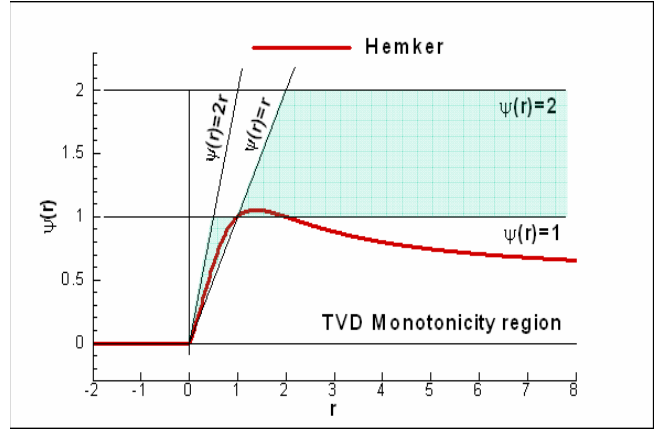


(b)

圖 4-19：OSPRE 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

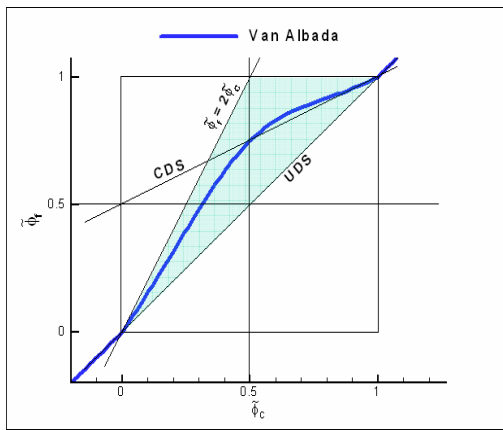


(a)

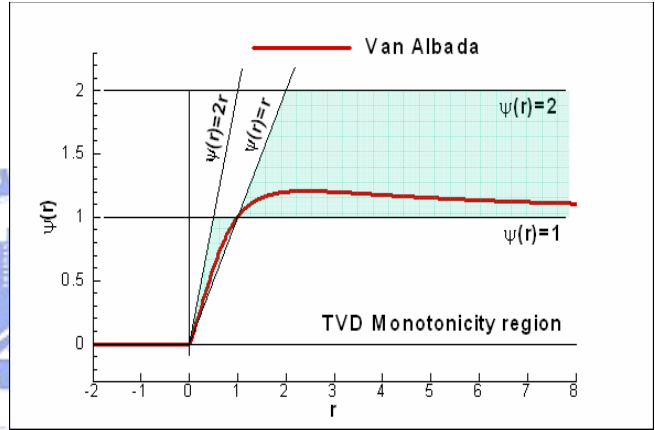


(b)

圖 4-20：Hemker 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

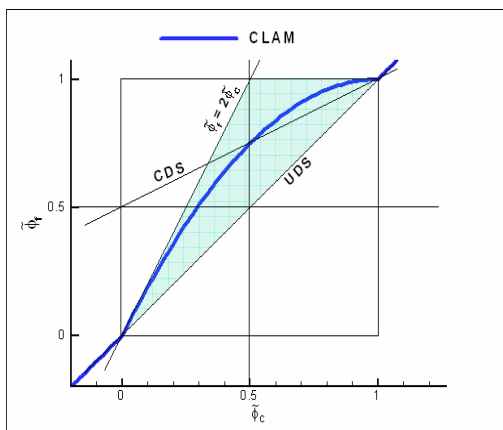


(a)

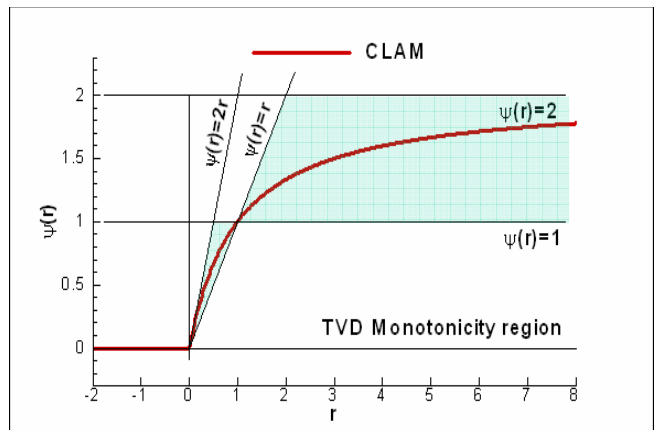


(b)

圖 4-21：Van-Albada 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖



(a)



(b)

圖 4-22：CLAM 高階限制函數(a)NVD 圖；(b)TVD 關係圖

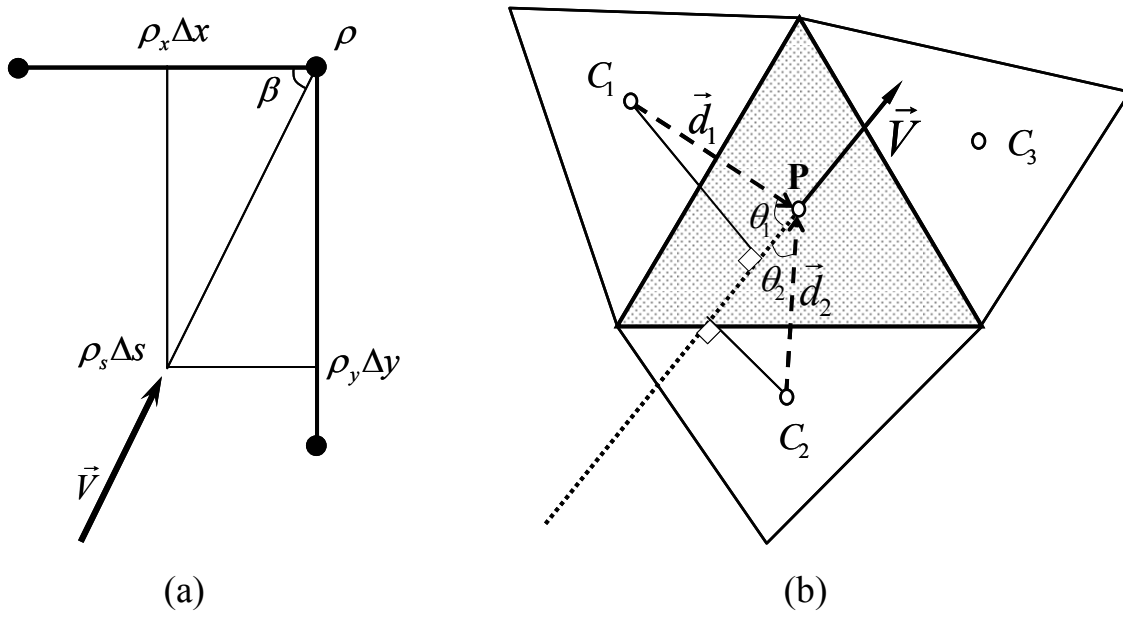


圖 5-1：遲滯壓力或密度處理之示意圖

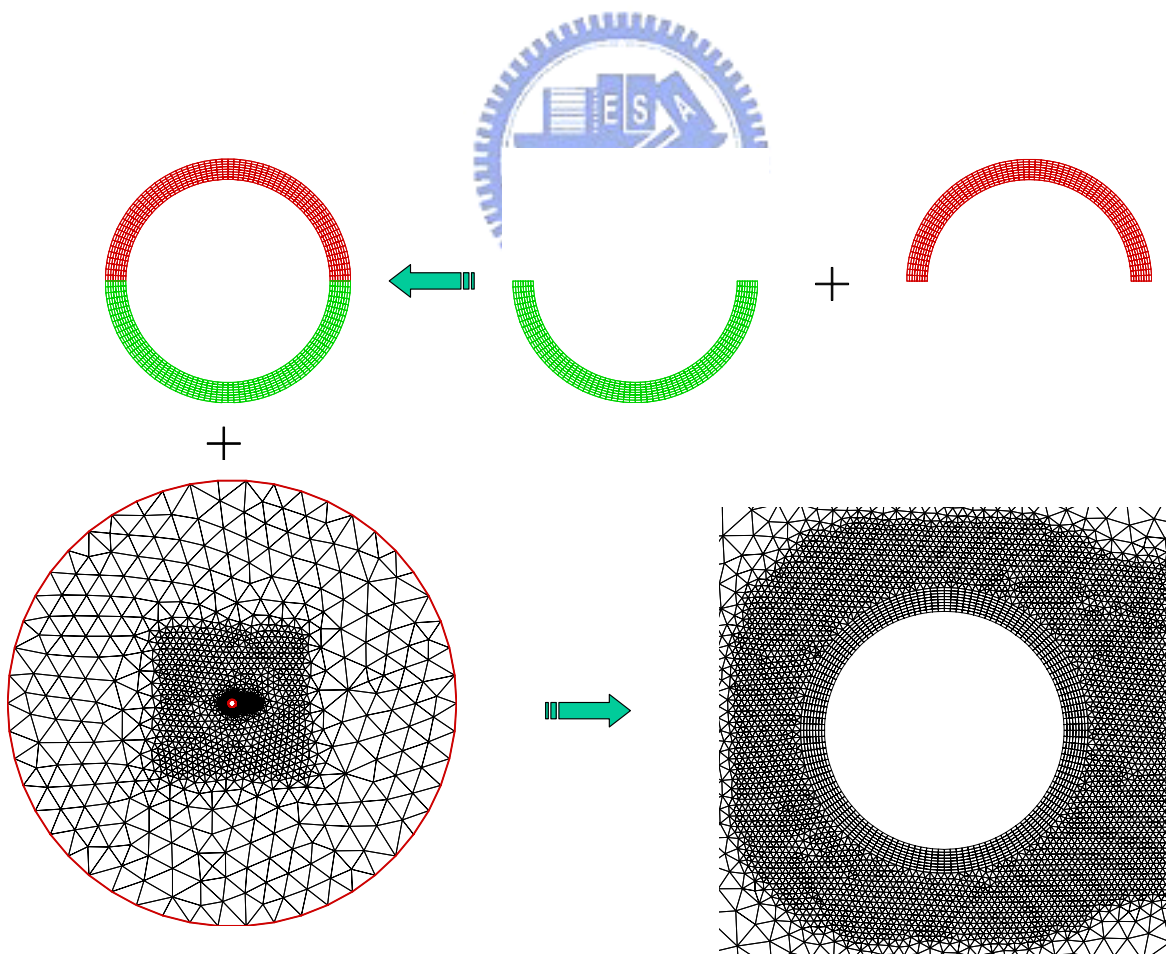


圖 6-1：自由流流經圓柱的計算域網格

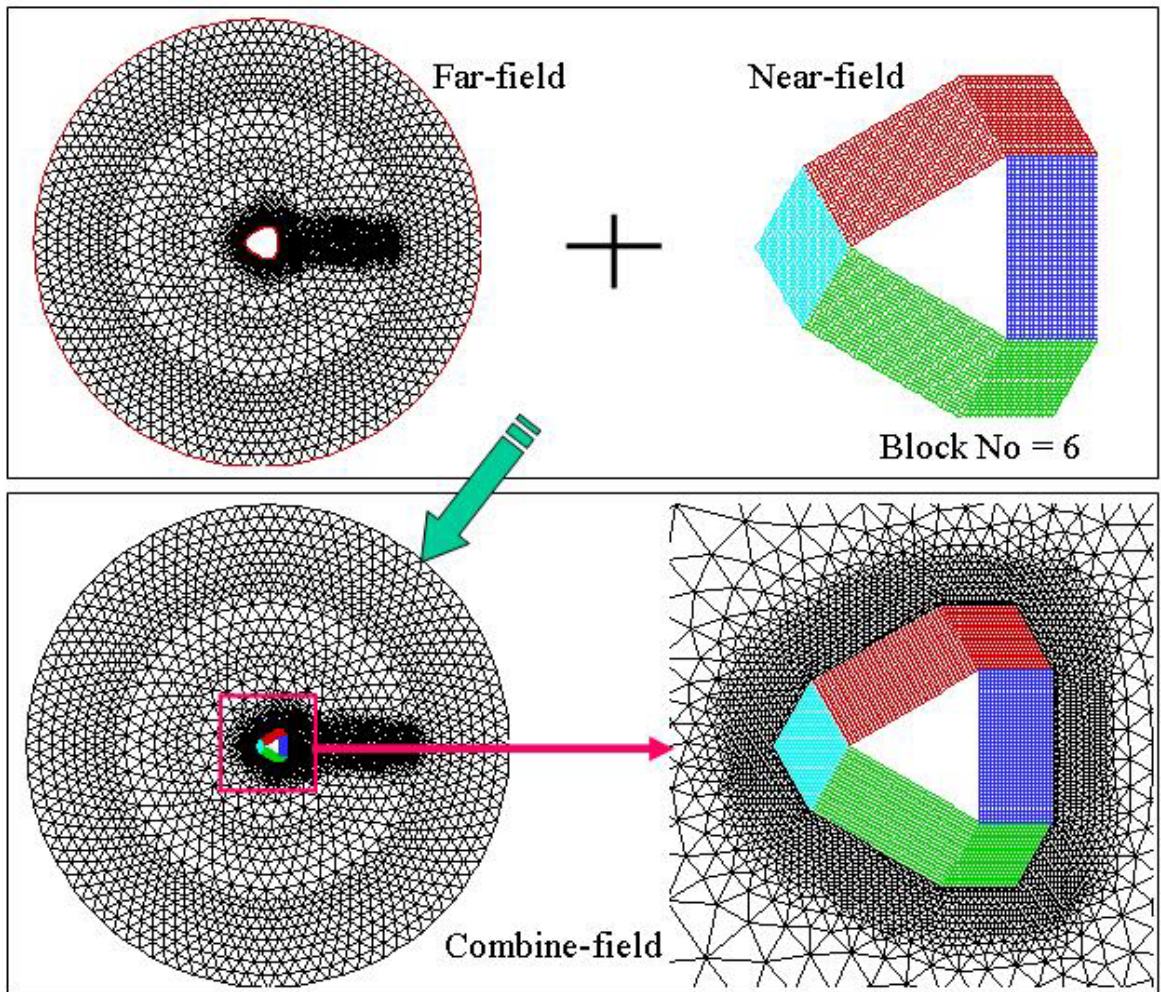


圖 6-2：自由流流經三角柱的計算域網格

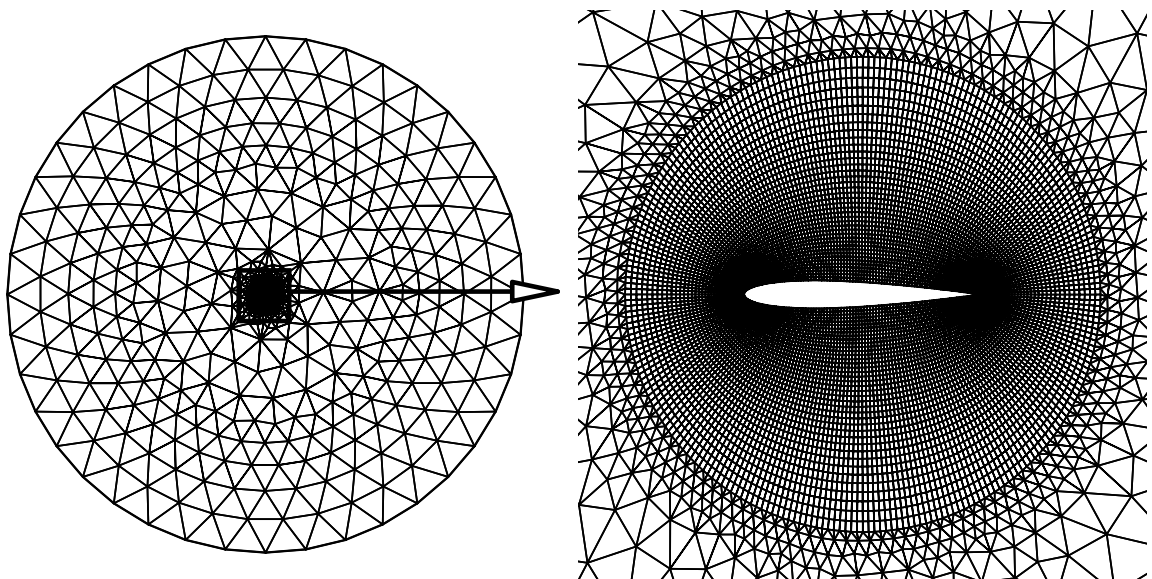


圖 6-3：NACA0012 翼型計算網格

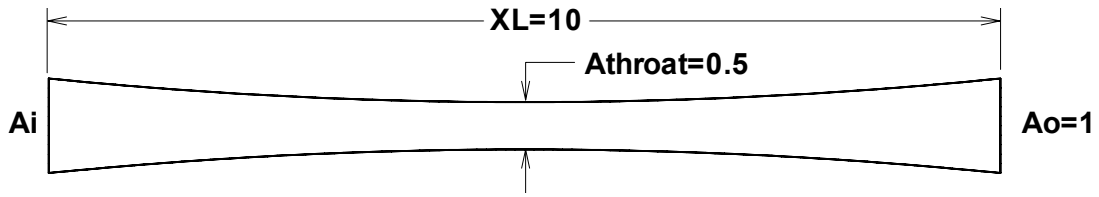
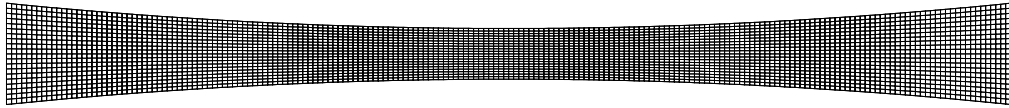
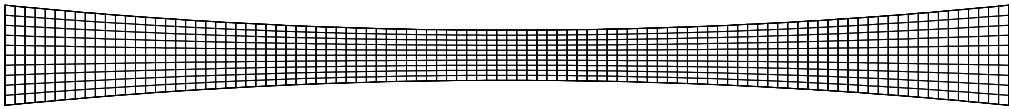


圖 7-1：漸縮-漸擴噴嘴之幾何外形示意圖



(a)



(b)

圖 7-2：二維漸縮-漸擴噴嘴無結構性網格圖(a)200×20CV；(b)100×10 CV

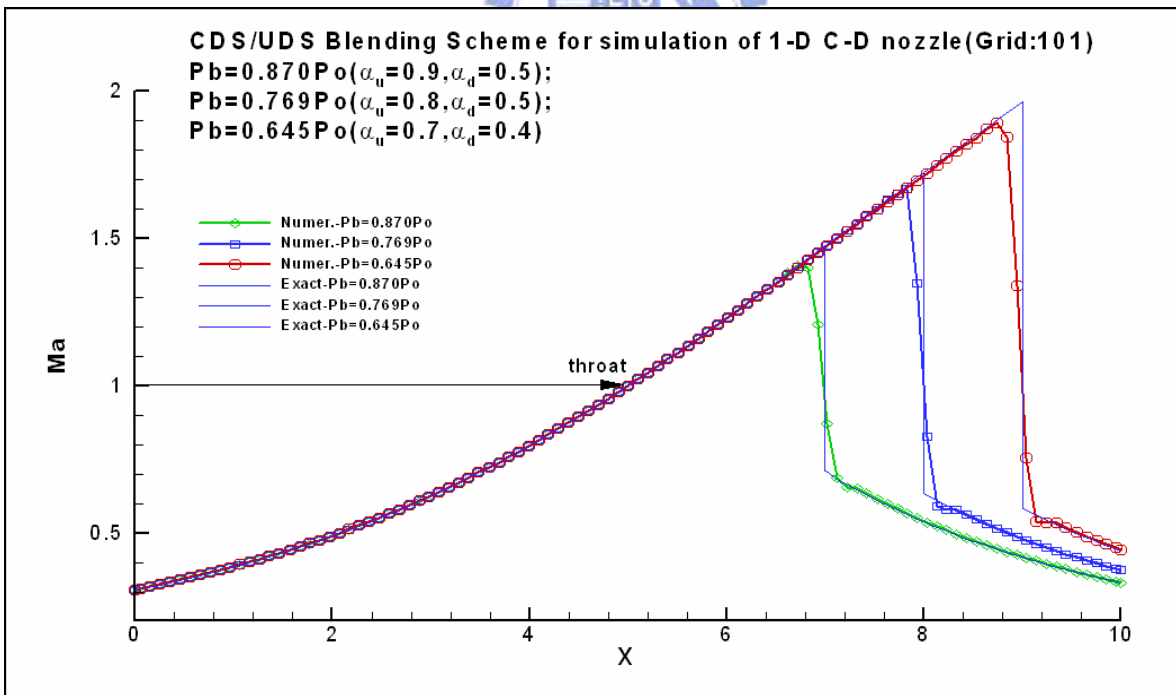


圖 7-3：一維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CDS/UDS 混合法)

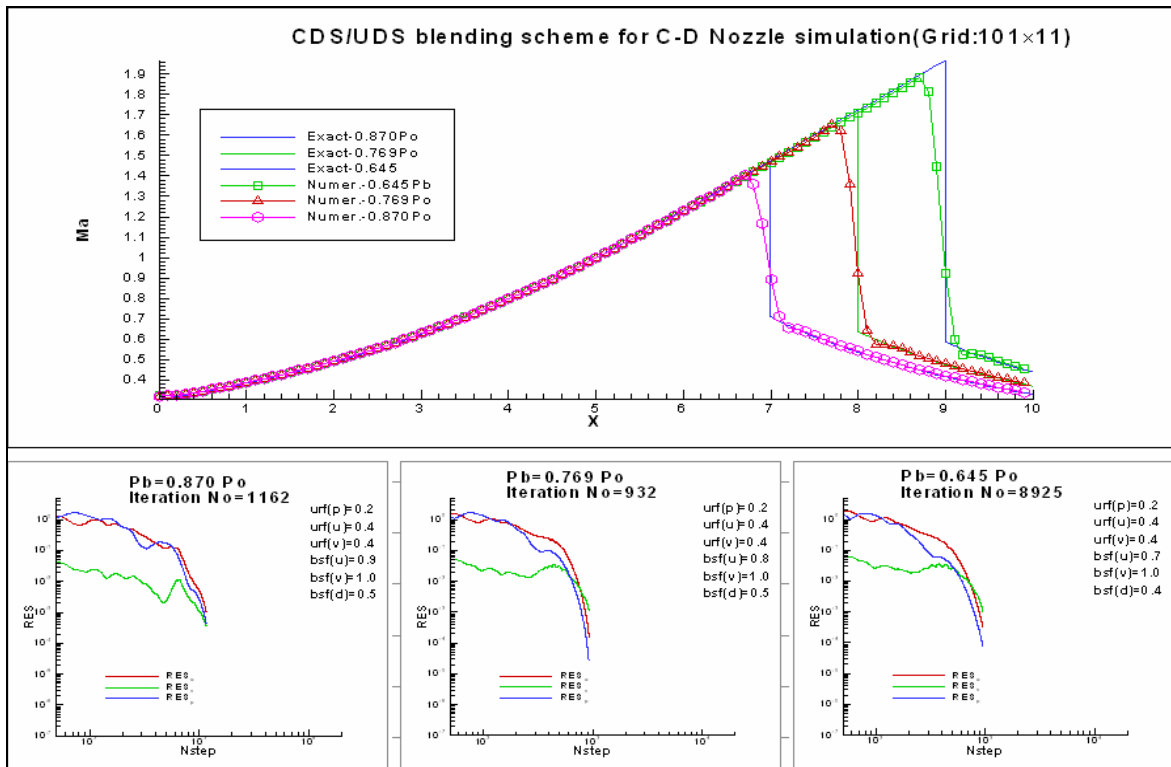


圖 7-4：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CDS/UDS 混合法)

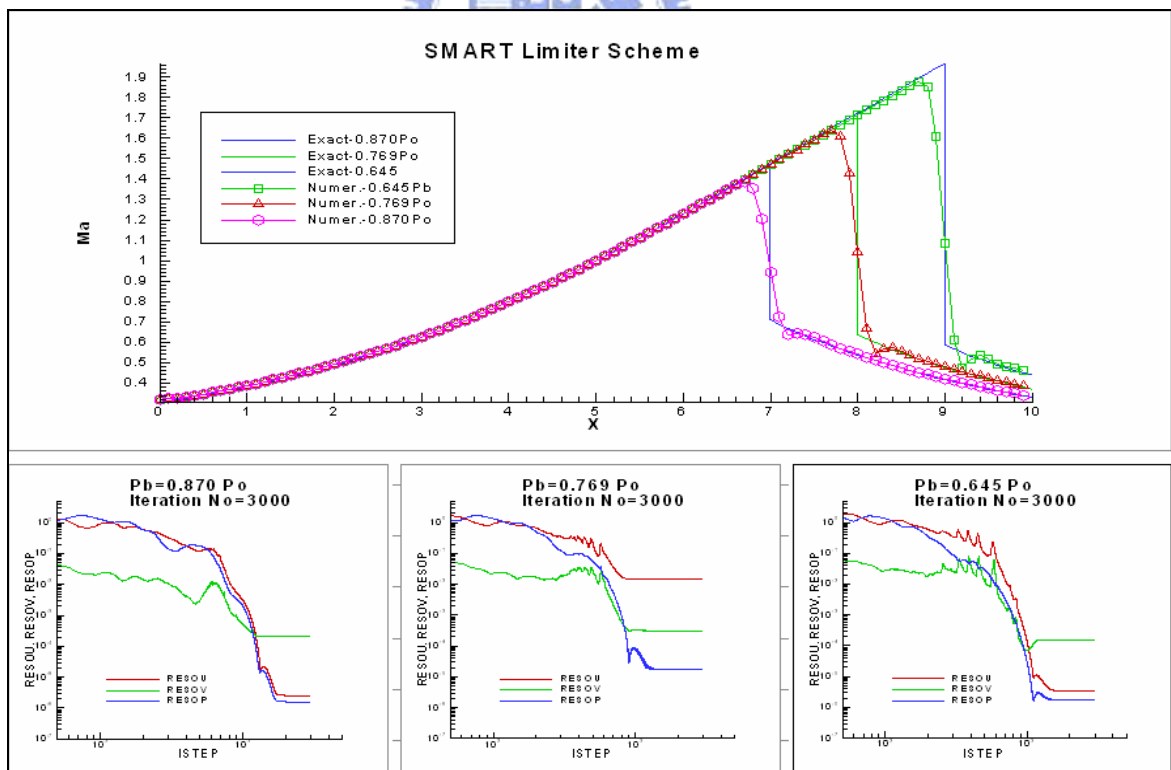


圖 7-5：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(SMART)

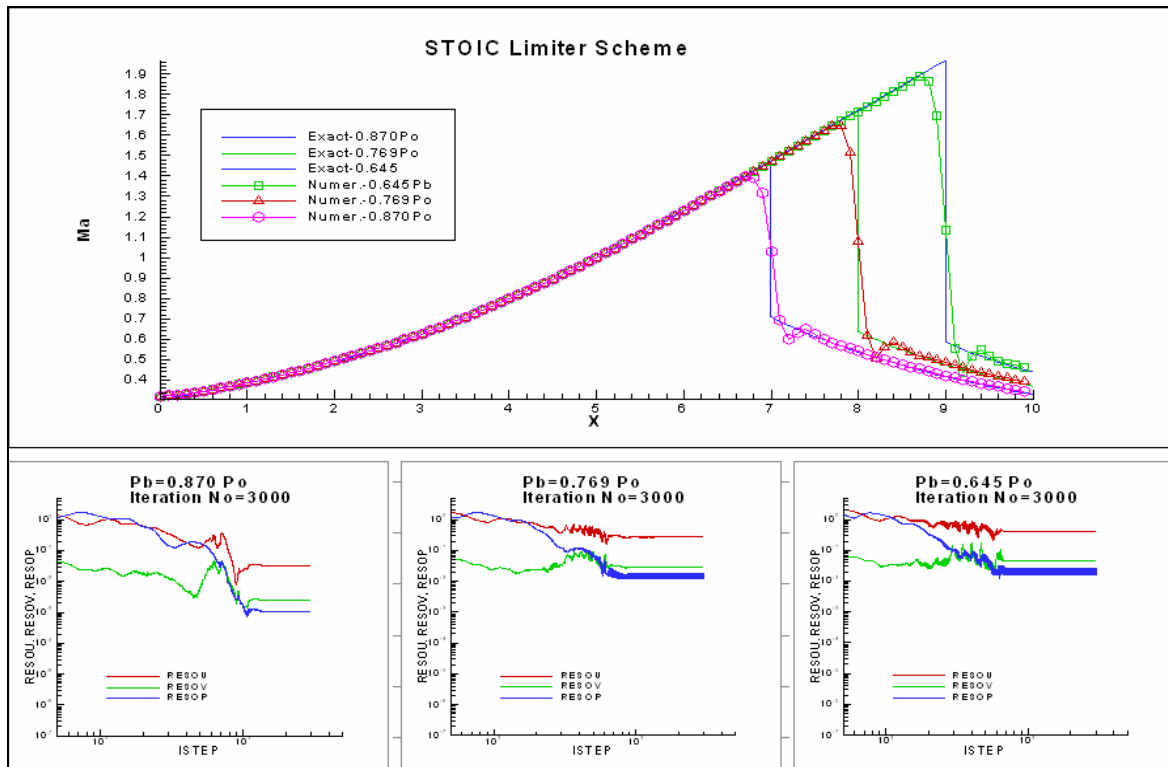


圖 7-6：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(STOIC)

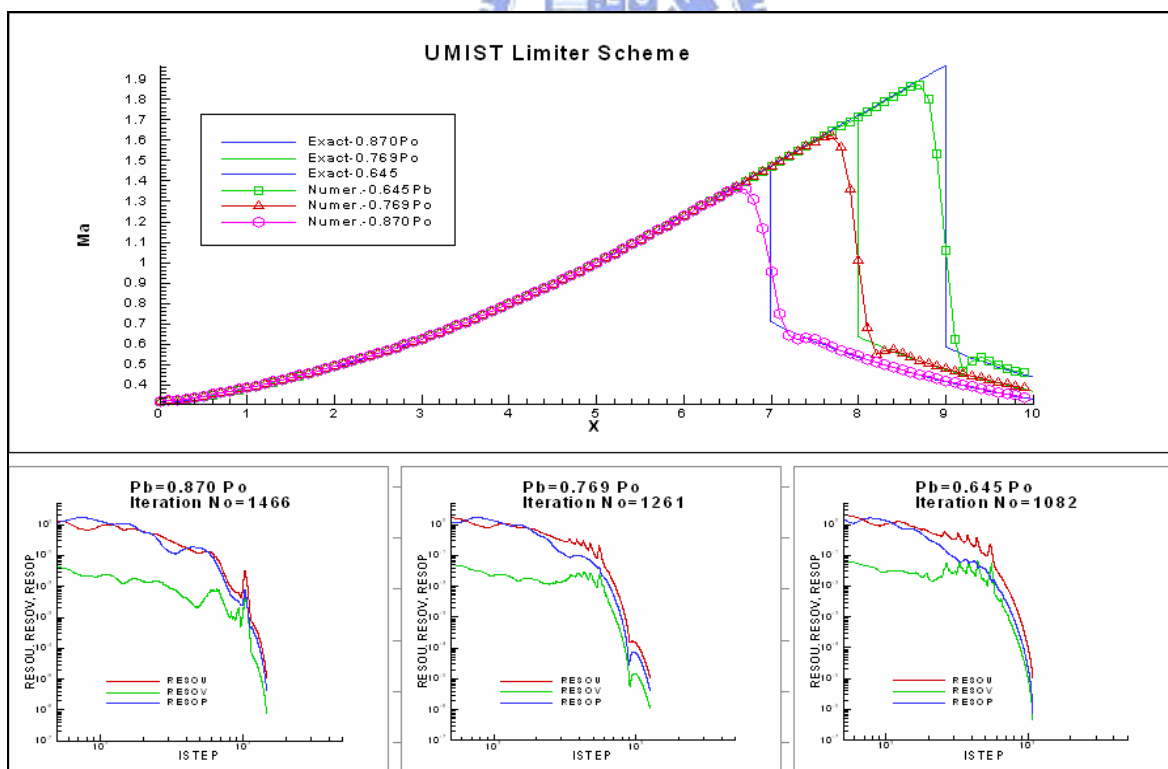


圖 7-7：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(UMIST)

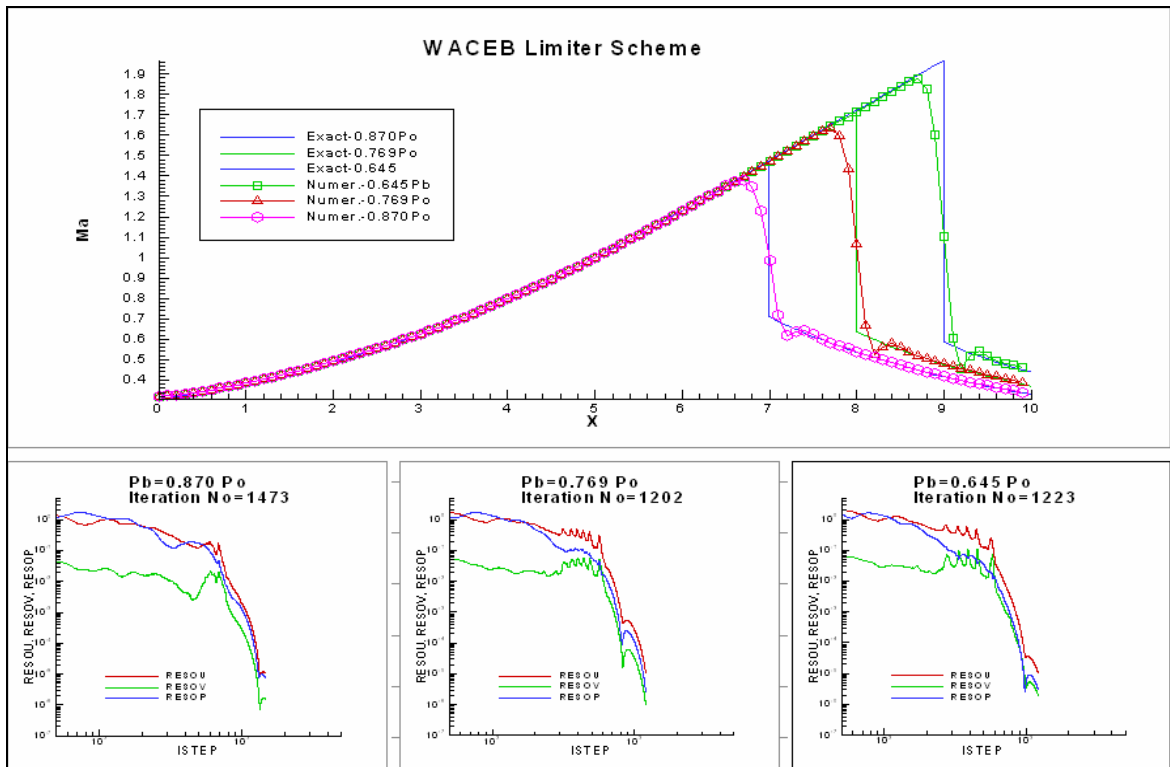


圖 7-8：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(WACEB)

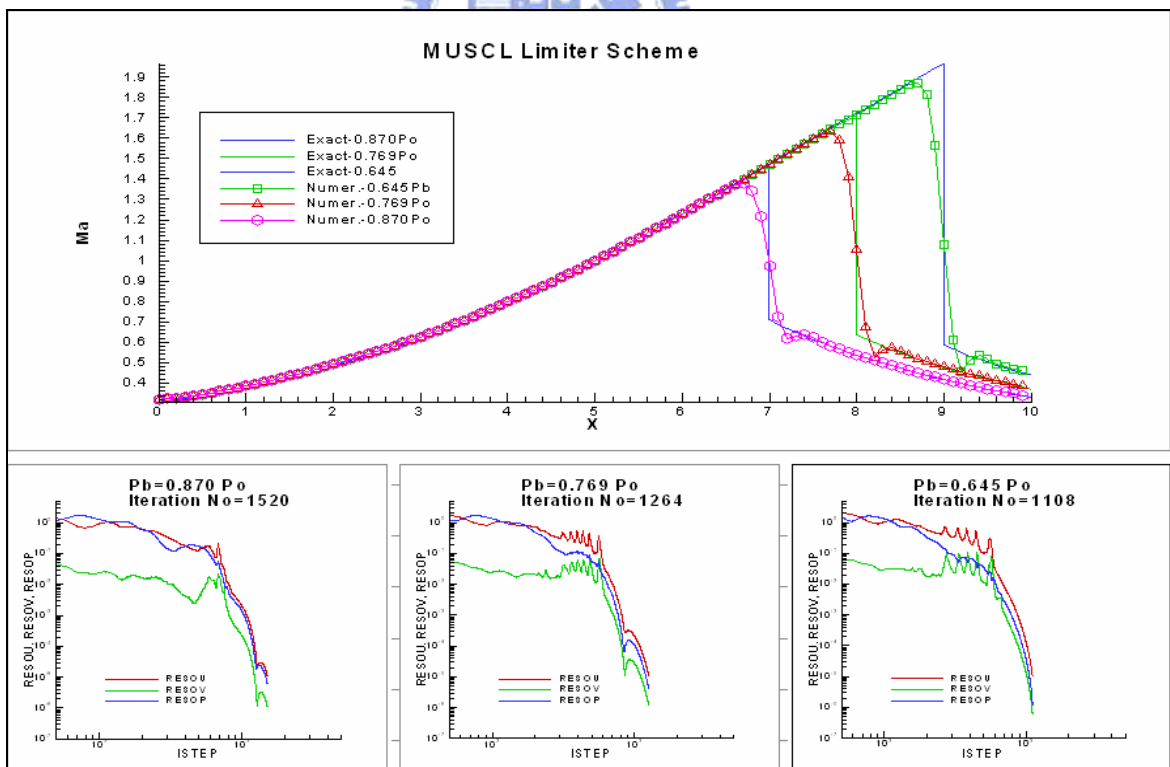


圖 7-9：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(MUSCL)

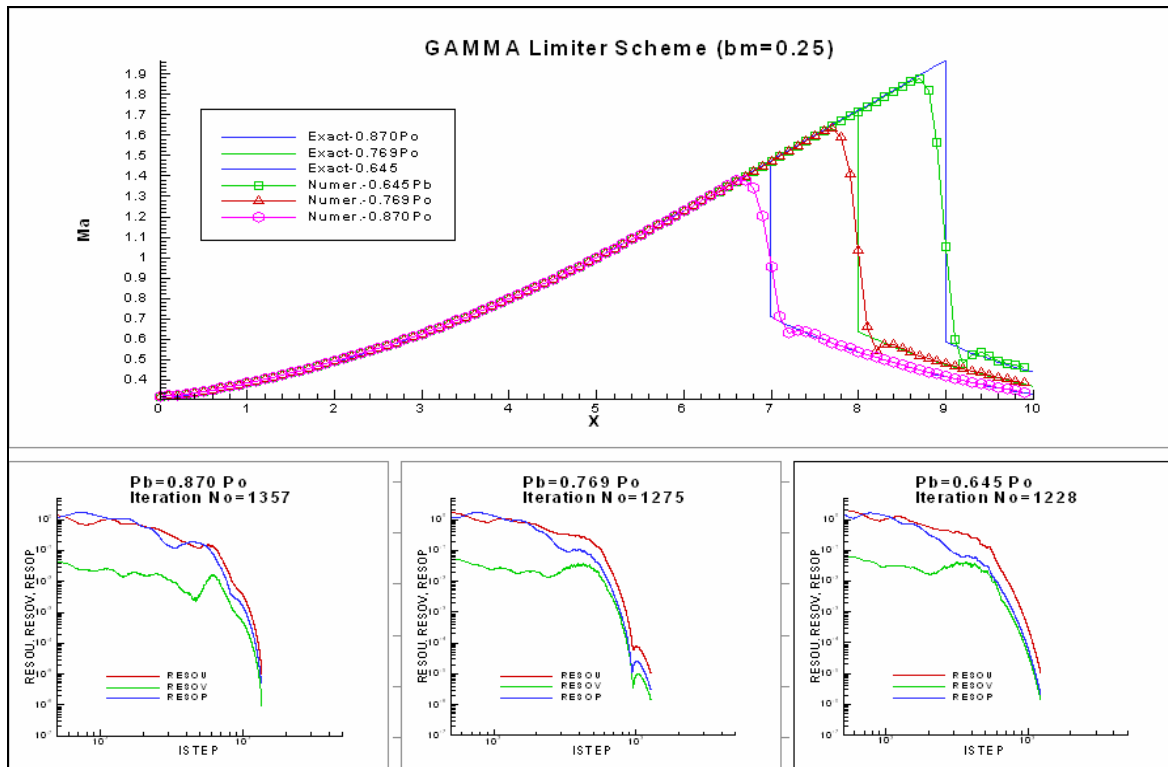


圖 7-10：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.25)

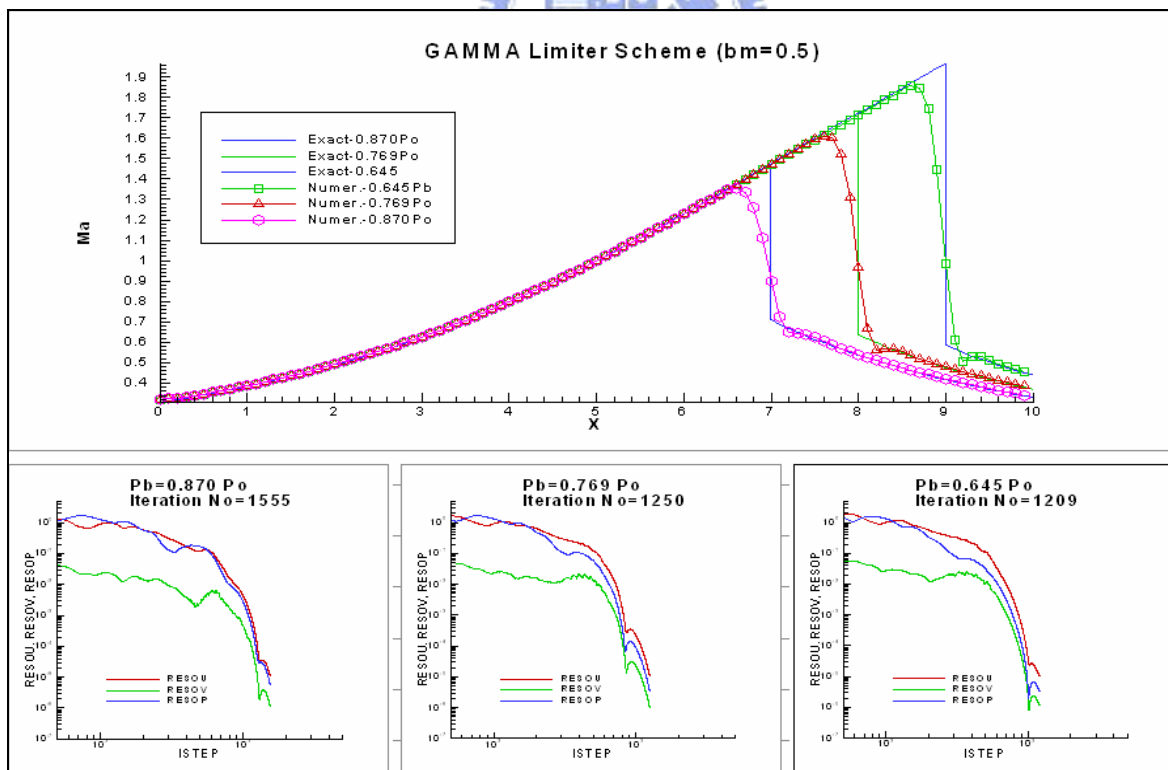


圖 7-11：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.5)

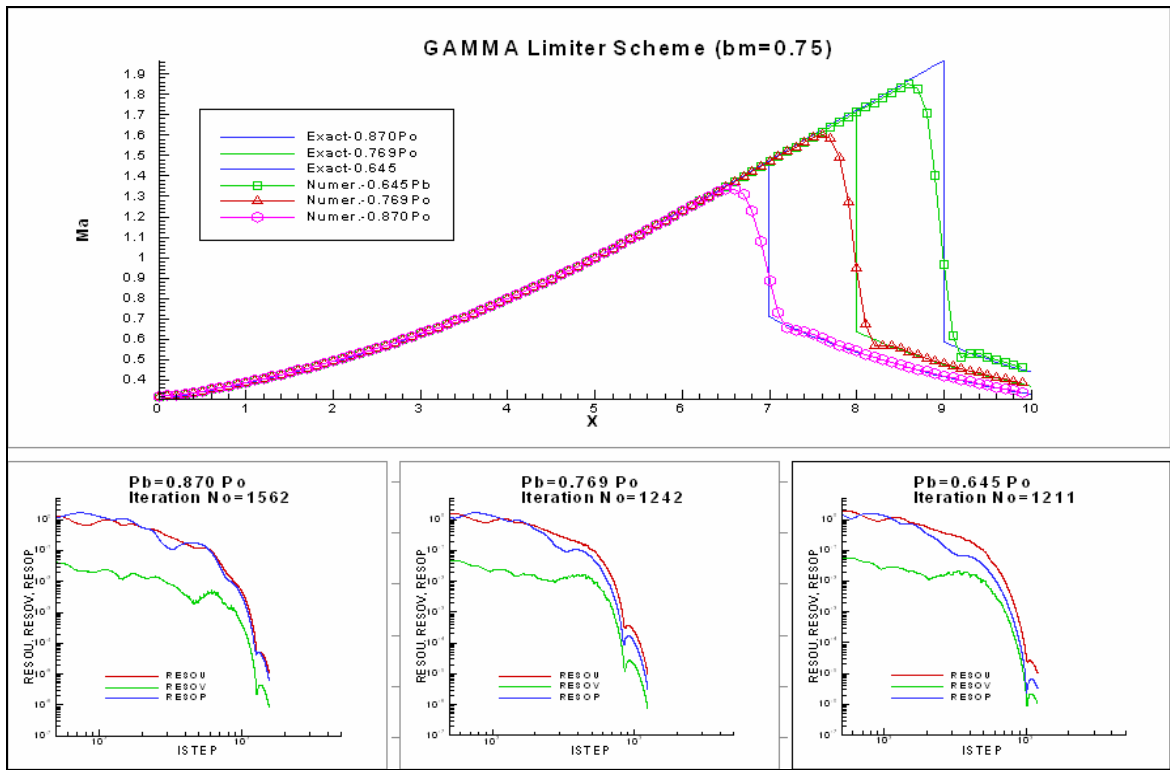


圖 7-12：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(GAMMA,bm=0.75)

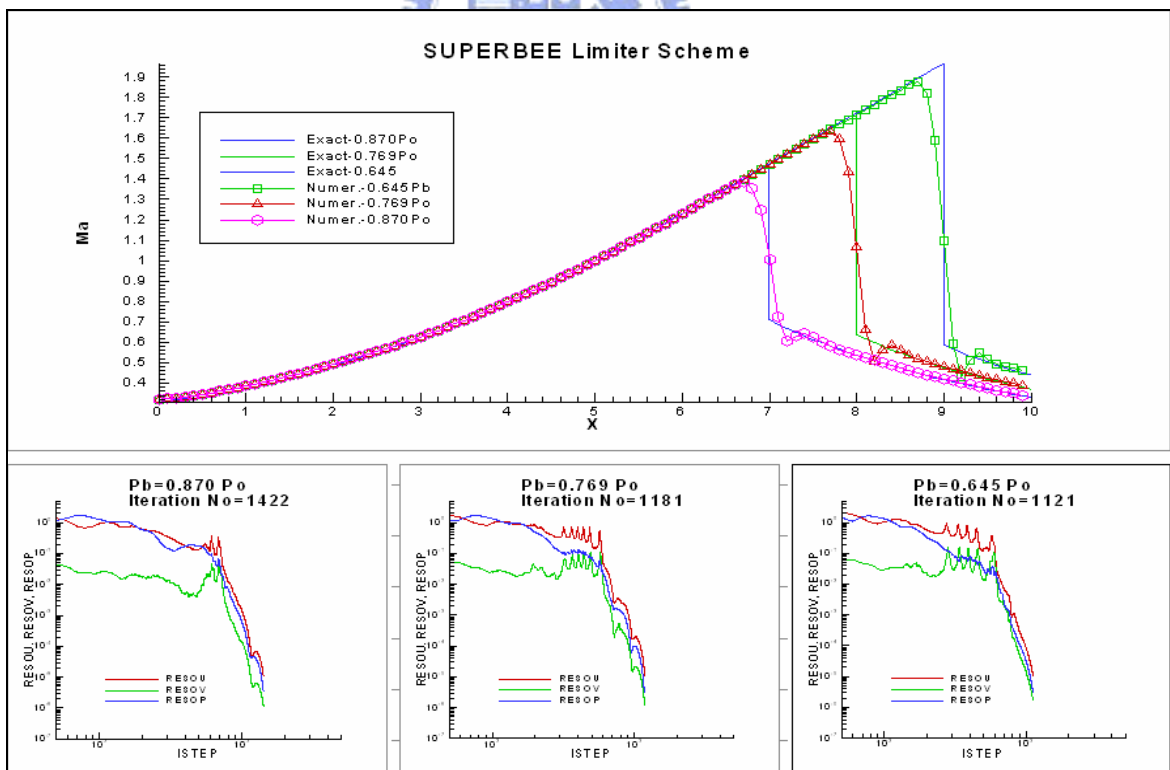


圖 7-13：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(SUPERBEE)

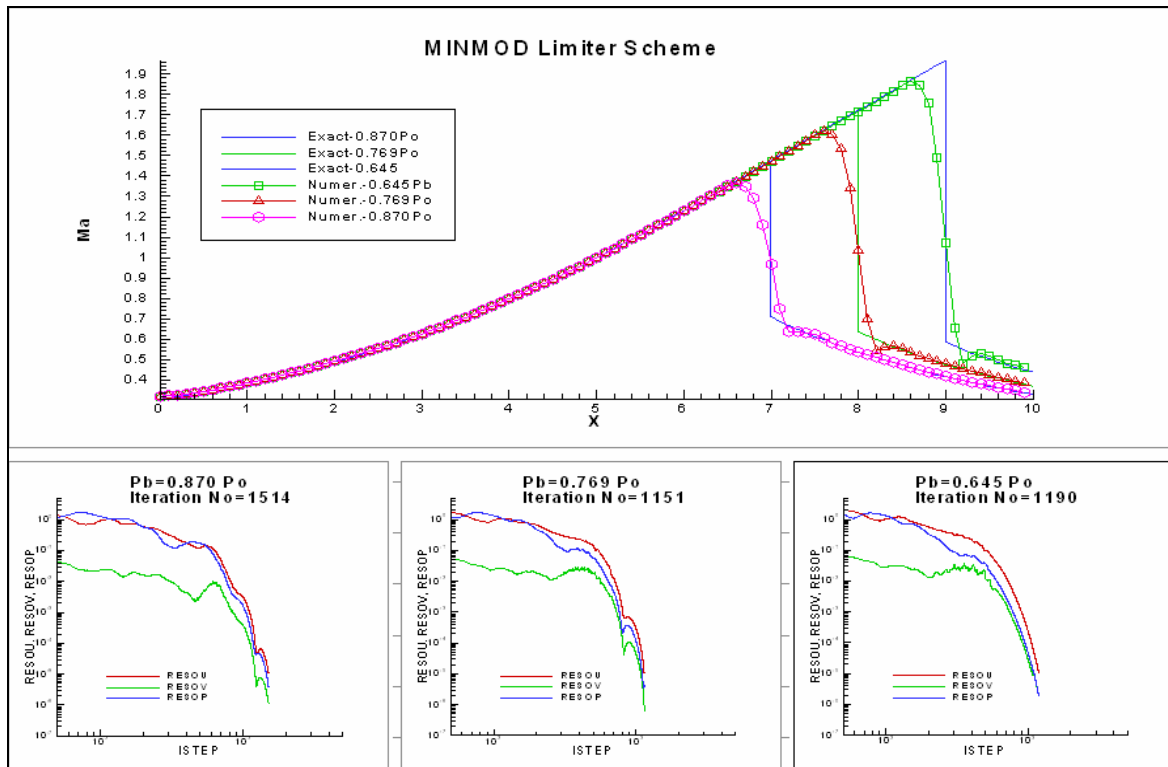


圖 7-14：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(MINMOD)

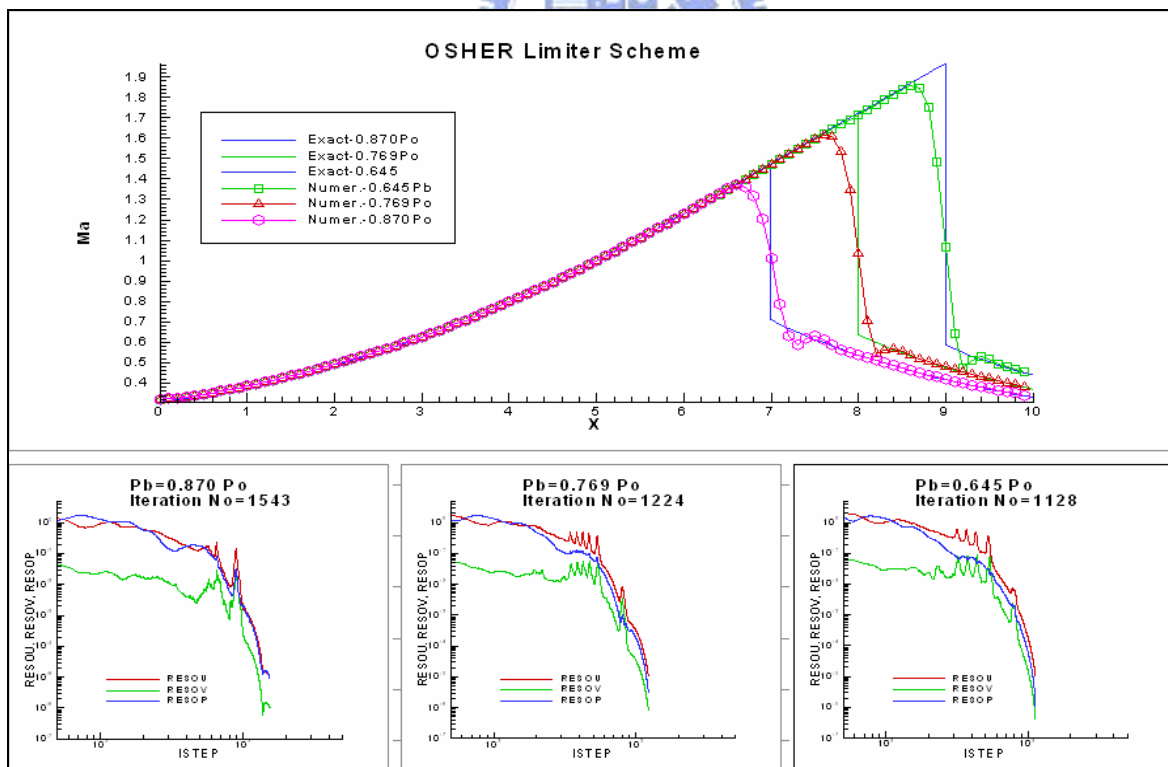


圖 7-15：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(OSHER)

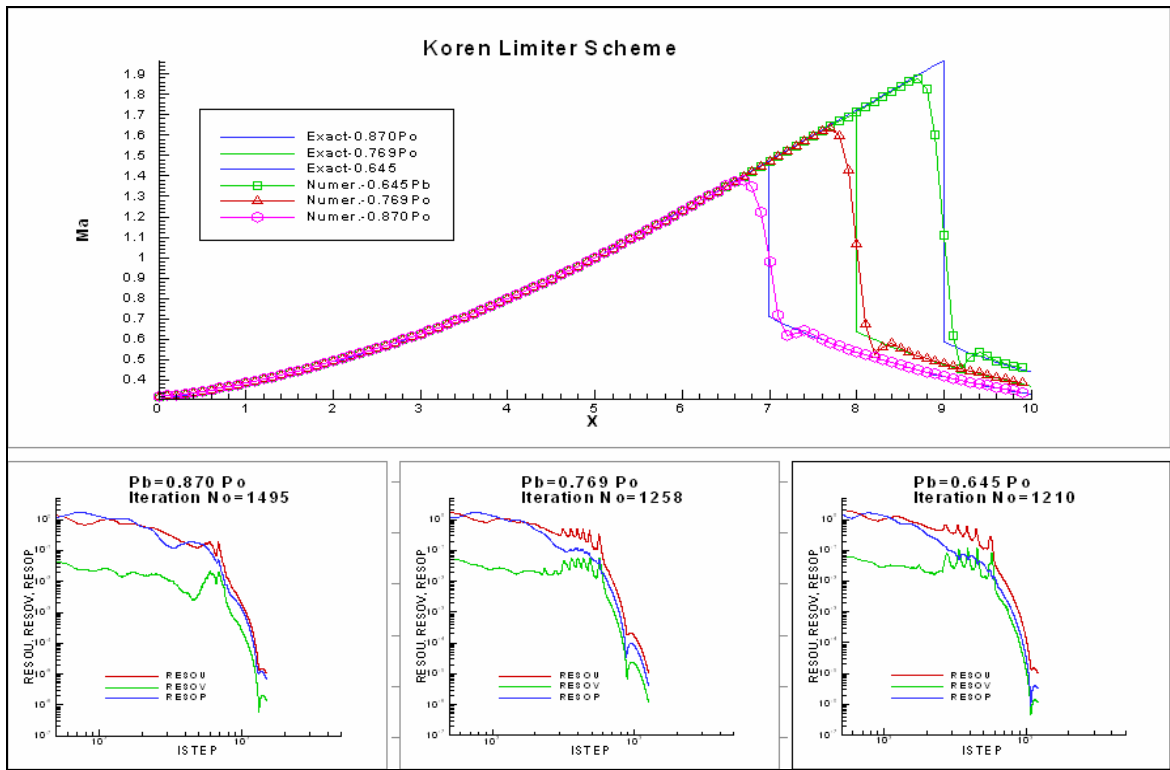


圖 7-16：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Koren)

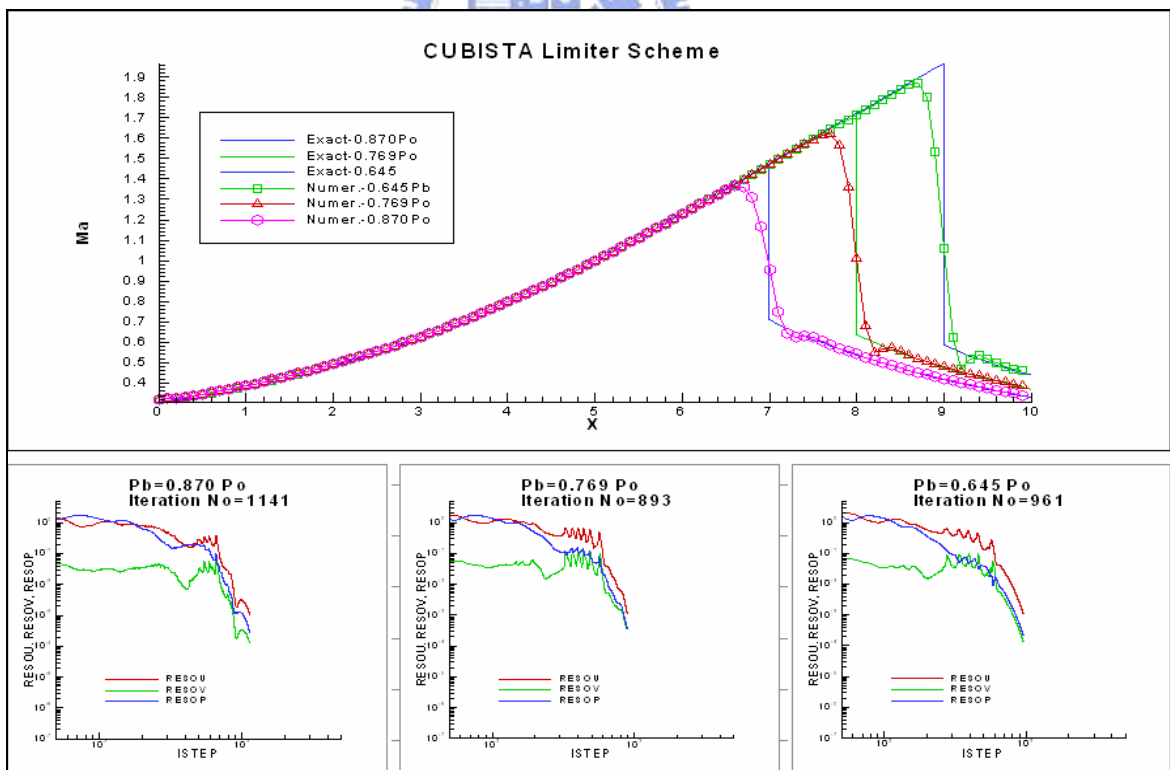


圖 7-17：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CUBISTA)

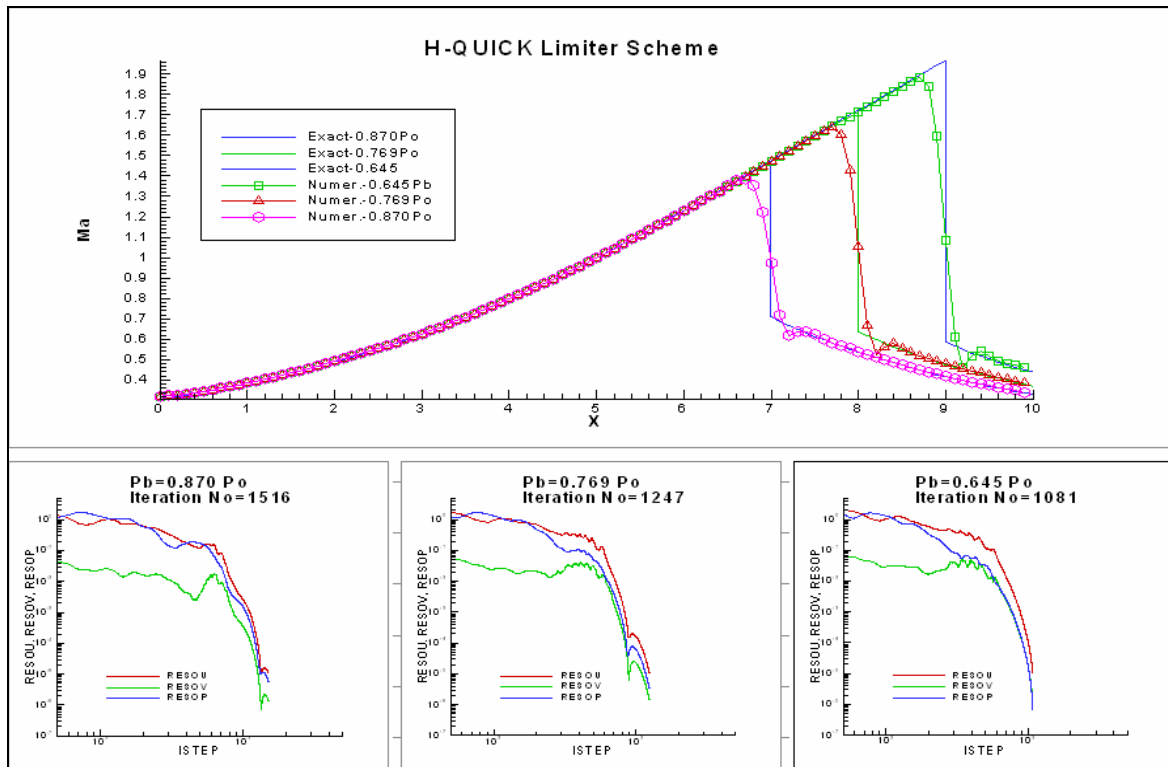


圖 7-18：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(H-QUICK)

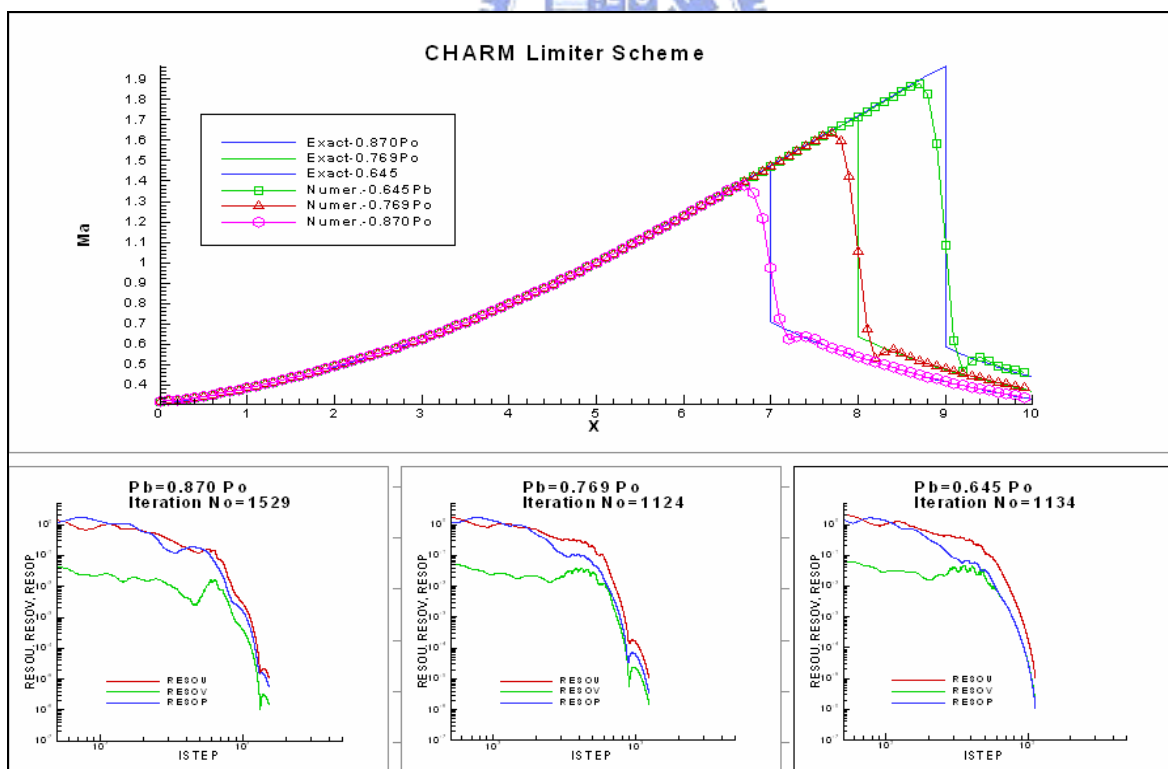


圖 7-19：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CHARM)

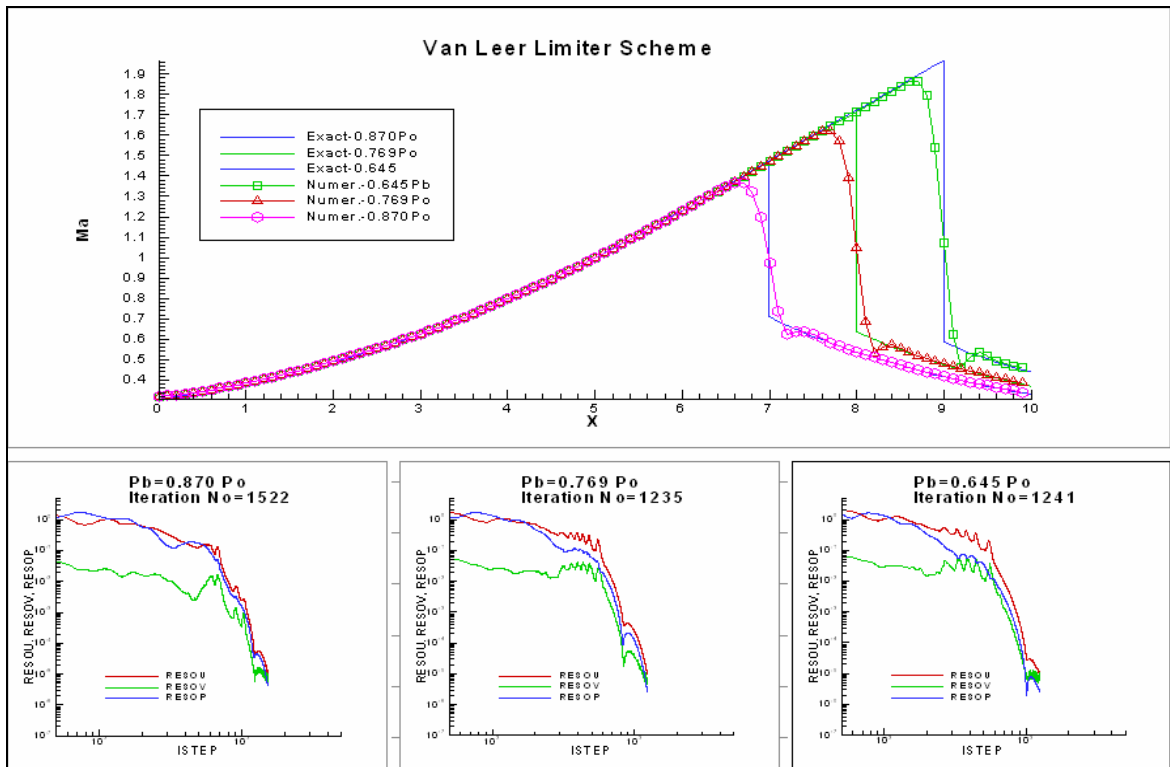


圖 7-20：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Van Leer)

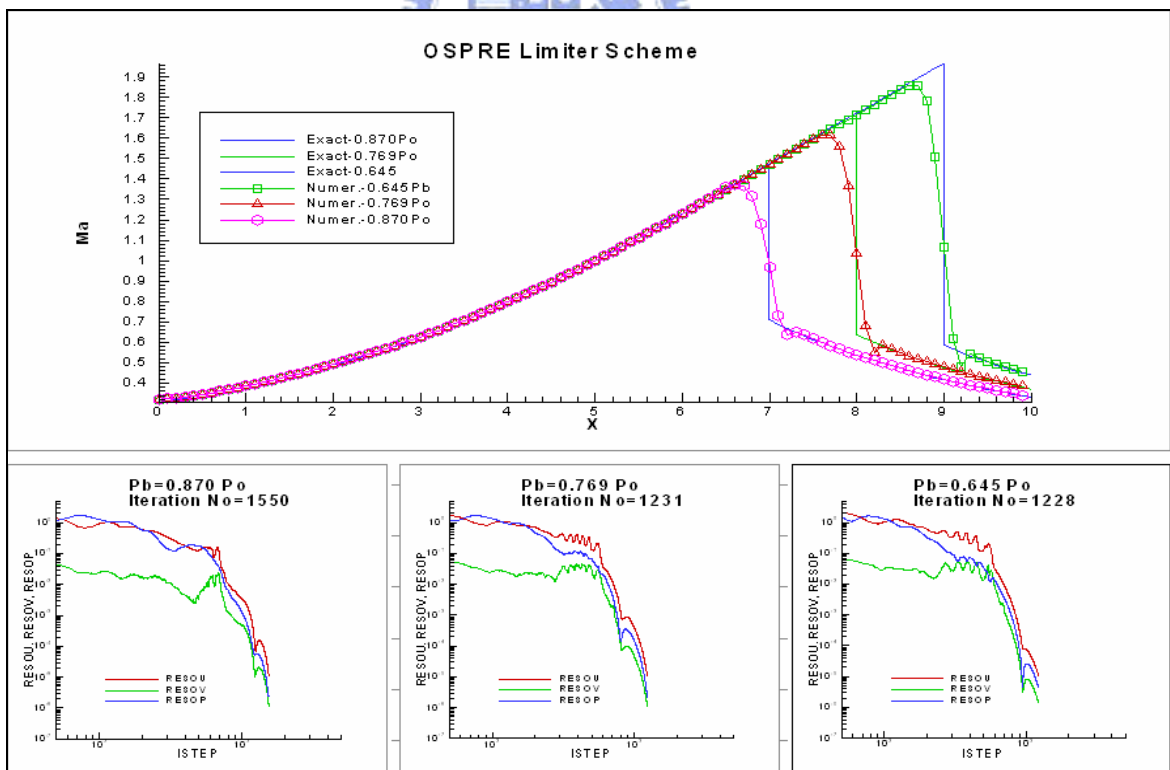


圖 7-21：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(OSPRE)

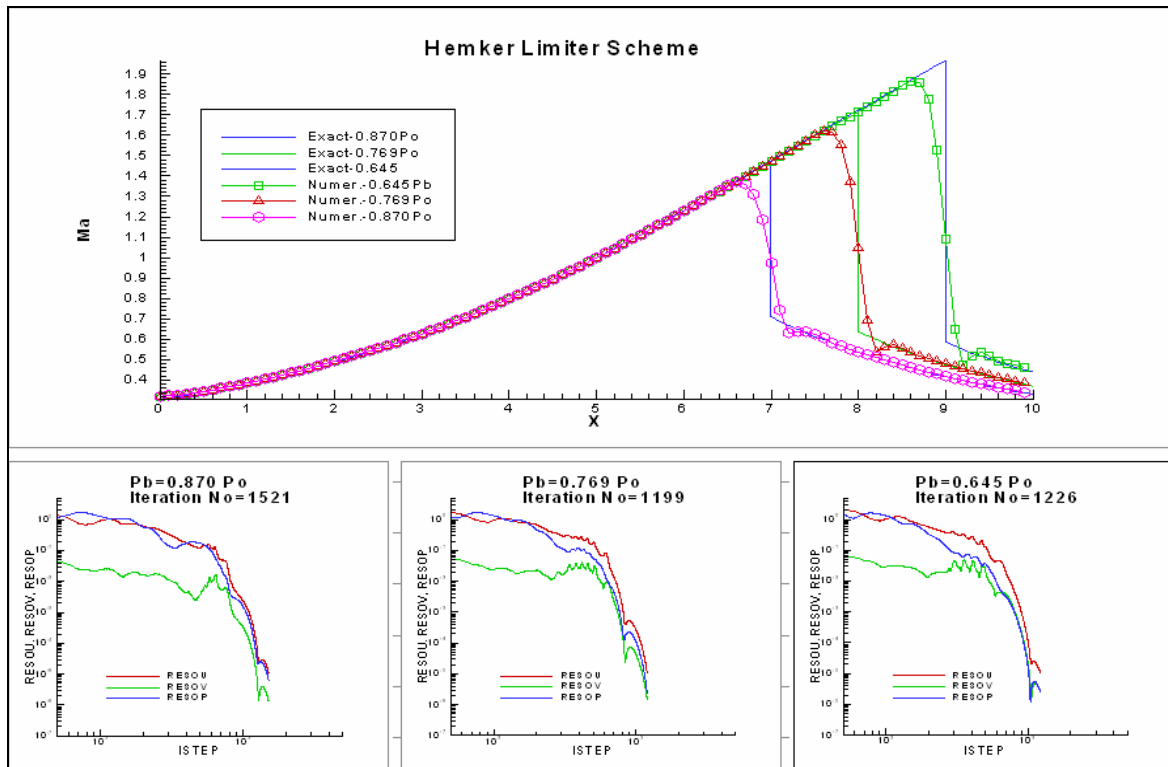


圖 7-22：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Hemker)

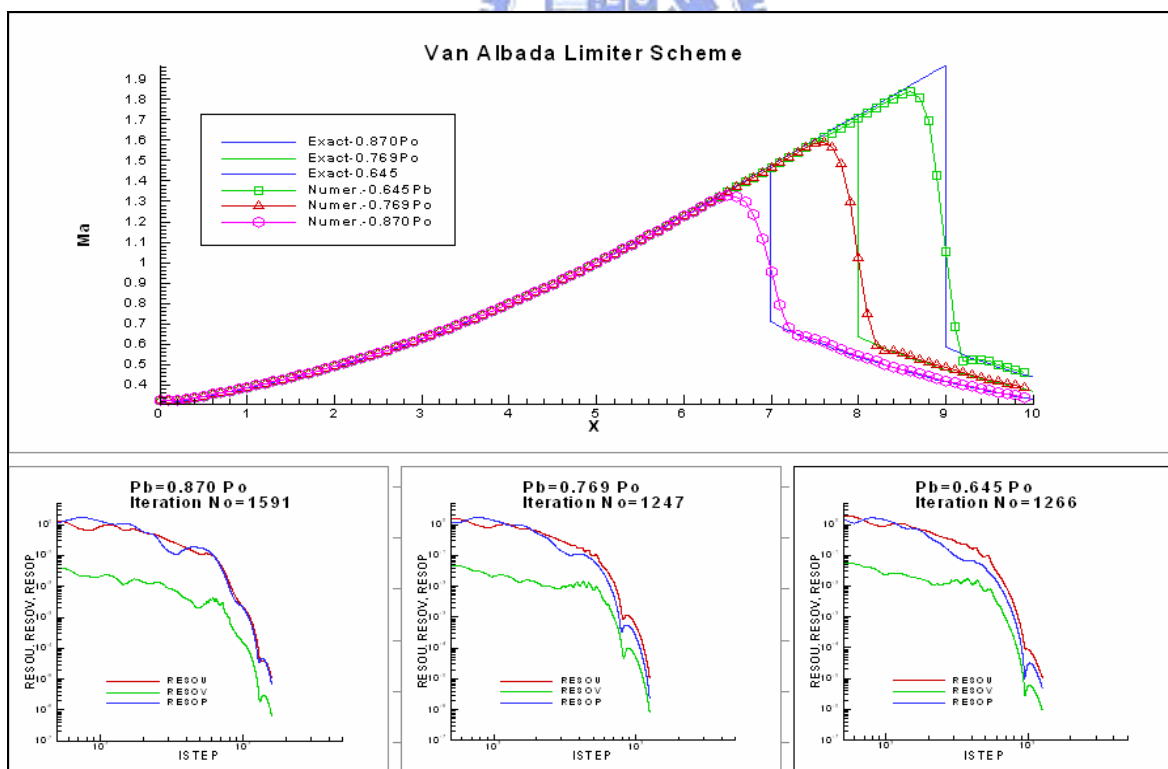


圖 7-23：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(Van Albada)

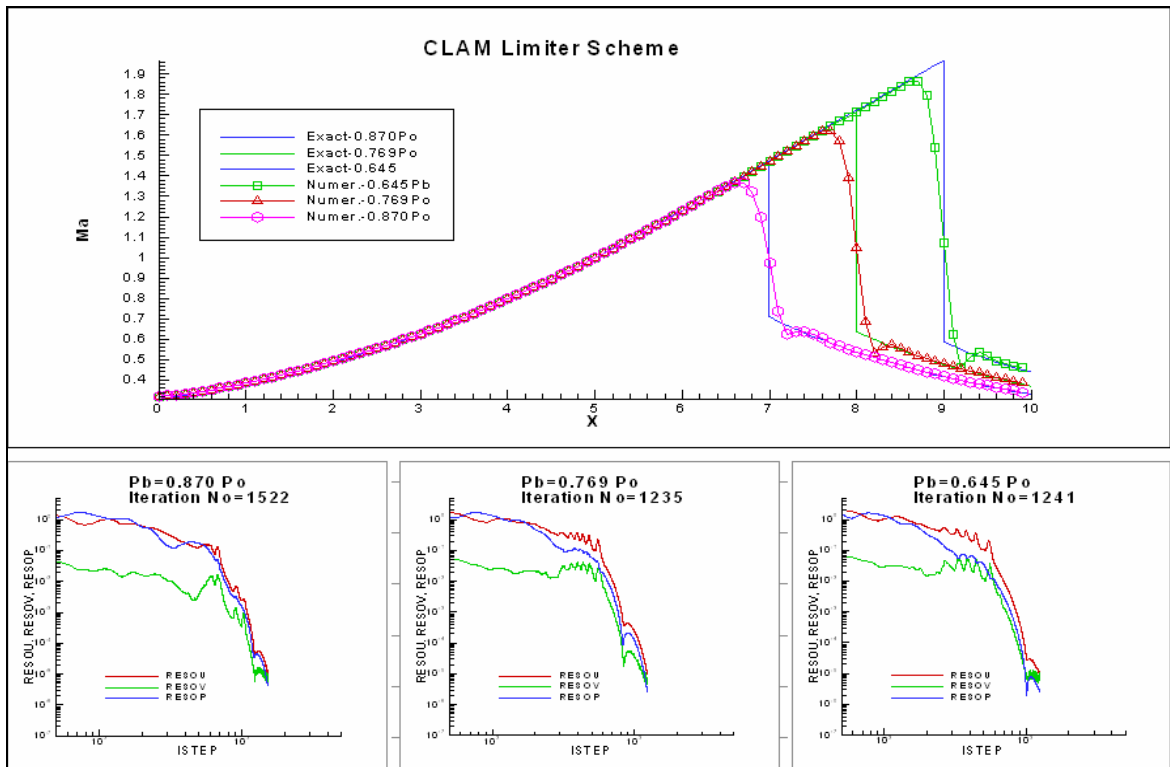
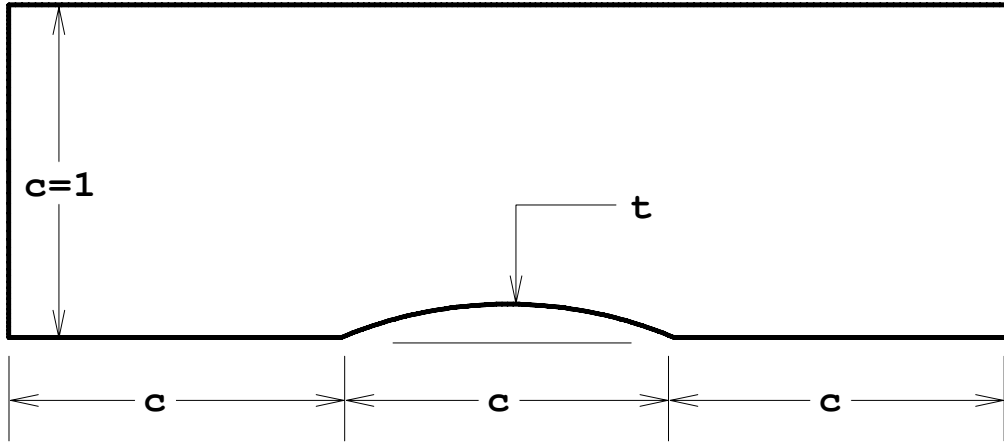
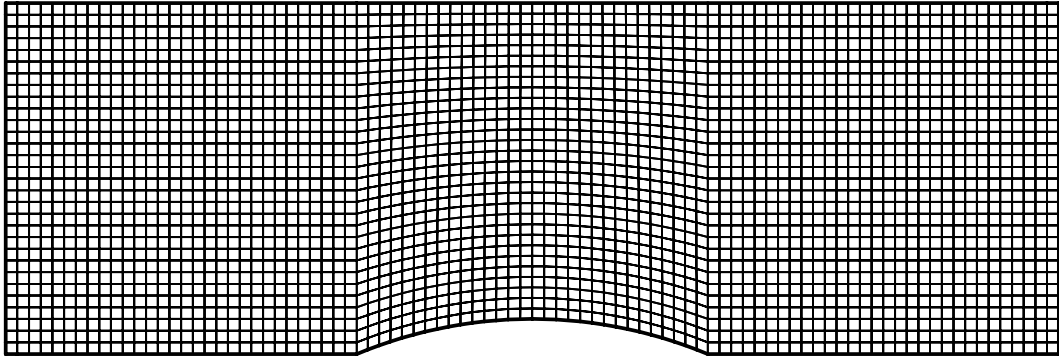


圖 7-24：二維 C-D 噴嘴之馬赫數分佈圖(CLAM)

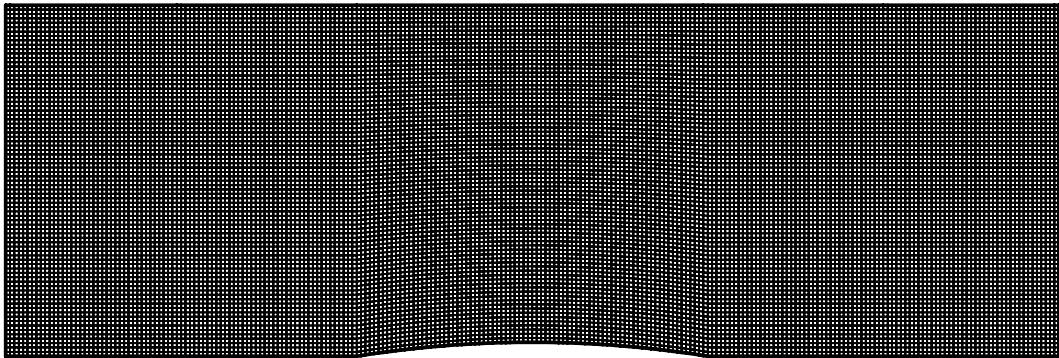




(a)



(b)



(c)

圖 7-25：二維下壁面圓弧渠道(a)幾何外形示意圖；(b)次/穿音速流場計算網格 90×30 CV；(C)超音速流場計算網格 240×80 CV

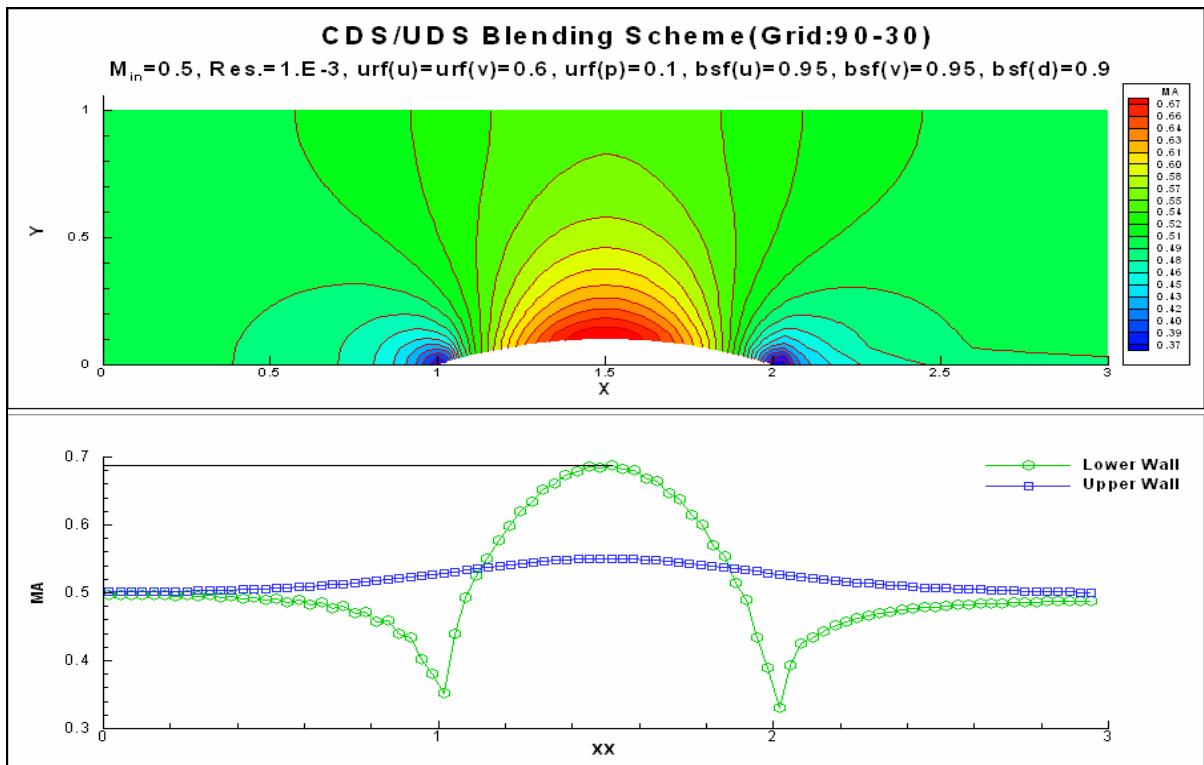


圖 7-26： $M_{in}=0.5$ 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (UDS/CDS 混合法)

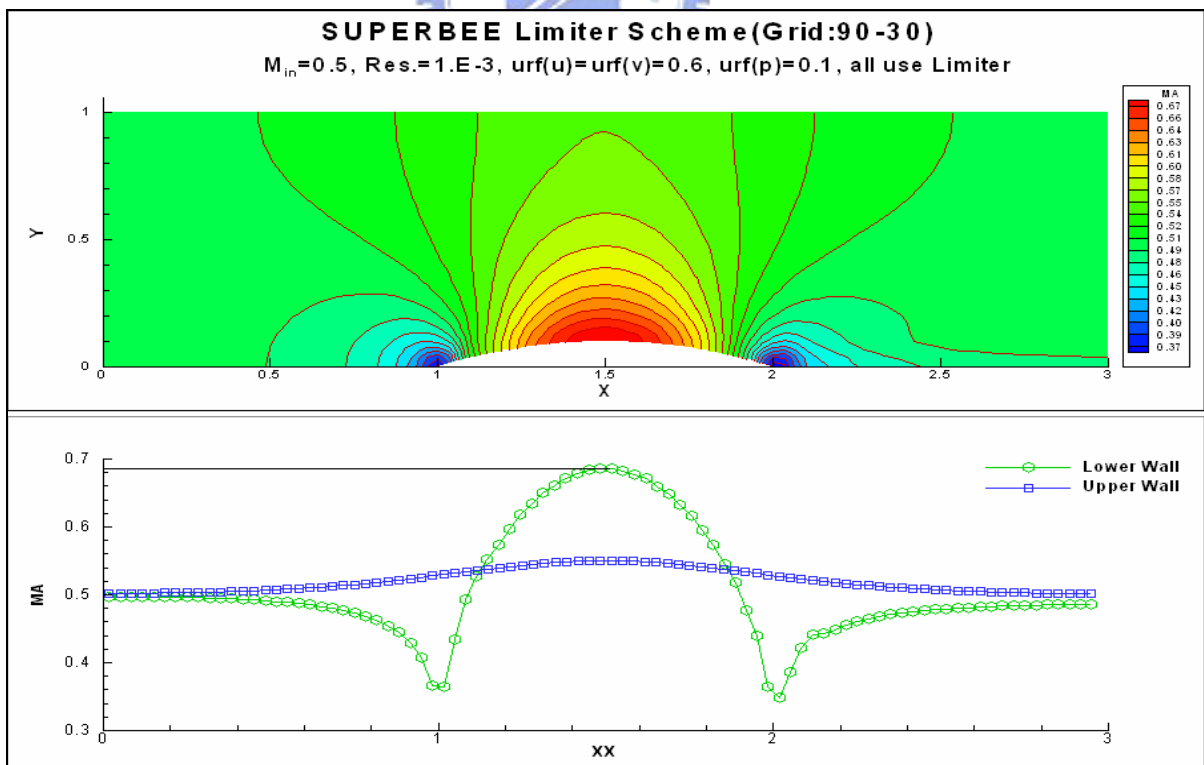


圖 7-27： $M_{in}=0.5$ 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE)

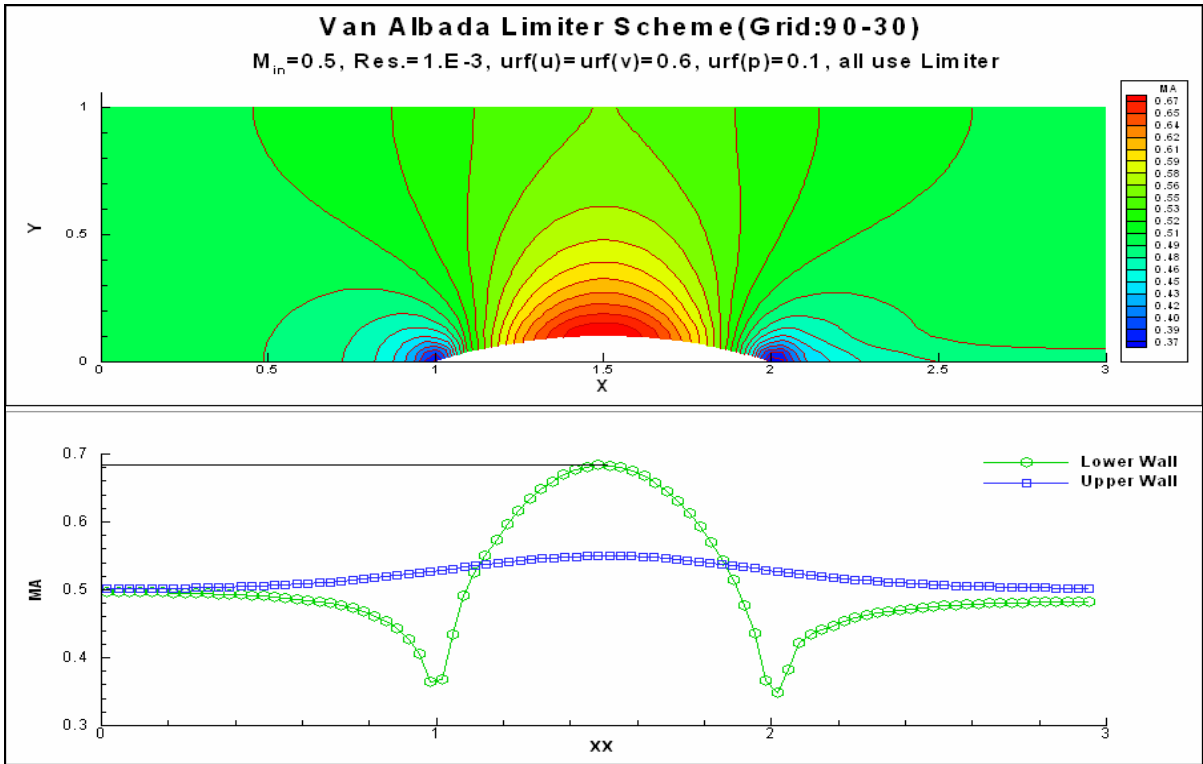


圖 7-28： $M_{in}=0.5$ 次音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada)

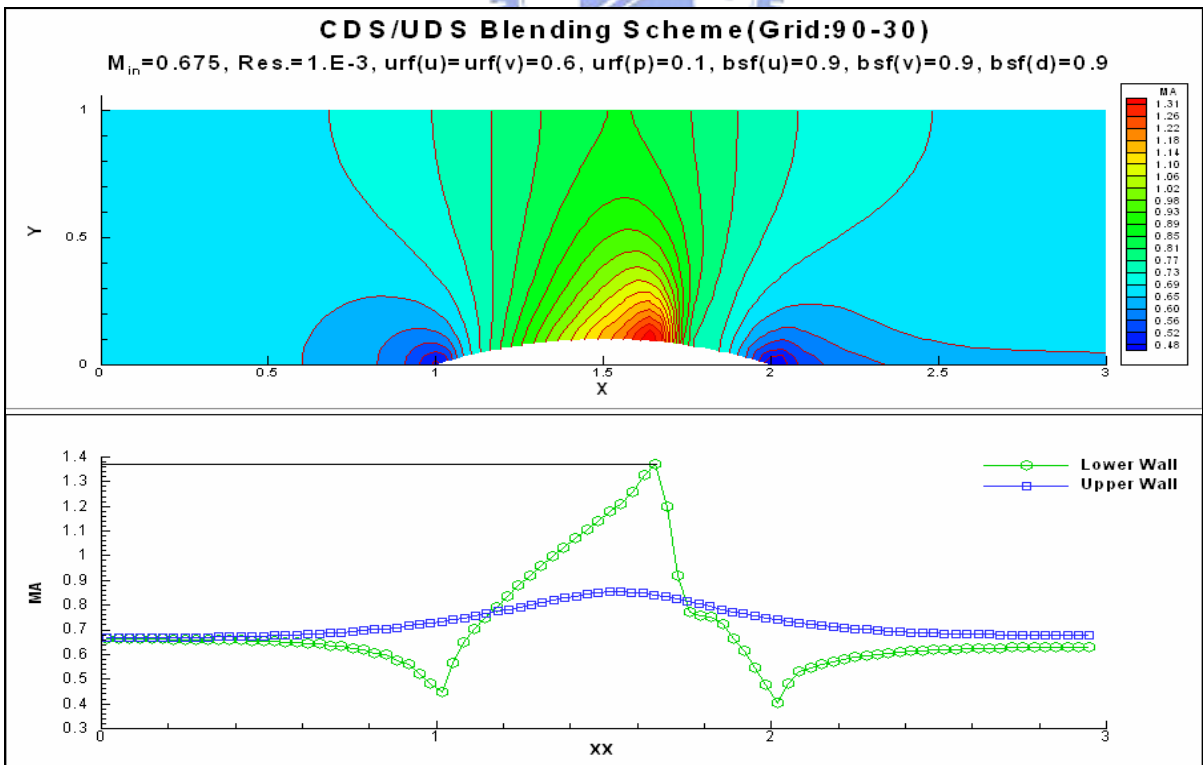


圖 7-29： $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CDS/UDS 混合法)

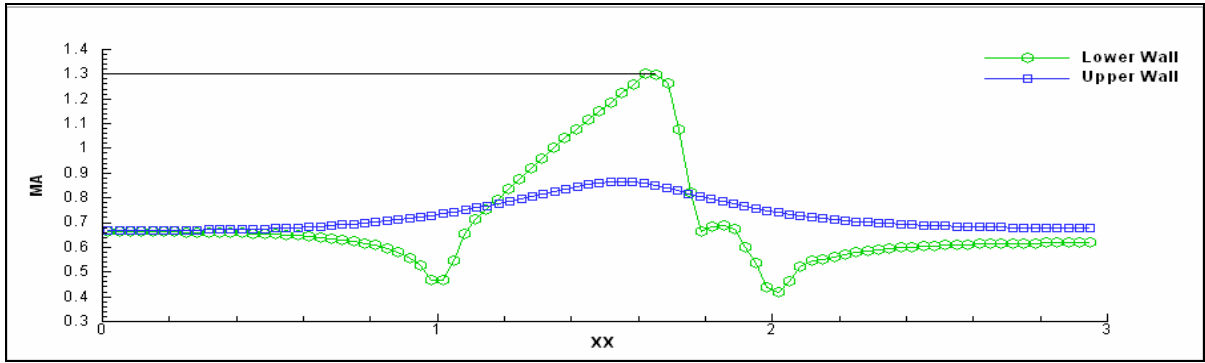


圖 7-30 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(SMART)

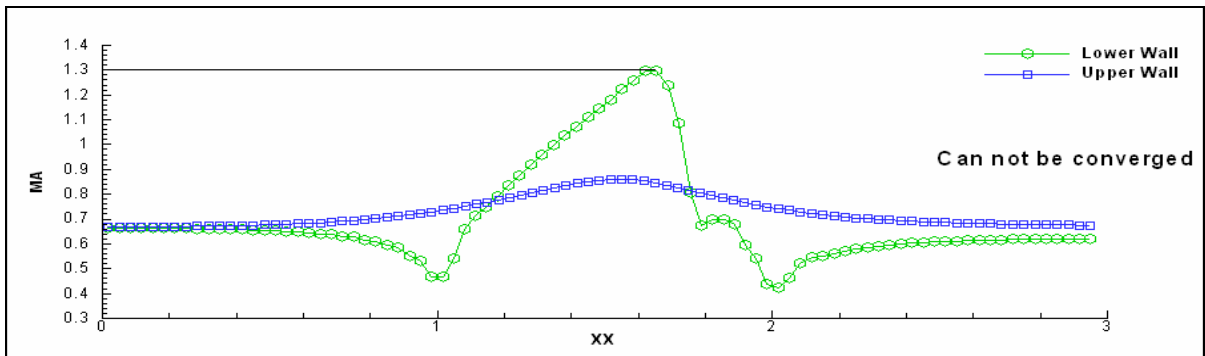


圖 7-31 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(STOIC)

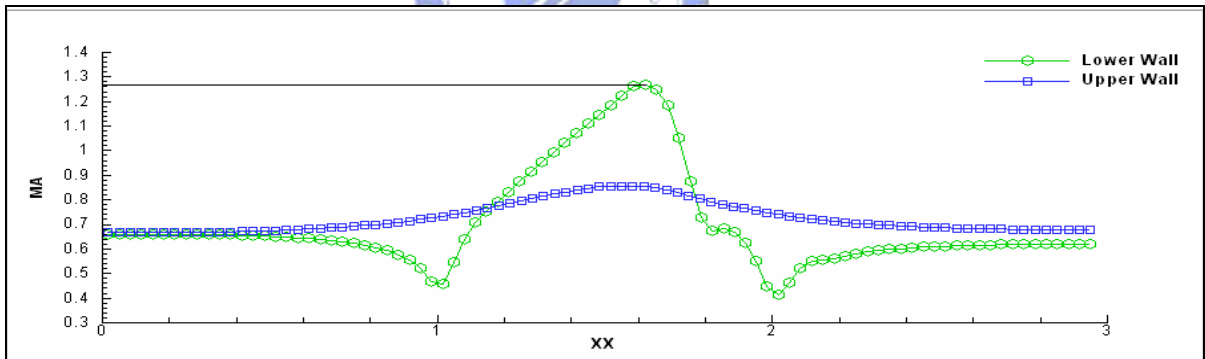


圖 7-32 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(UMIST)

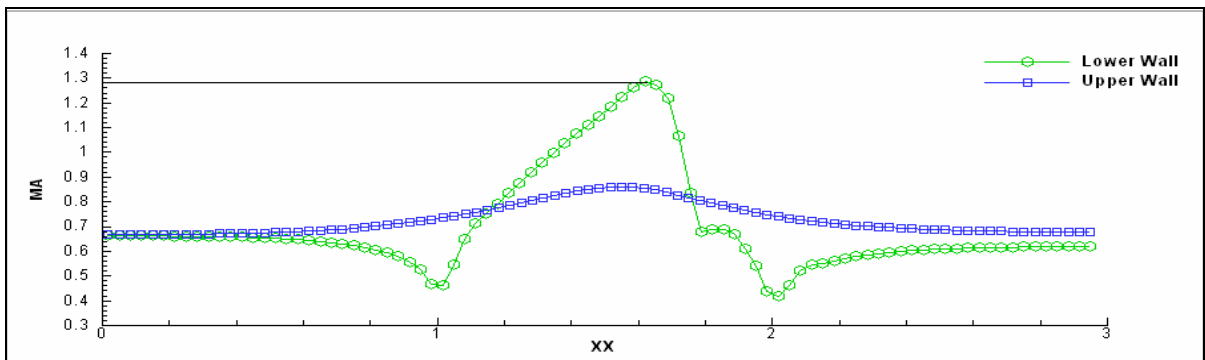


圖 7-33 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(WACEB)

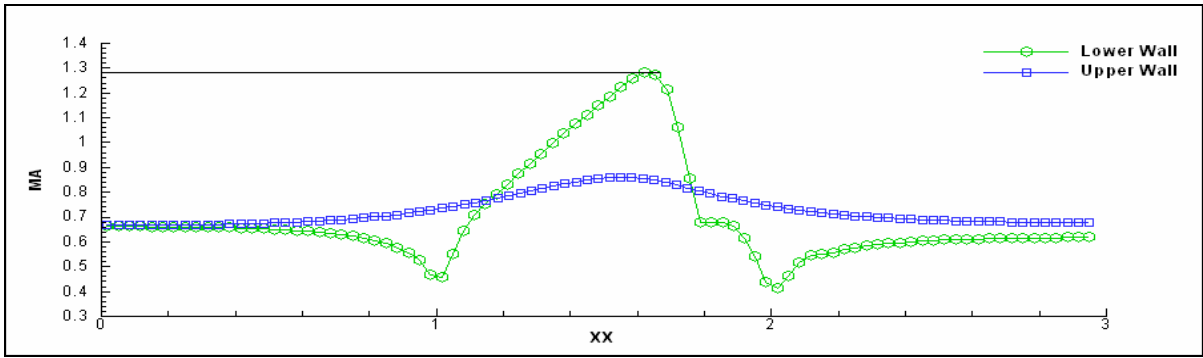
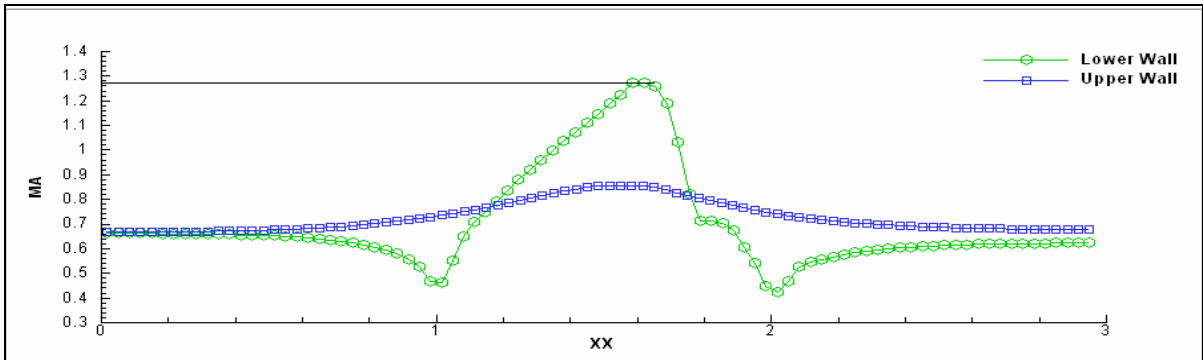
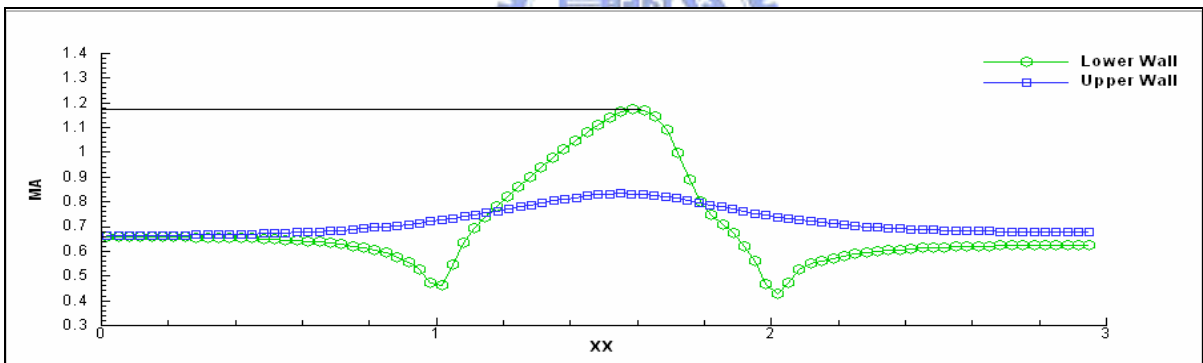


圖 7-34 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(MUSCL)

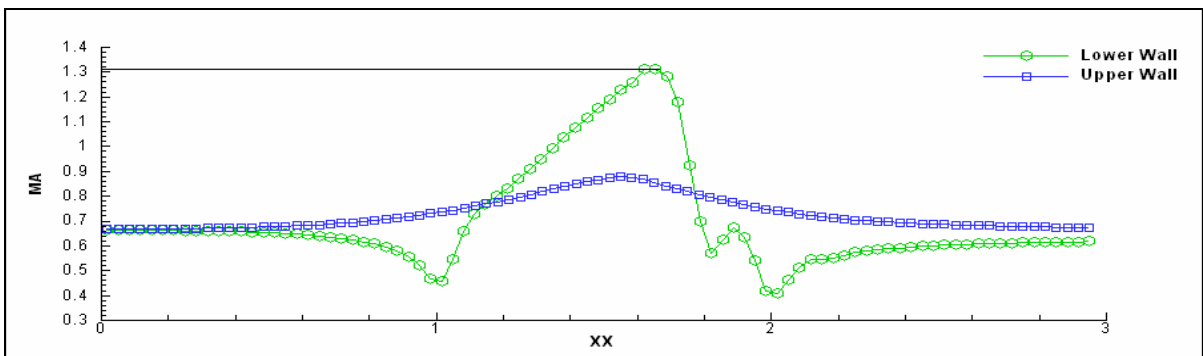


(a)

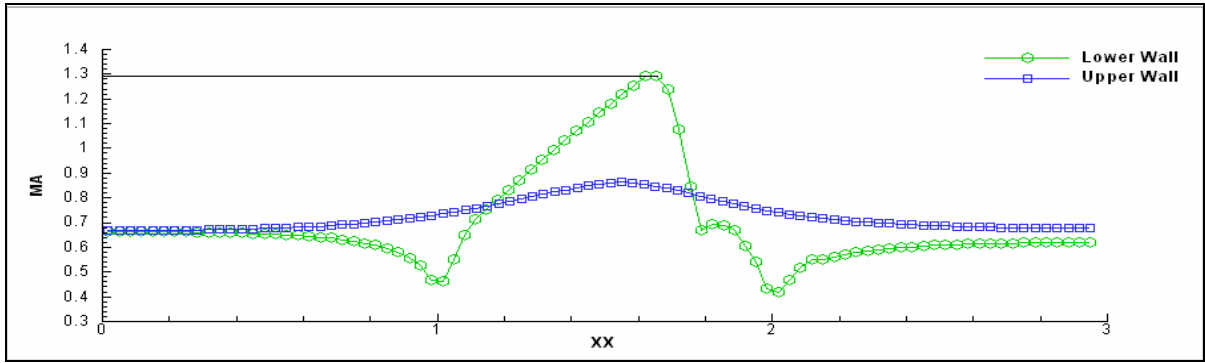


(b)

圖 7-35 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(GAMMA) (a) $bm=0.25$; (b) $bm=0.5$



(a)



(b)

圖 7-36 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(SUPERBEE)
(a) $dm=2$; (b) $dm=0.5$

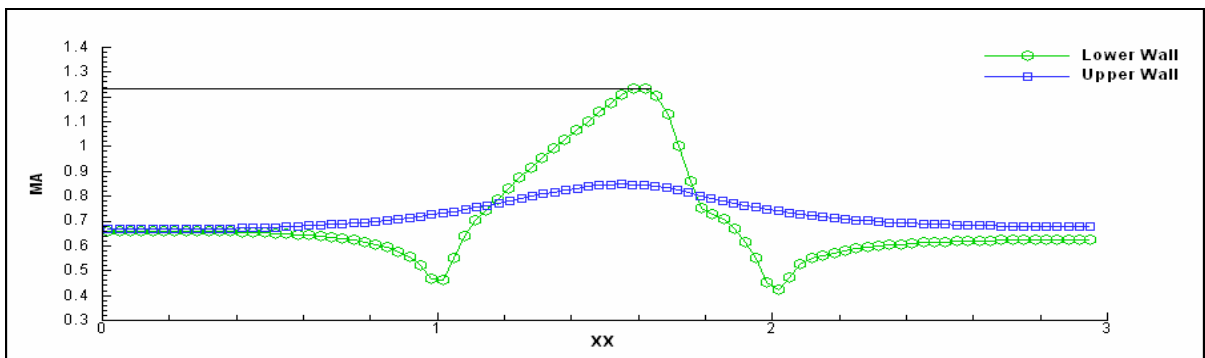


圖 7-37 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(MINMOD)

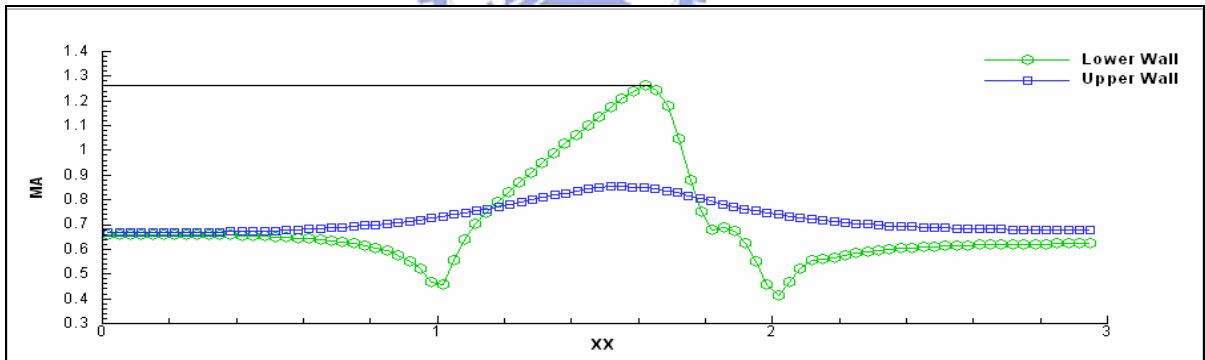


圖 7-38 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(OSHER)

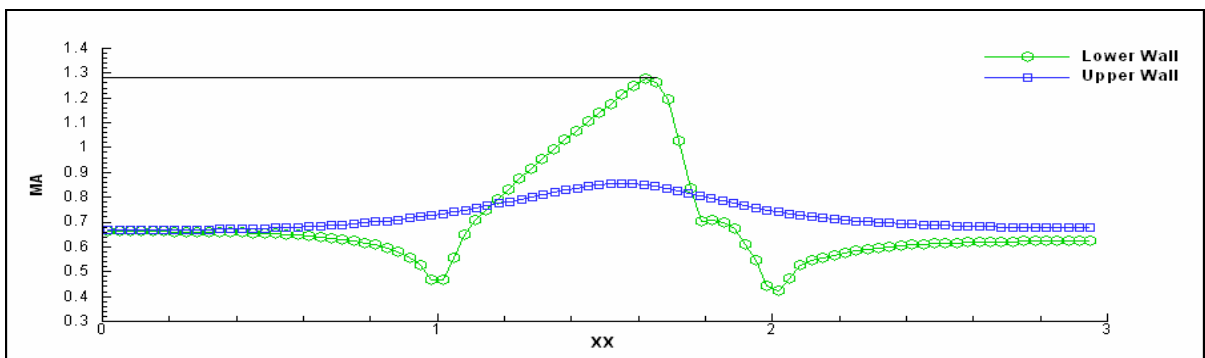


圖 7-39 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Koren)

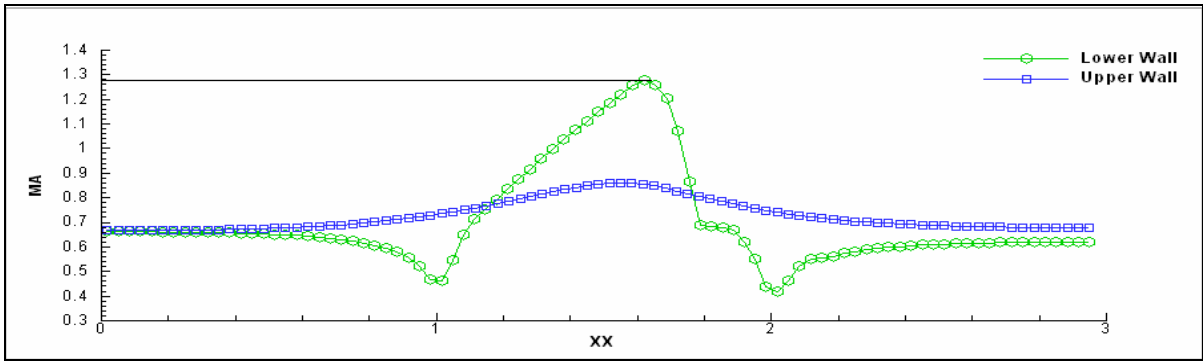


圖 7-40 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CUBISTA)

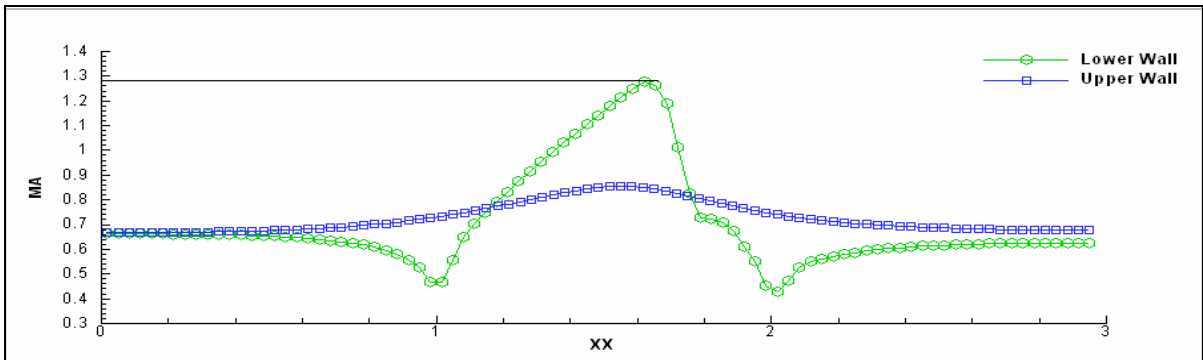


圖 7-41 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(H-QUICK)

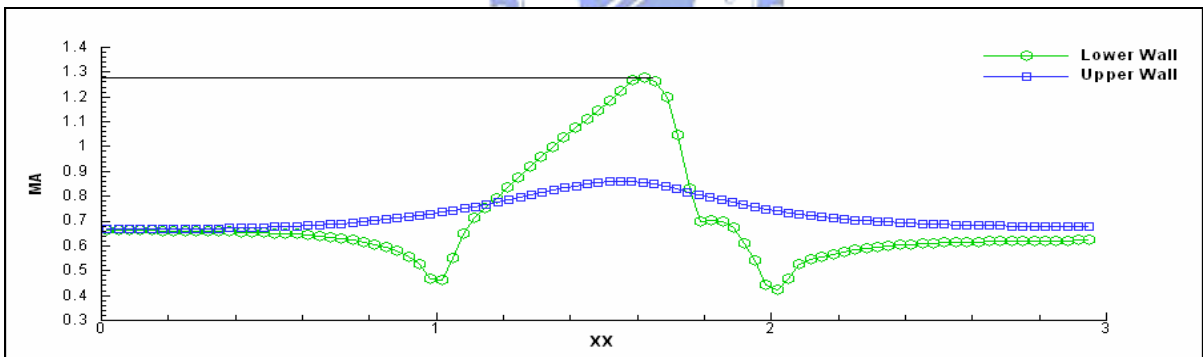


圖 7-42 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CHARM)

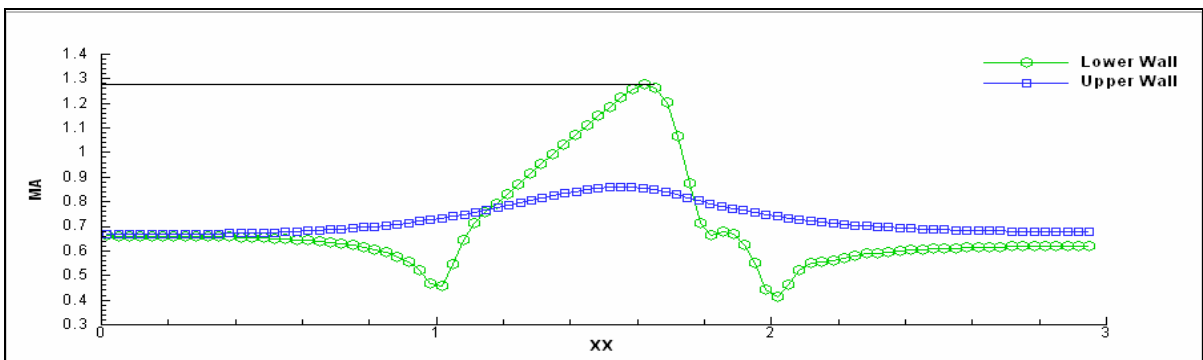


圖 7-43 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Van Leer)

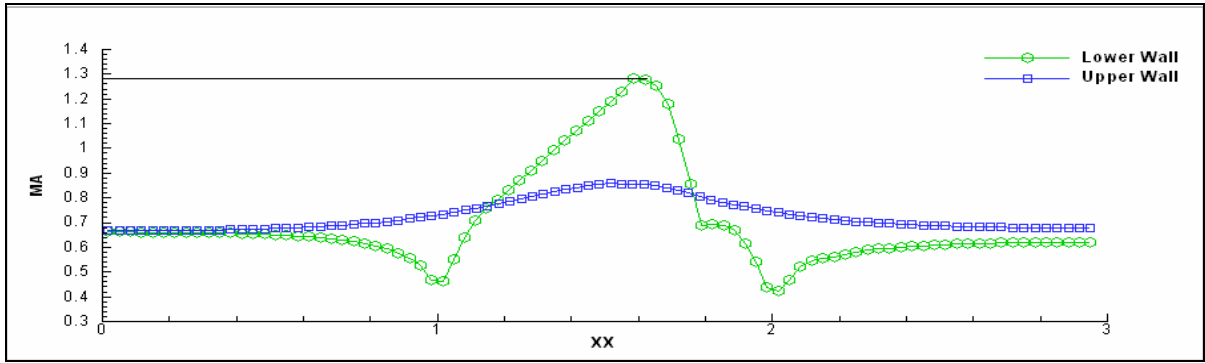


圖 7-44 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(OSPRE)

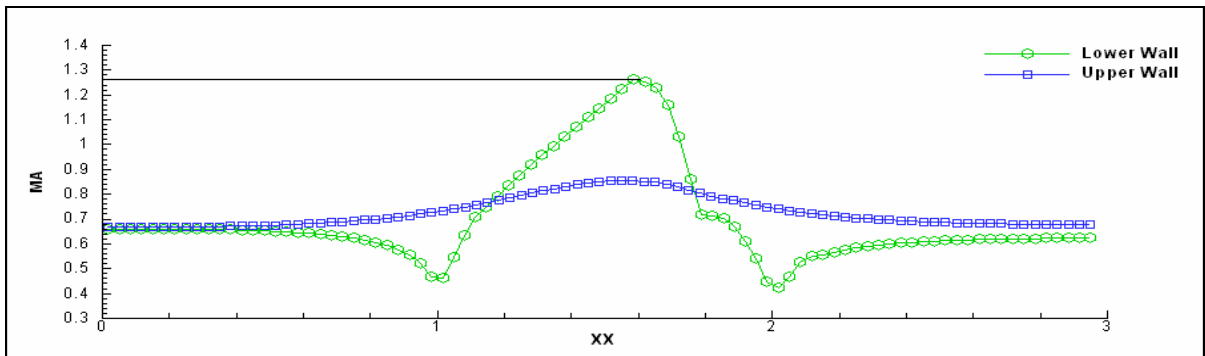


圖 7-45 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Hemker & Koren)

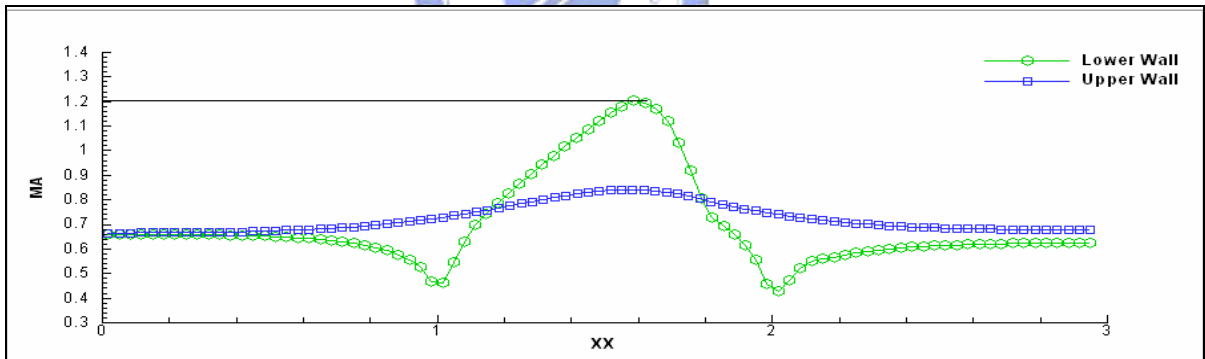


圖 7-46 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(Van Albada)

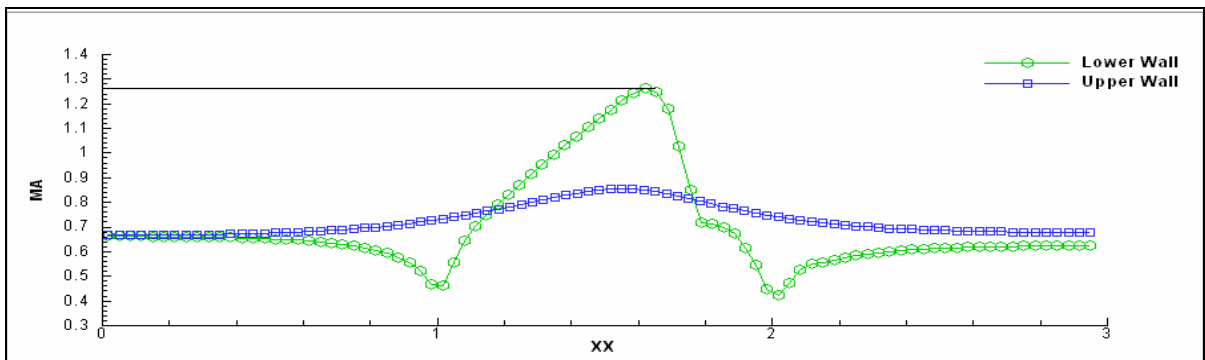


圖 7-47 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈圖(CLAM)

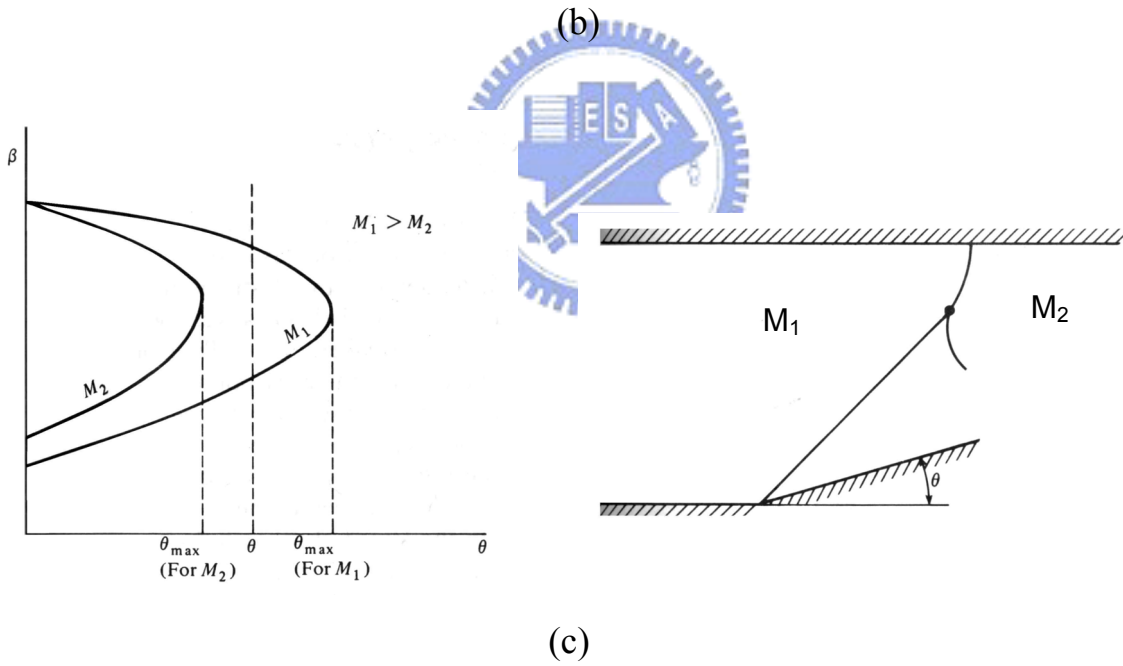
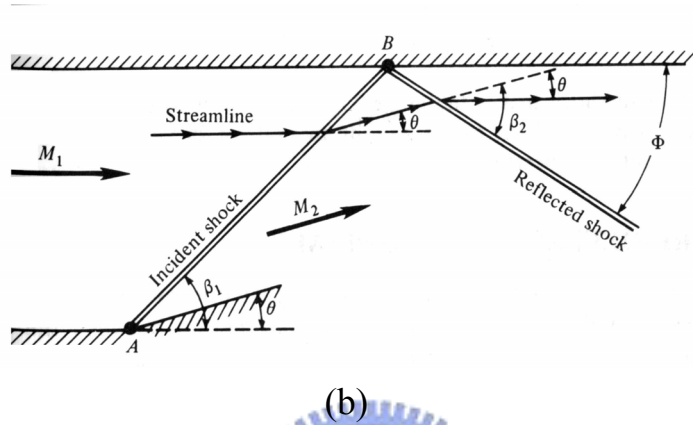
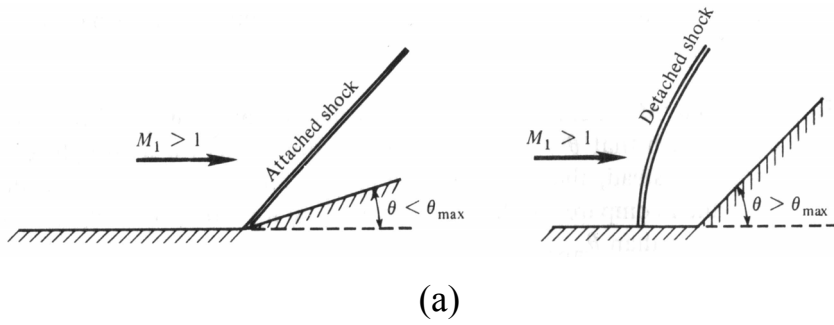


圖 7-48：(a)接觸(Attached)及脫離(Detached)斜震波之示意圖；(b)正規反射波(Regular reflection)之示意圖；(c)馬赫反射波(Mach reflection)之示意圖

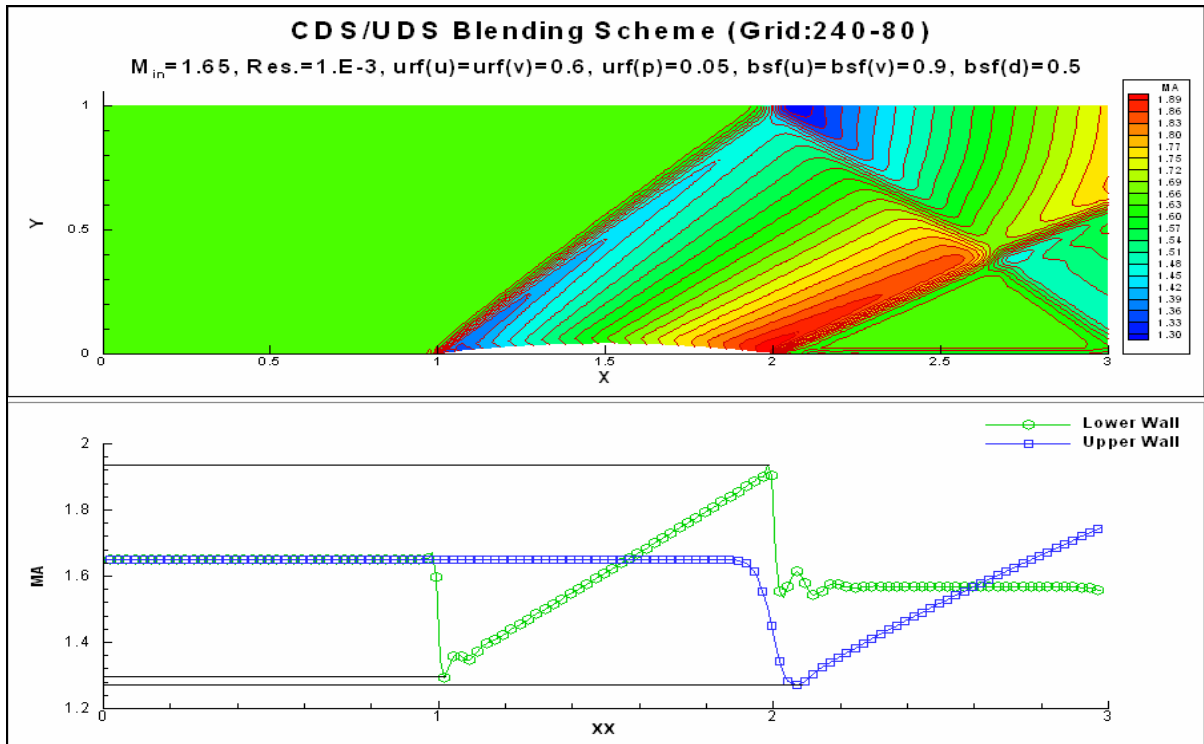


圖 7-49： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (UDS/CDS 混合法)

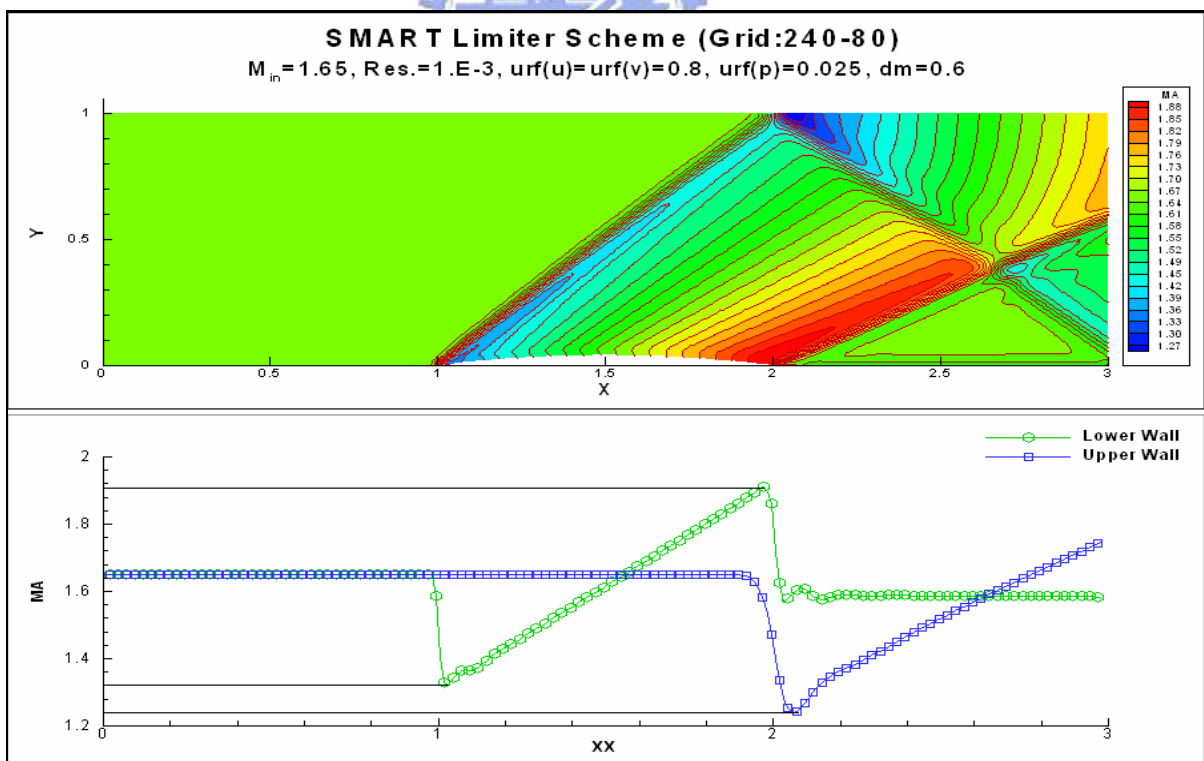


圖 7-50： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART)

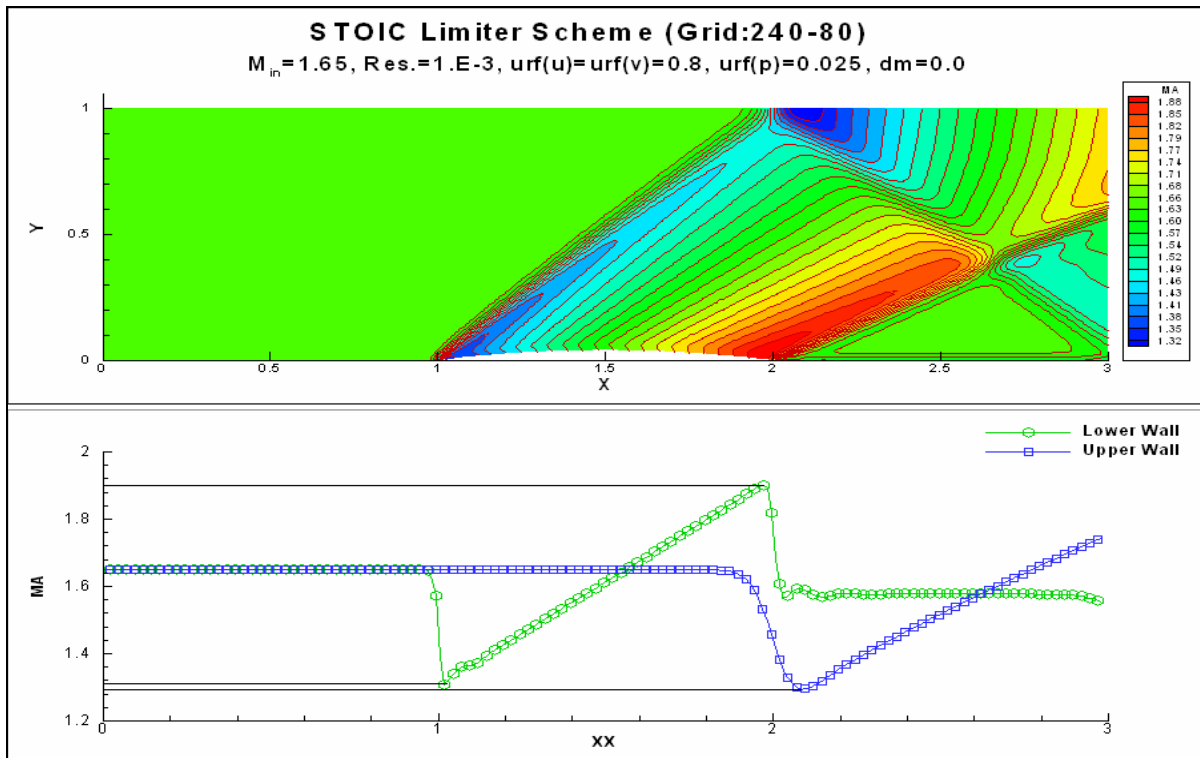


圖 7-51： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC)

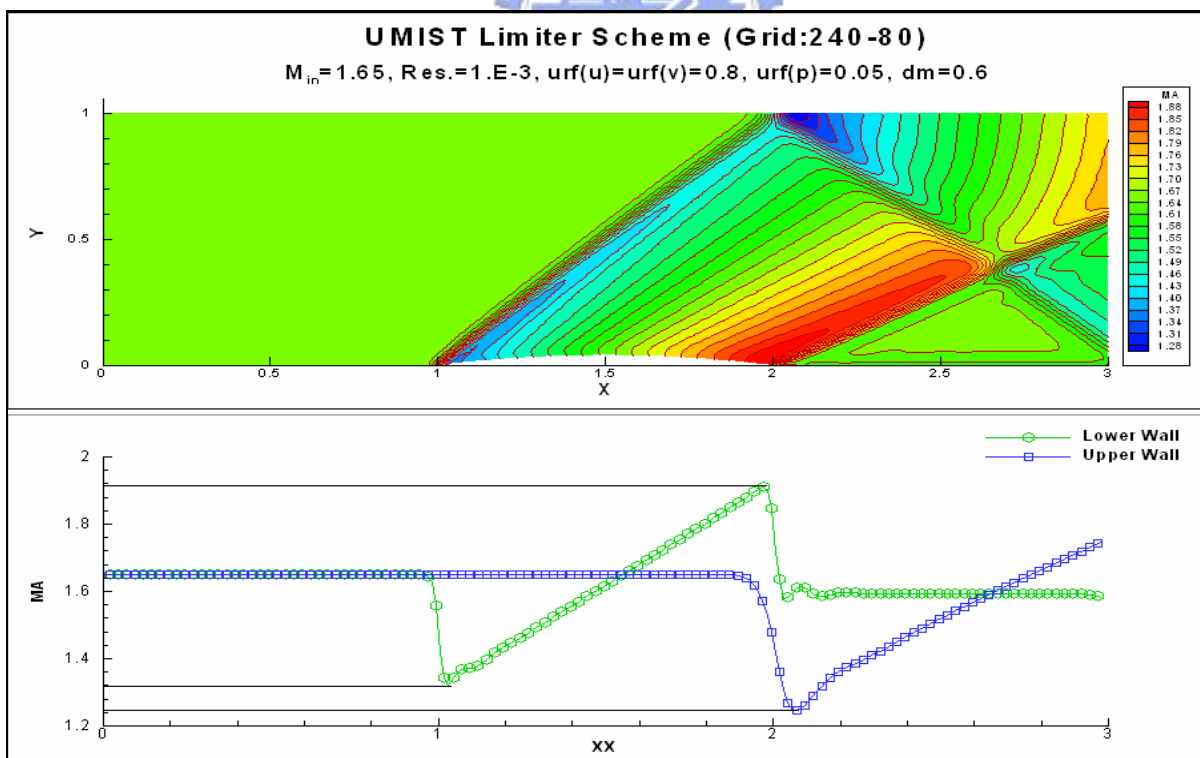


圖 7-52： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (UMIST)

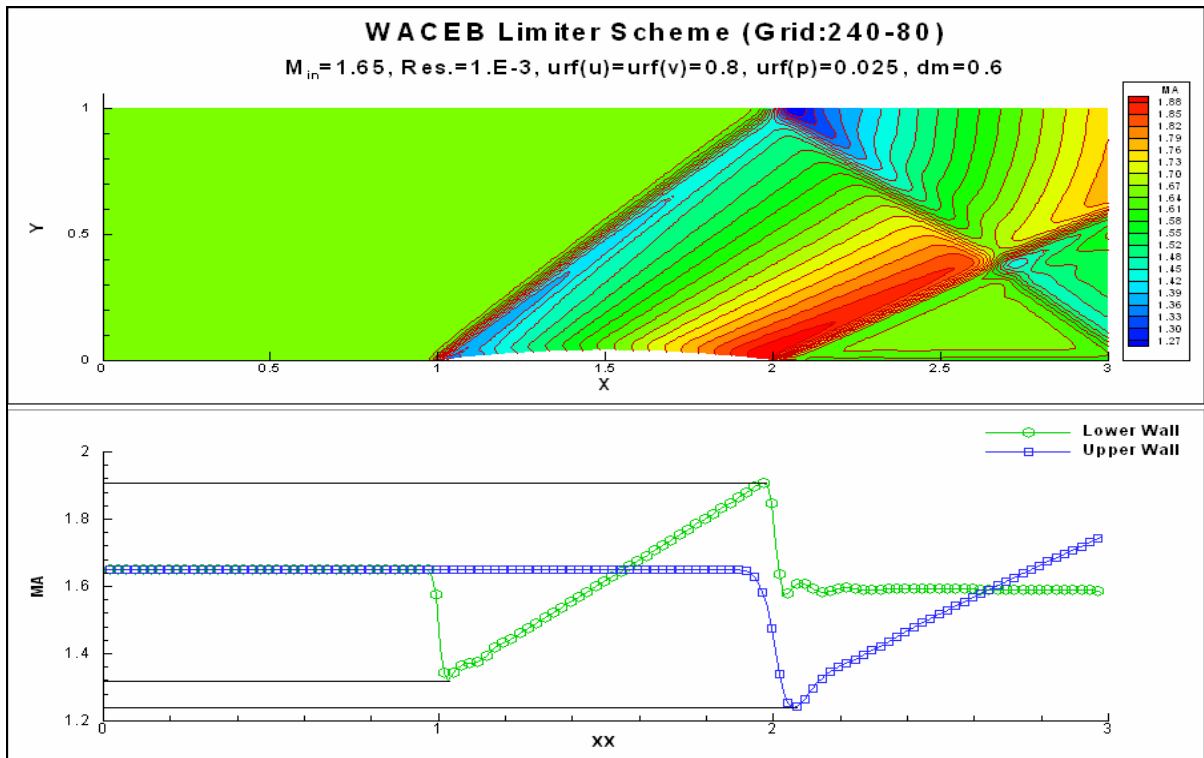


圖 7-53： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (WACEB)

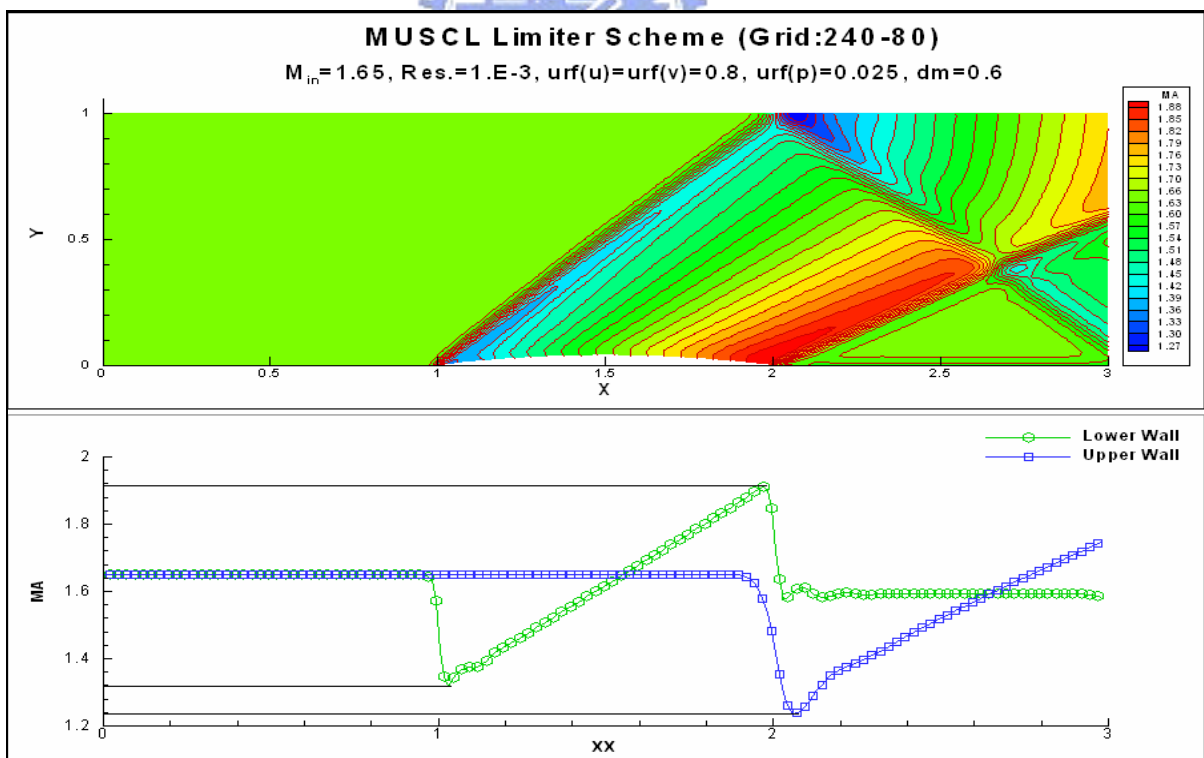


圖 7-54： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL)

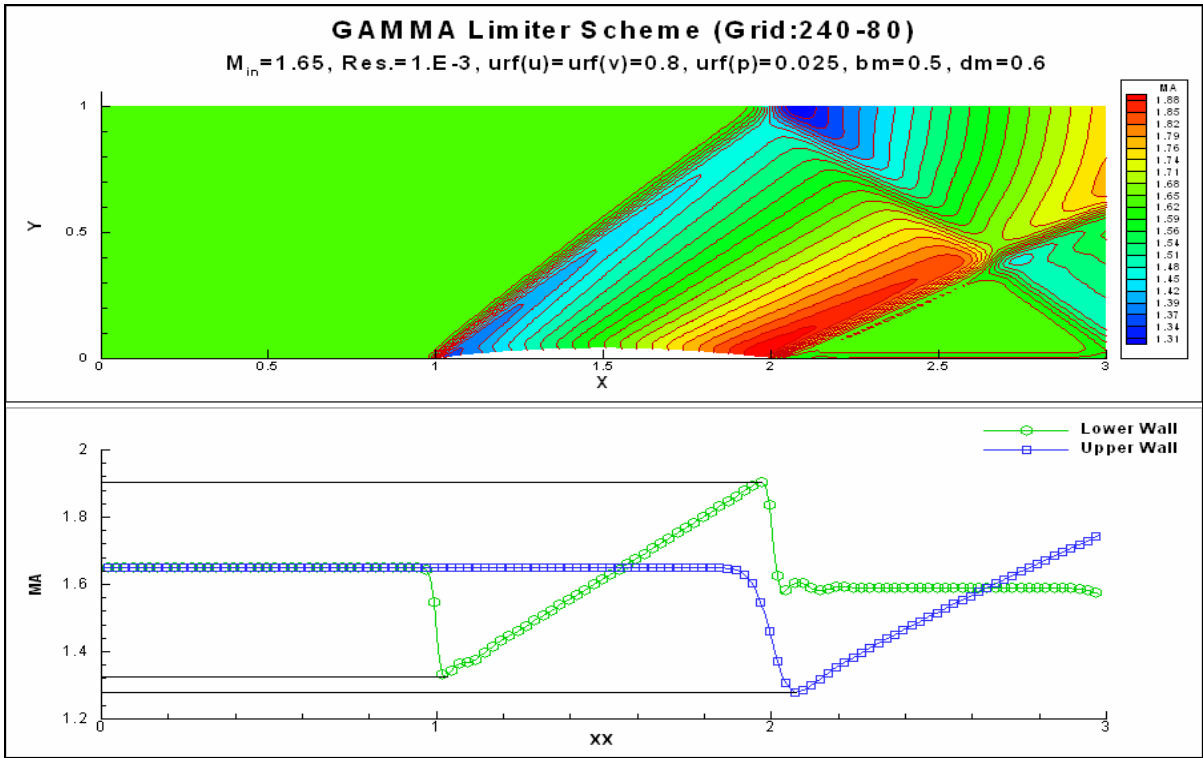


圖 7-55： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(GAMMA, $bm=0.5$)

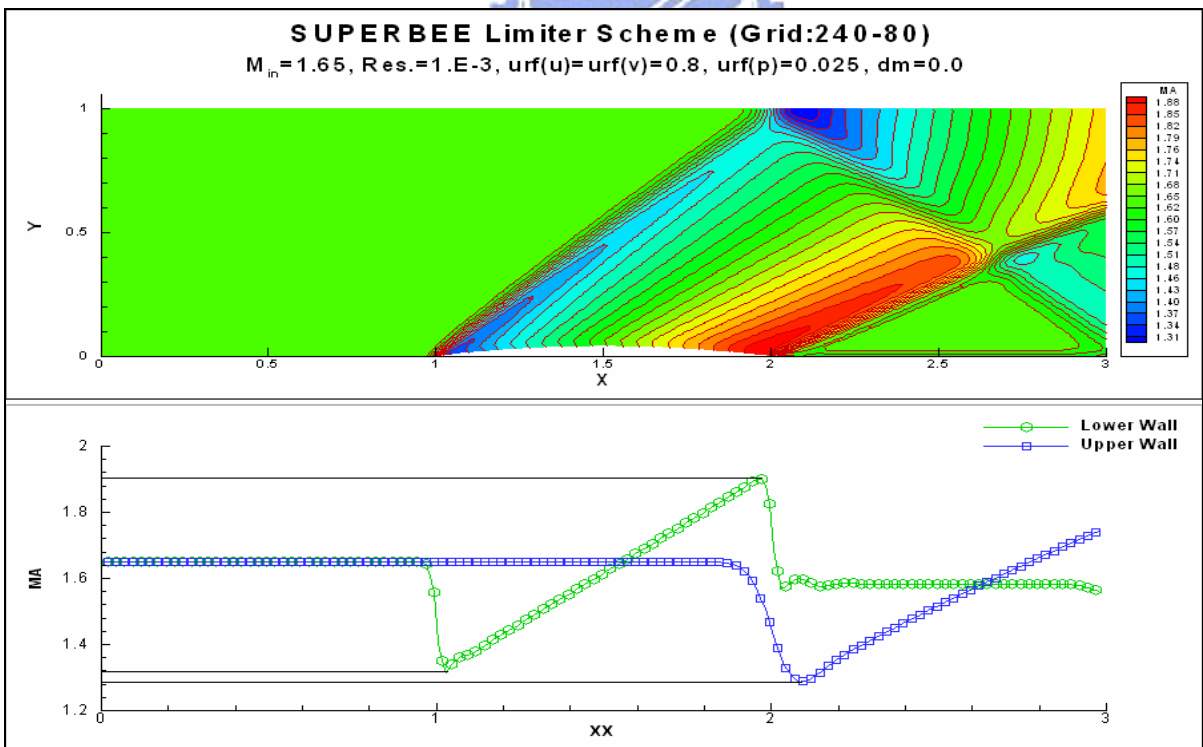


圖 7-56： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(SUPERBEE)

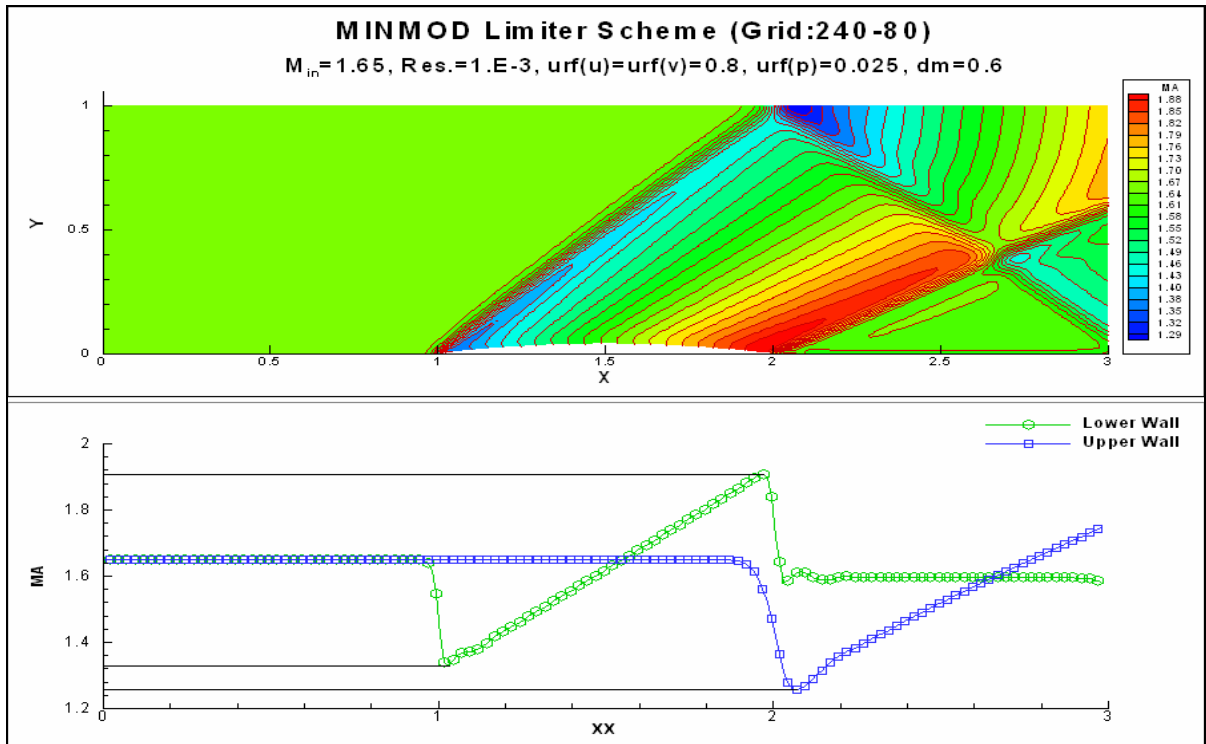


圖 7-57： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)

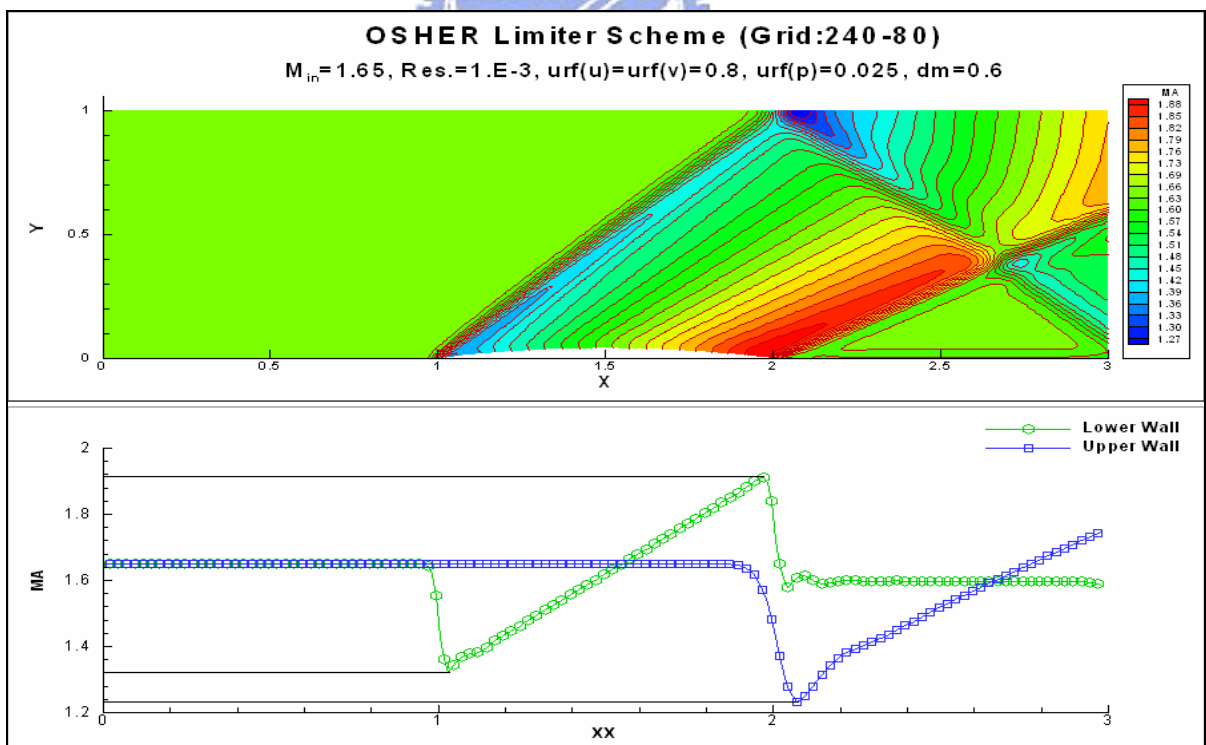


圖 7-58： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)

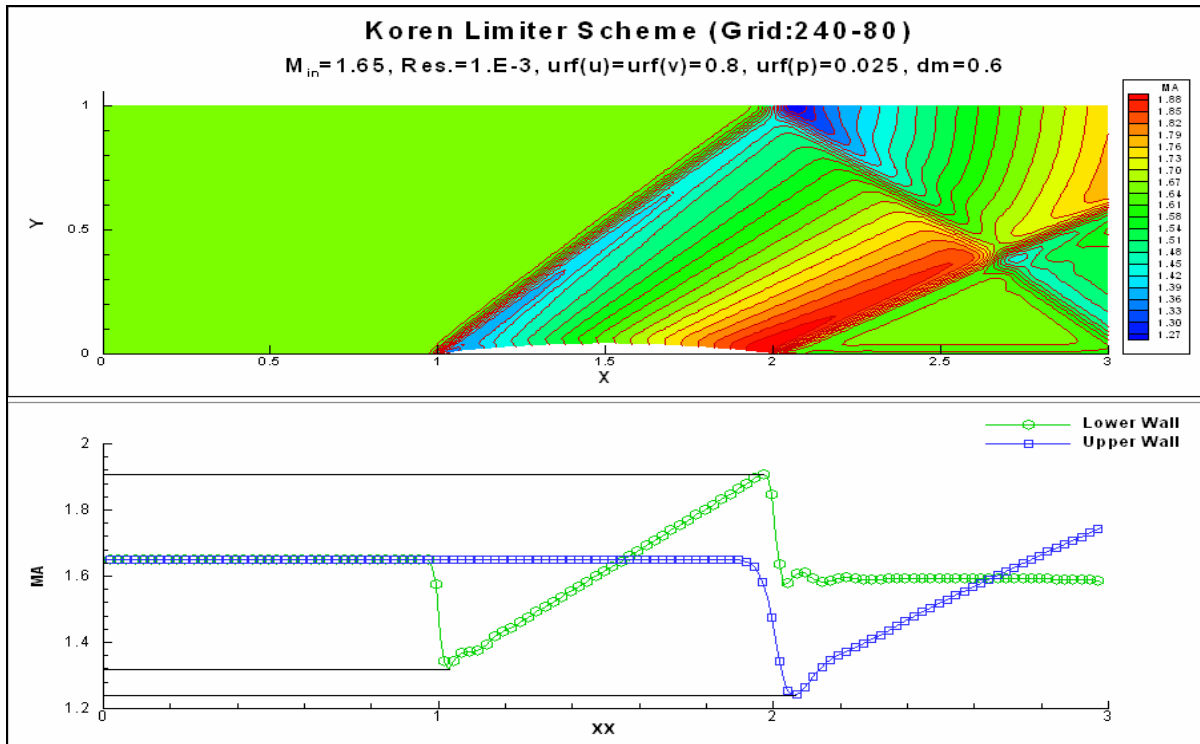


圖 7-59： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Koren)

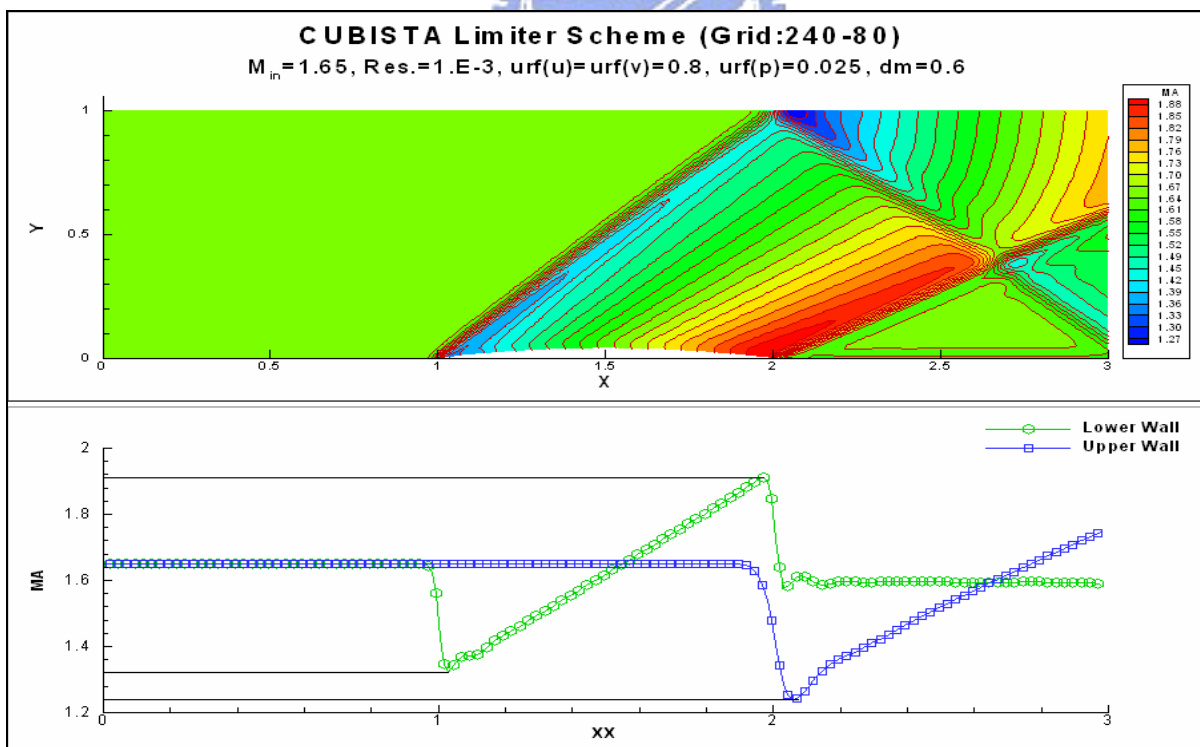


圖 7-60： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(CUBISTA)

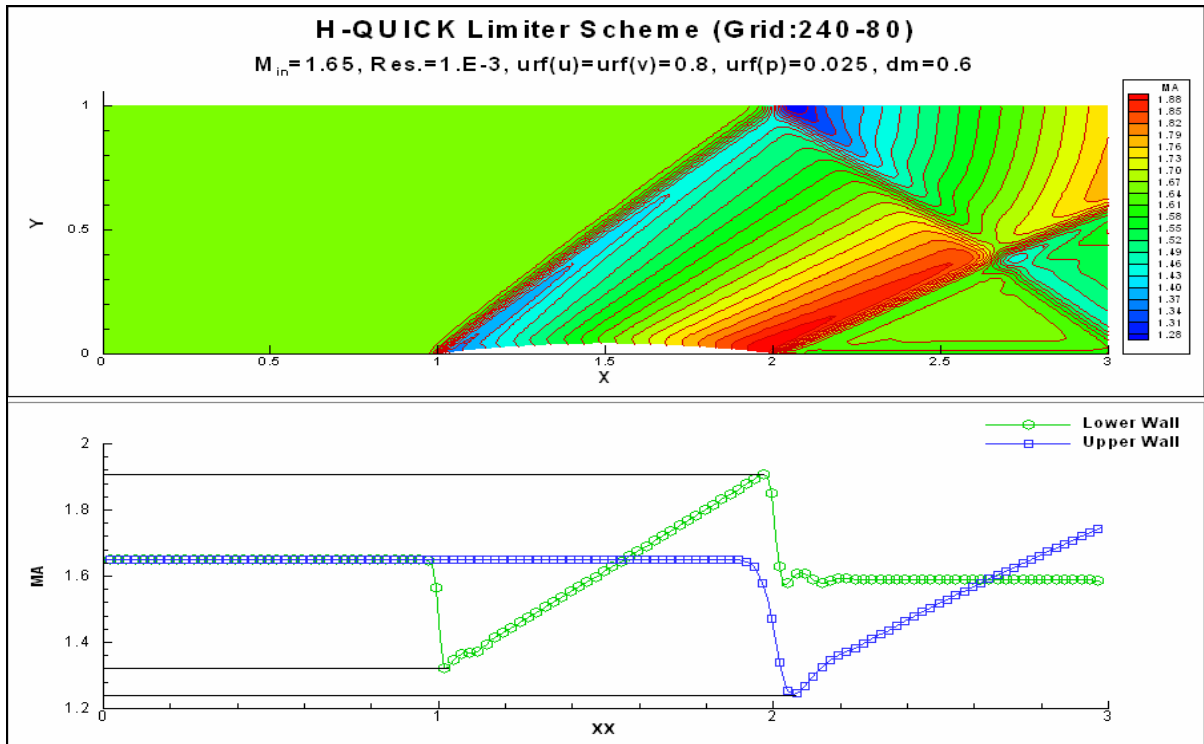


圖 7-61： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)

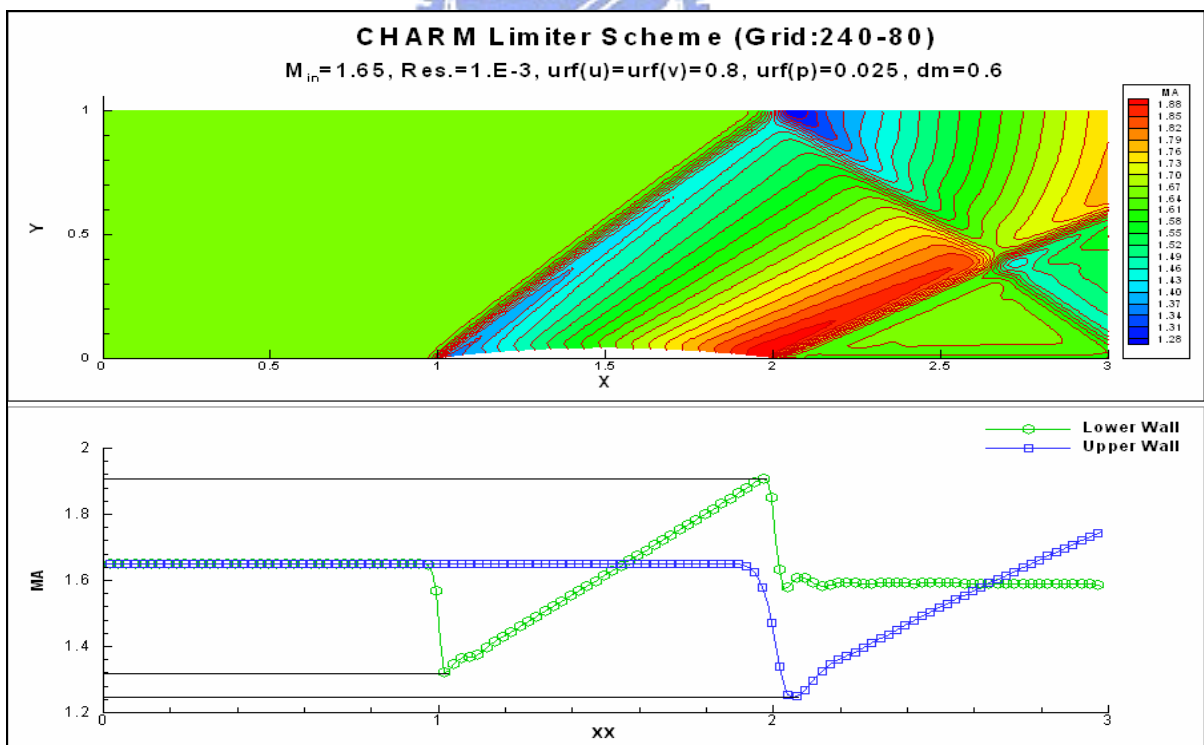


圖 7-62： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CHARM)

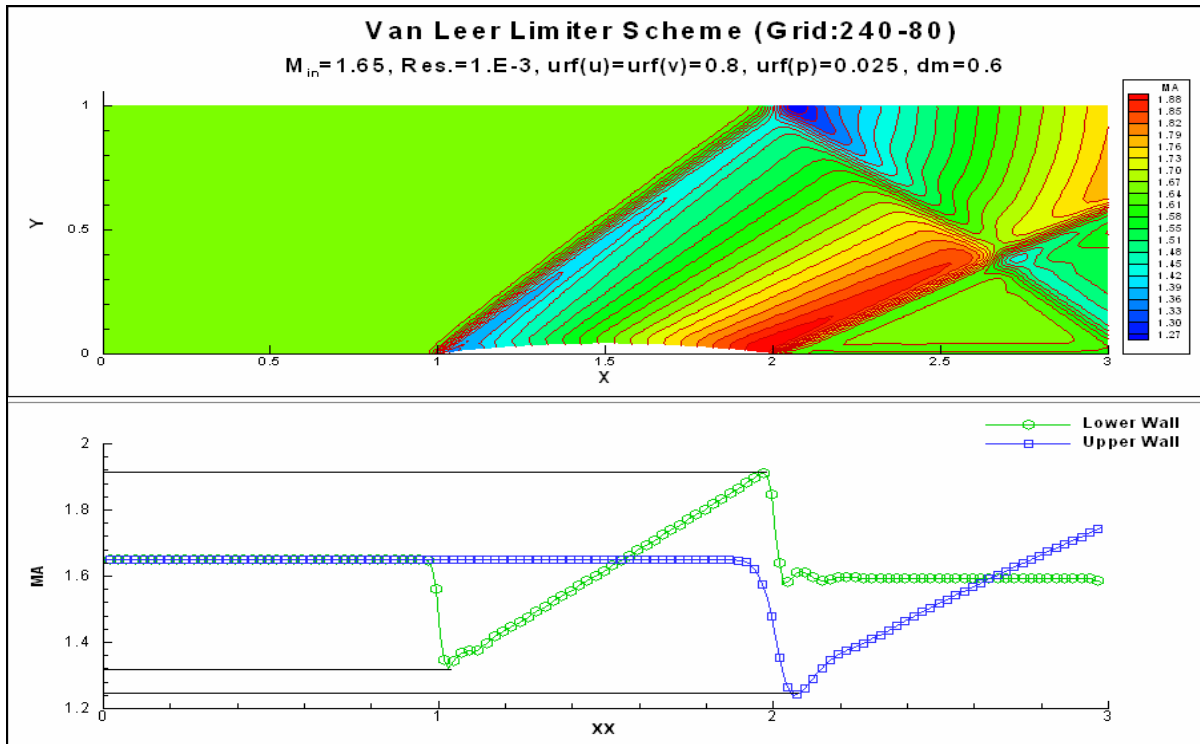


圖 7-63： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Leer)

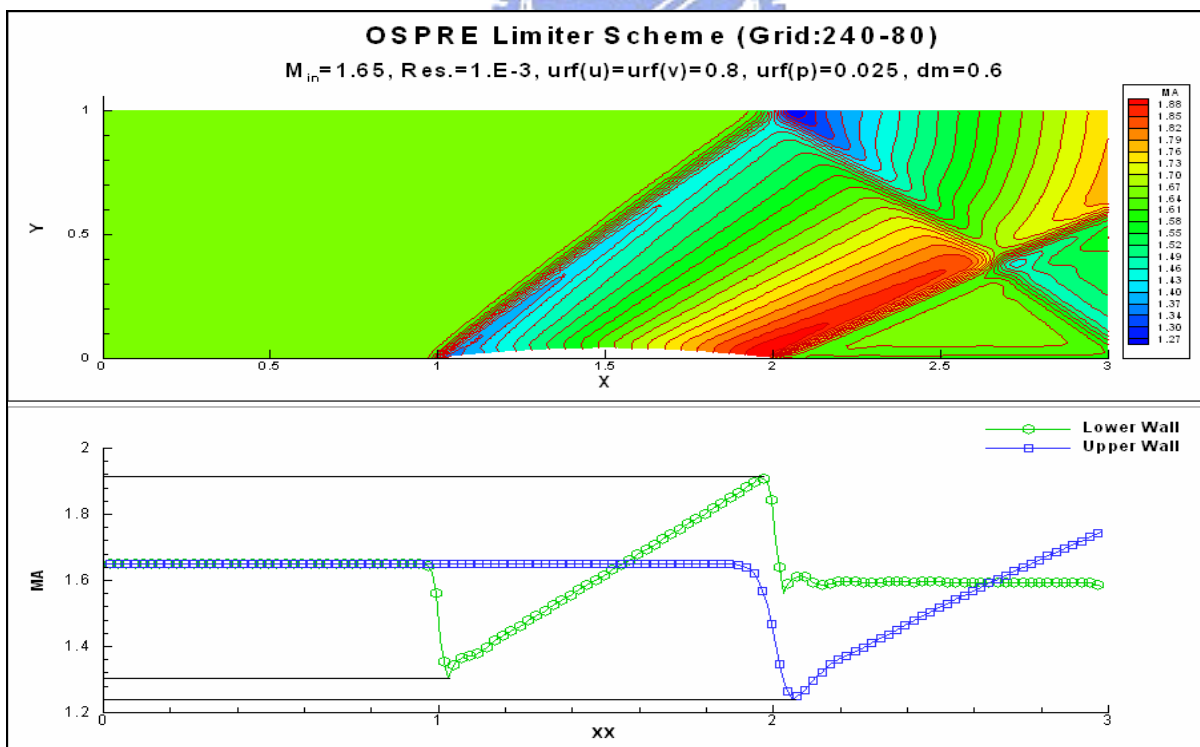


圖 7-64： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRE)

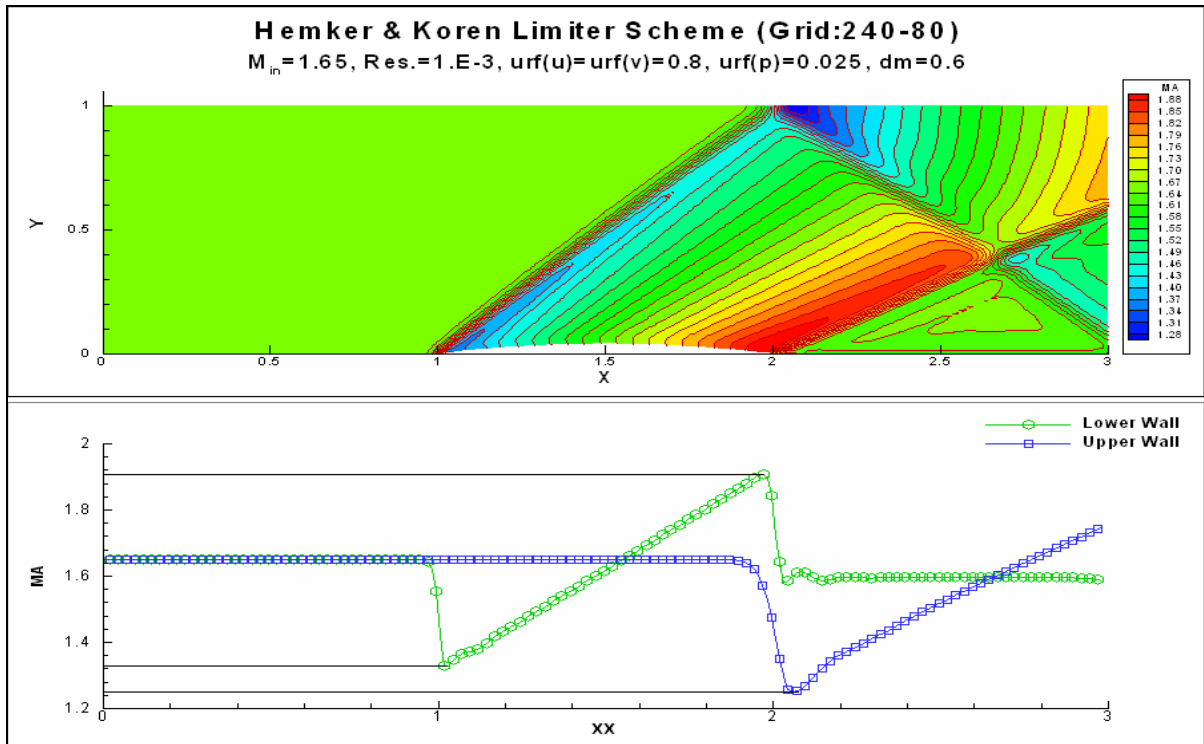


圖 7-65： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Hemker & Koren)

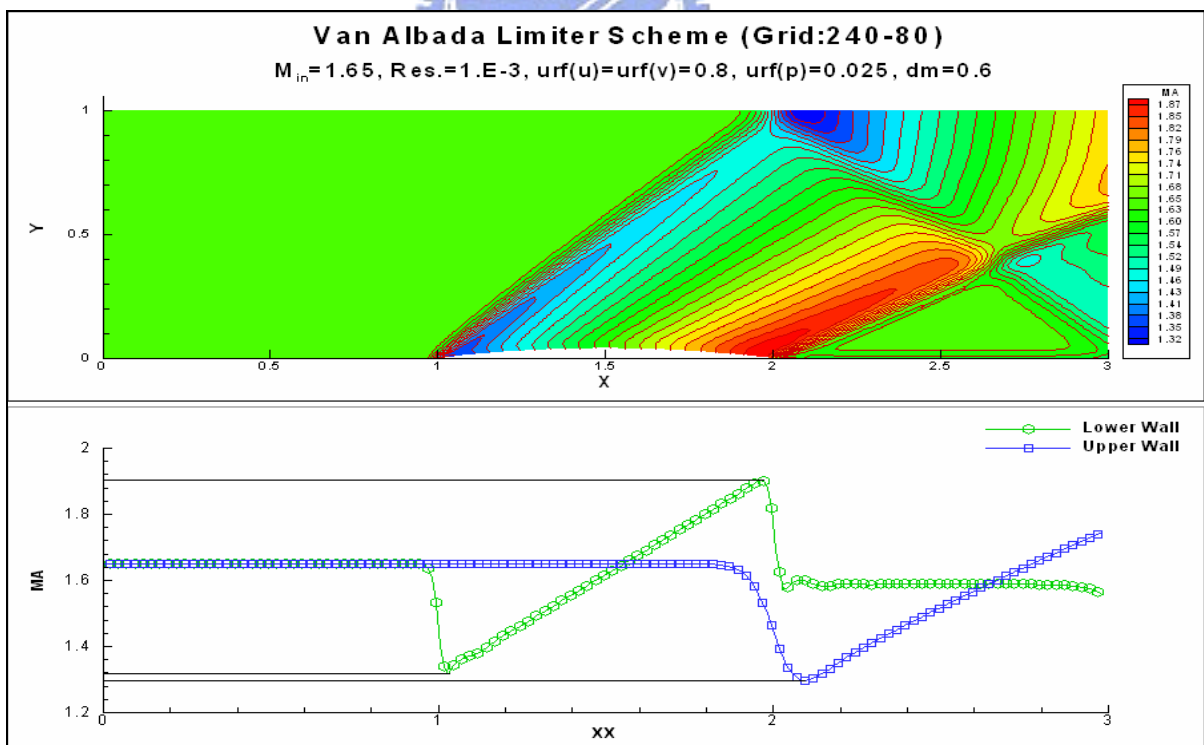


圖 7-66： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Van Albada)

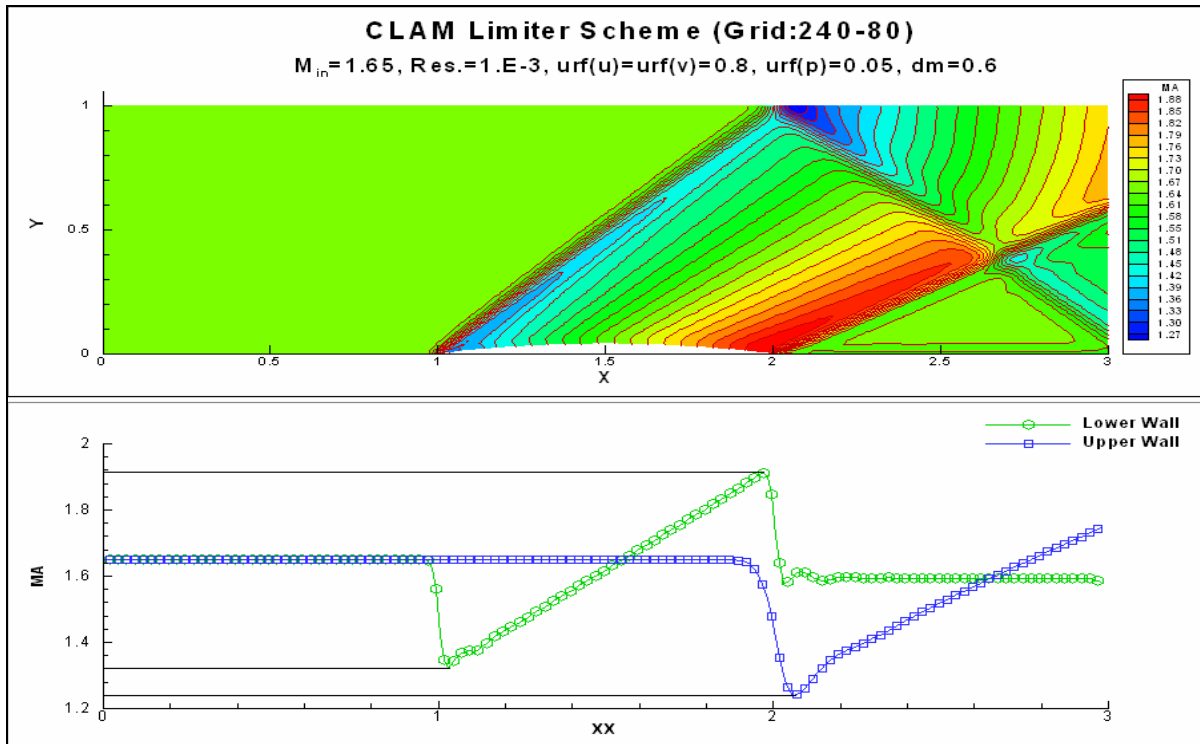


圖 7-67： $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CLAM)

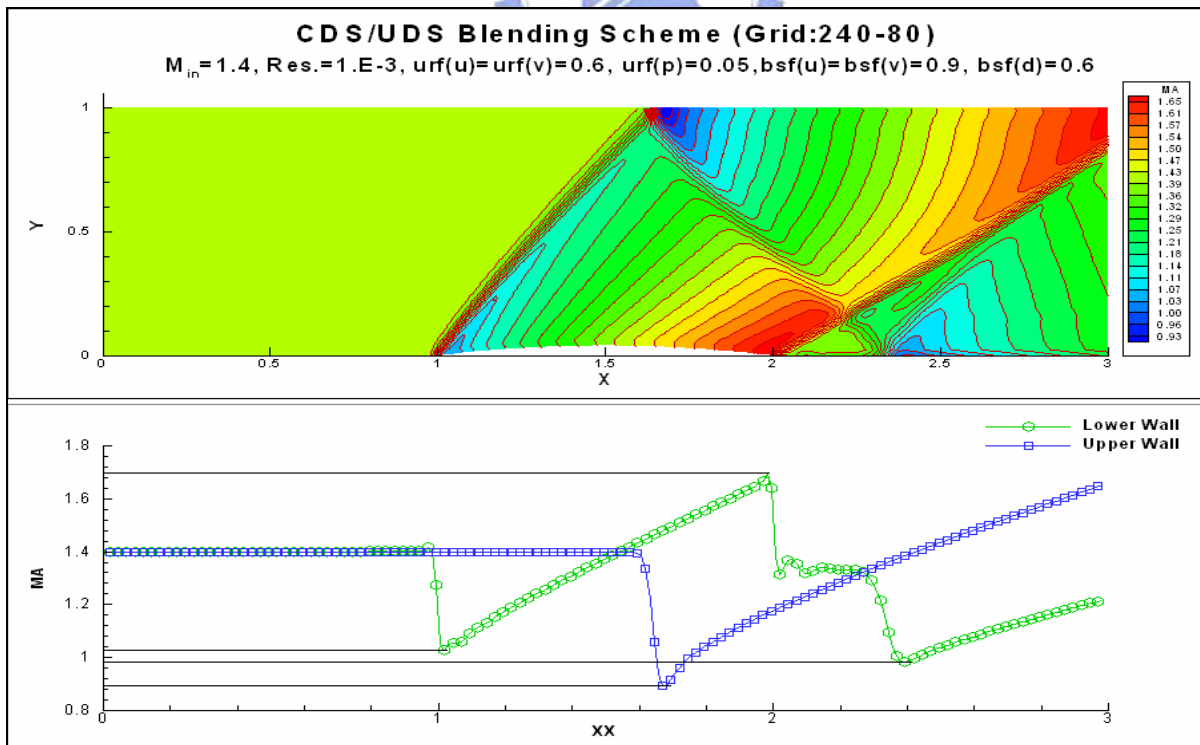


圖 7-68： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CDS/UDS 混合法)

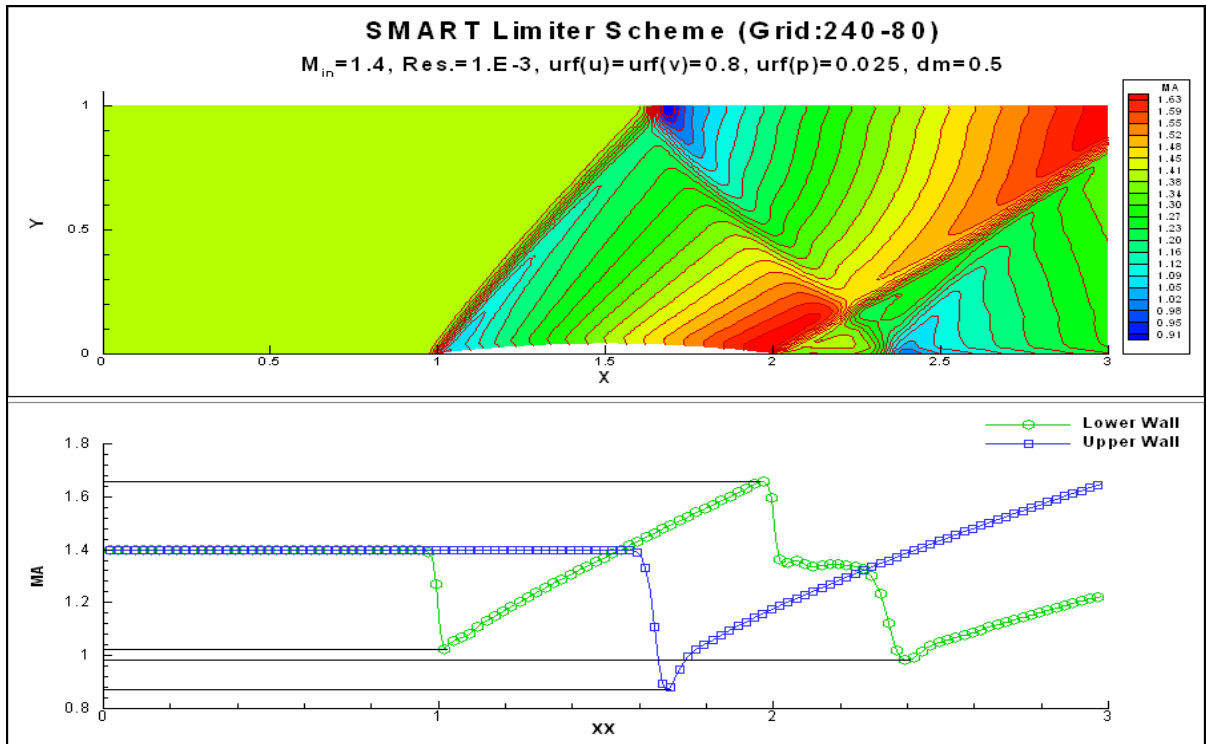


圖 7-69： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART)

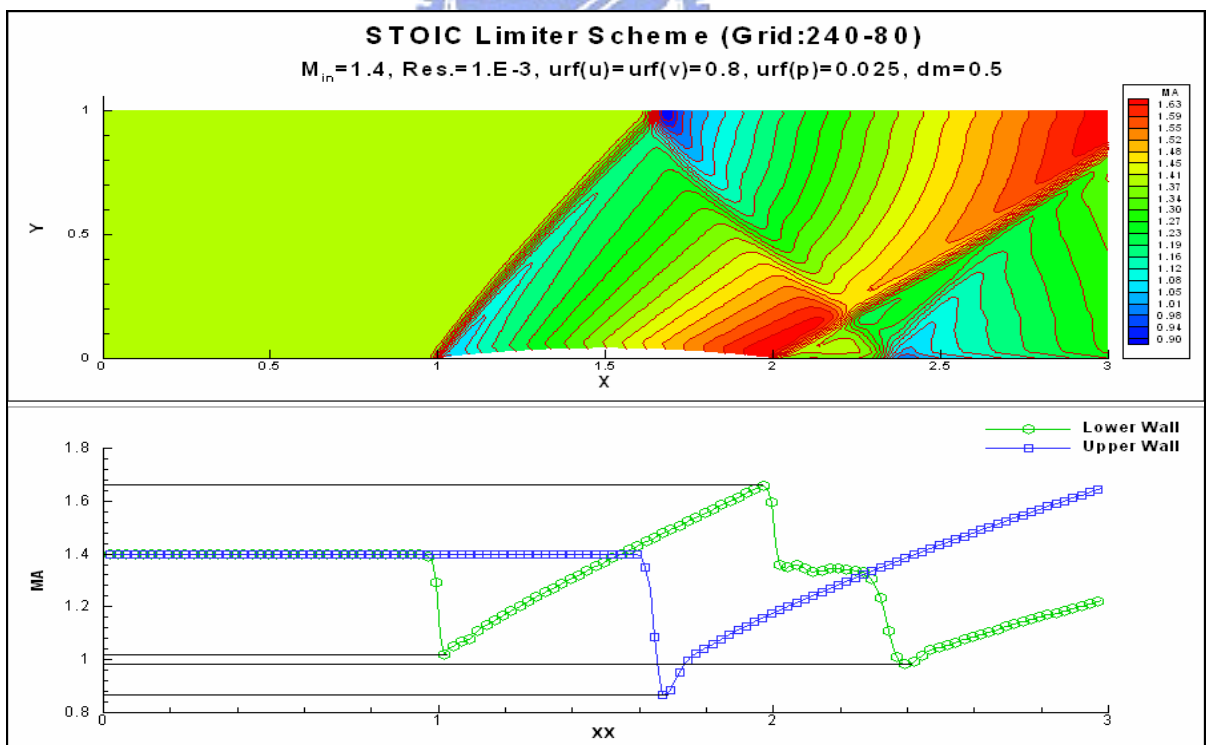


圖 7-70： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC)

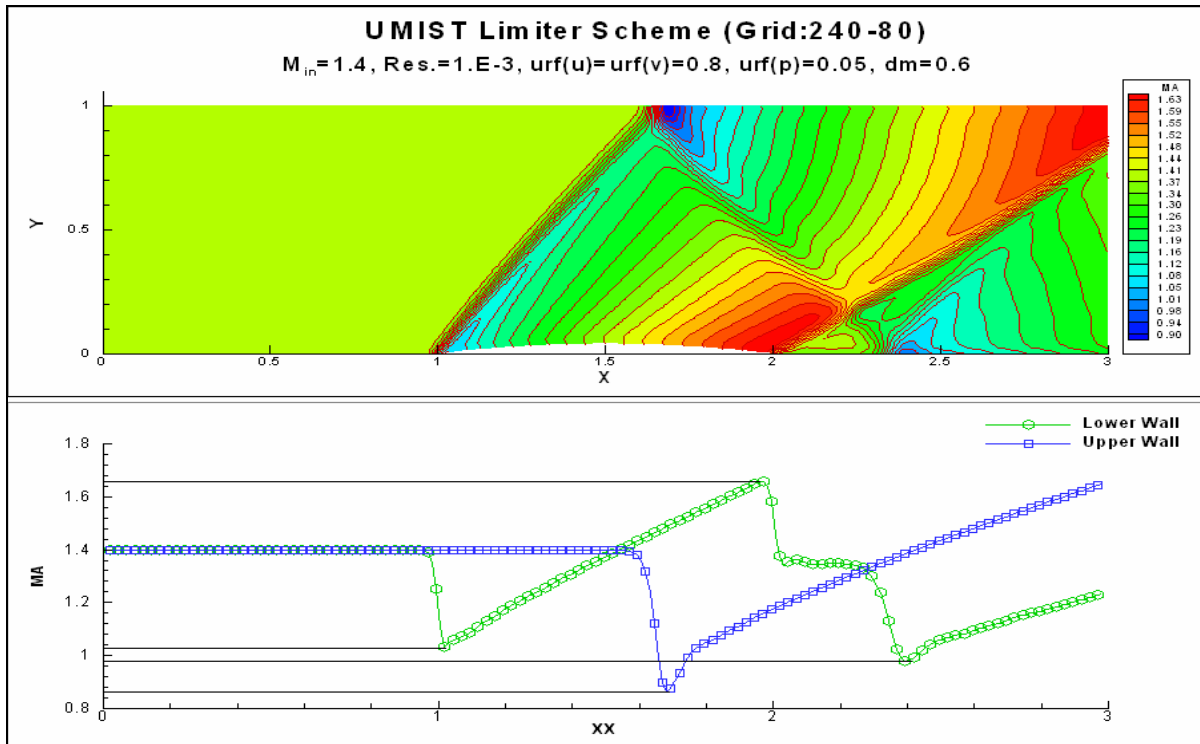


圖 7-71： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(UMIST)

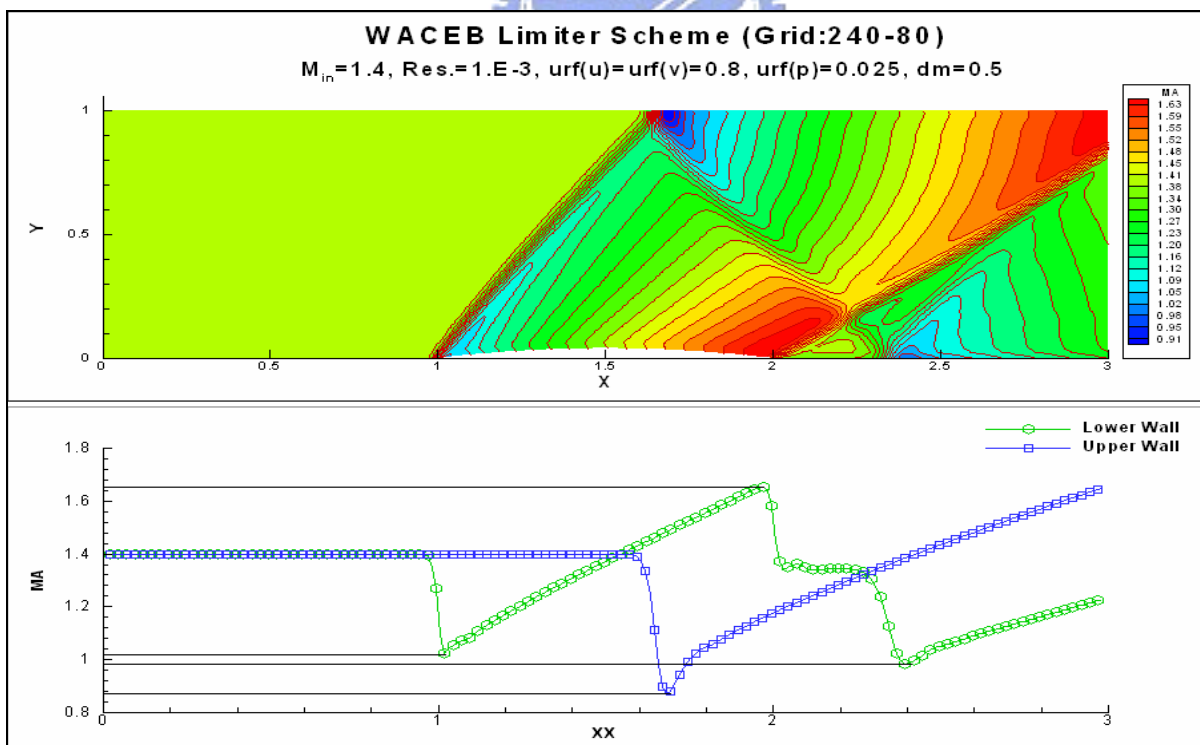


圖 7-72： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(WACEB)

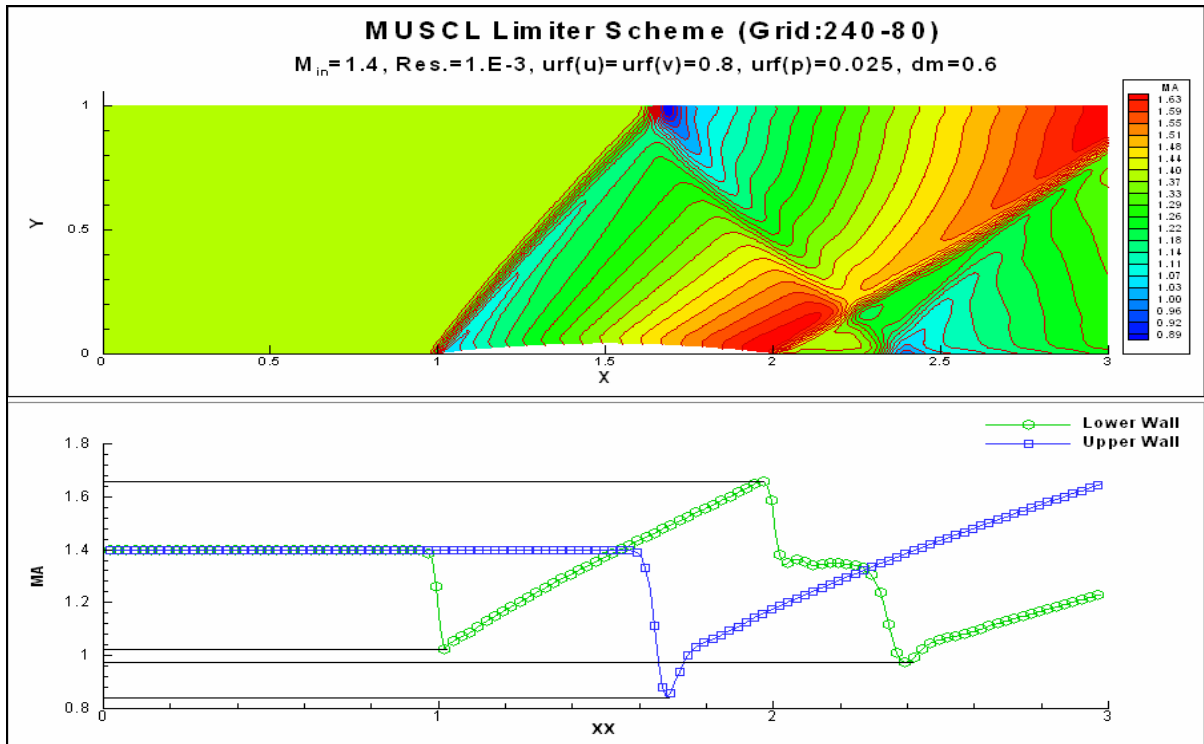
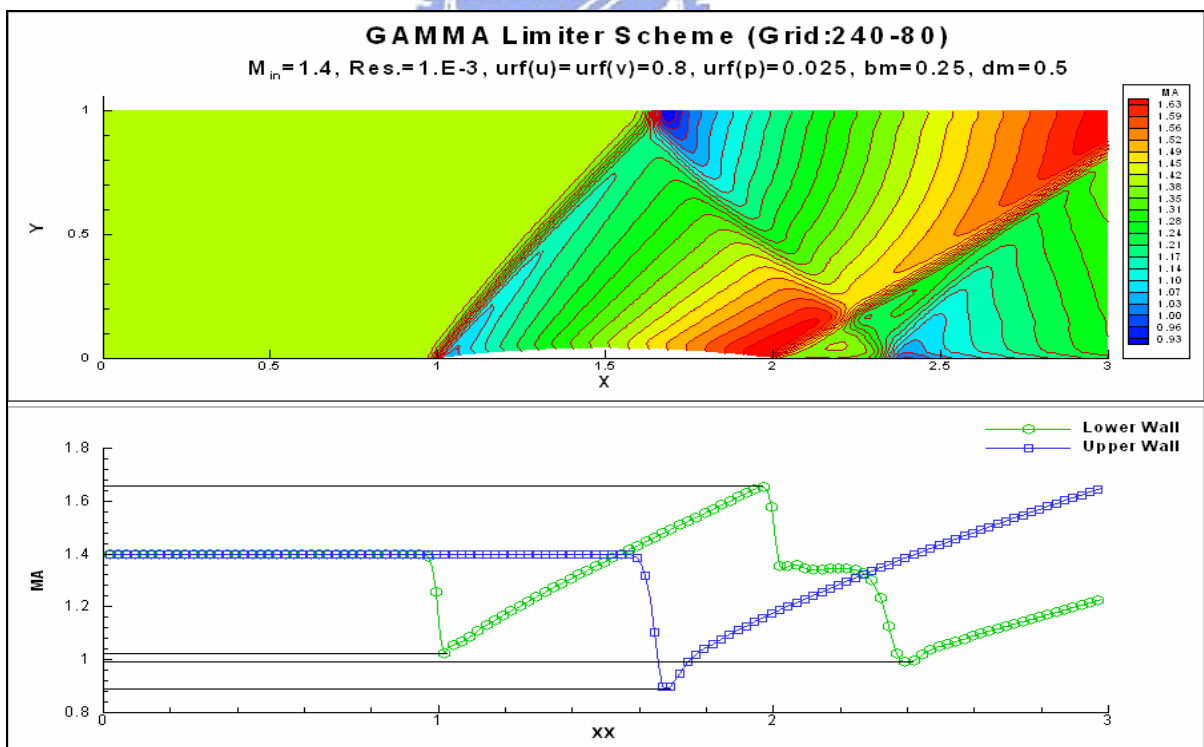
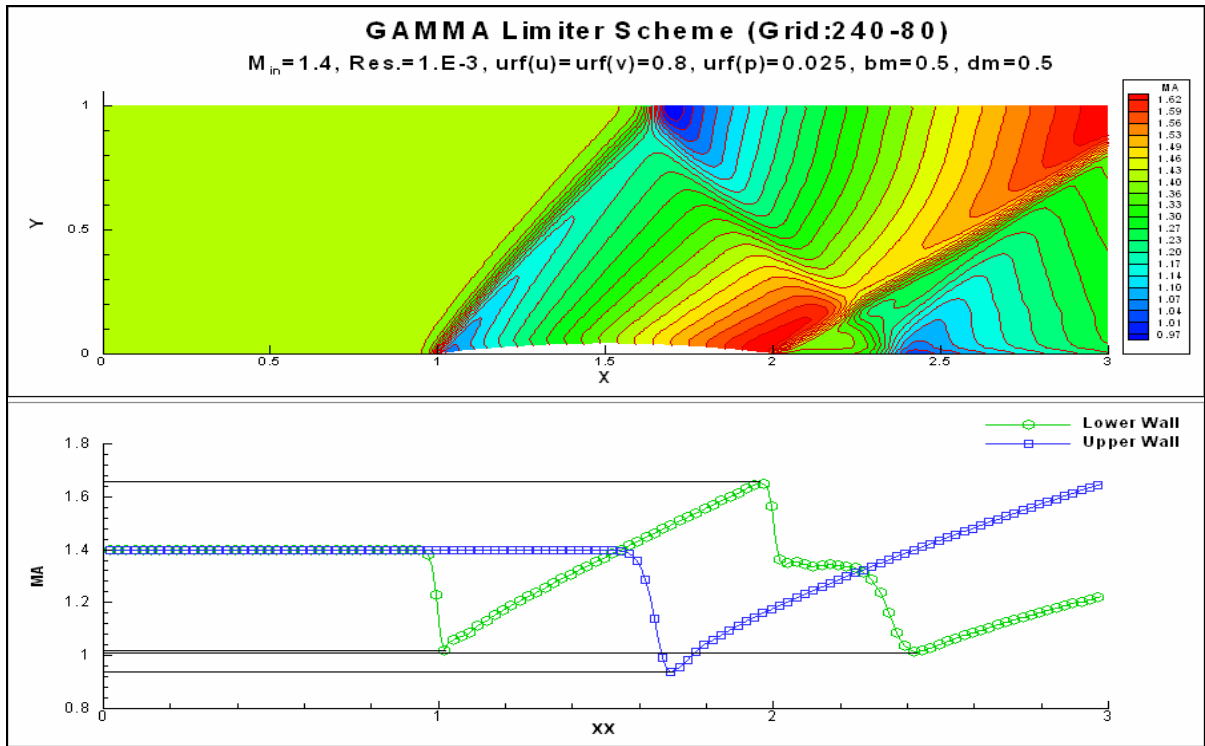


圖 7-73： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL)



(a)



(b)

圖 7-74： $M_{in}=1.4$ 馬赫數等值圖及壁面馬赫數分佈圖(GAMMA) (a) $bm=0.25$ ；(b) $bm=0.5$

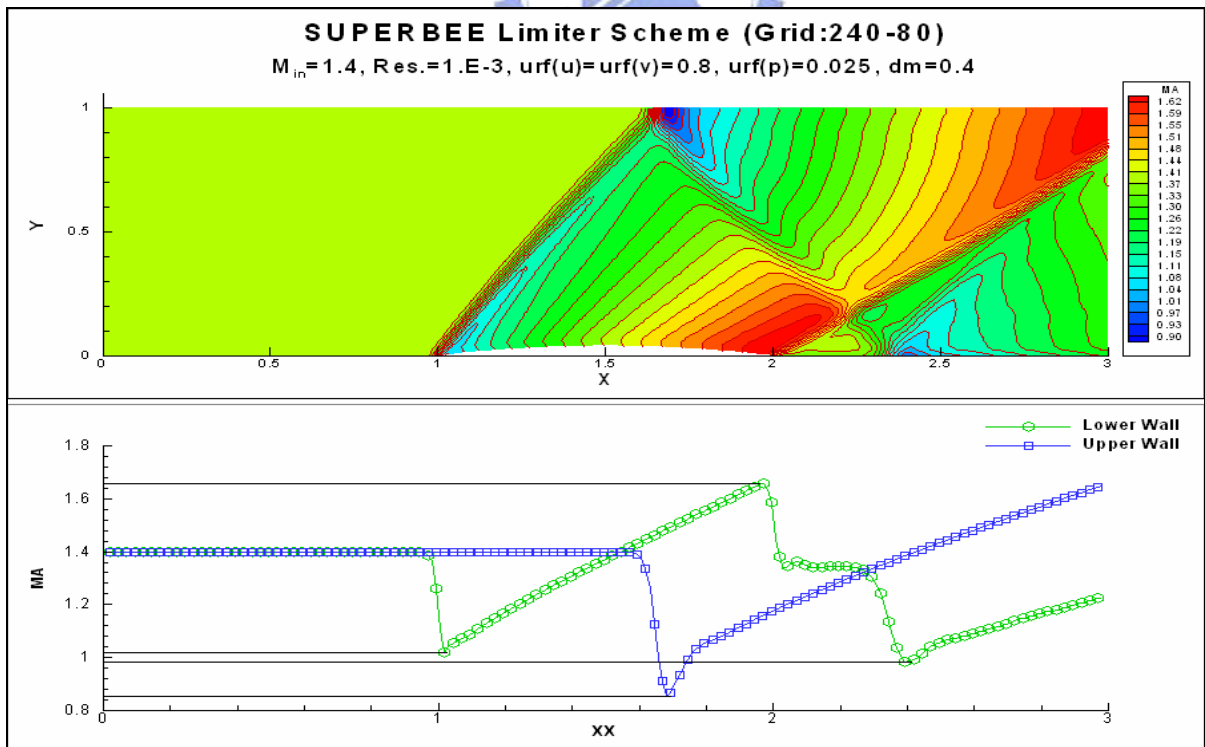


圖 7-75： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE，dm=0.4)

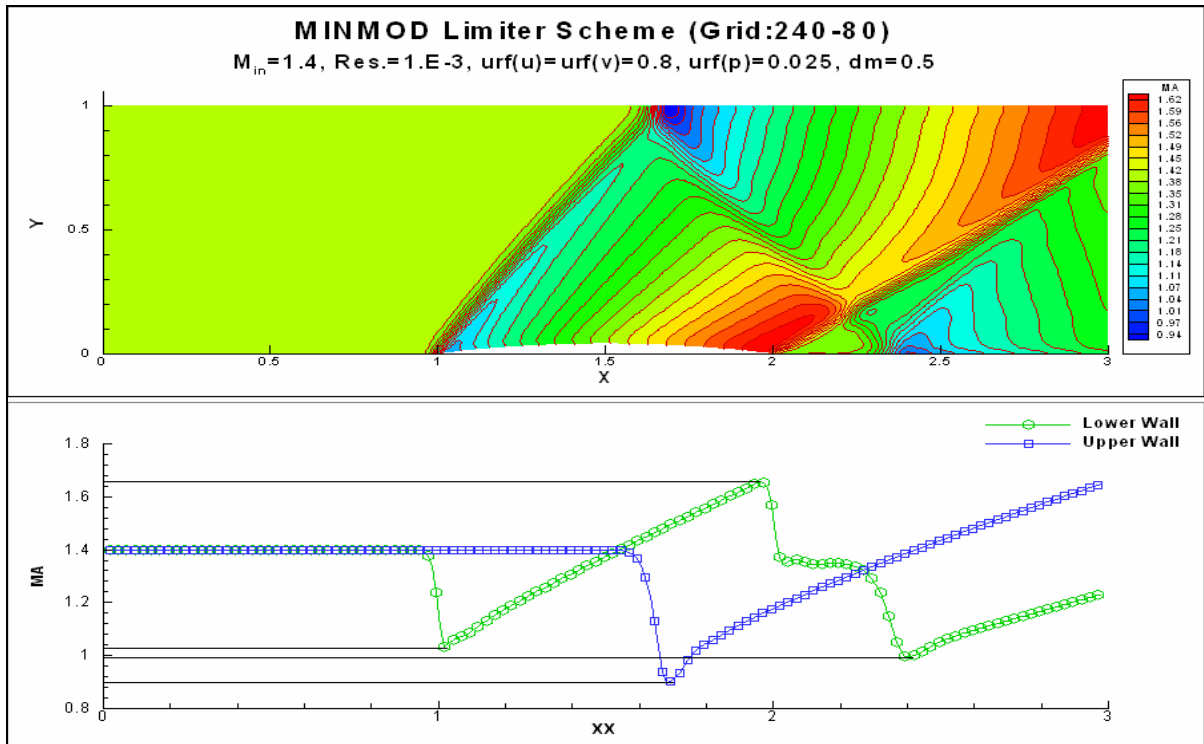


圖 7-76： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)

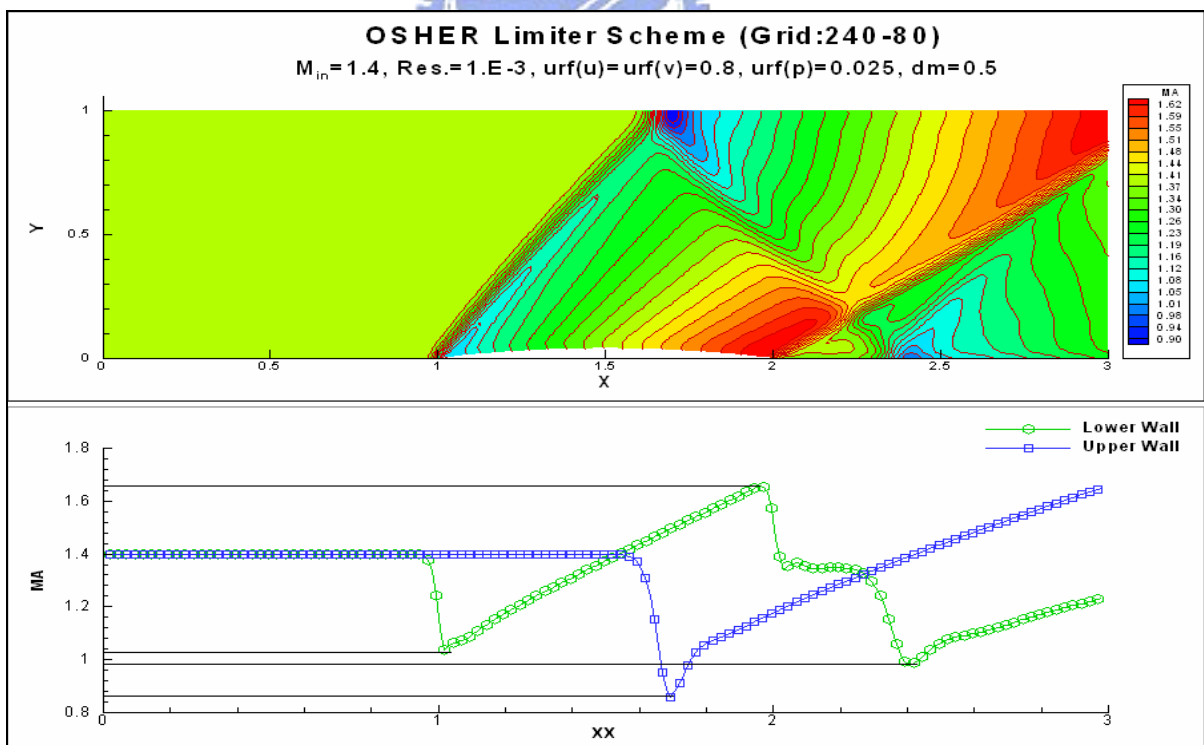


圖 7-77： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)

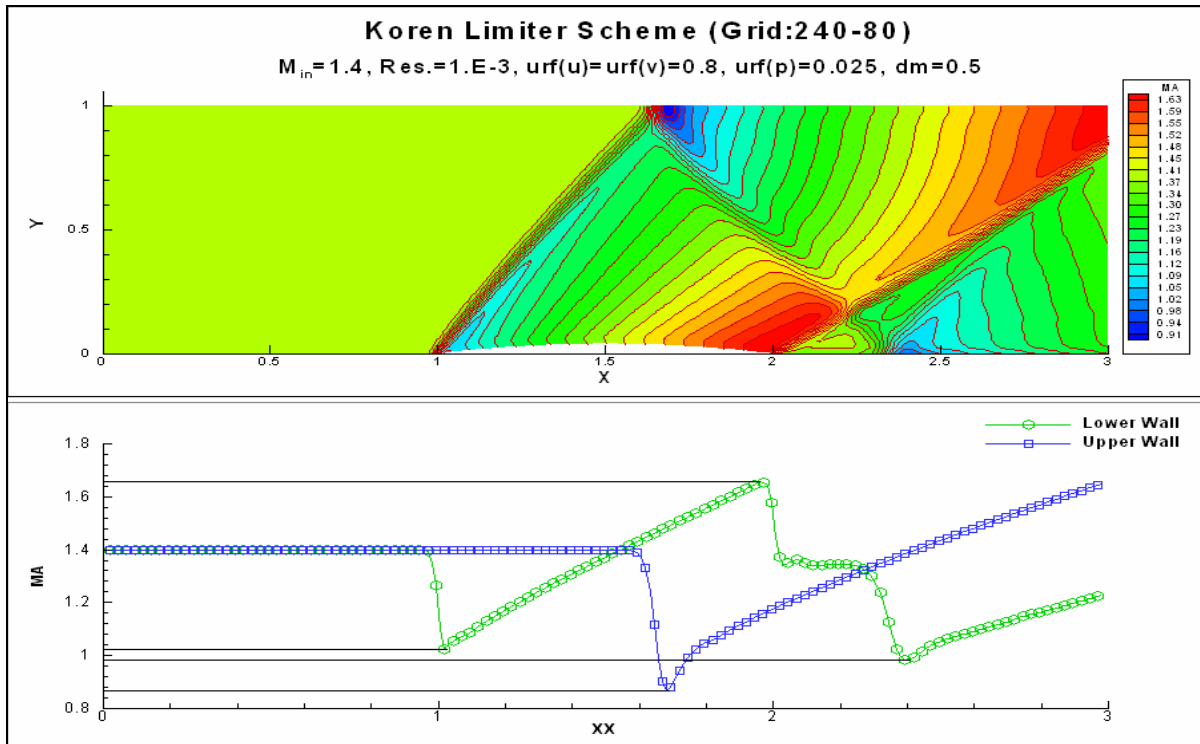


圖 7-78： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Koren)

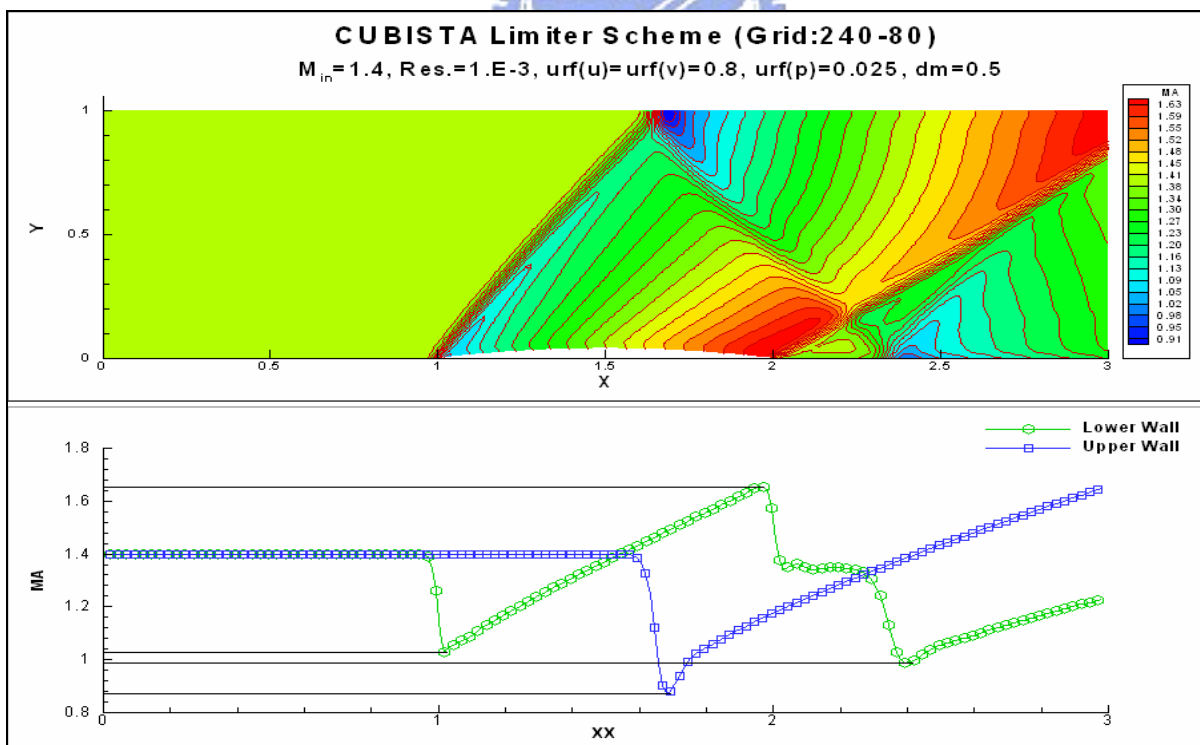


圖 7-79： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(CUBISTA)

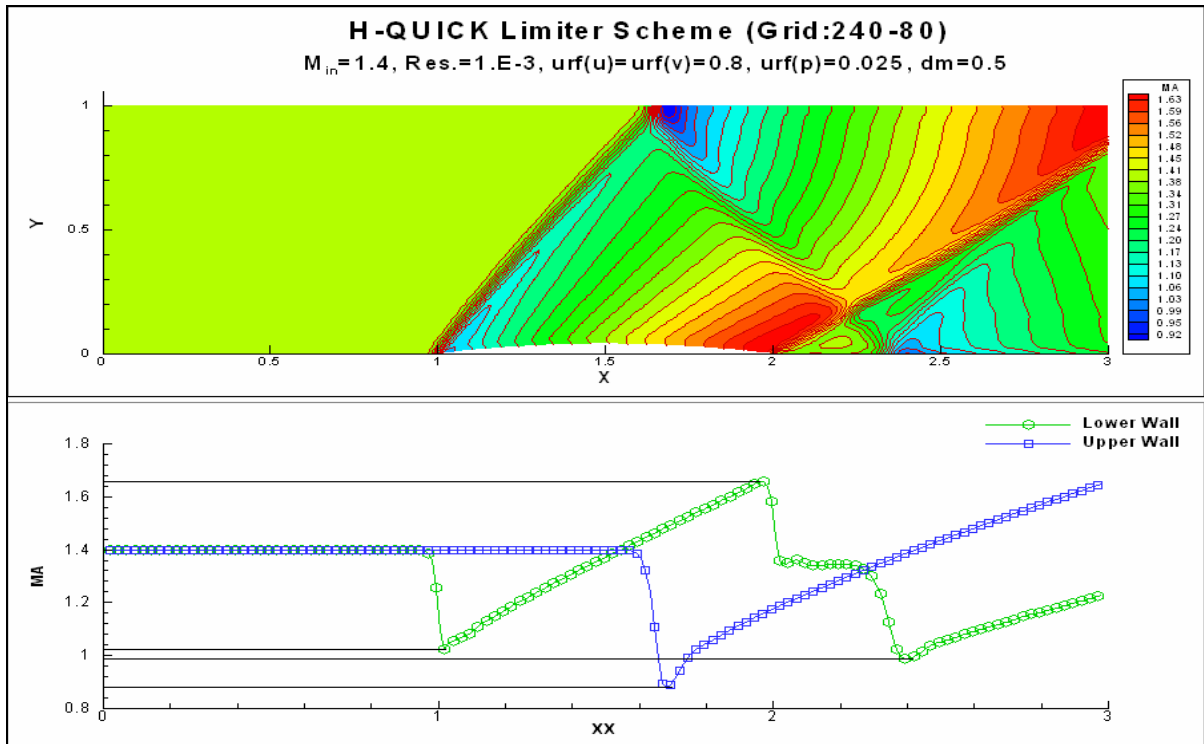


圖 7-80： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)

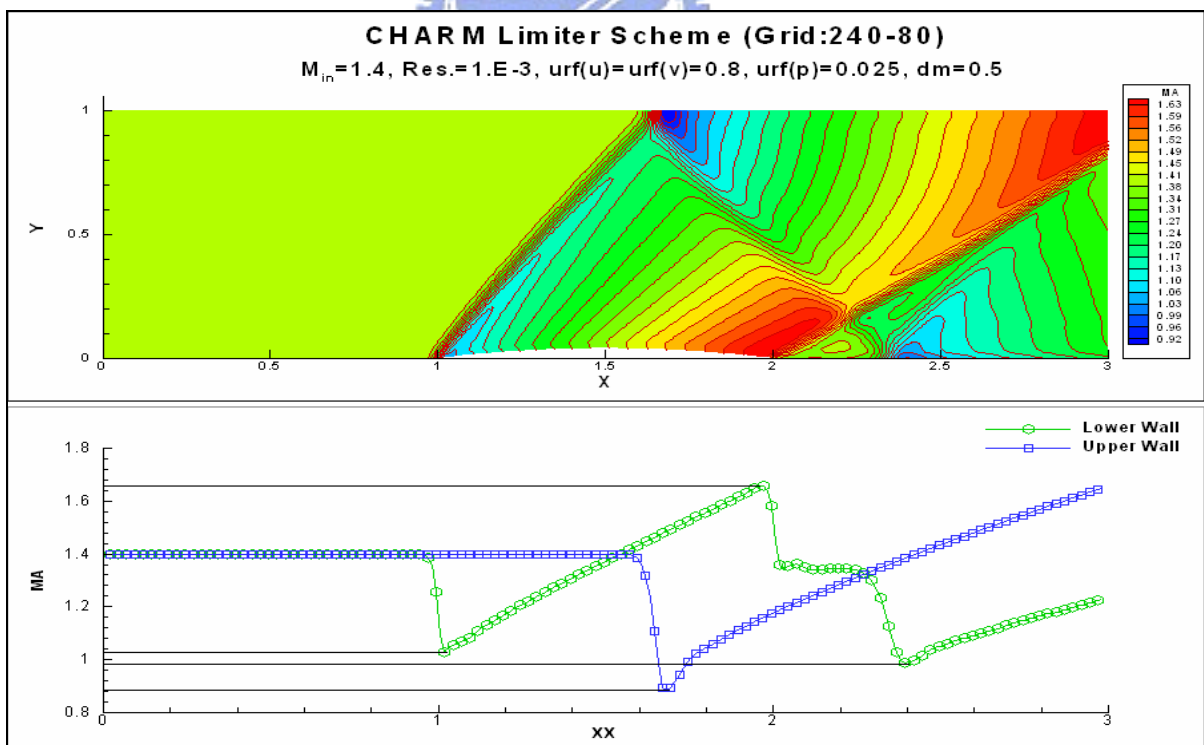


圖 7-81： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CHARM)

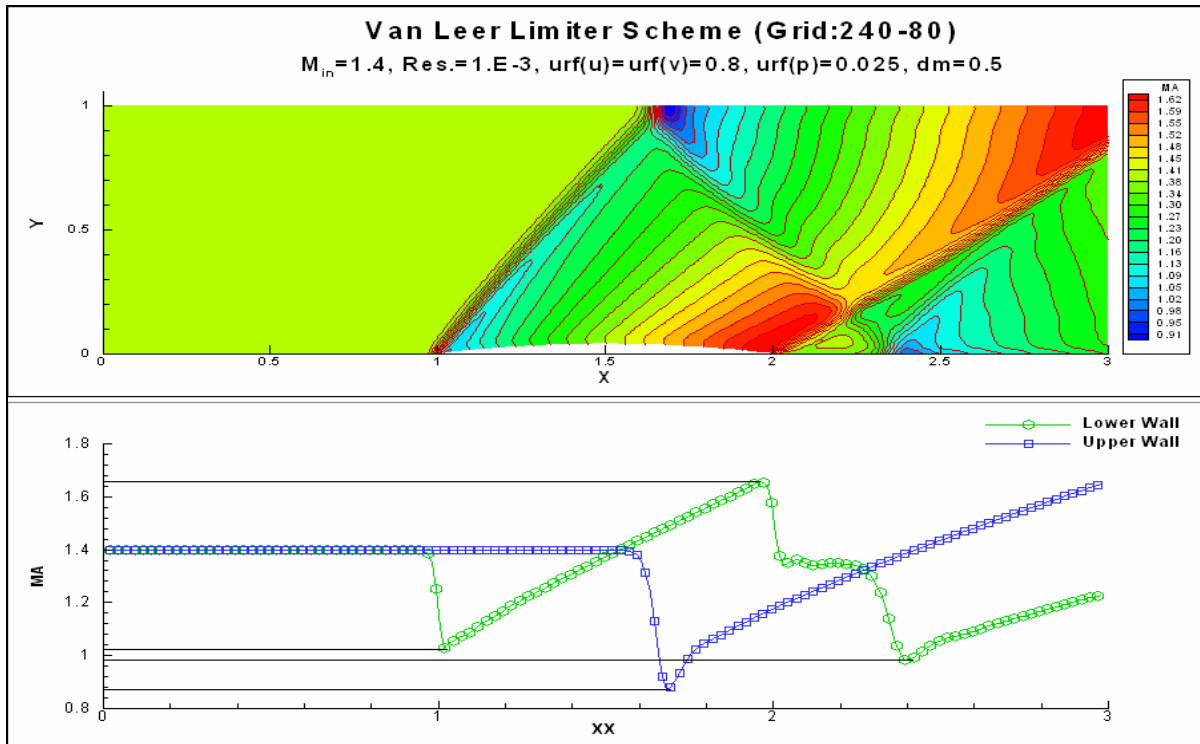


圖 7-82： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Leer)

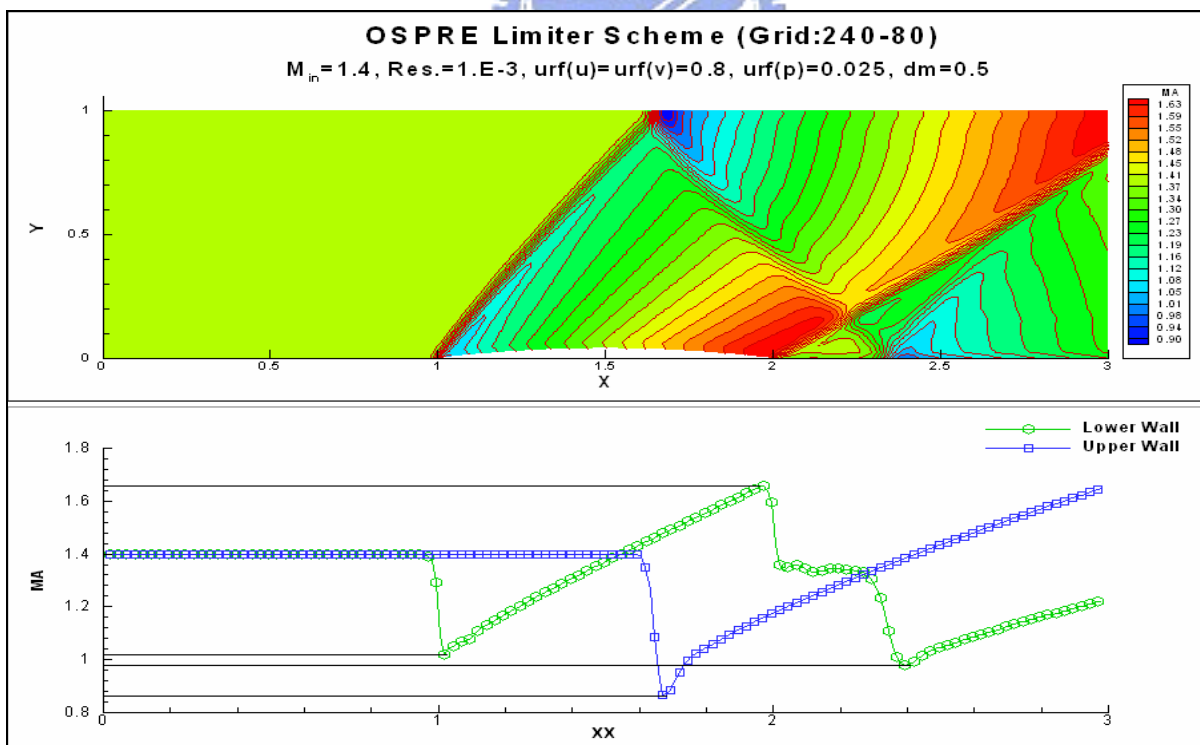


圖 7-83： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRE)

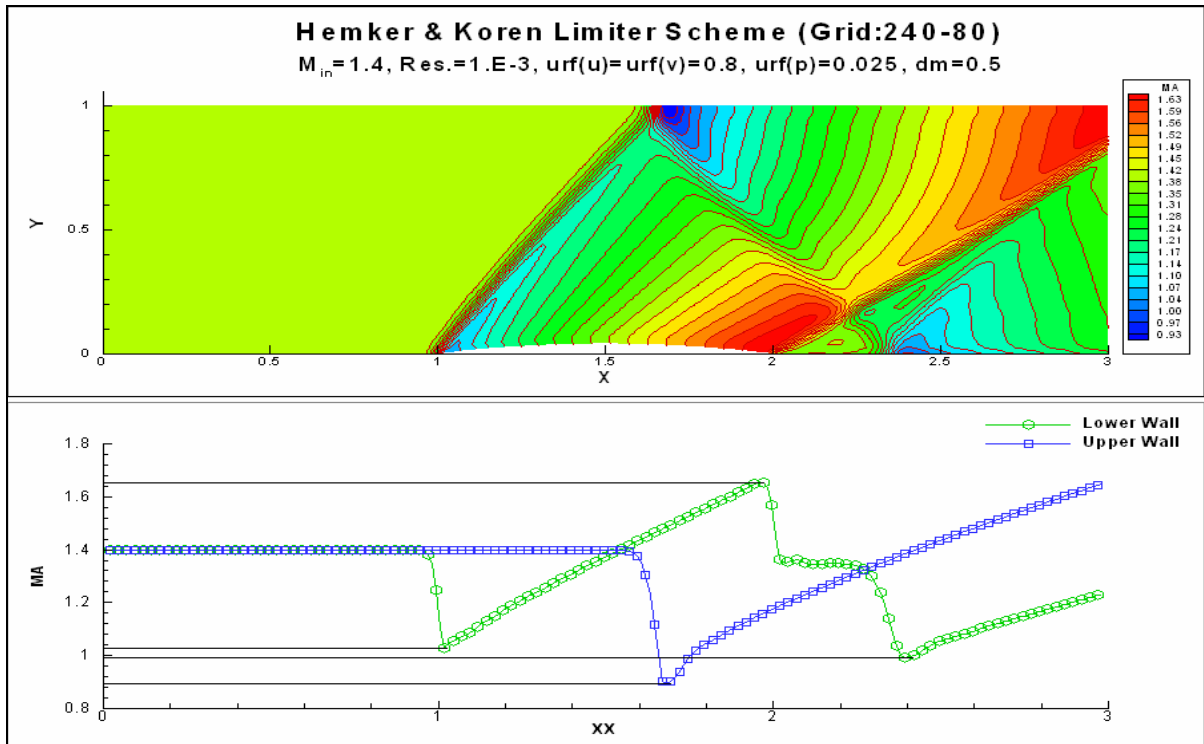


圖 7-84： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Hemker & Koren)

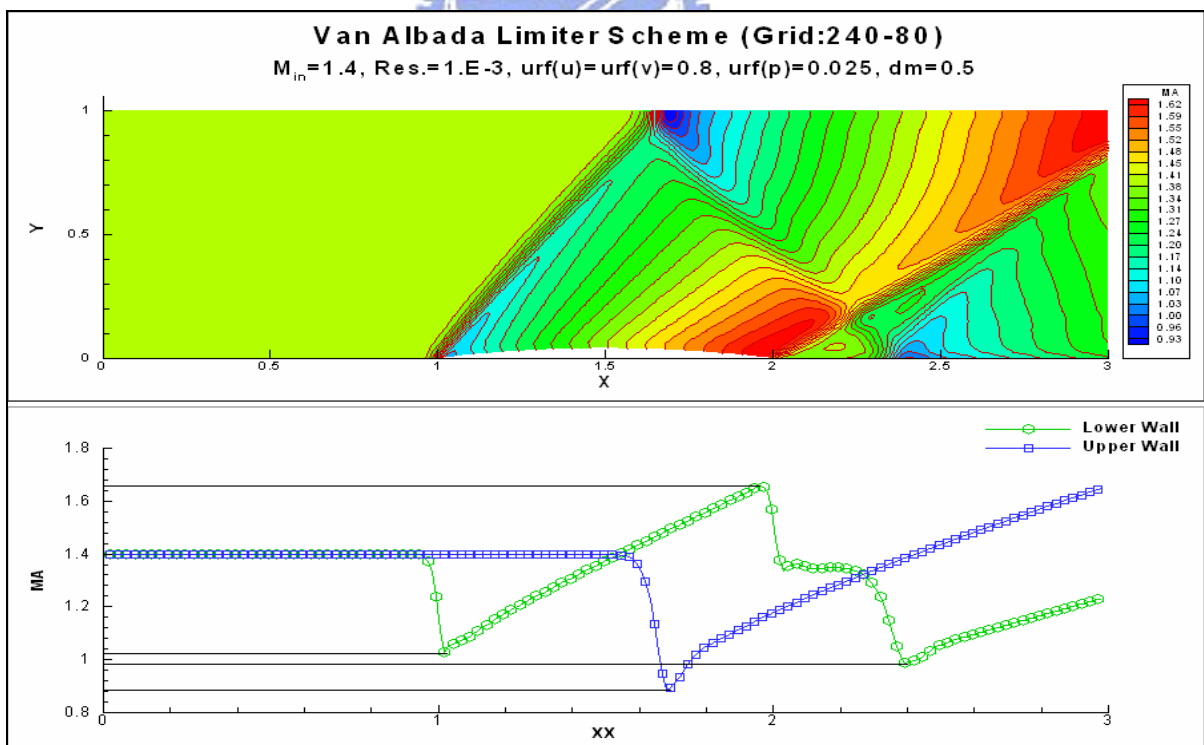


圖 7-85： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Van Albada)

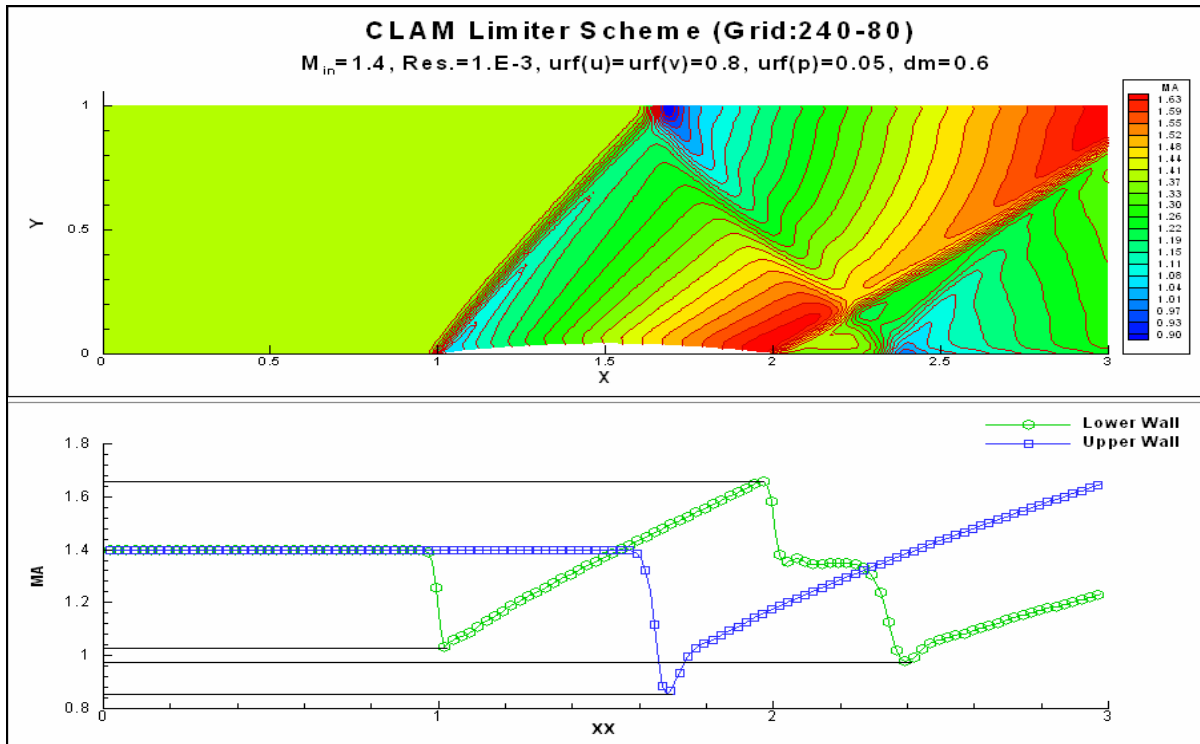


圖 7-86： $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(CLAM)

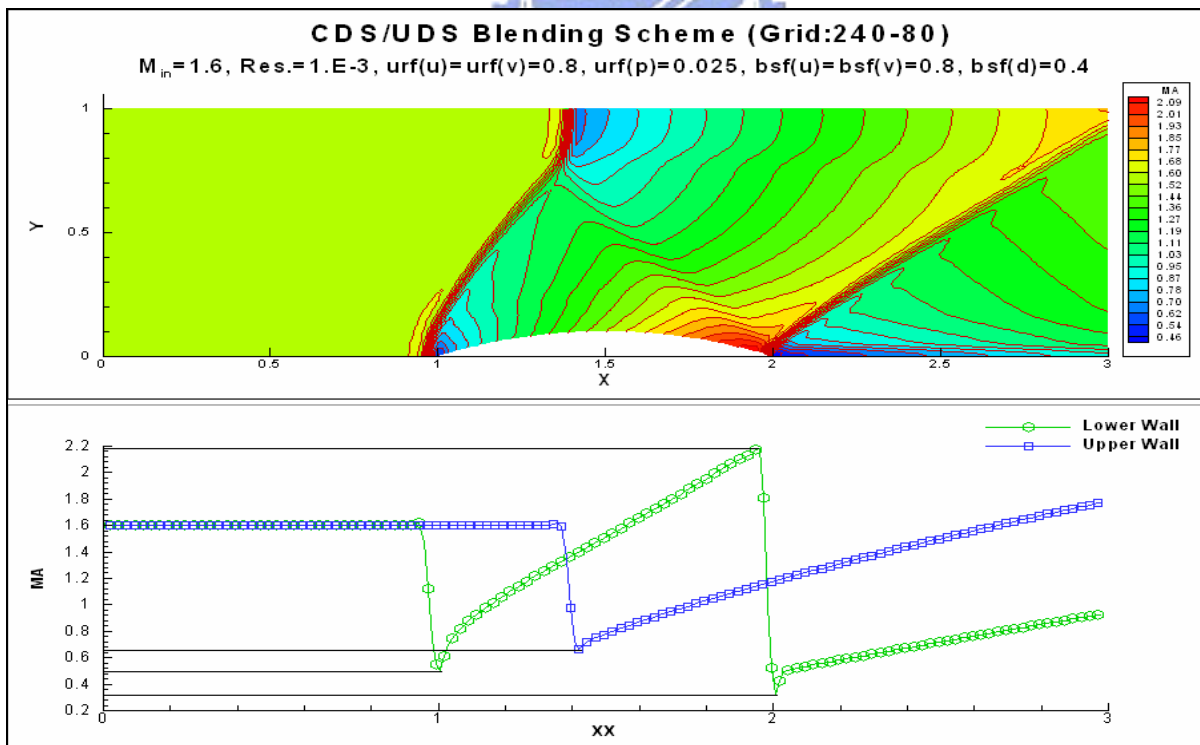


圖 7-87： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(CDS/UDS 混合法)

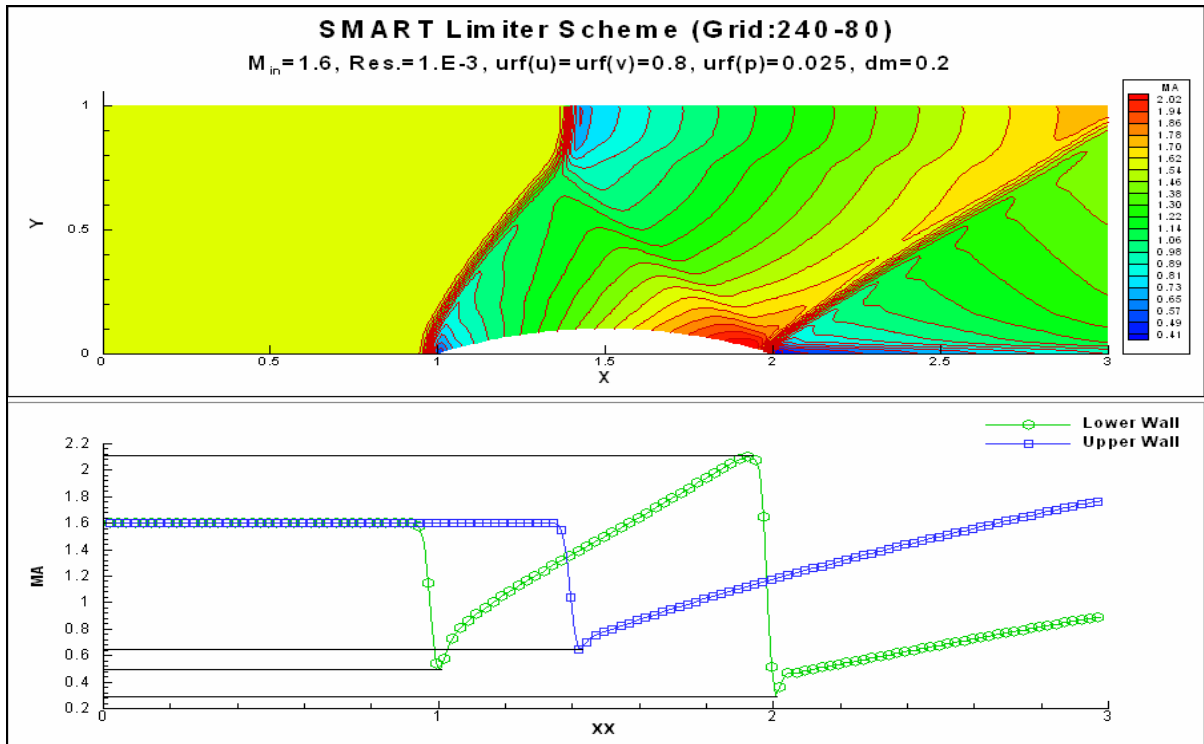


圖 7-88： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SMART)

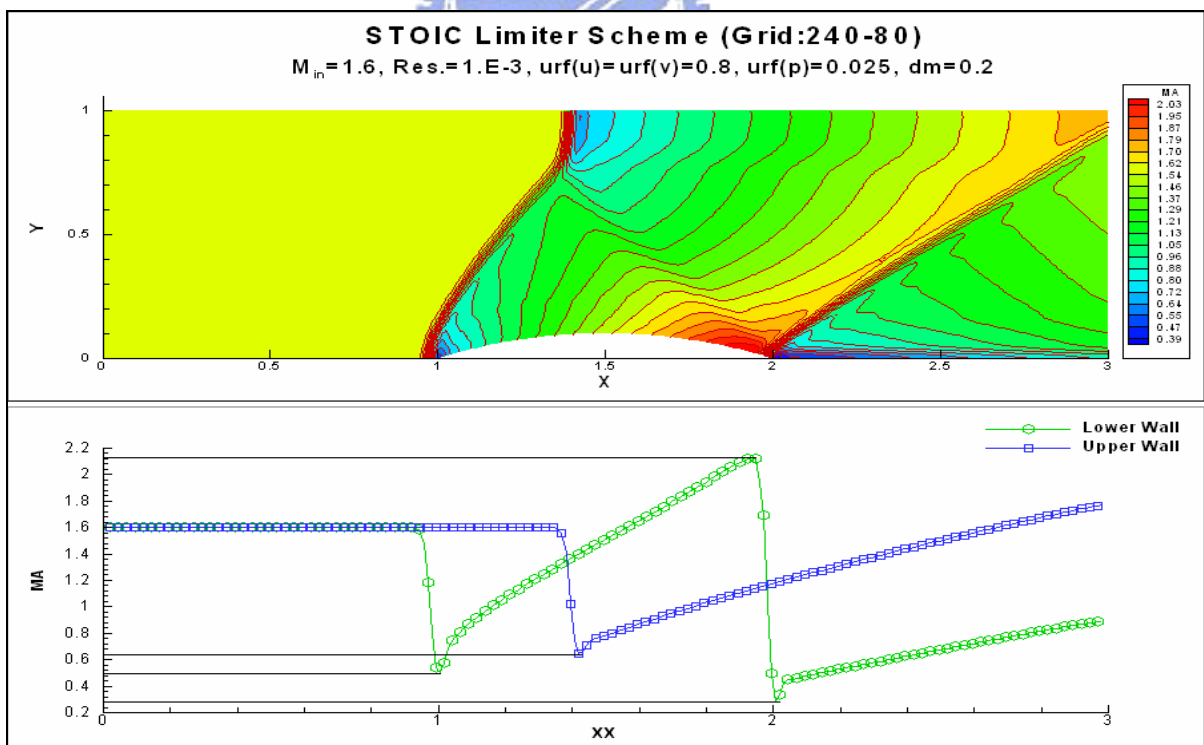


圖 7-89： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (STOIC)

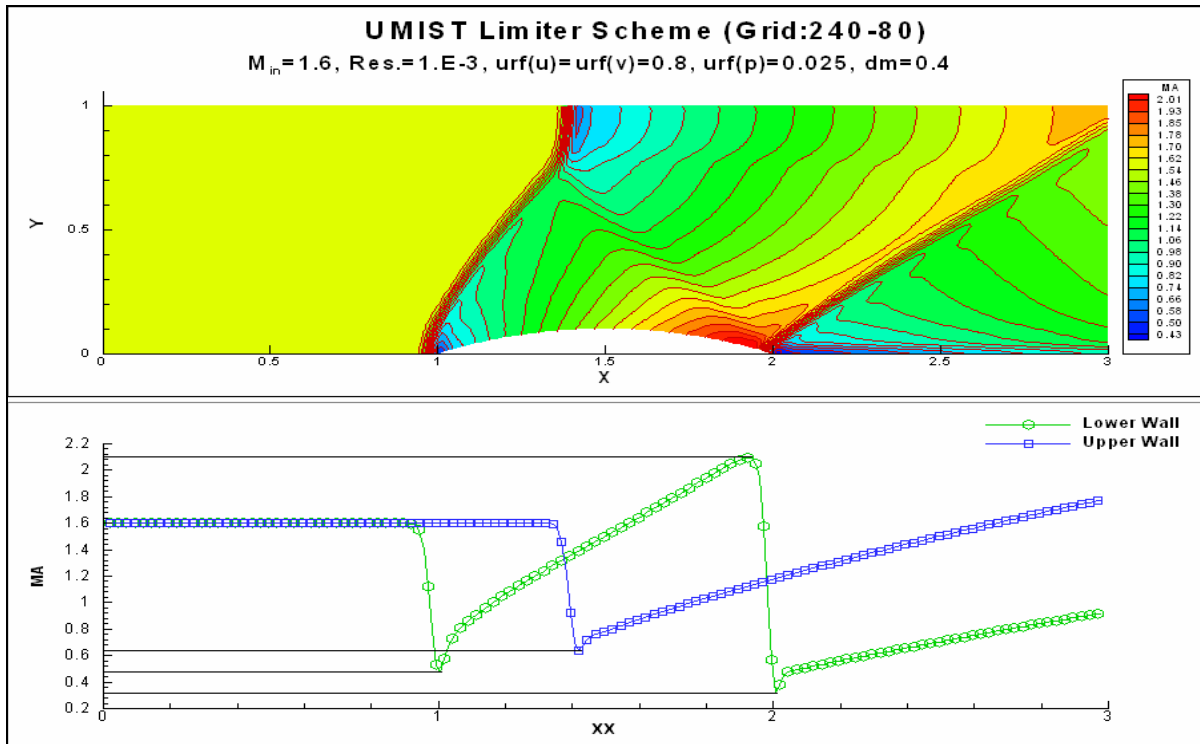


圖 7-90： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(UMIST)

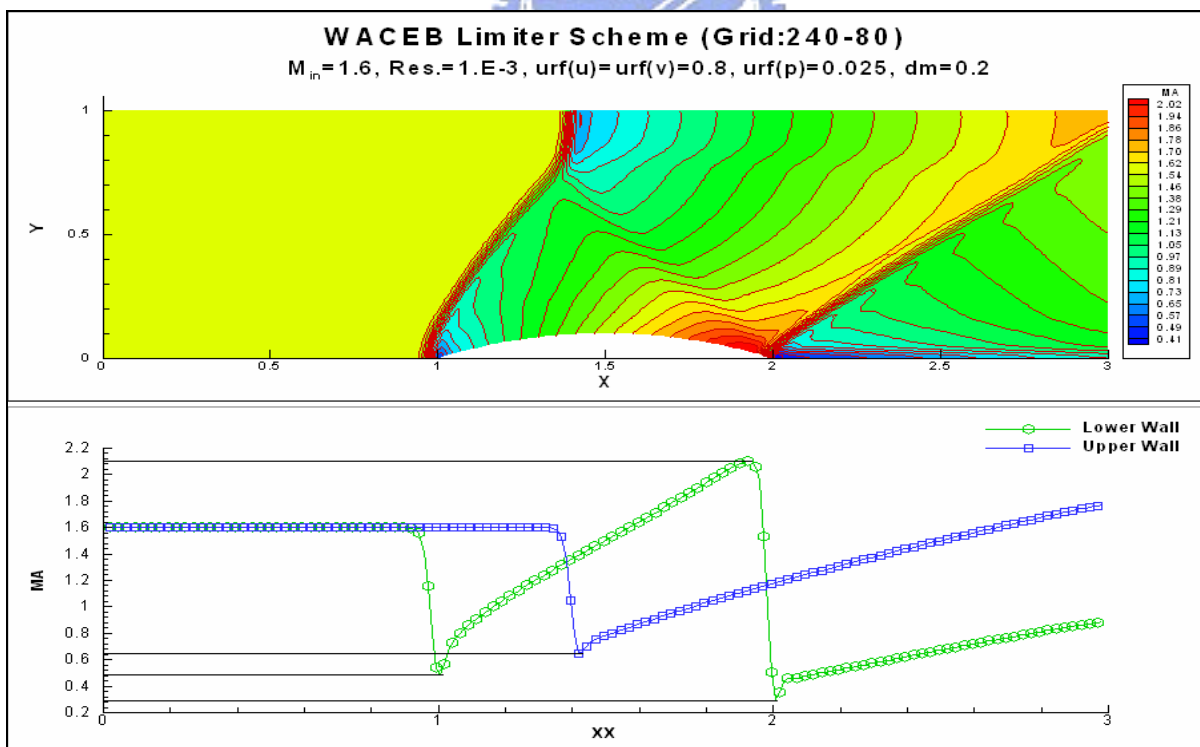


圖 7-91： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(WACEB)

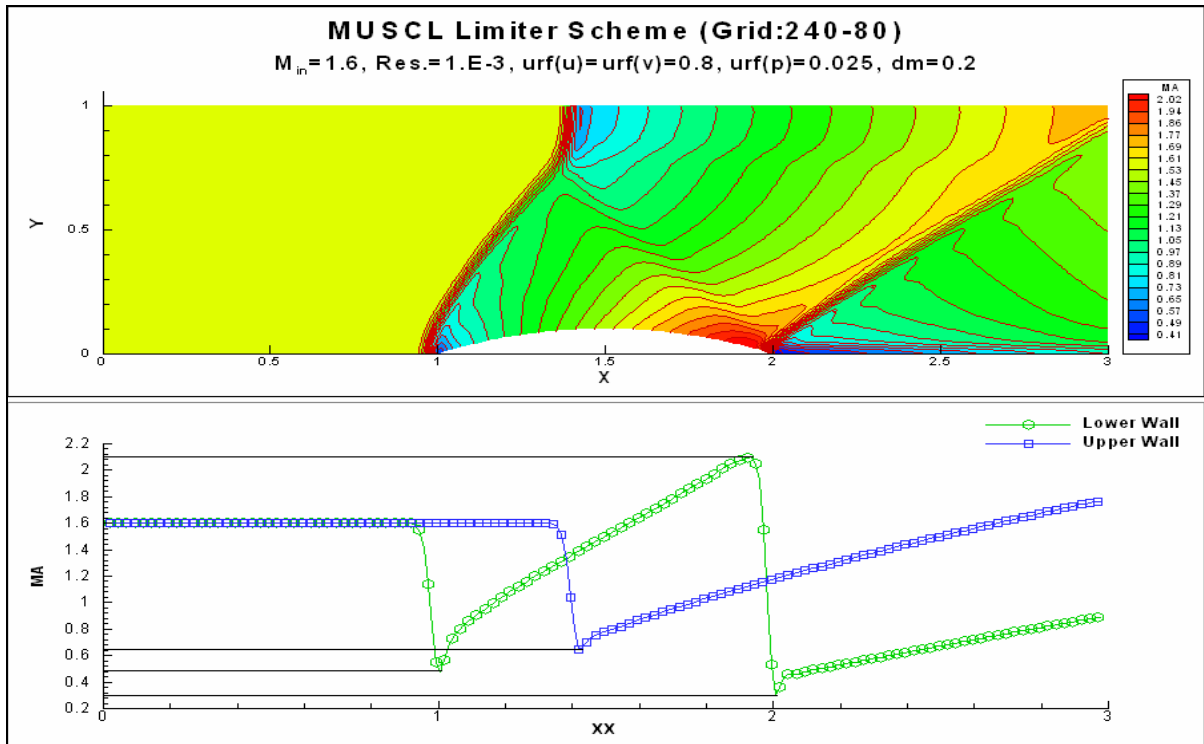


圖 7-92： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MUSCL)

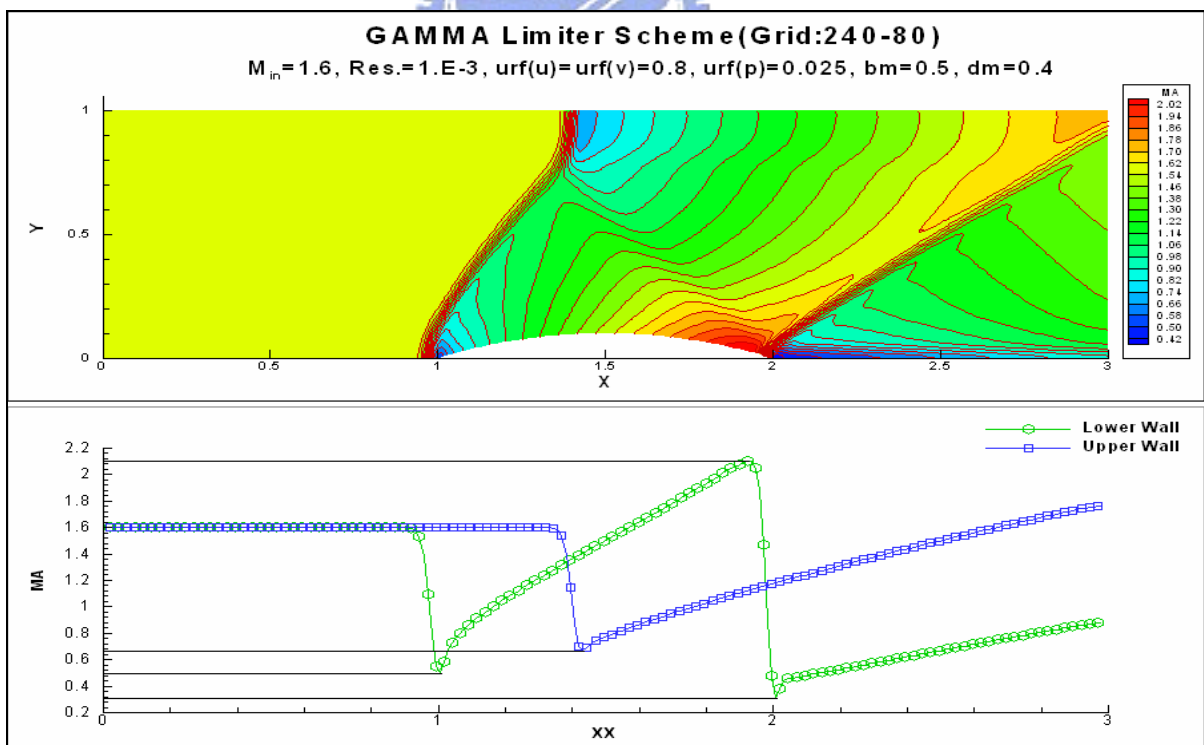


圖 7-93： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (GAMMA)

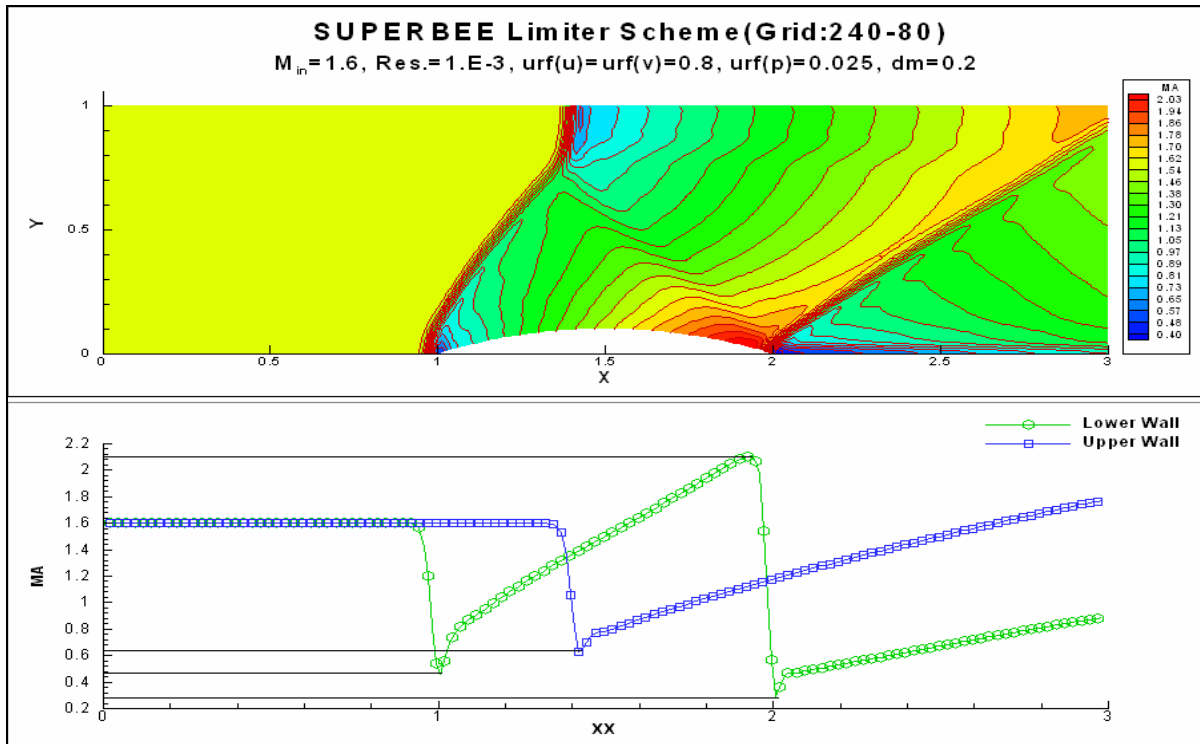


圖 7-94： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE)

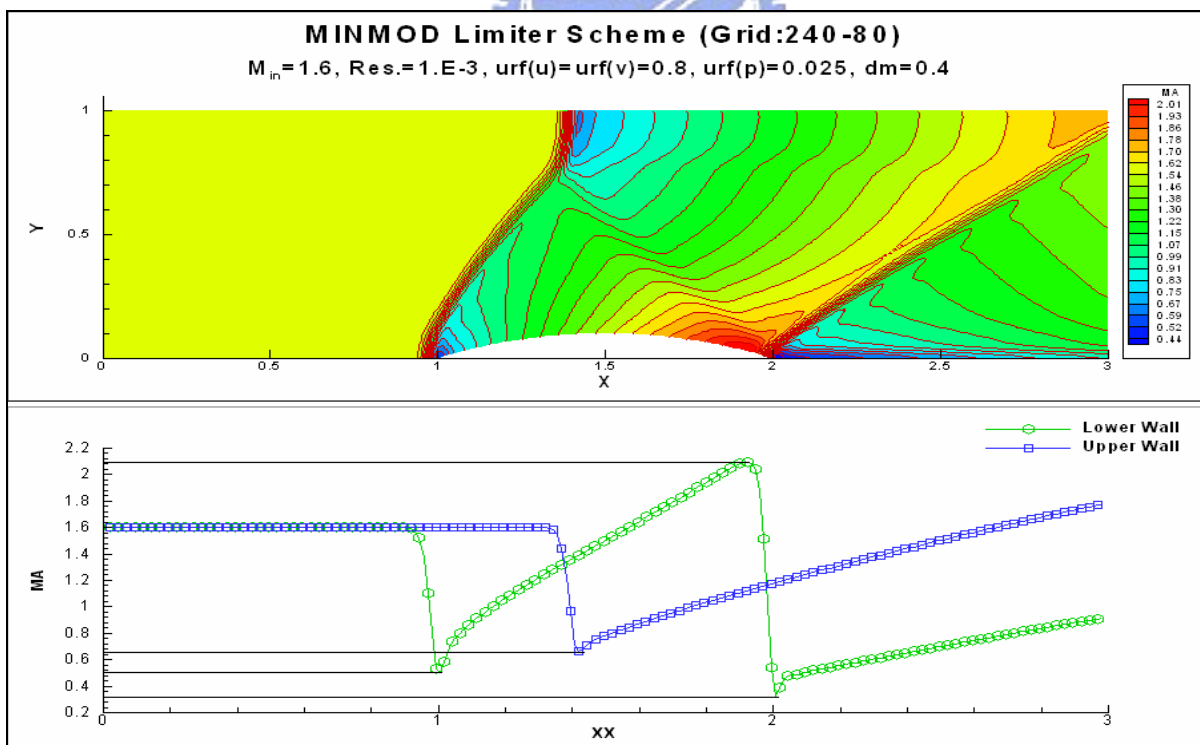


圖 7-95： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (MINMOD)

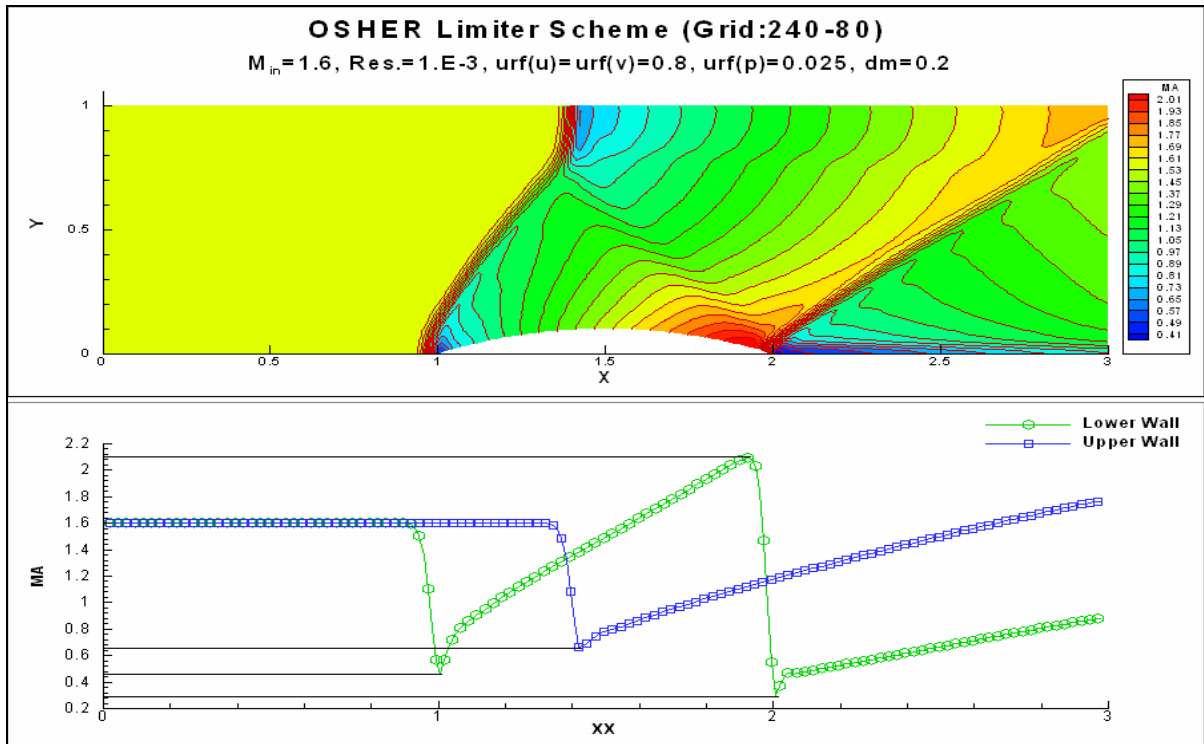


圖 7-96： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSHER)

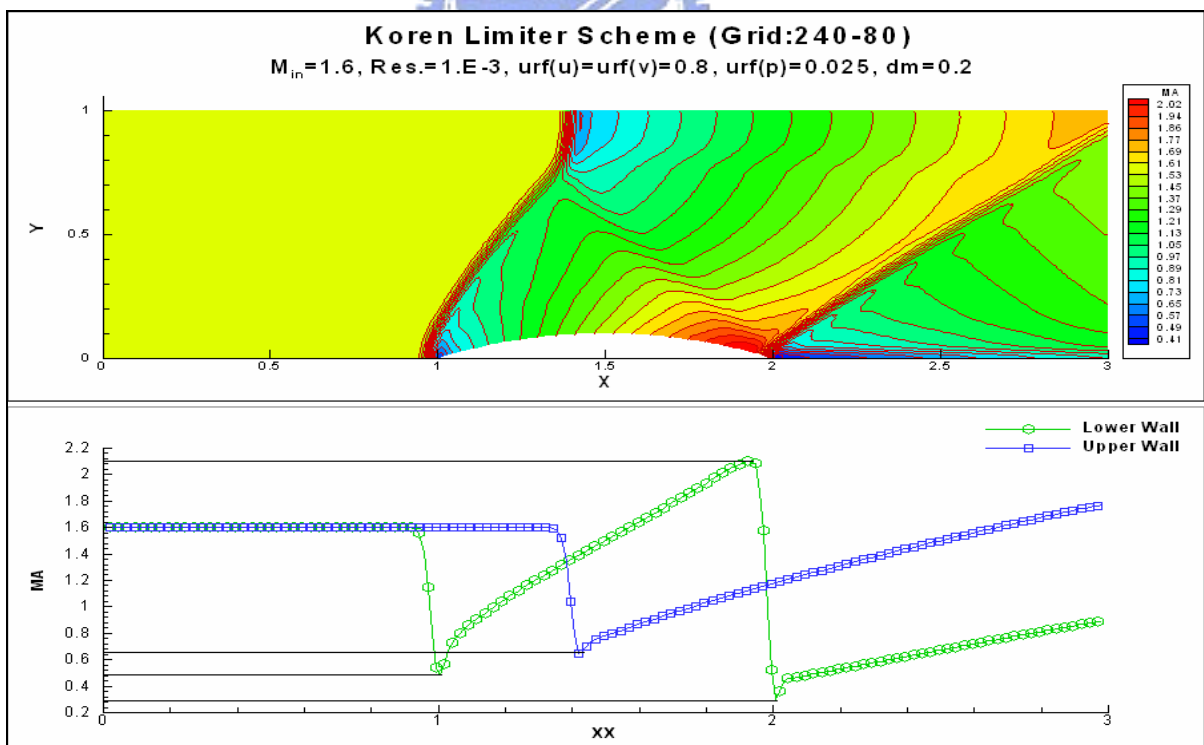


圖 7-97： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Koren)

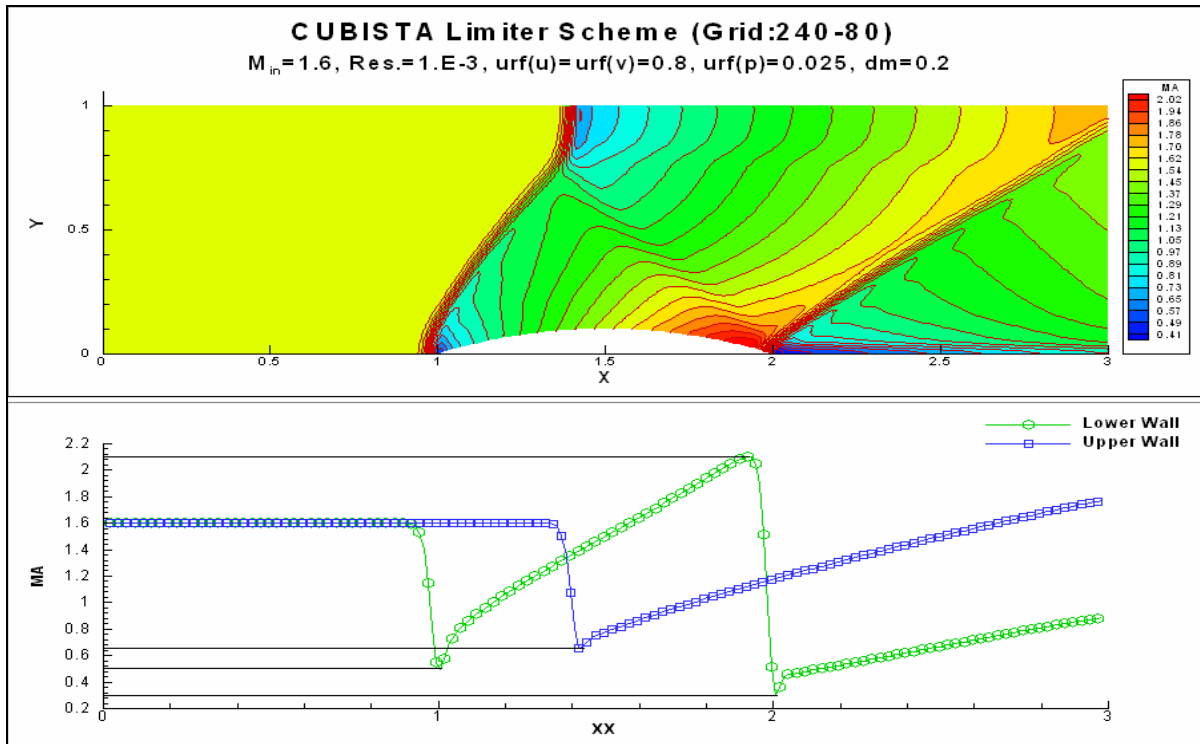


圖 7-98： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CUBISTA)

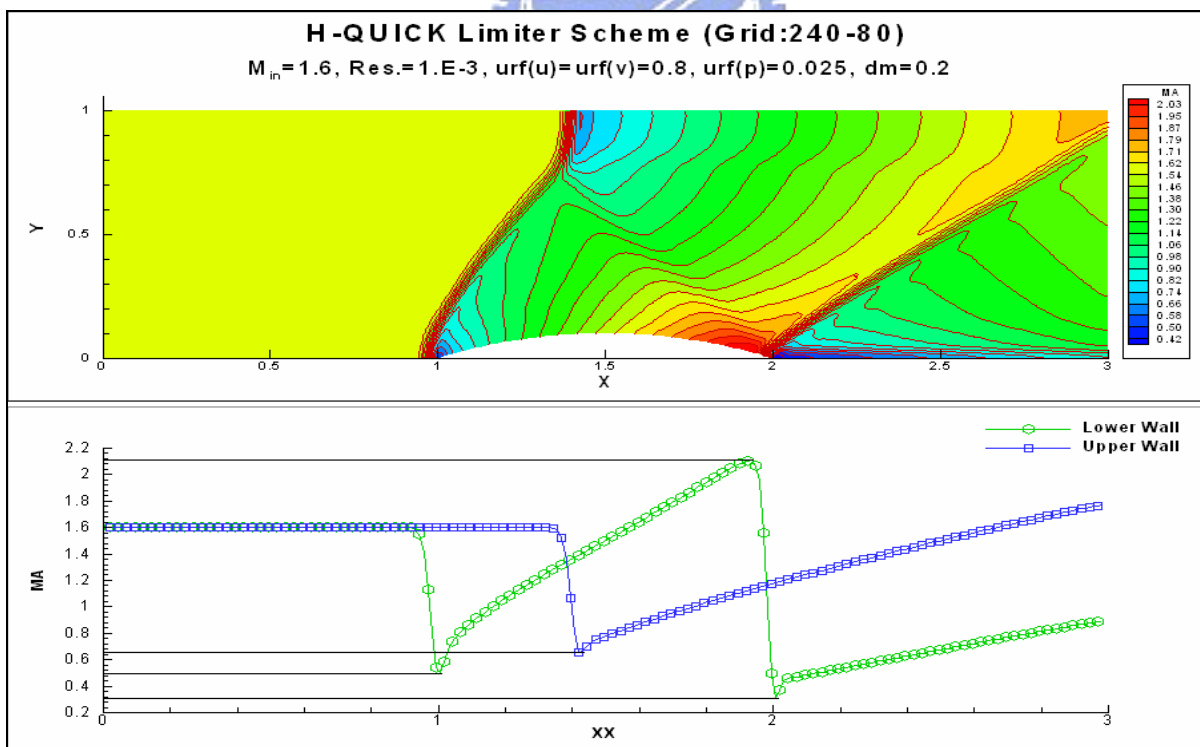


圖 7-99： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (H-QUICK)

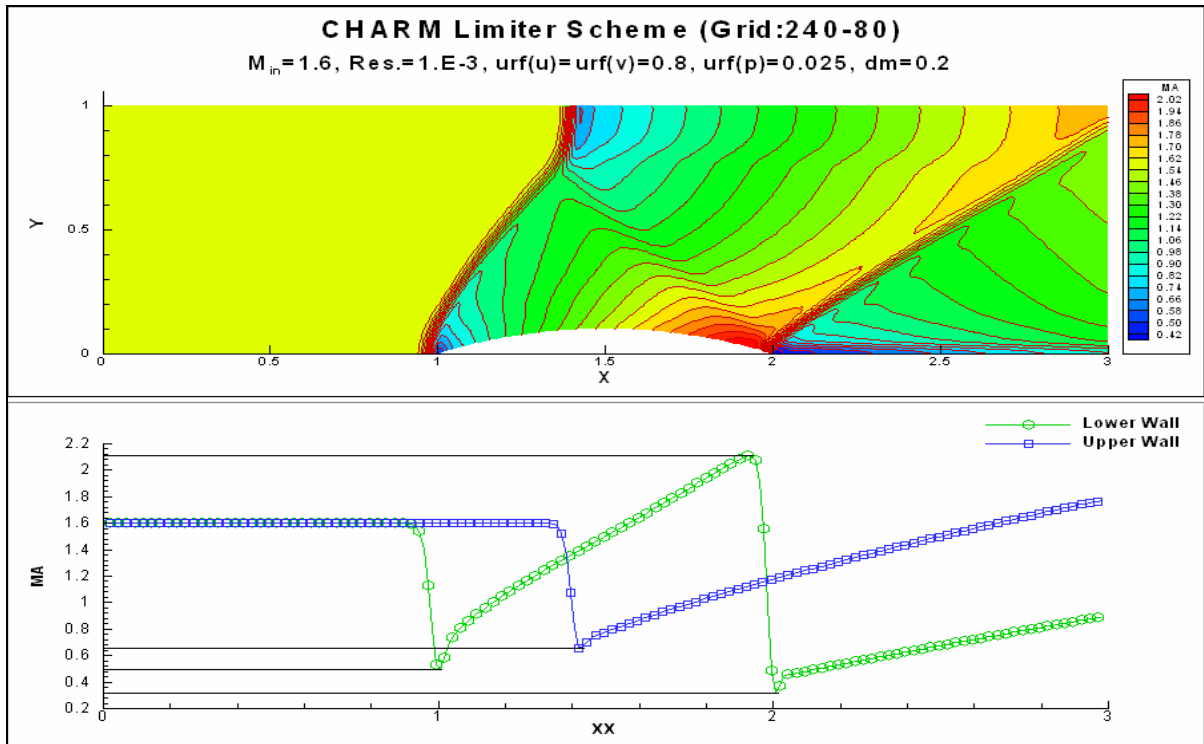


圖 7-100： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(CHARM)

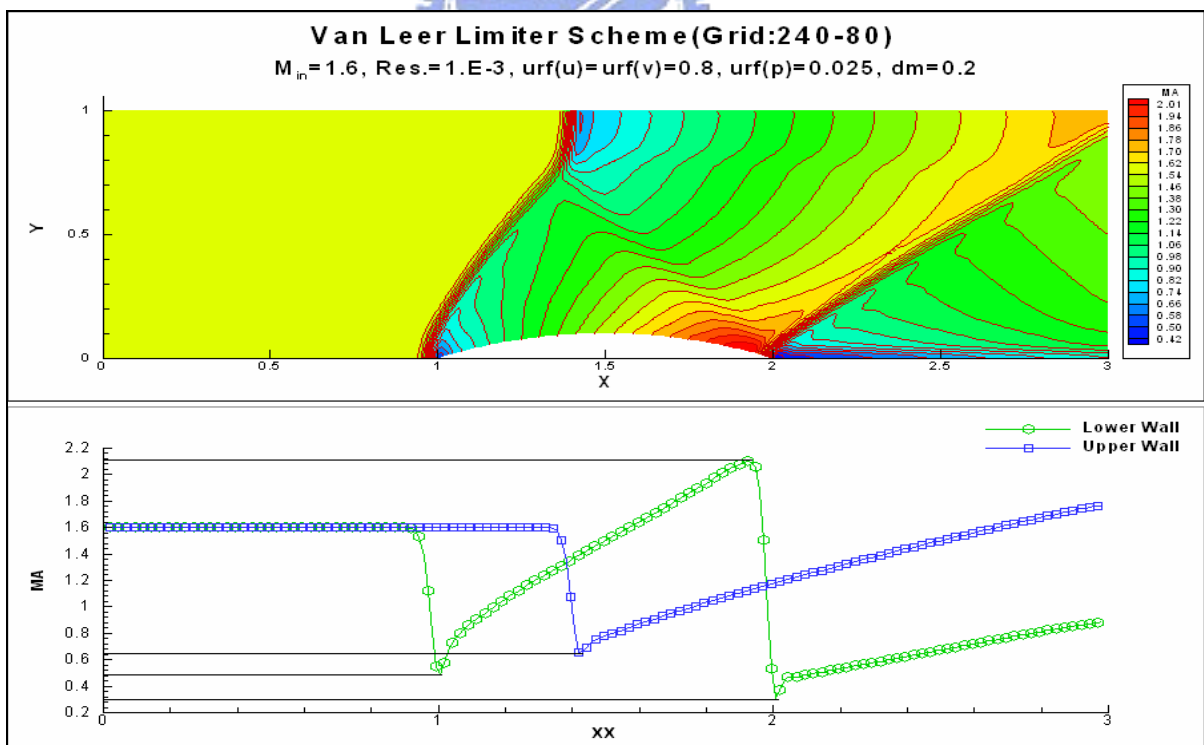


圖 7-101： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖
(Van Leer)

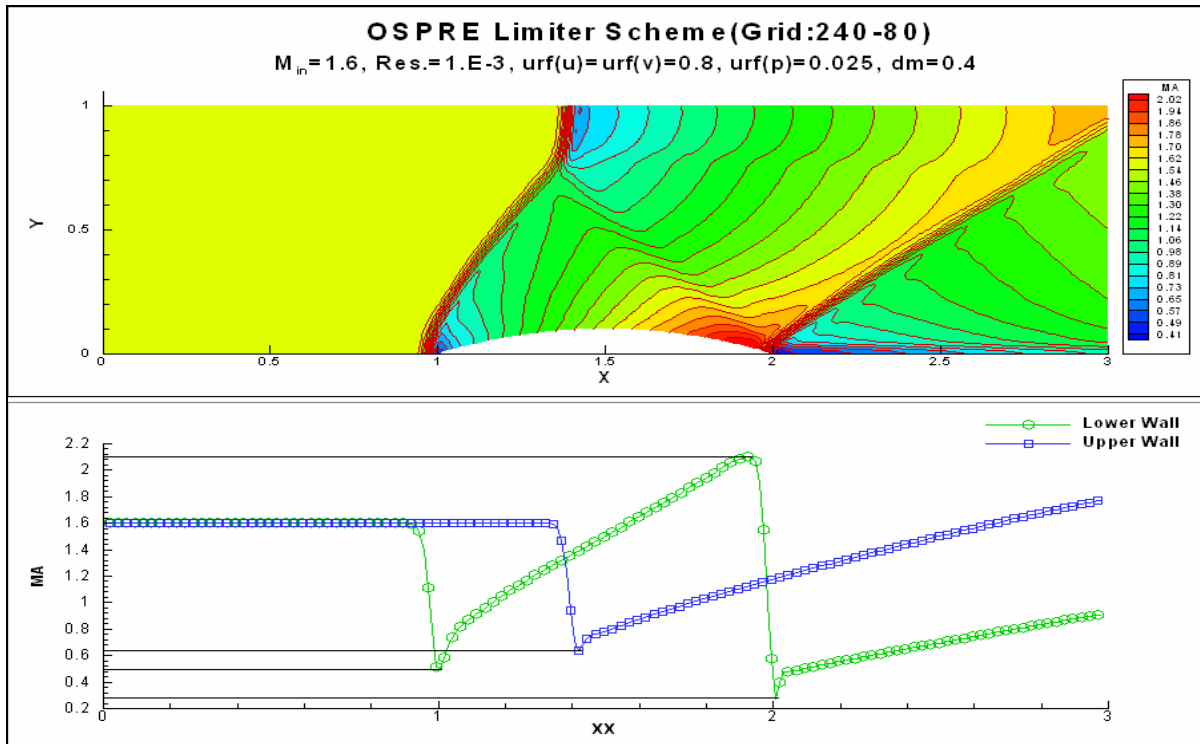


圖 7-102： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (OSPRE)

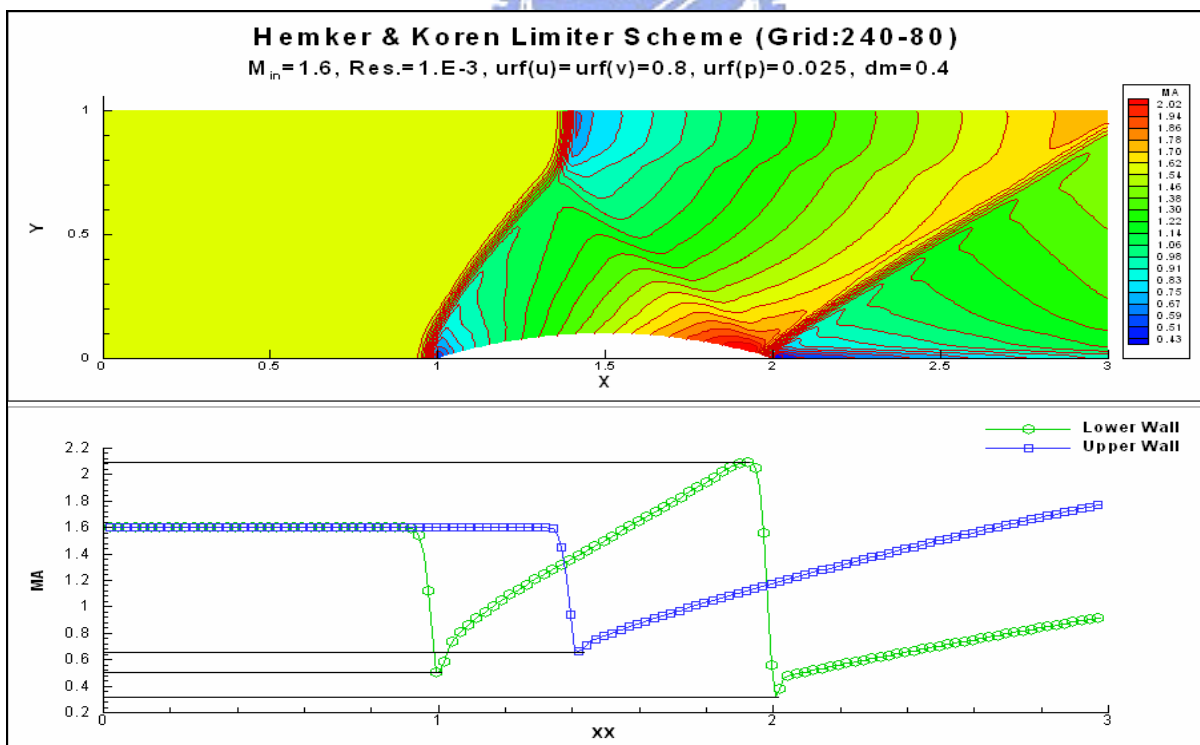


圖 7-103： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Hemker & Koren)

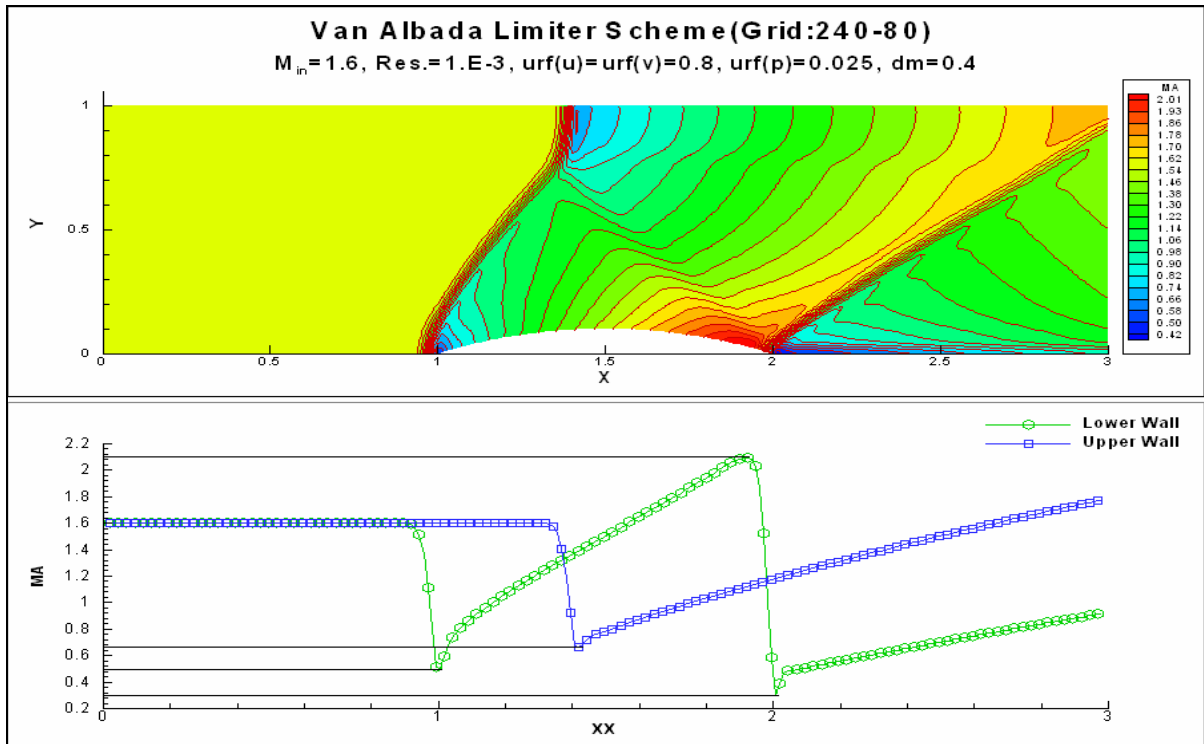


圖 7-104： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (Van Albada)

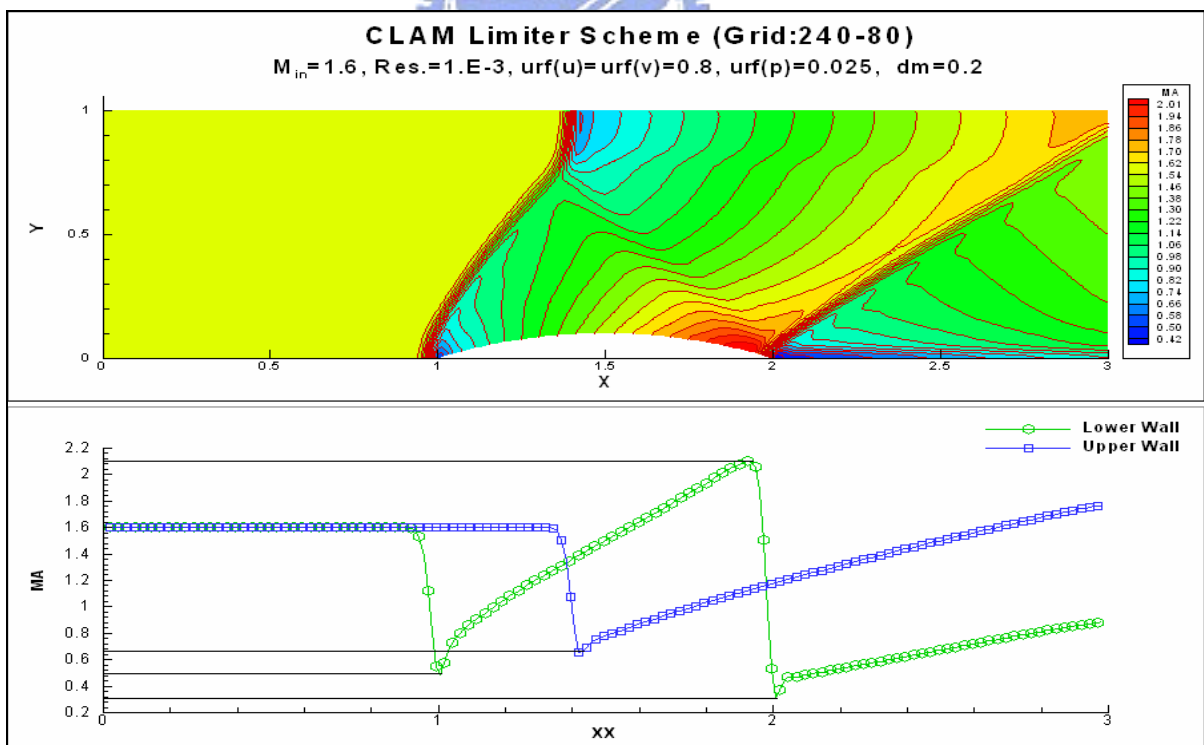
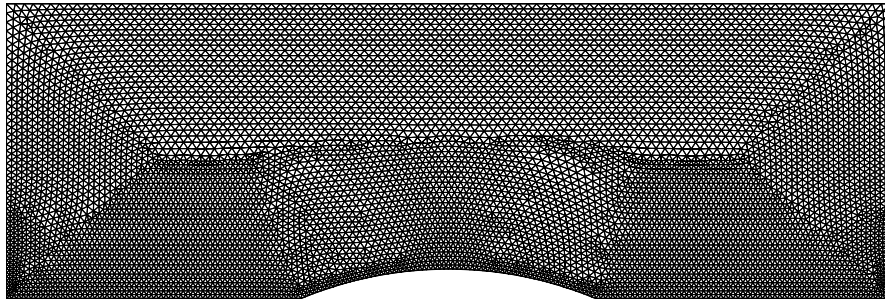
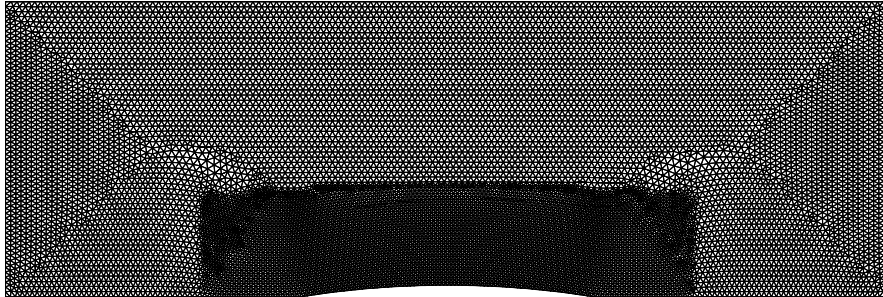


圖 7-105： $M_{in}=1.6$ 超音速渠道流場(a)馬赫數等值圖；(b)壁面馬赫數分佈圖 (CLAM)

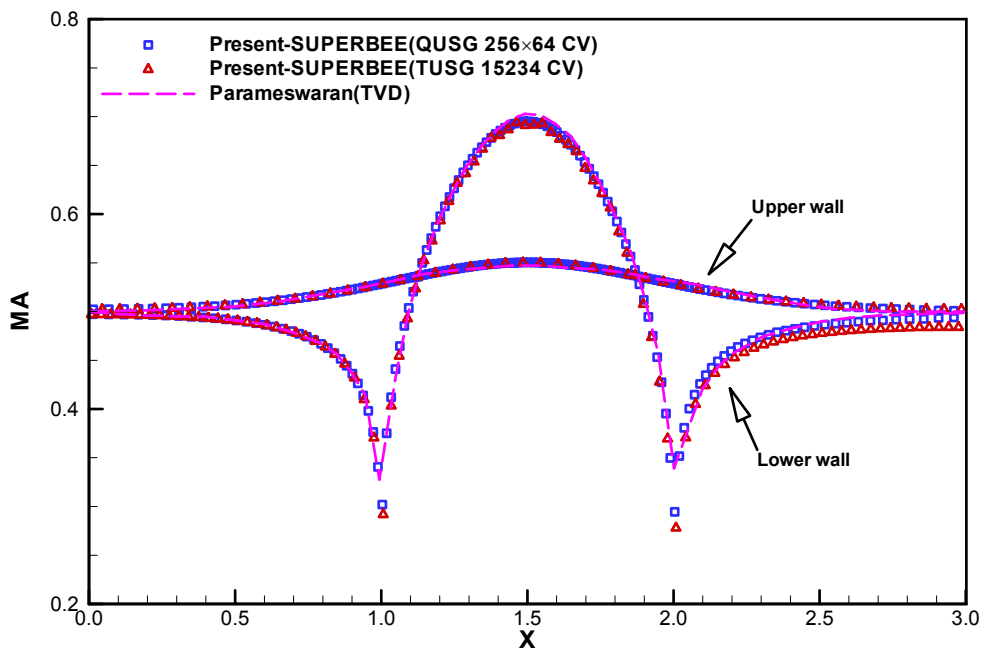


(a)

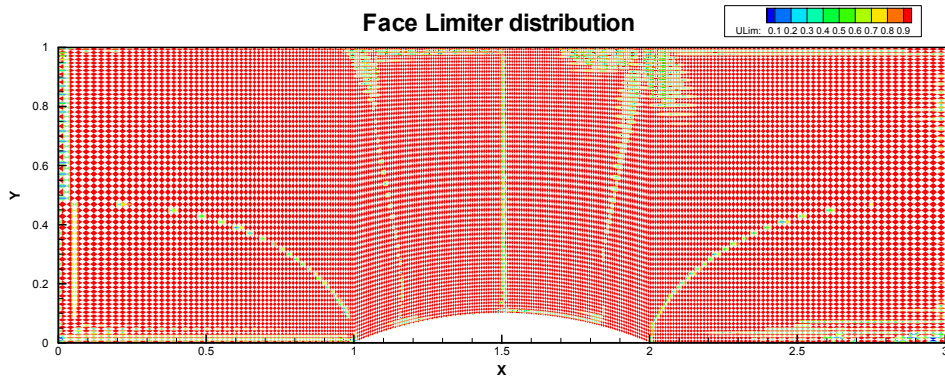


(b)

圖 7-106：渠道內流場三邊形網格(a)厚度比 $t/c=10\%$ (15234 CV)；(b)厚度比 $t/c=4\%$ (24562 CV)

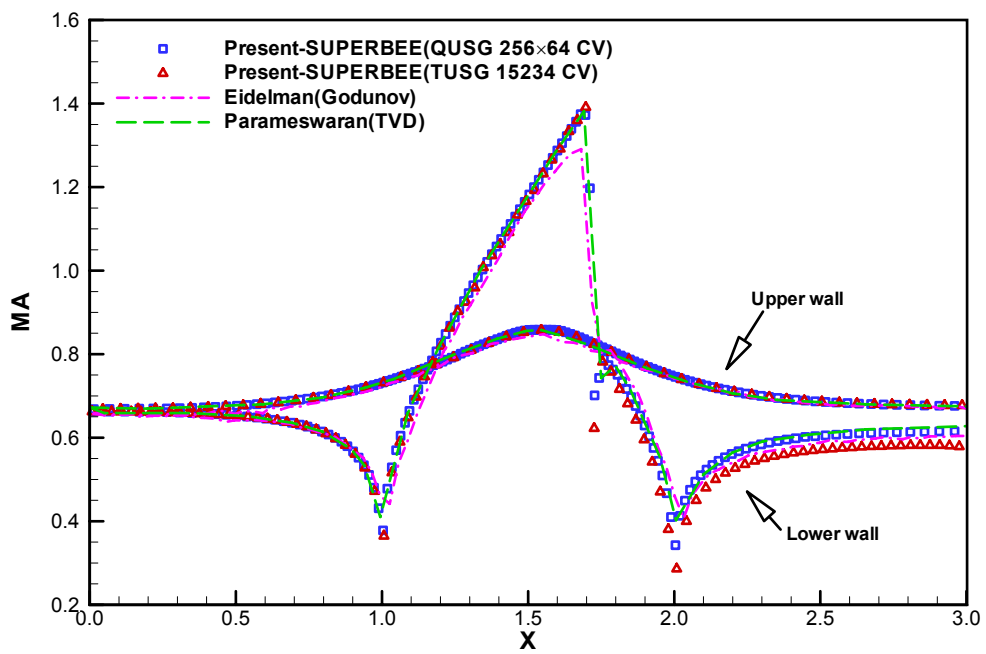


(a)

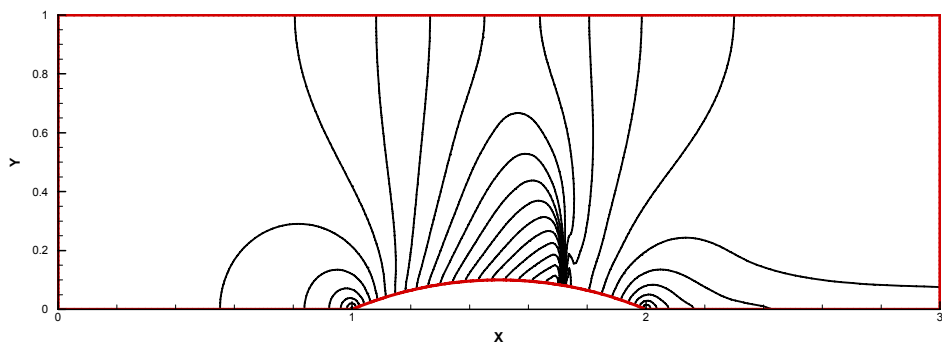


(b)

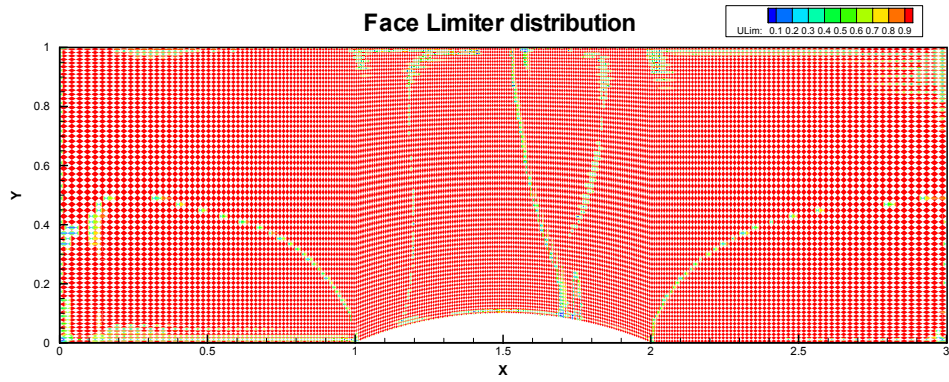
圖 7-107： $M_{in}=0.5$ 次音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖；(b)u 速度通量限制子分佈圖



(a)

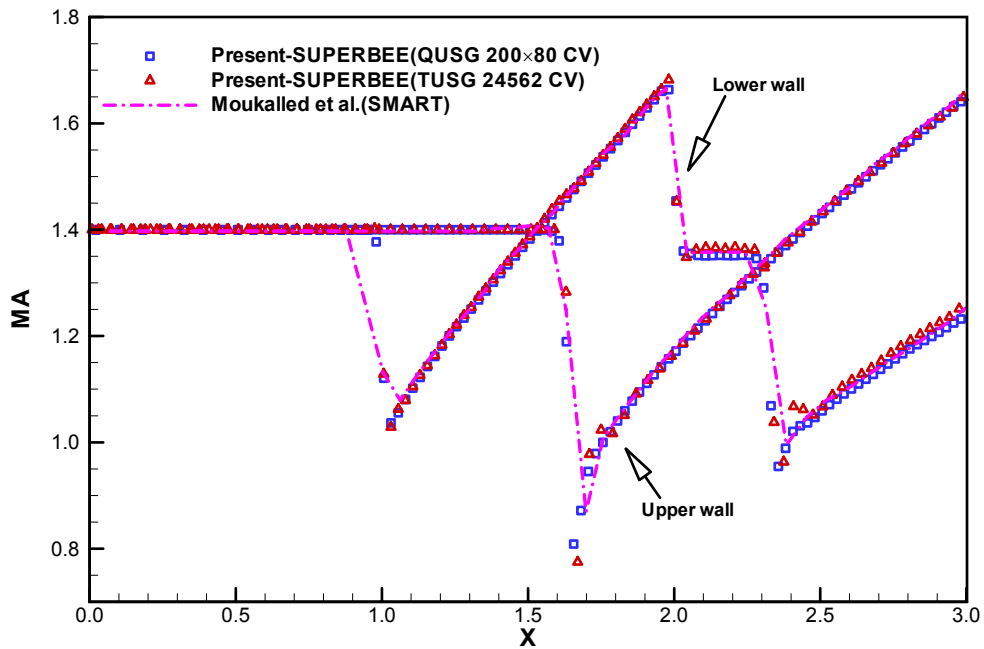


(b)

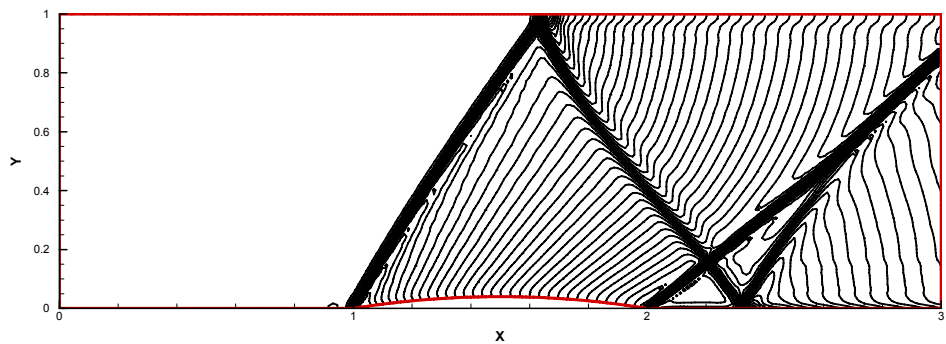


(c)

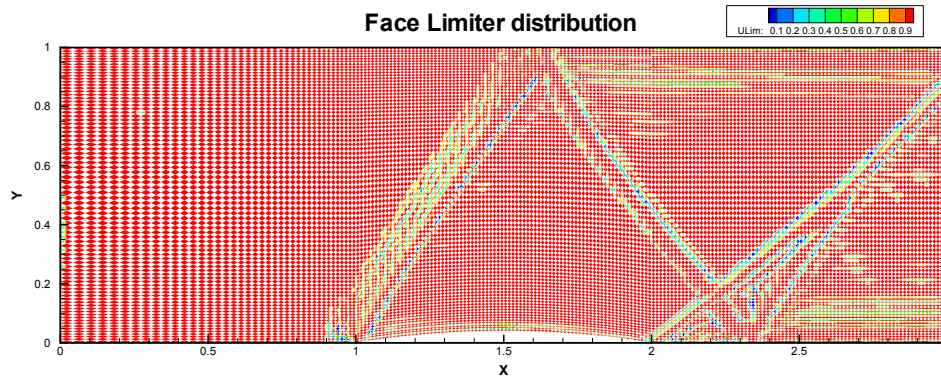
圖 7-108 : $M_{in}=0.675$ 穿音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖；(b)馬赫數等值圖；(c)u 速度通量限制子分佈圖



(a)

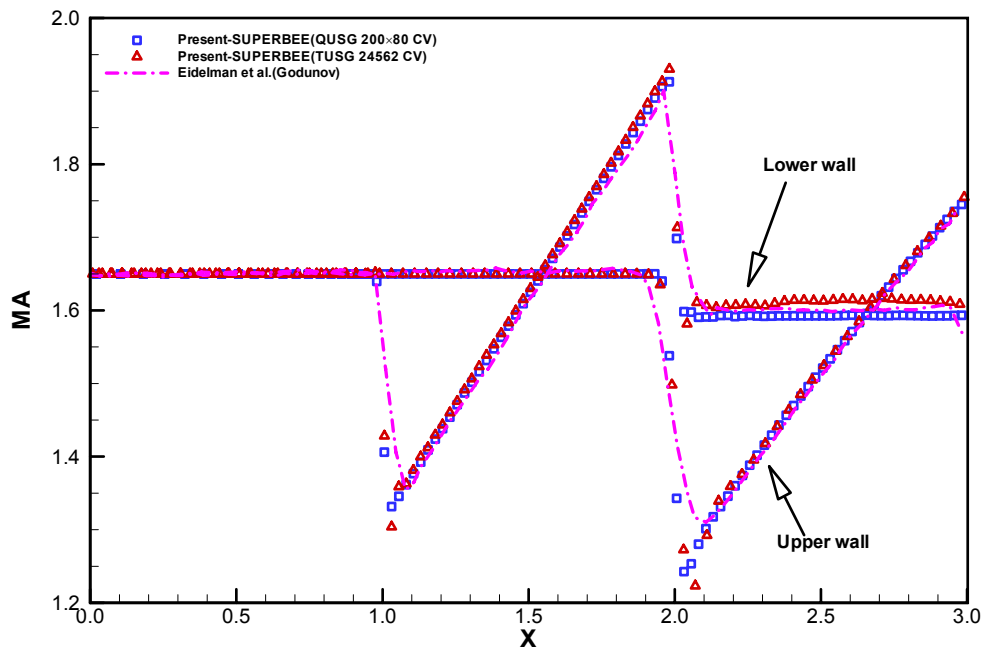


(b)

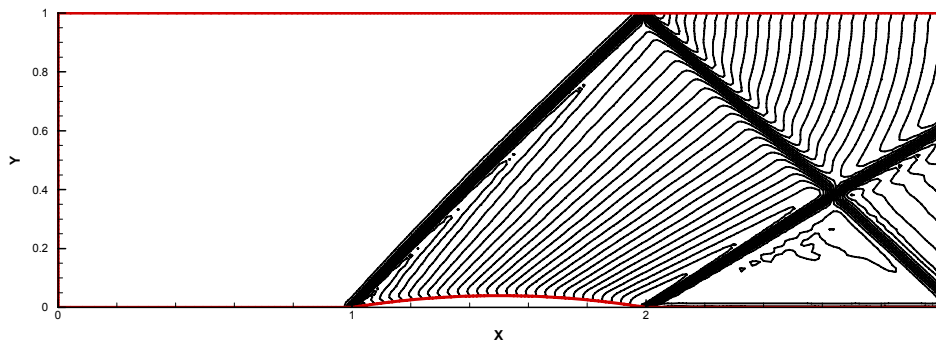


(c)

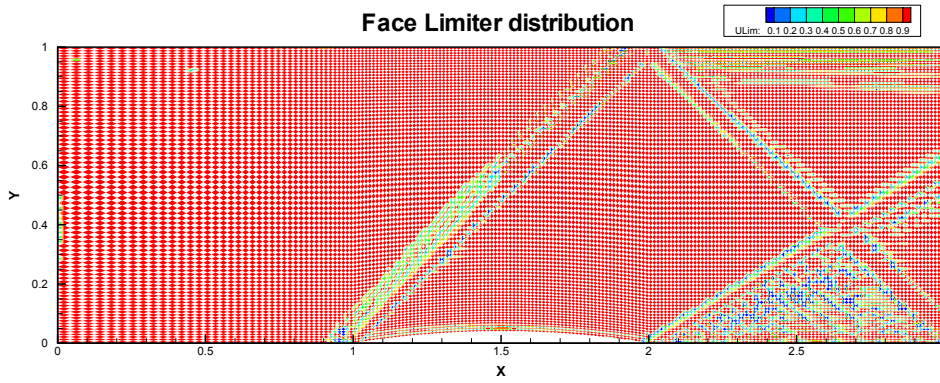
圖 7-109: $M_{in}=1.4$ 超音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖；(b)馬赫數等值圖；
(c)u 速度通量限制子分佈圖



(a)



(b)



(c)

圖 7-110： $M_{in}=1.65$ 超音速流場(a)壁面馬赫數分佈比較圖；(b)馬赫數等值圖；(c)u 速度通量限制子分佈圖

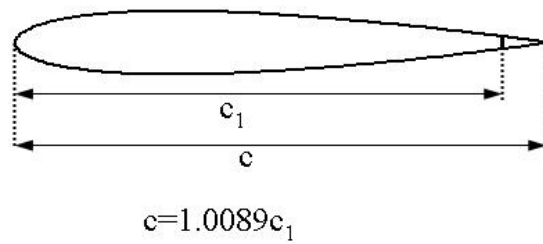


圖 7-111：NACA 0012 翼型示意圖

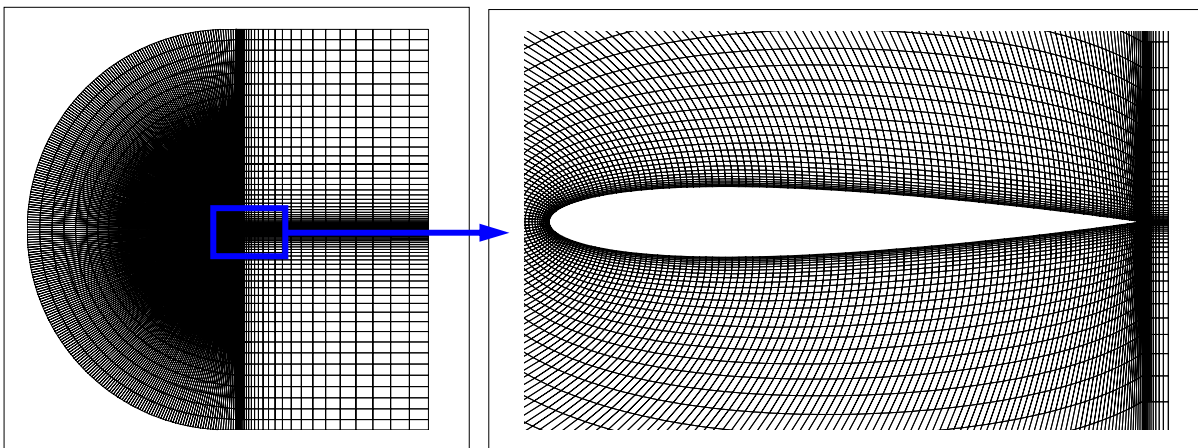


圖 7-112：NACA 0012 翼型 C-型四邊形無結構性網格

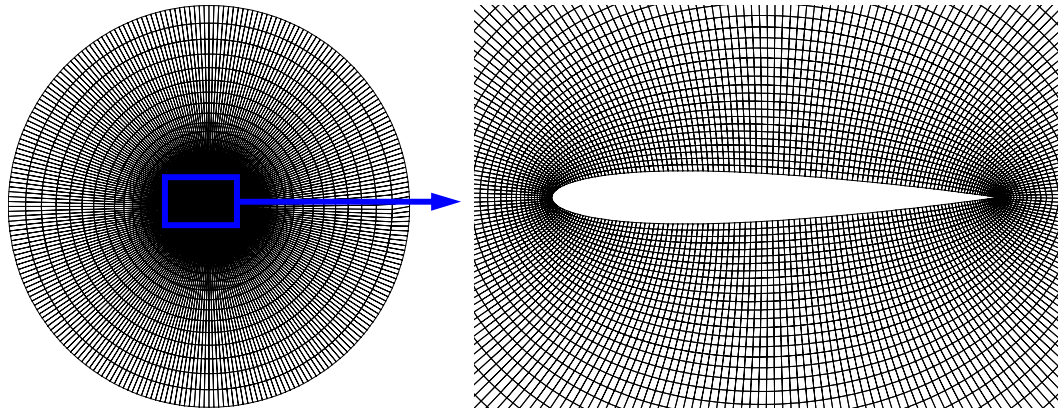


圖 7-113：NACA 0012 翼型 O-型四邊形無結構性網格

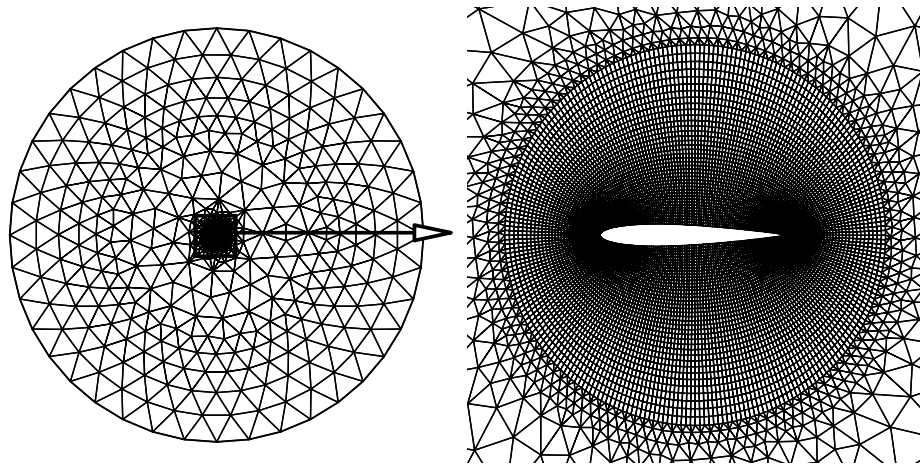


圖 7-114：NACA 0012 翼型 O-型四邊形與三邊形之混合網格

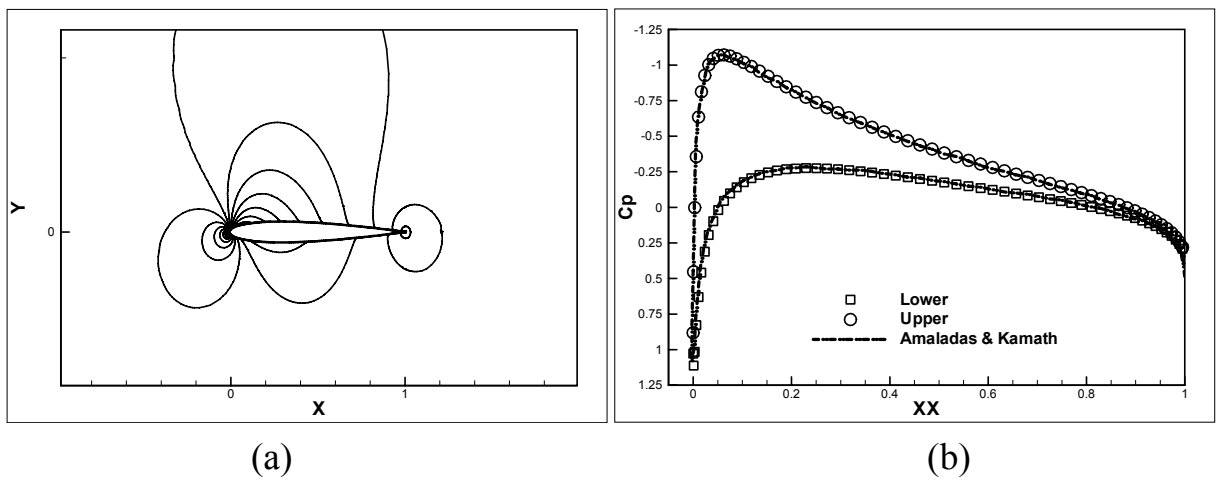


圖 7-115：NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$ ， $\alpha=2^\circ$ ， $dm=1.0$ (Van Albada)(a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈

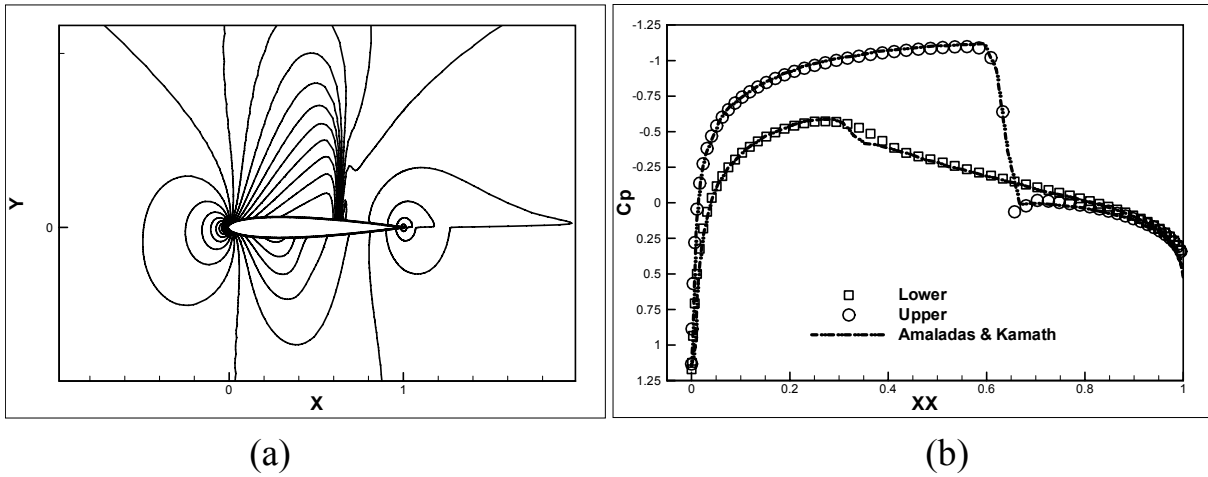


圖 7-116：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada)
 (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈

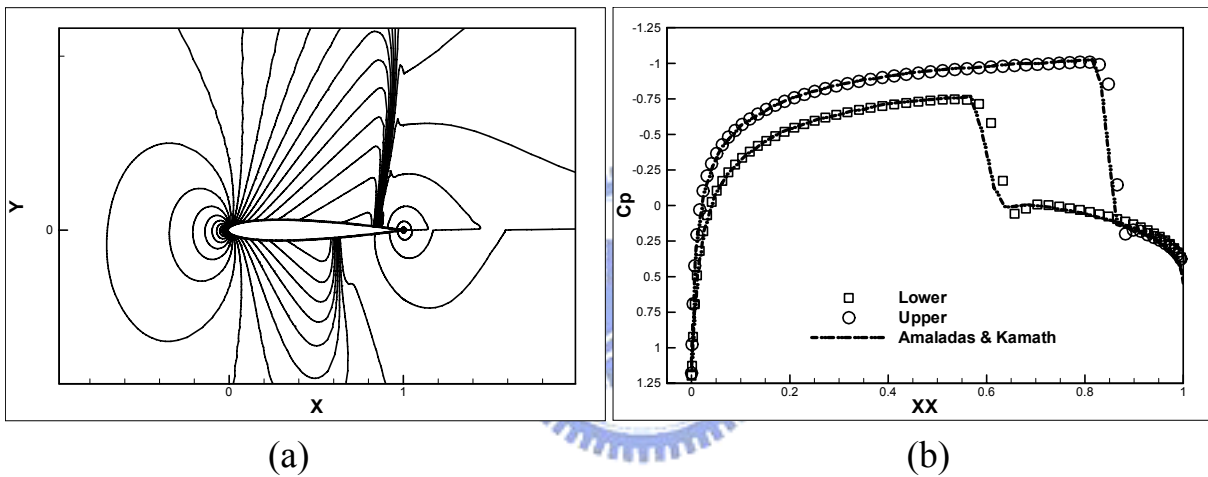


圖 7-117：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada) (a)
 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈

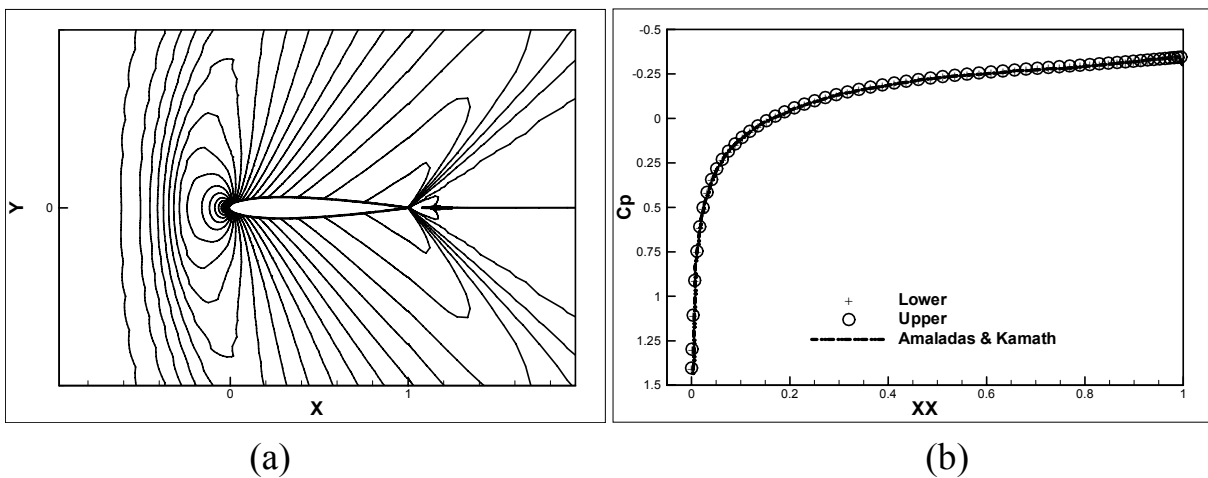


圖 7-118：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.20$ ， $\alpha=0.0^\circ$ ， $dm=0.6$ (Van Albada) (a)
 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈

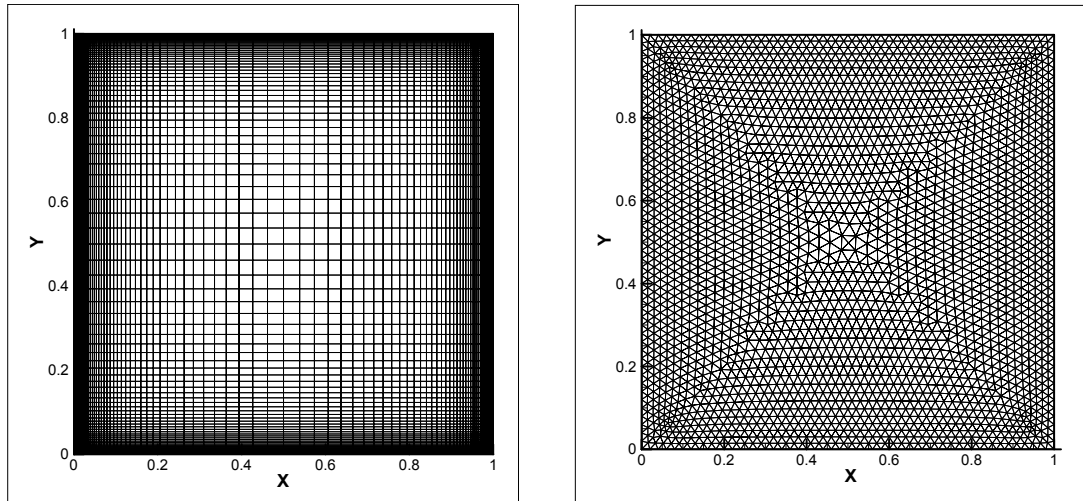


圖 7-119：穴流(a)四邊形計算網格(QUSG); (b)三邊形計算網格(TUSG)

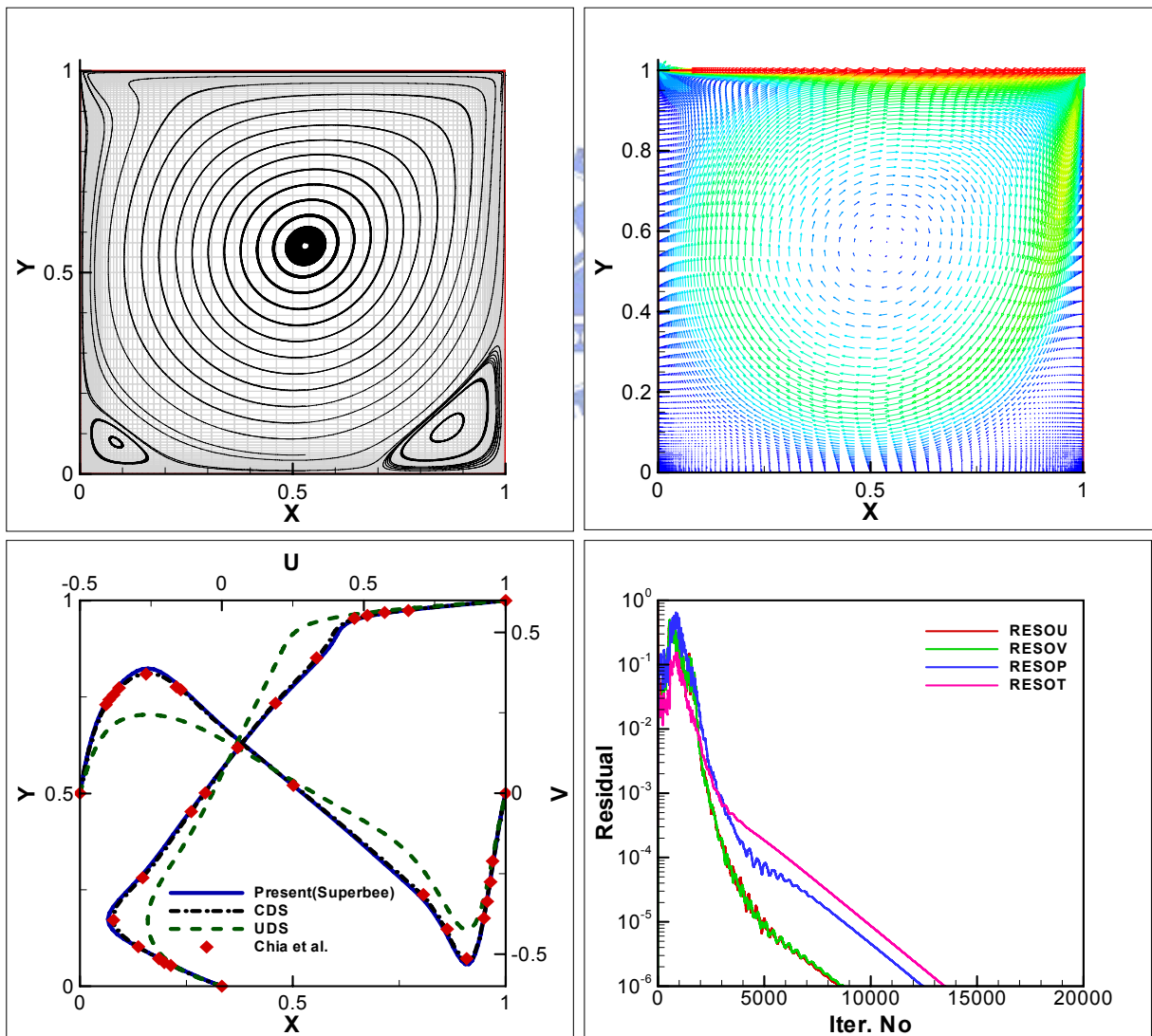


圖 7-120：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)

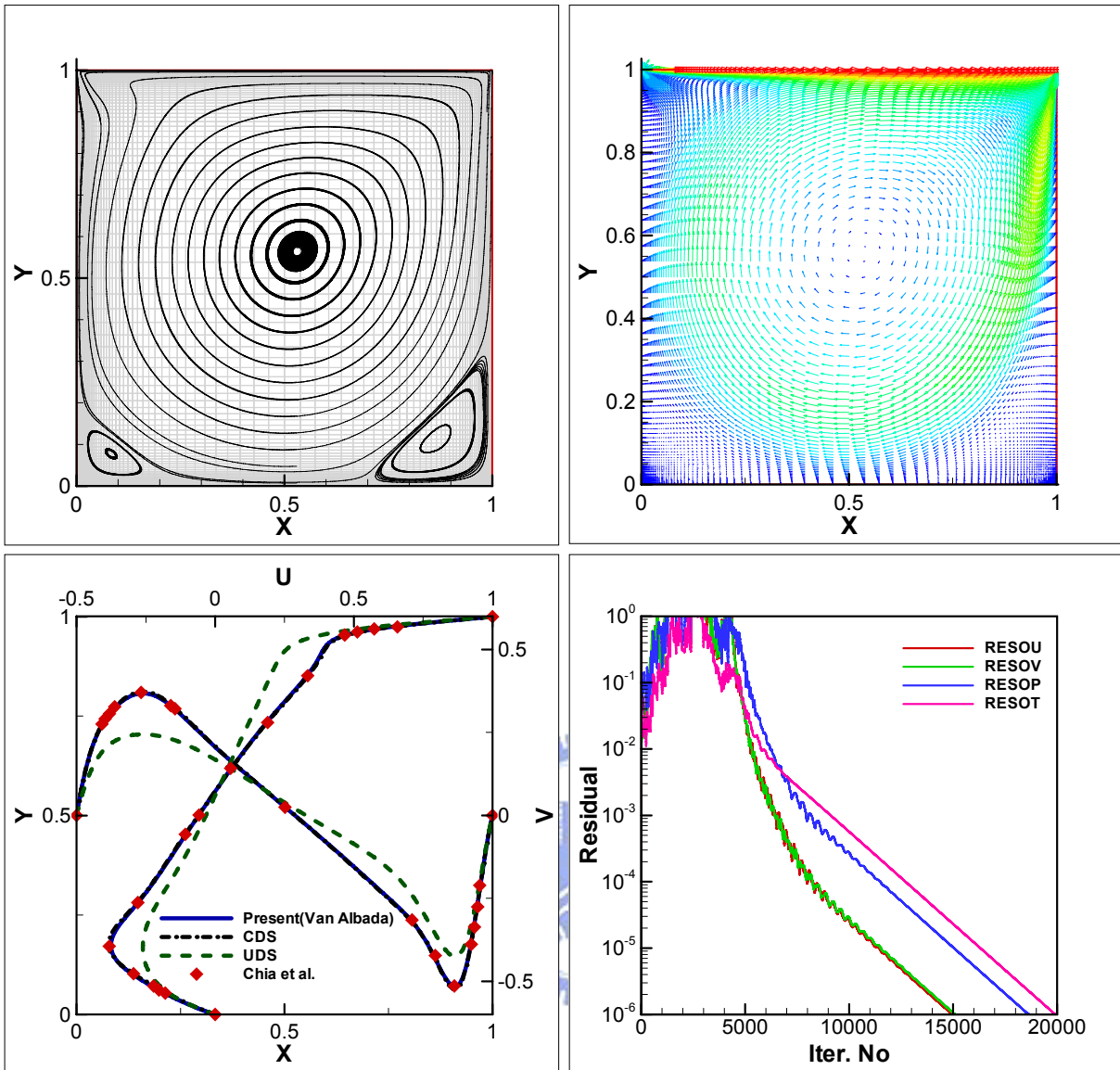


圖 7-121：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 Van Albada 通量限制函數(a)流線圖；
 (b)速度向量圖；(c) x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形 (QUSG)

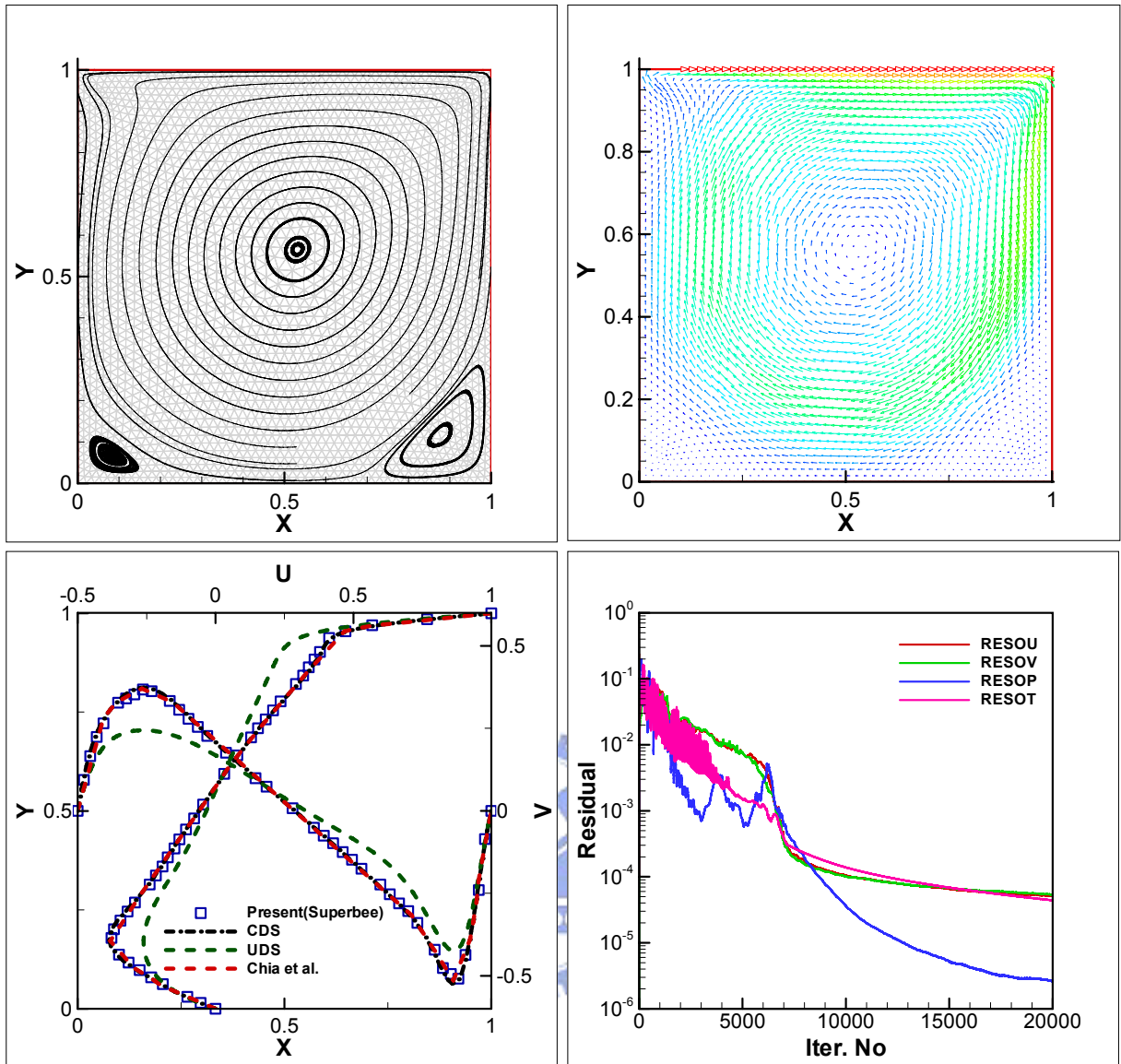


圖 7-122: 穴流, $Re=1000$, 原始變數法 SUPERBEE 通量限制函數(a)流線圖;
 (b)速度向量圖; (c) x, y 中心截面速度分佈; (d)殘值收斂情形
 (TUSG)

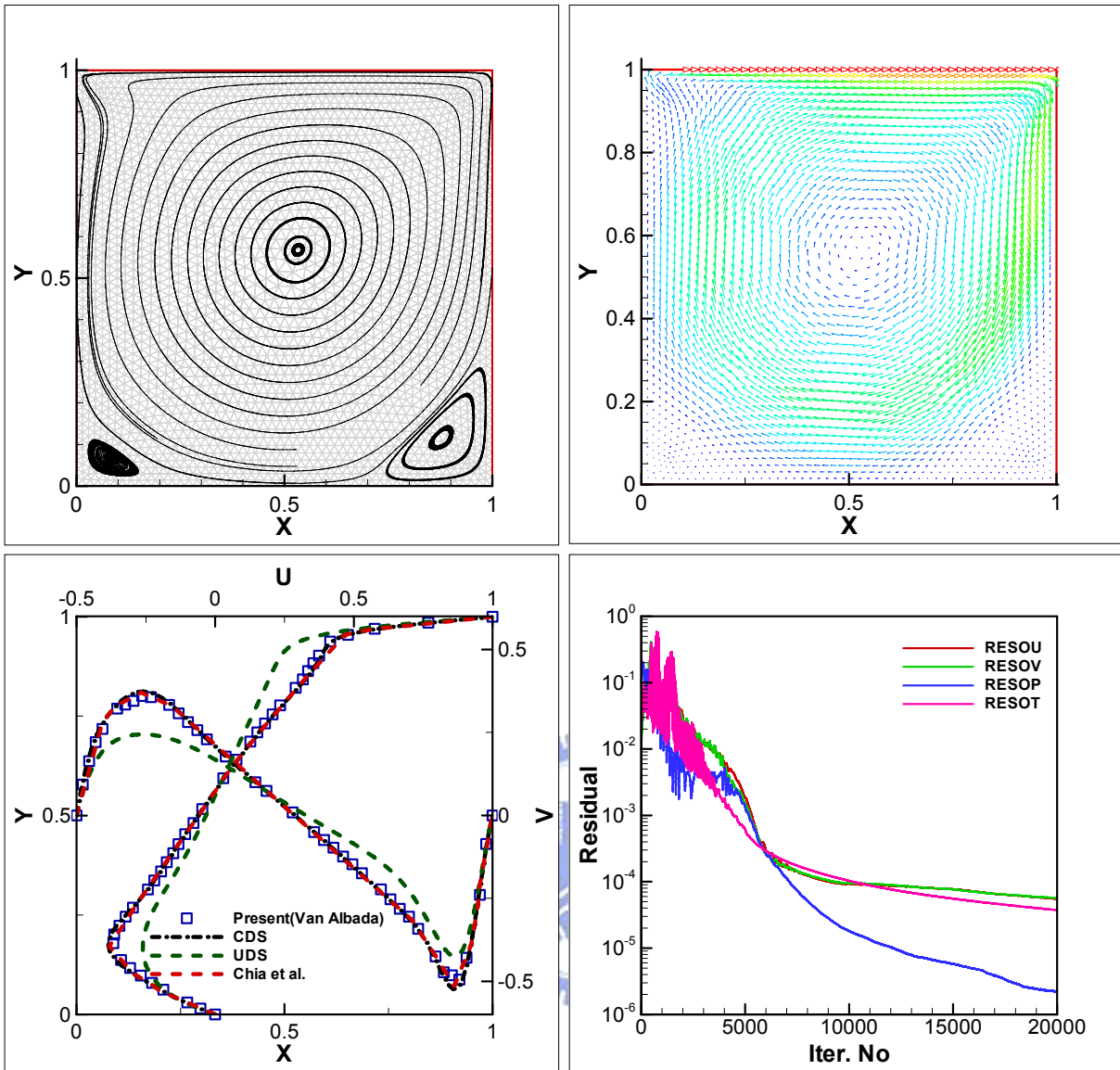


圖 7-123：穴流， $Re=1000$ ，原始變數法 Van Albada 通量限制函數(a)流線圖；
 (b)速度向量圖；(c)x, y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形 (TUSG)

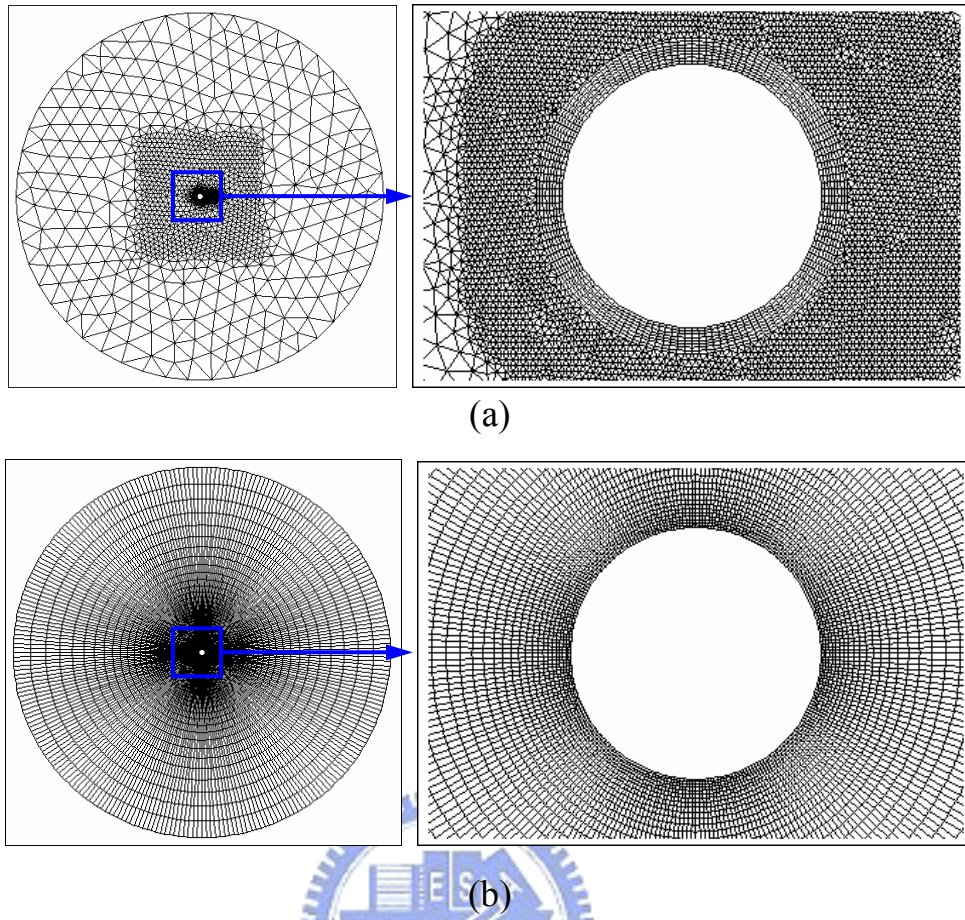


圖 7-124：圓柱外流場計算網格(a)混合網格(HUSG)；(b)四邊形網格(QUSG)

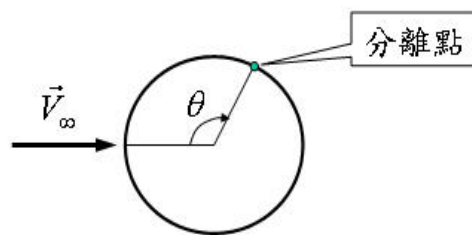


圖 7-125：圓柱邊界流場分離角定義示意圖

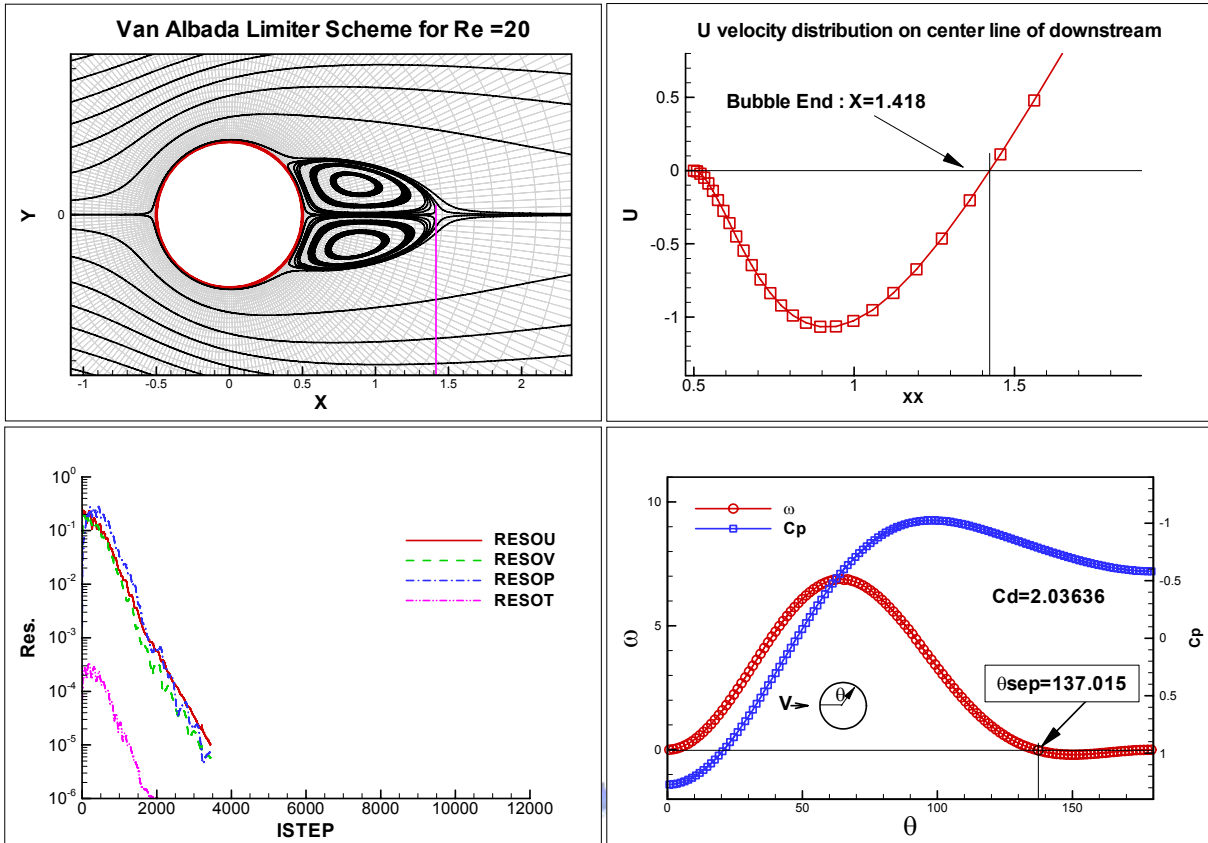


圖 7-126：圓柱低速流 $Re=20$ (Van Albada 限制函數，QUSG 網格) (a)流線圖；
 (b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形；
 (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

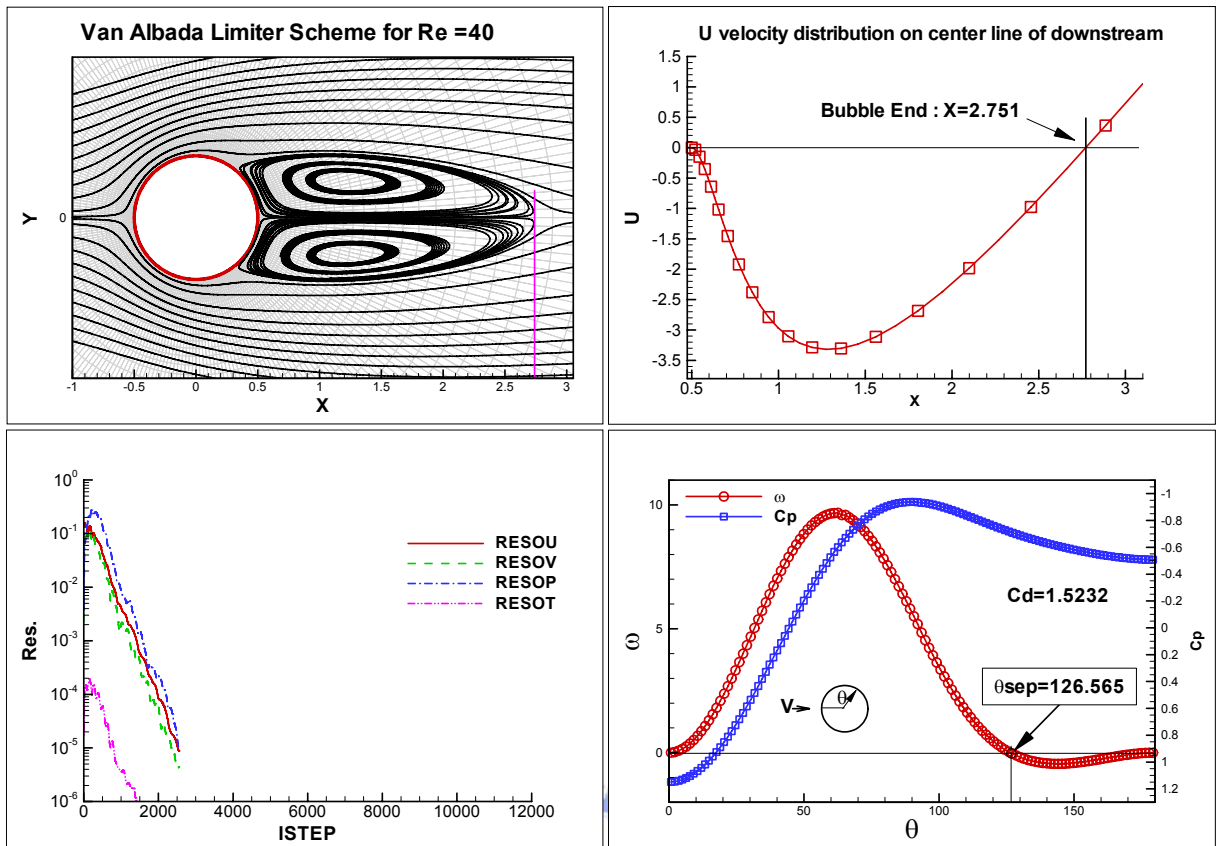


圖 7-127: 圓柱低速流 $Re=40$ (Van Albada 限制函數, QUSG 網格) (a) 流線圖; (b) 沿著在圓柱下游的中心線 ($y=0$) 上之 u -速度分佈; (c) 殘值收斂情形; (d) 沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

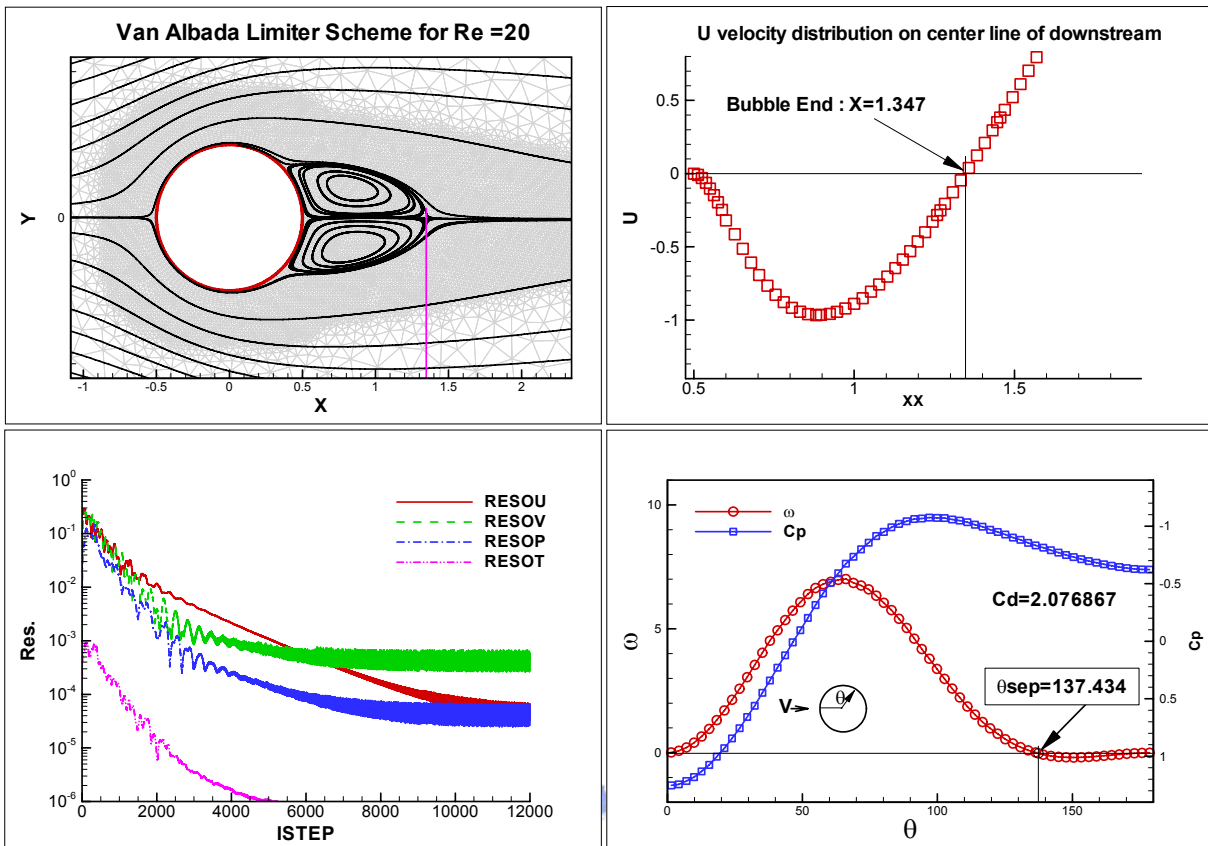


圖 7-128：圓柱低速流 $Re=20$ (Van Albada 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖；
 (b)沿著在圓柱下游的中心線 ($y=0$) 上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形；
 (d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

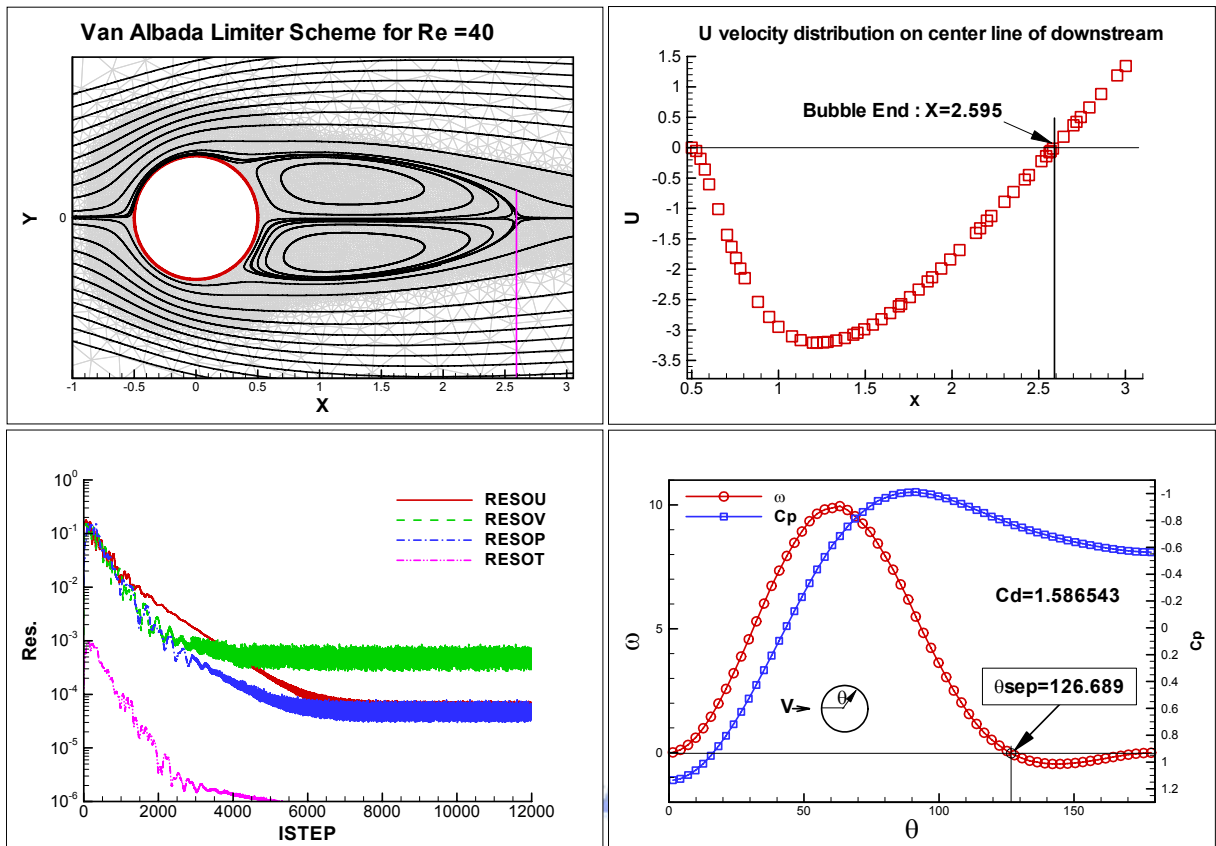


圖 7-129: 圓柱低速流 $Re=40$ (Van Albada 限制函數, HUSG 網格) (a) 流線圖; (b) 沿著在圓柱下游的中心線 ($y=0$) 上之 u -速度分佈; (c) 殘值收斂情形; (d) 沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

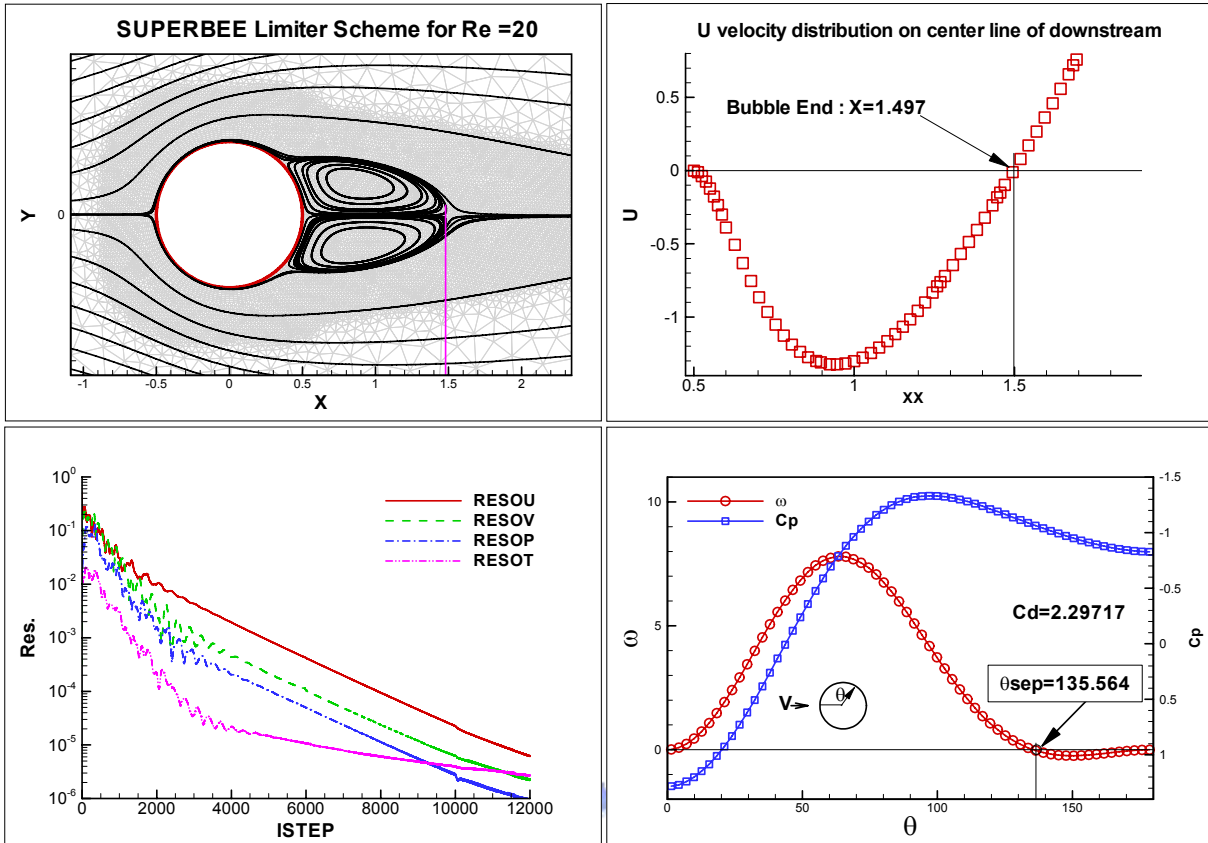


圖 7-130：圓柱低速流 $Re=20$ (SUPERBEE 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖；(b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形；(d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

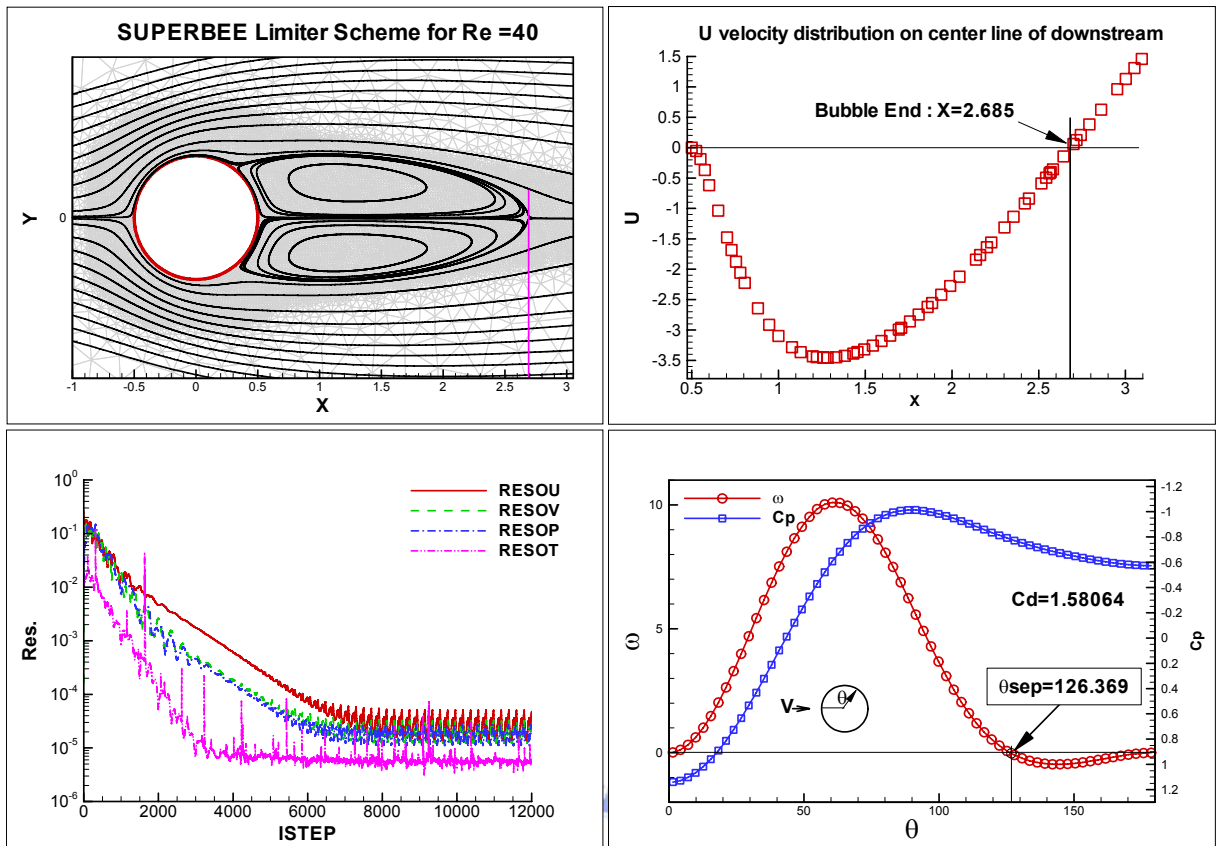


圖 7-131：圓柱低速流 $Re=40$ (SUPERBEE 限制函數，HUSG 網格) (a)流線圖；(b)沿著在圓柱下游的中心線($y=0$)上之 u -速度分佈；(c)殘值收斂情形；(d)沿著圓柱表面的渦度及壓力分佈圖

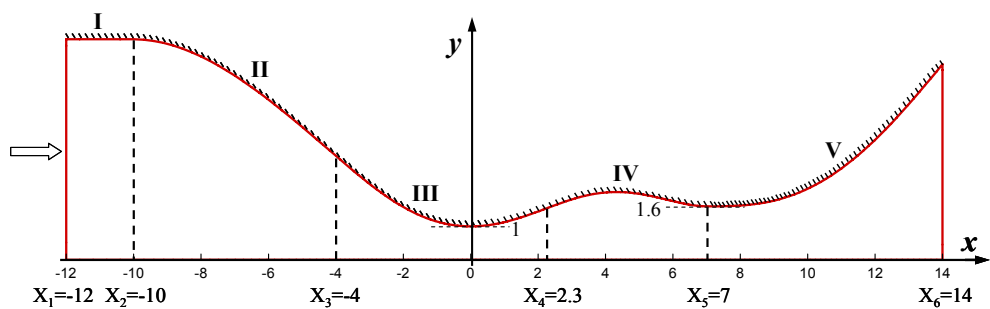


圖 7-132：雙喉部噴嘴幾何外形

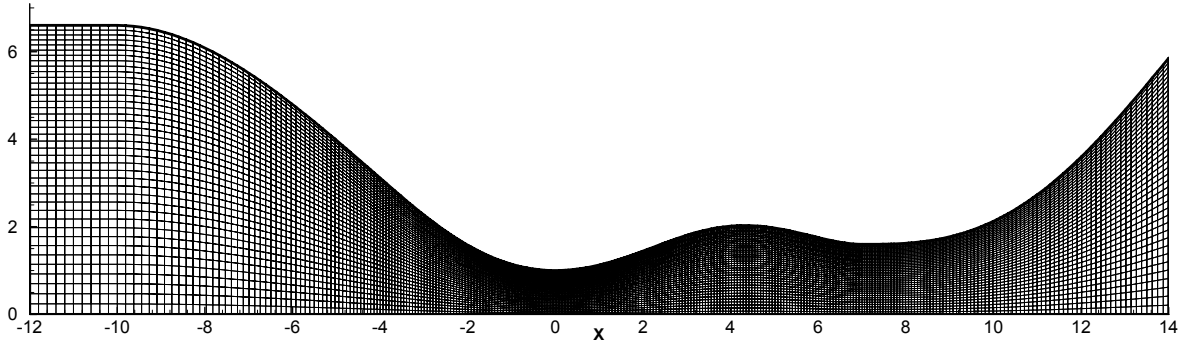
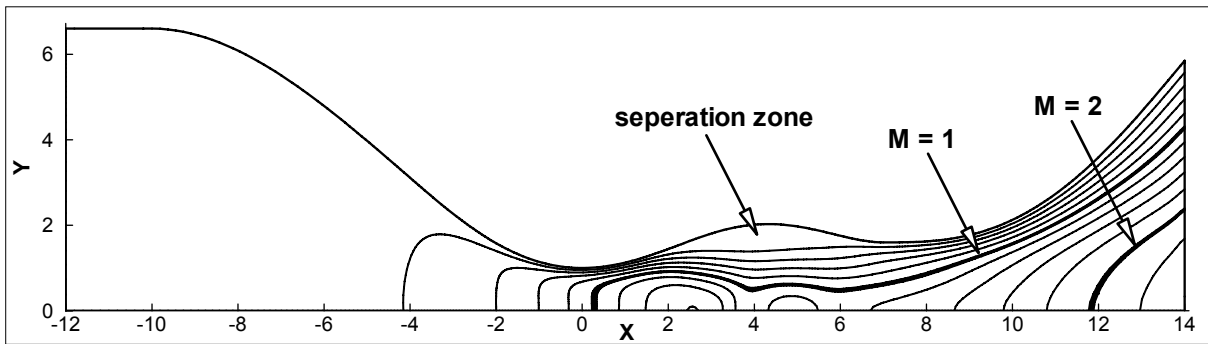
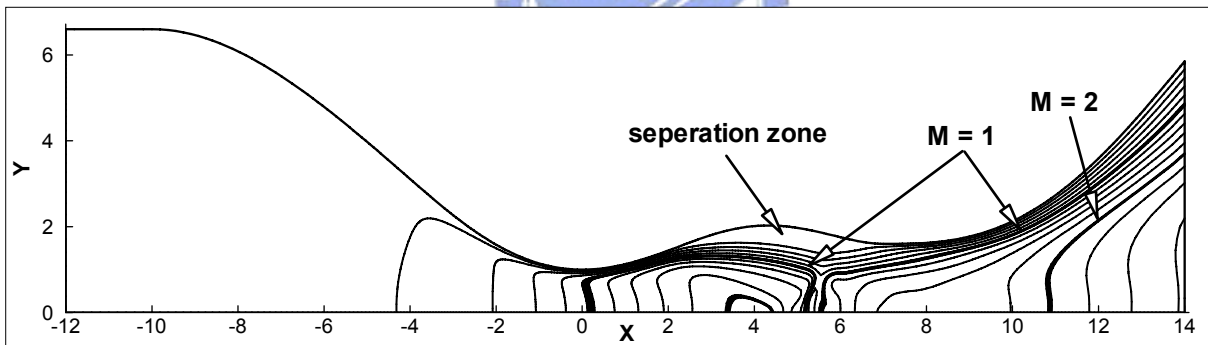


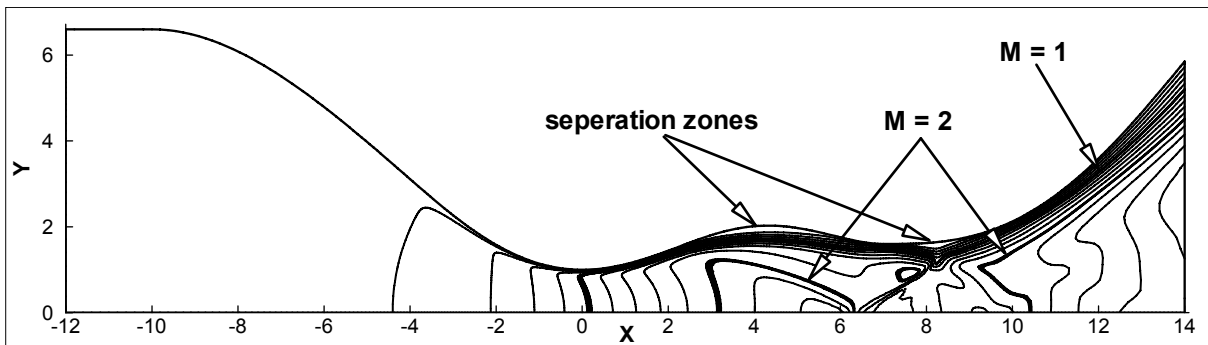
圖 7-133：雙喉部噴嘴計算域網格(315×40 CV)



(a)



(b)



(c)

圖 7-134：雙喉部噴嘴馬赫數等值圖(a) $Re_0=100$ ；(b) $Re_0=400$ ；(c) $Re_0=1600$

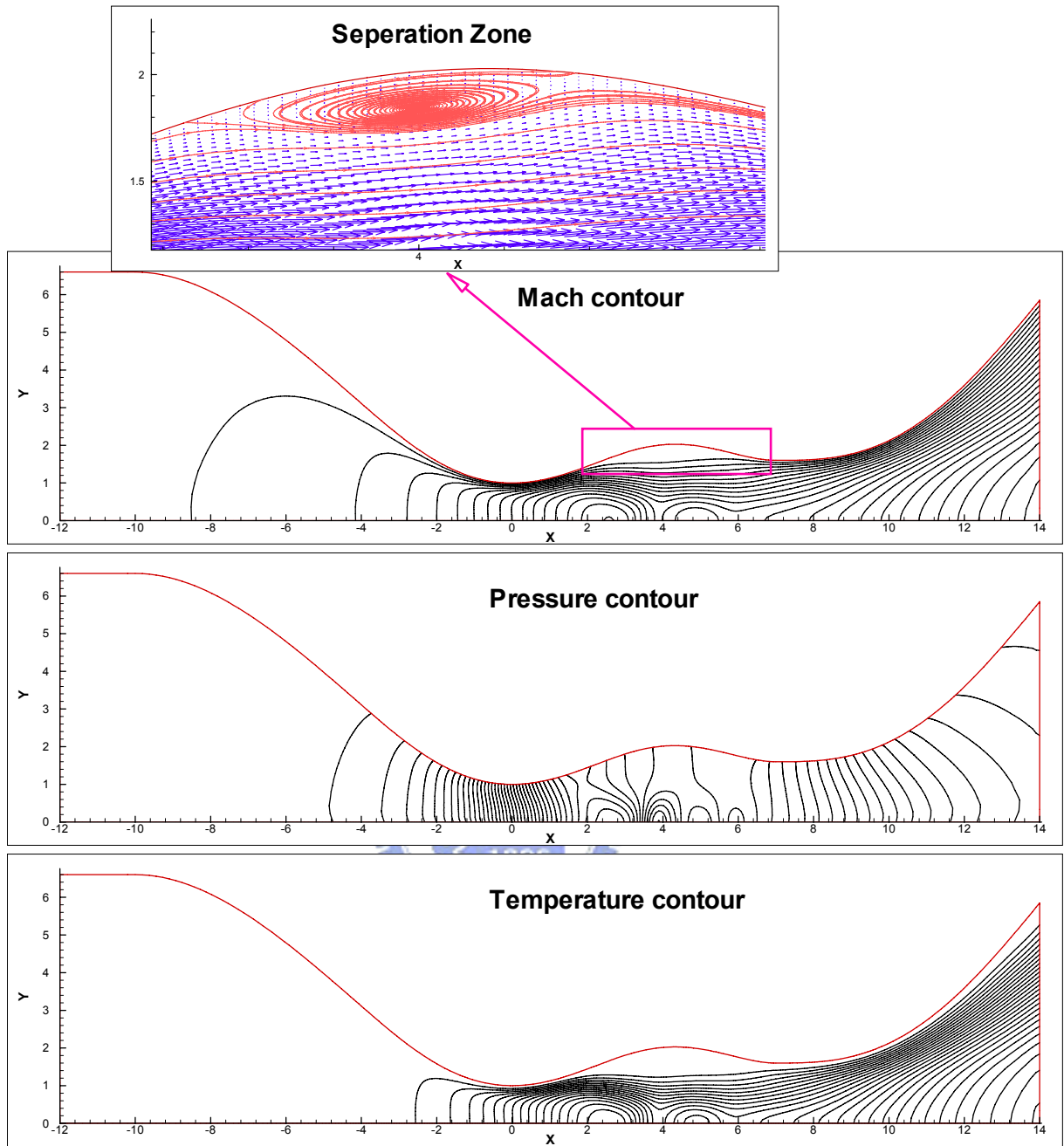


圖 7-135：雙喉部噴嘴 $Re_0=100$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖

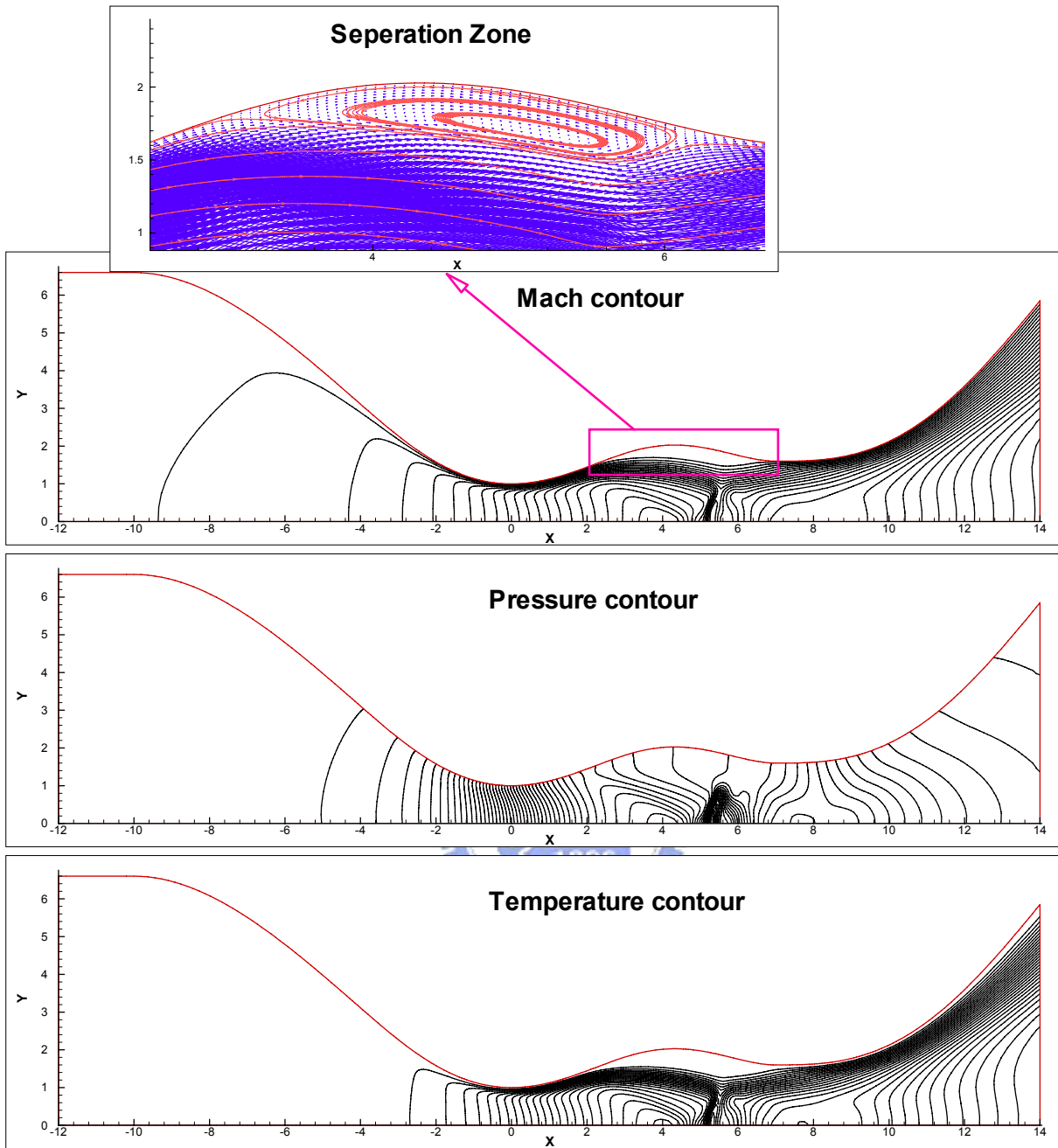


圖 7-136：雙喉部噴嘴 $Re_0=400$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖

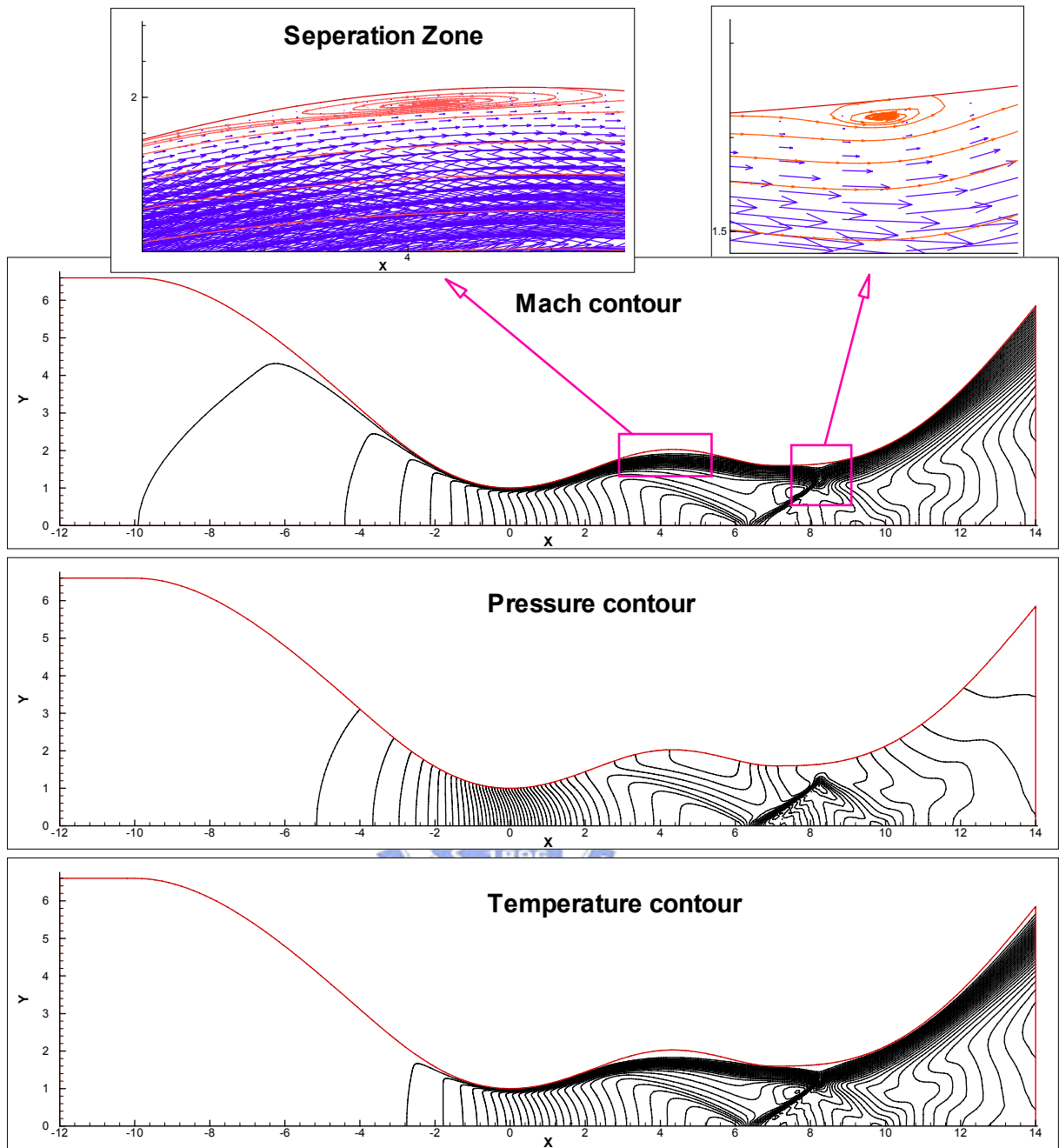


圖 7-137：雙喉部噴嘴 $Re_0=1600$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖

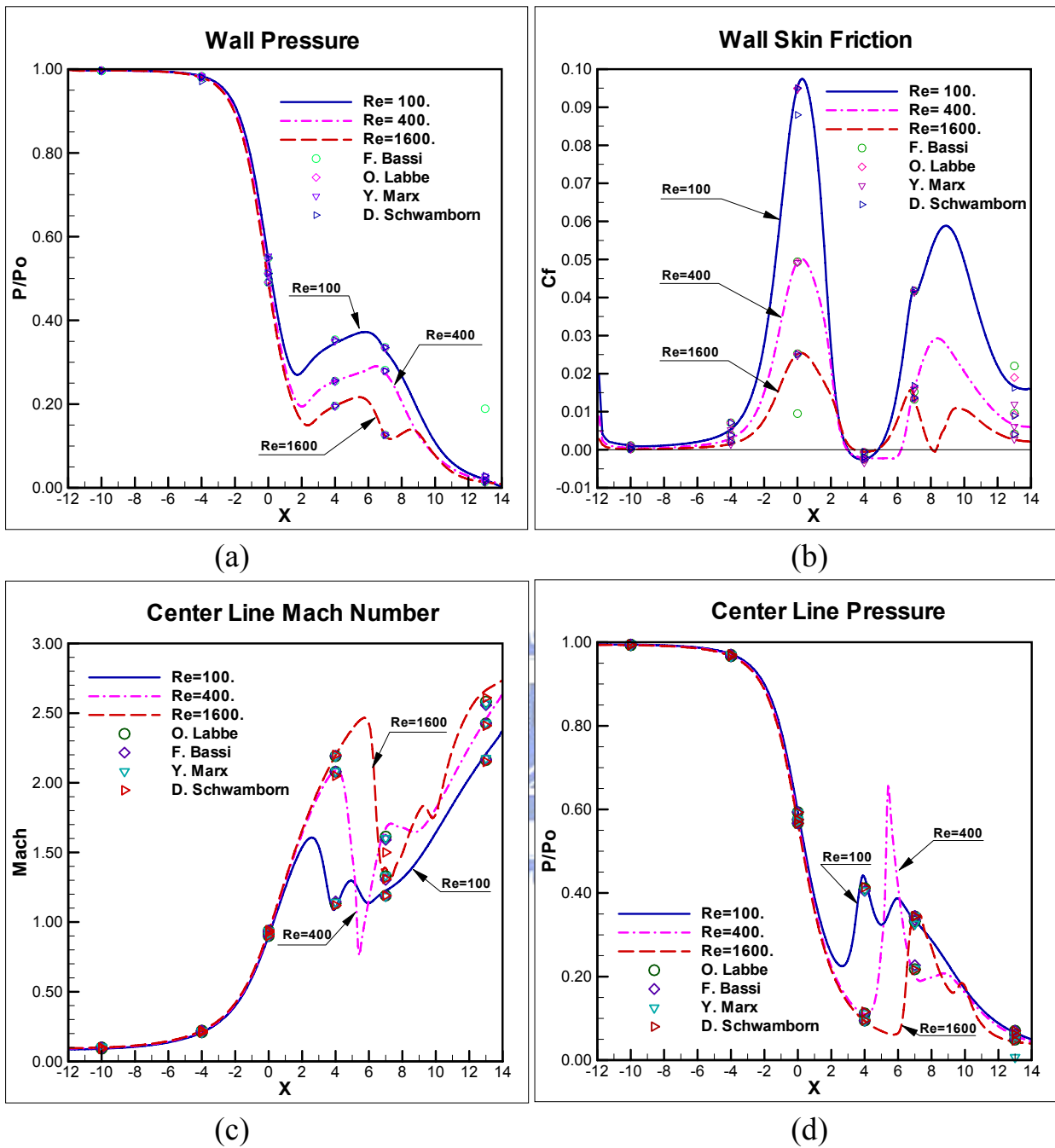
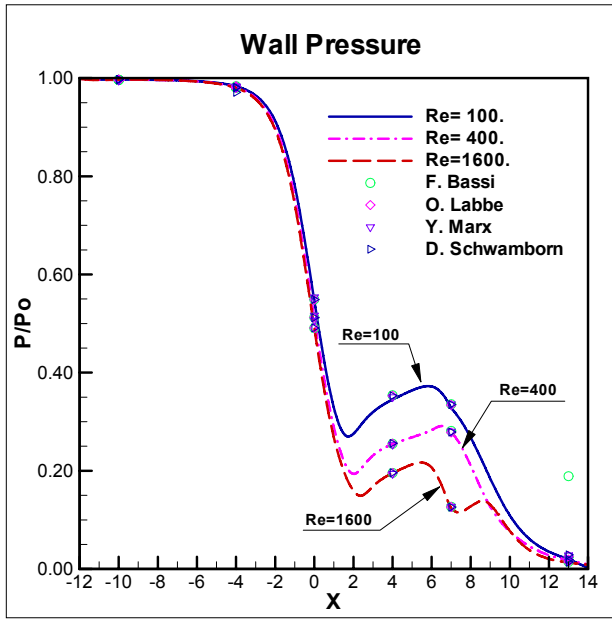
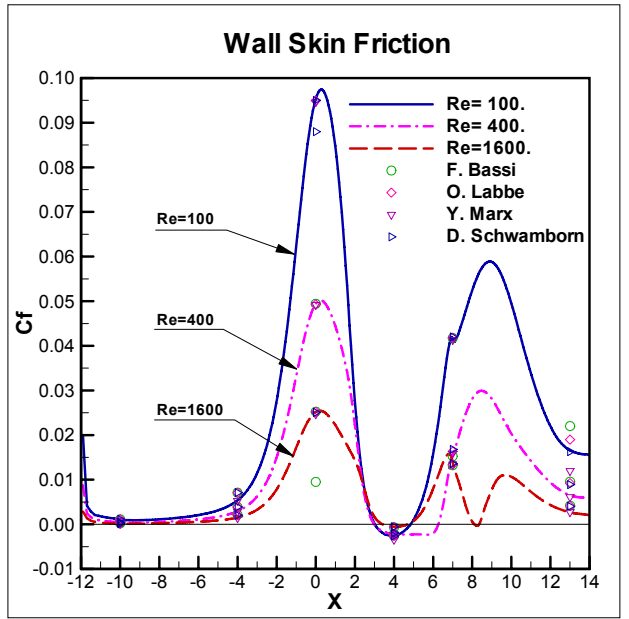


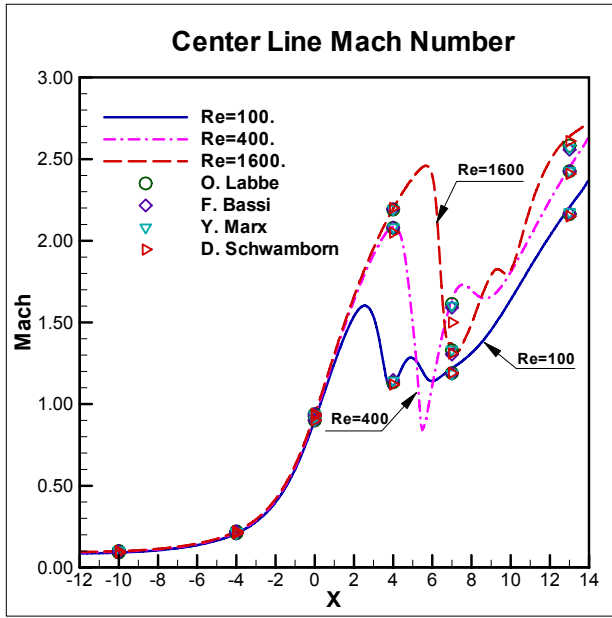
圖 7-138：雙喉部噴嘴，原始變數 SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖



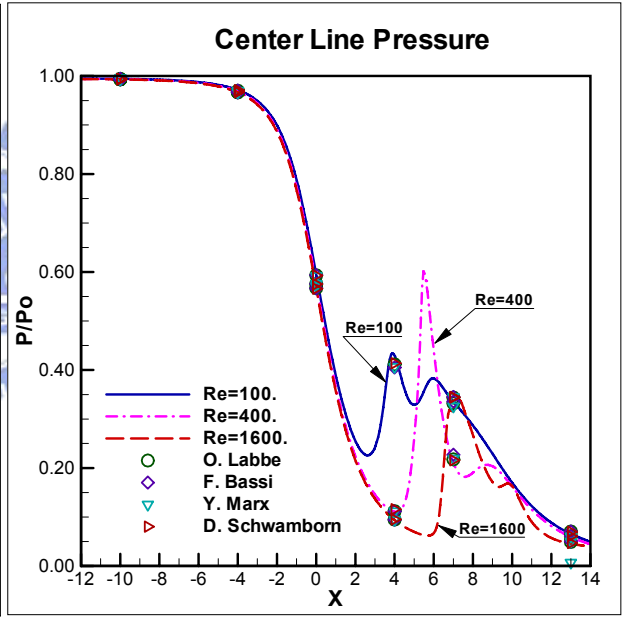
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 7-139：雙喉部噴嘴，原始變數 Van Albada 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖

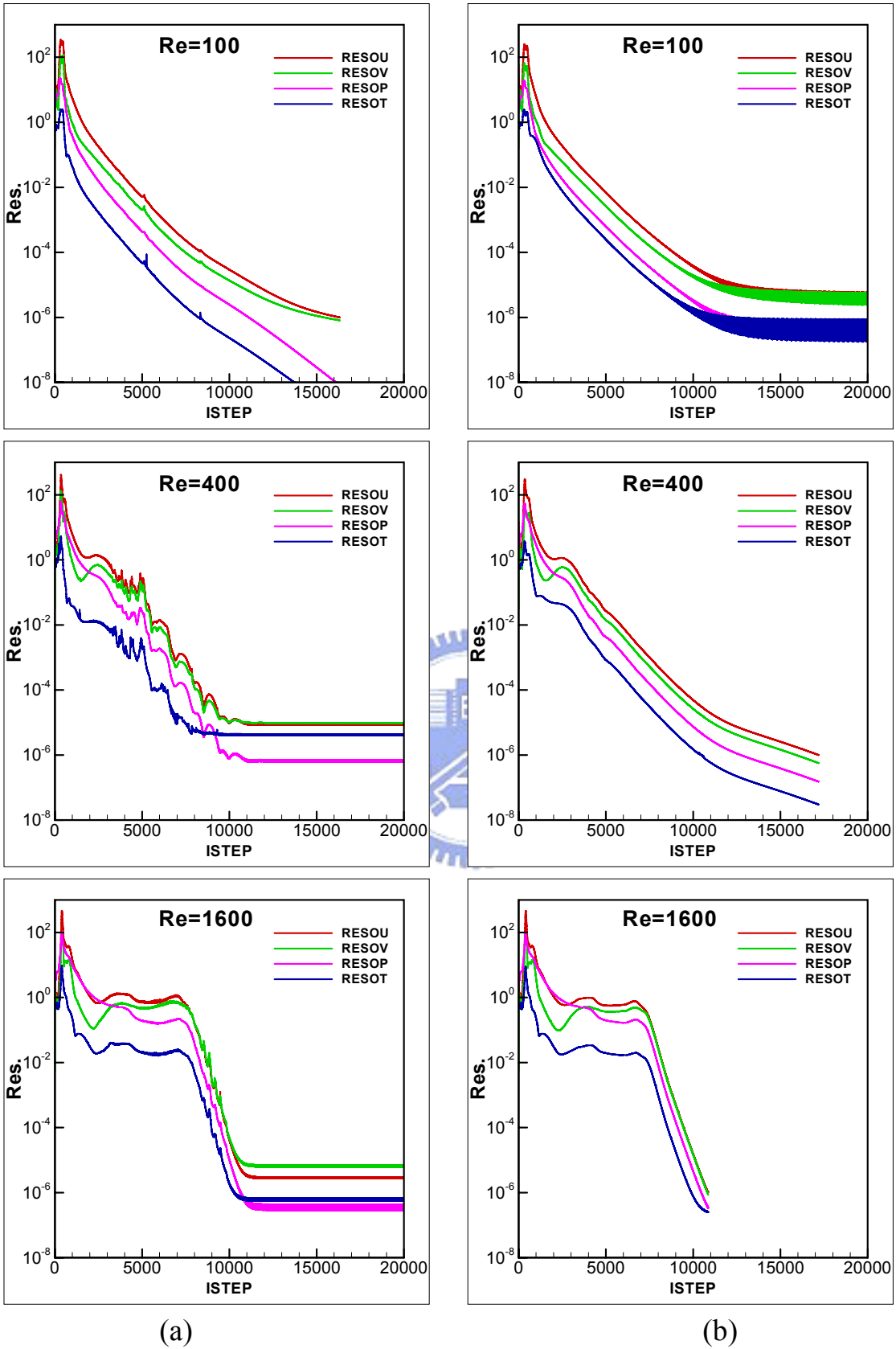


圖 7-140：雙喉部噴嘴，原始變數限制函數法數值收斂情形(a) SUPERBEE；
(b) Van Albada

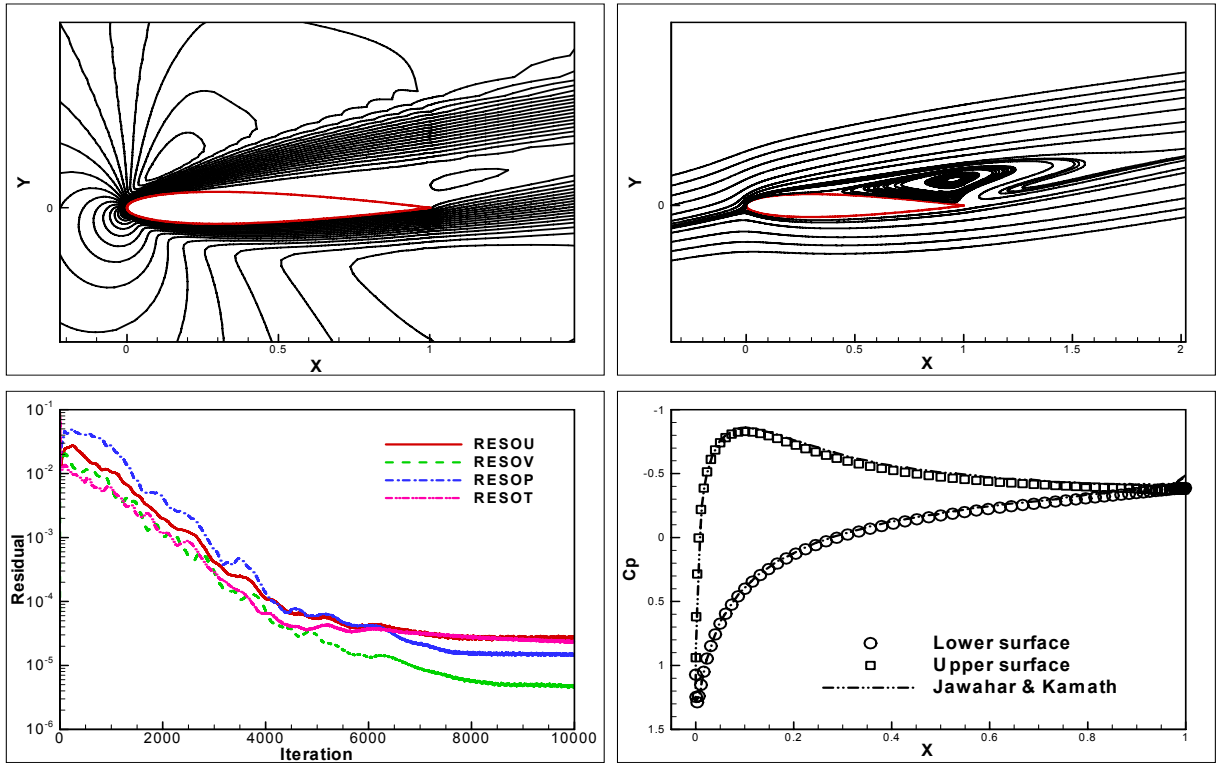


圖 7-141 : NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$, 原始變數 SUPERBEE 限制函數($dm=0.2$)(a)馬赫數等值圖 ; (b)流線圖 ; (c)收斂殘值 ; (d)翼面壓力分佈比較圖

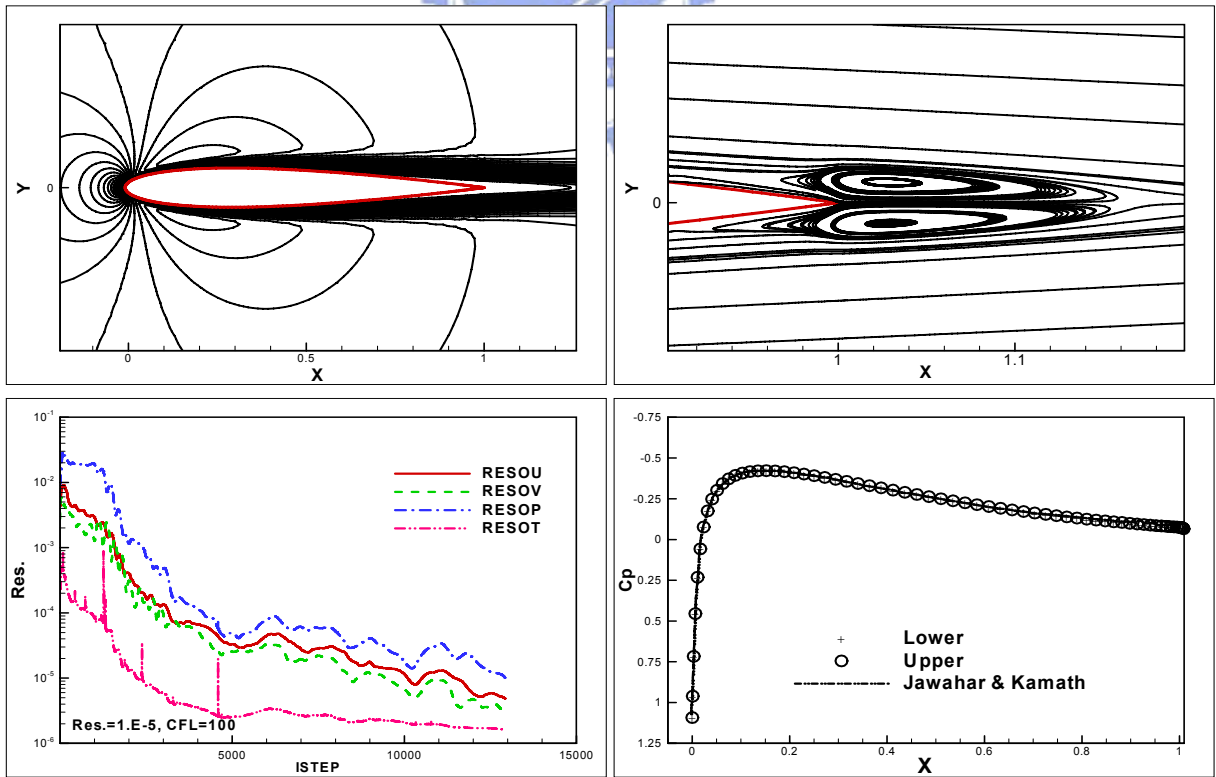


圖 7-142 : NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$, 原始變數 Van Albada 限制函數(a)馬赫數等值圖 ; (b)尾部流線圖 ; (c)收斂殘值 ; (d)翼面壓力分佈比較圖

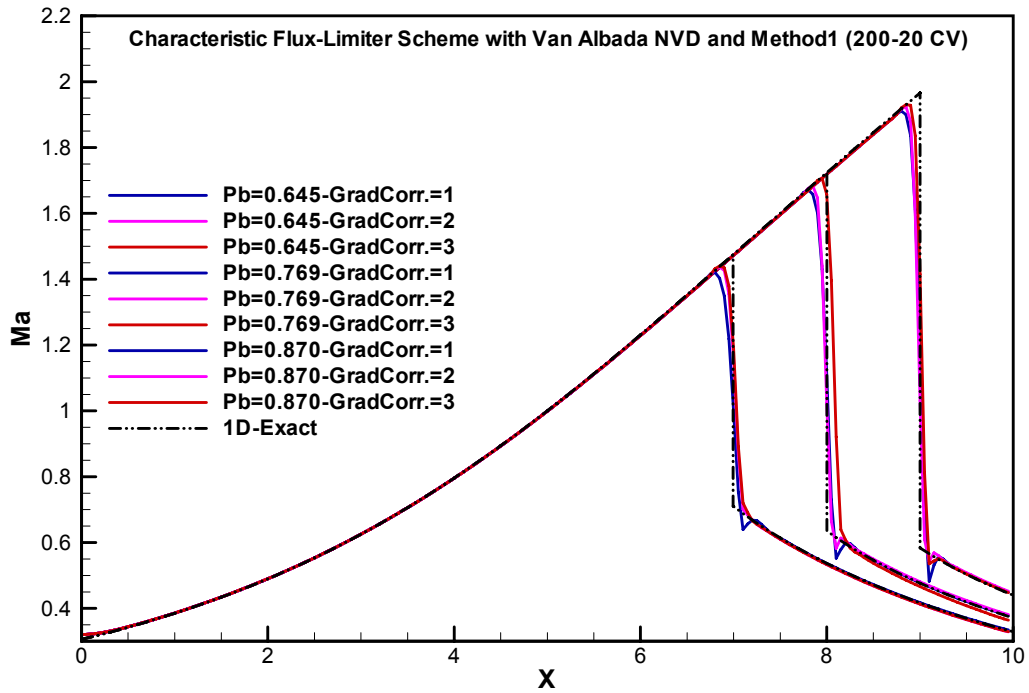


圖 7-143：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法，噴嘴中心軸馬赫數分佈圖

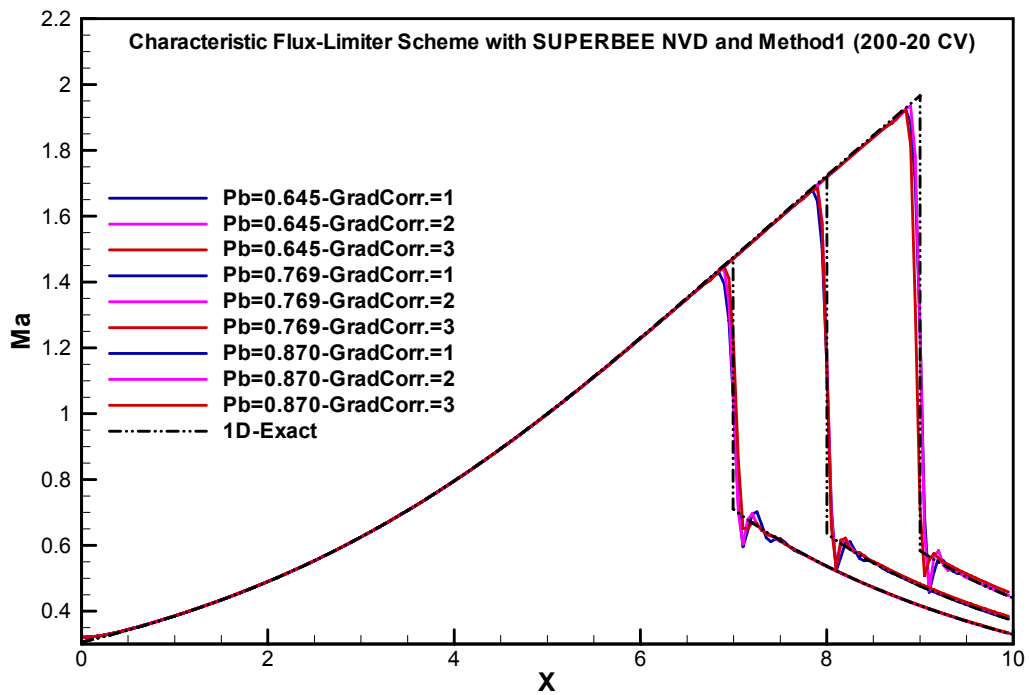


圖 7-144：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數法，噴嘴中心軸馬赫數分佈圖

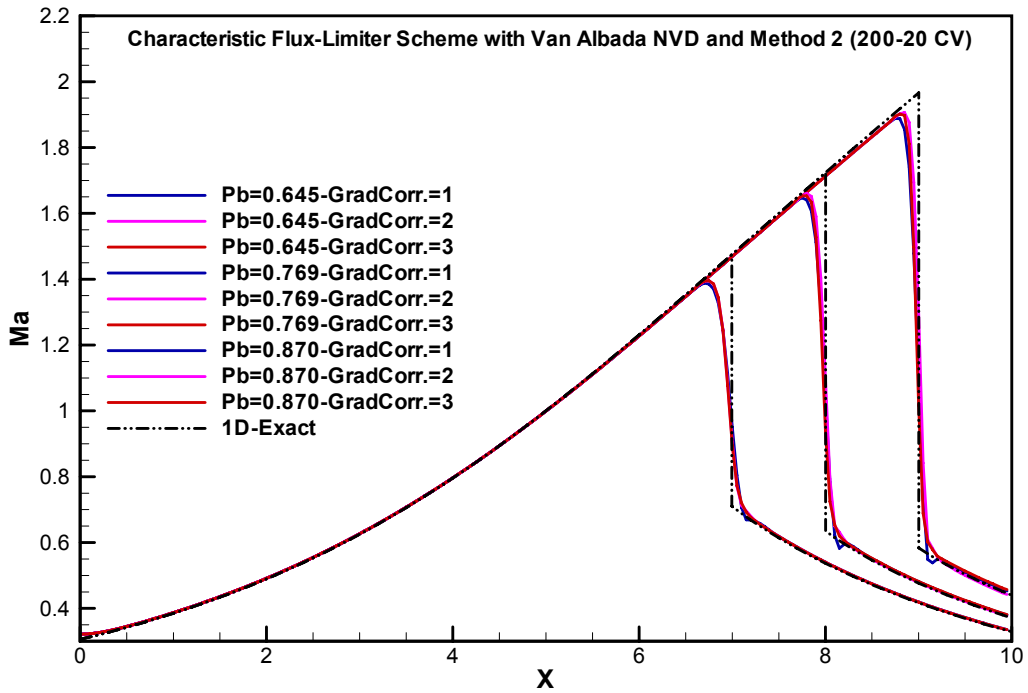


圖 7-145：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法，噴嘴中心軸馬赫數分佈圖

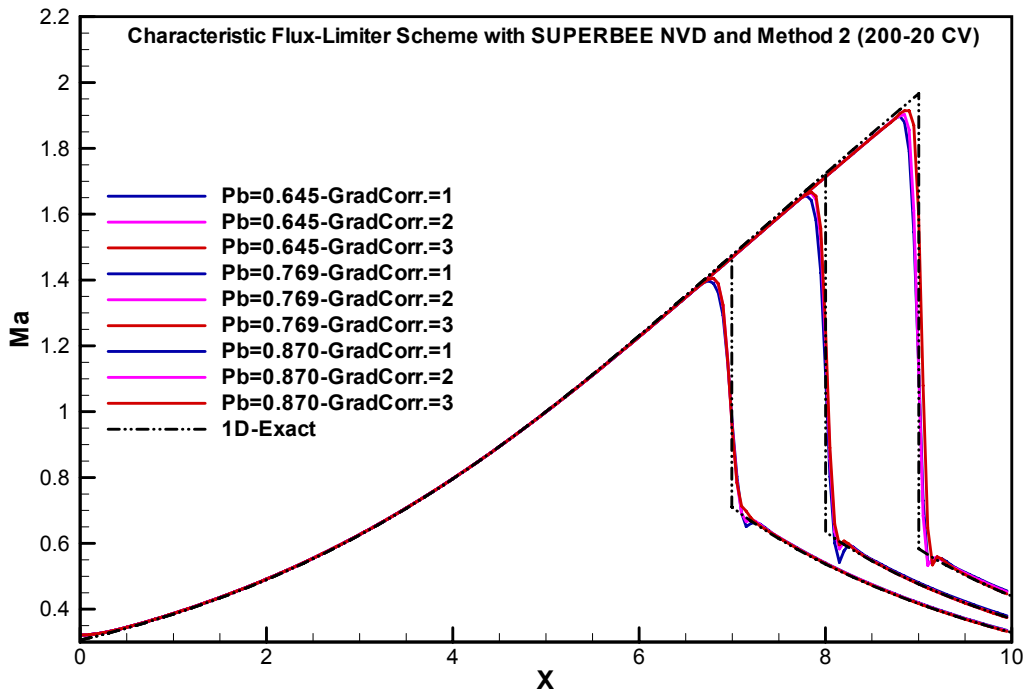
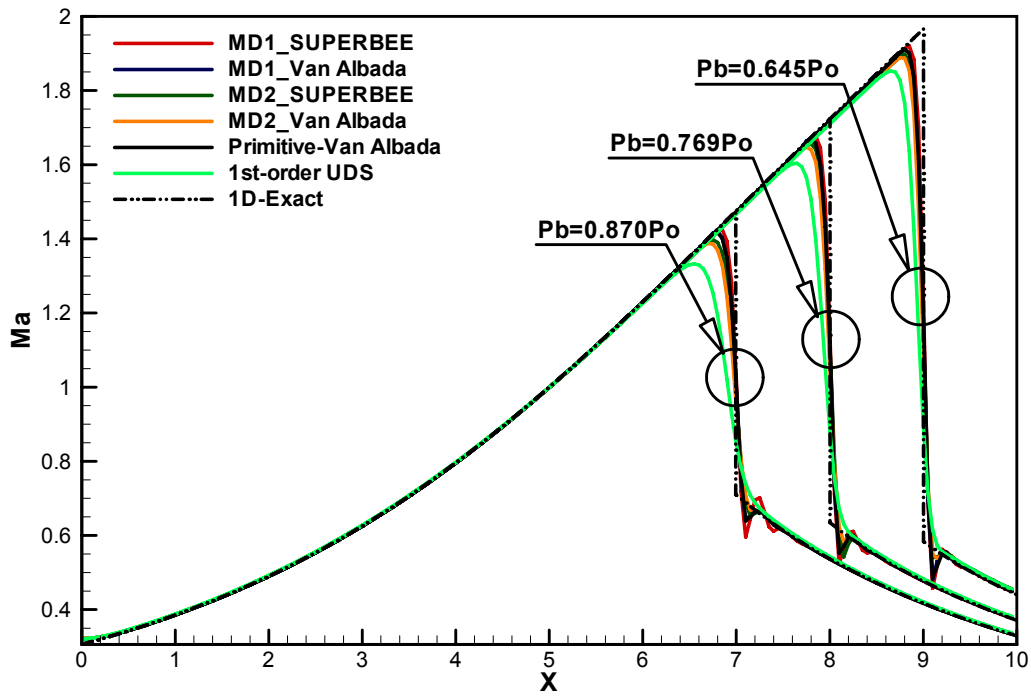
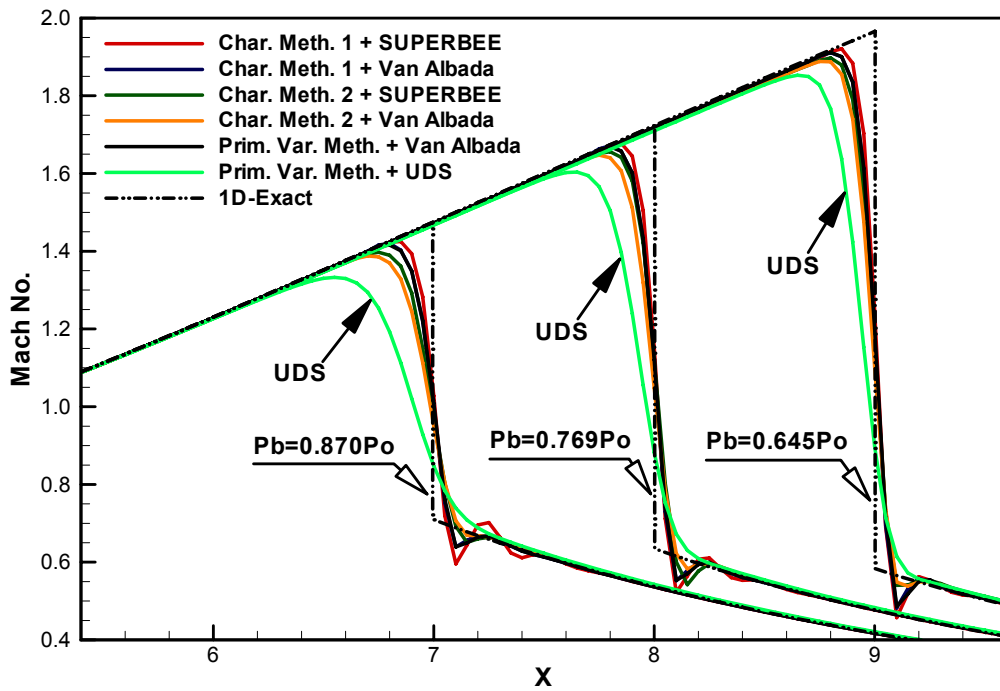


圖 7-146：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數法，噴嘴中心軸馬赫數分佈圖

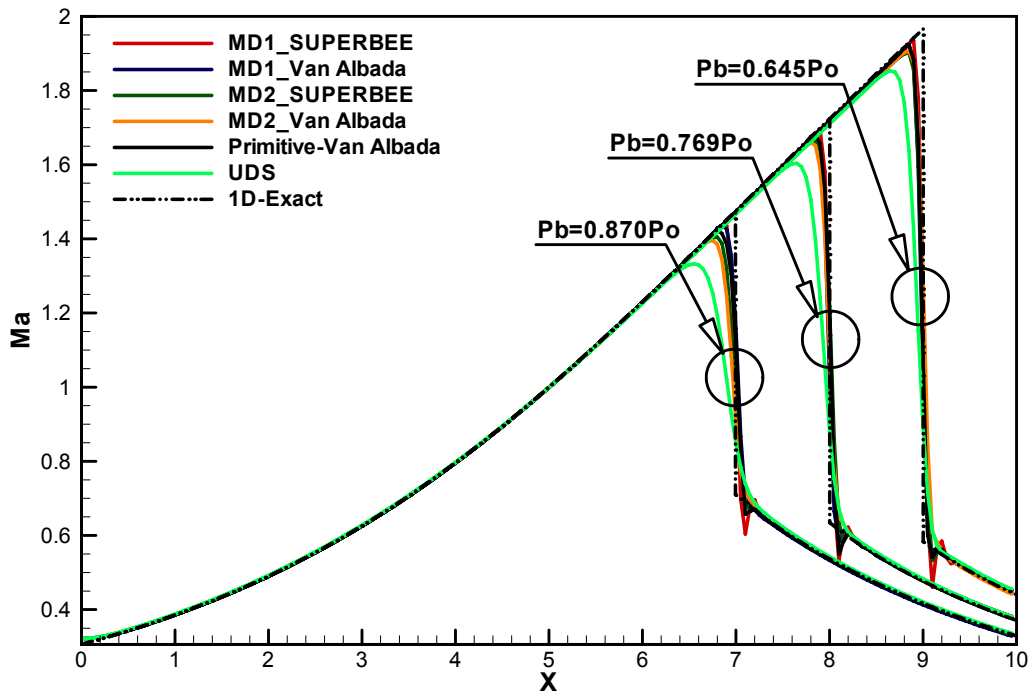


(a)

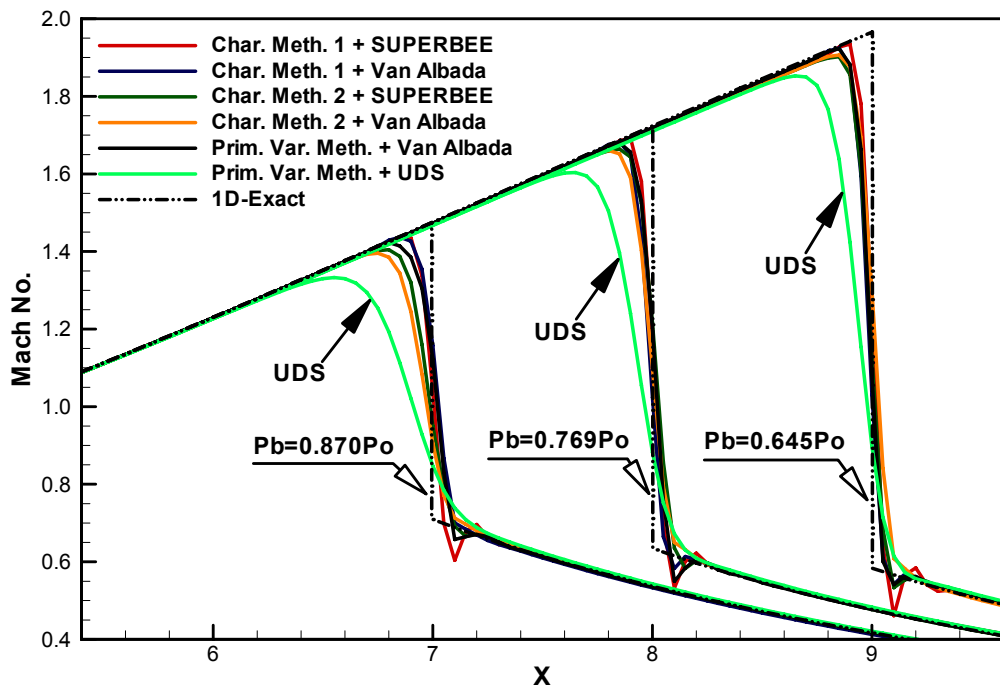


(b)

圖 7-147：C-D 噴嘴內流場，無梯度修正之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈；(b)震波局部放大圖

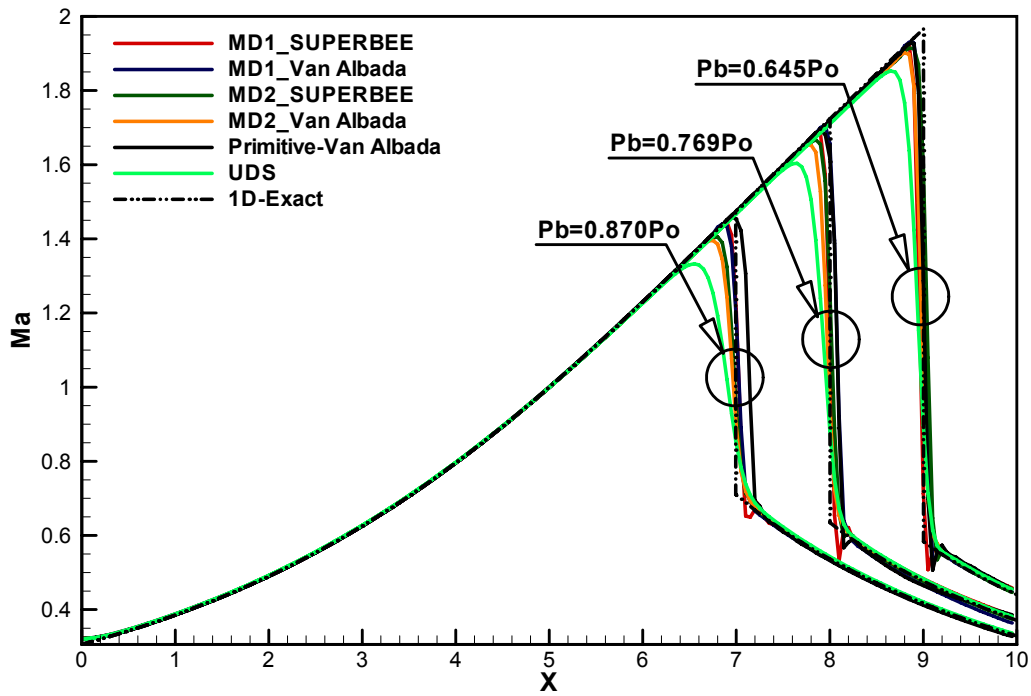


(a)

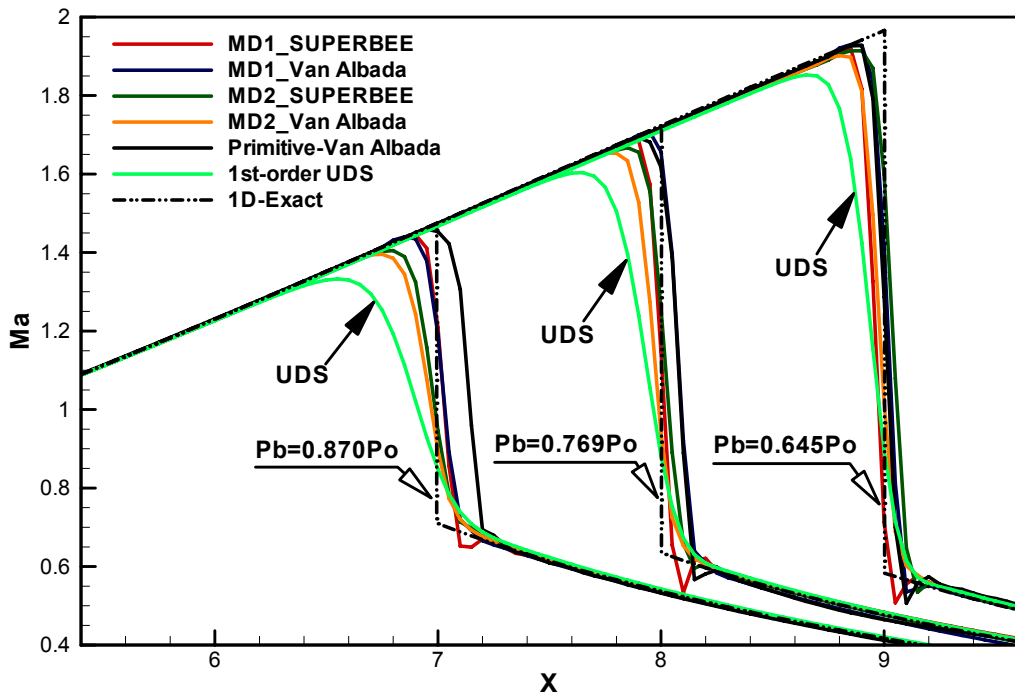


(b)

圖 7-148：C-D 噴嘴內流場，梯度修正 1 次之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈；(b)震波局部放大圖

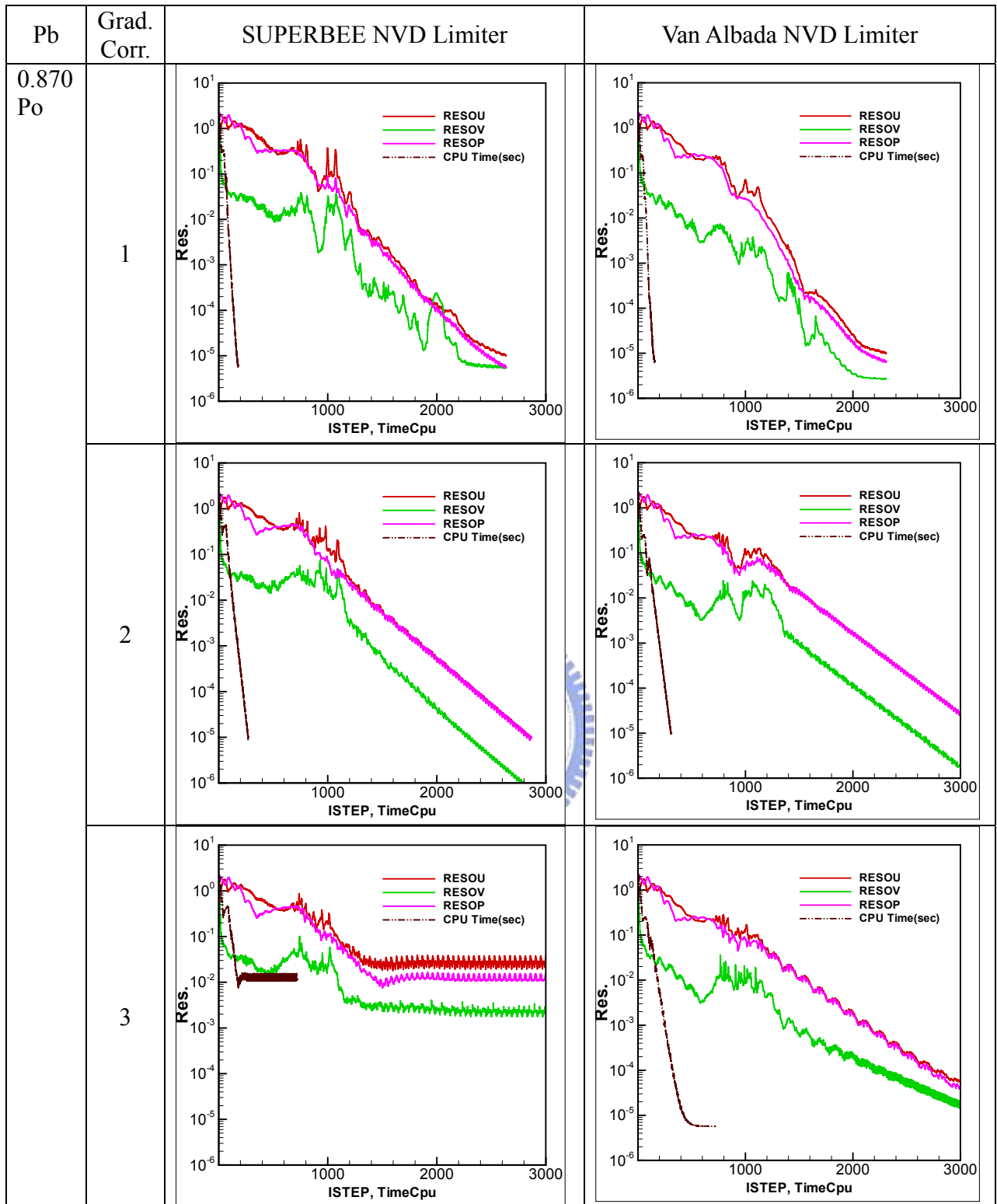


(a)

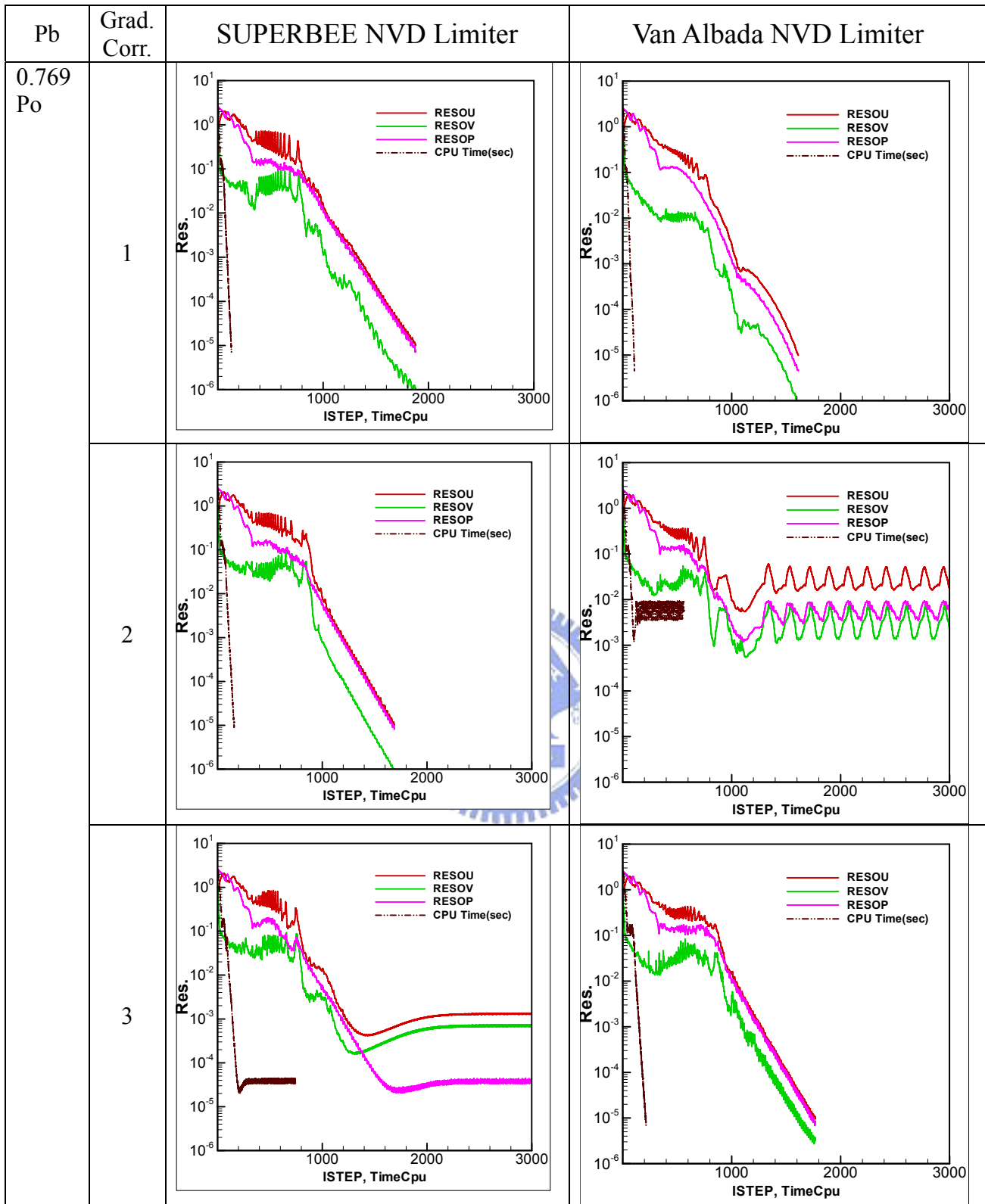


(b)

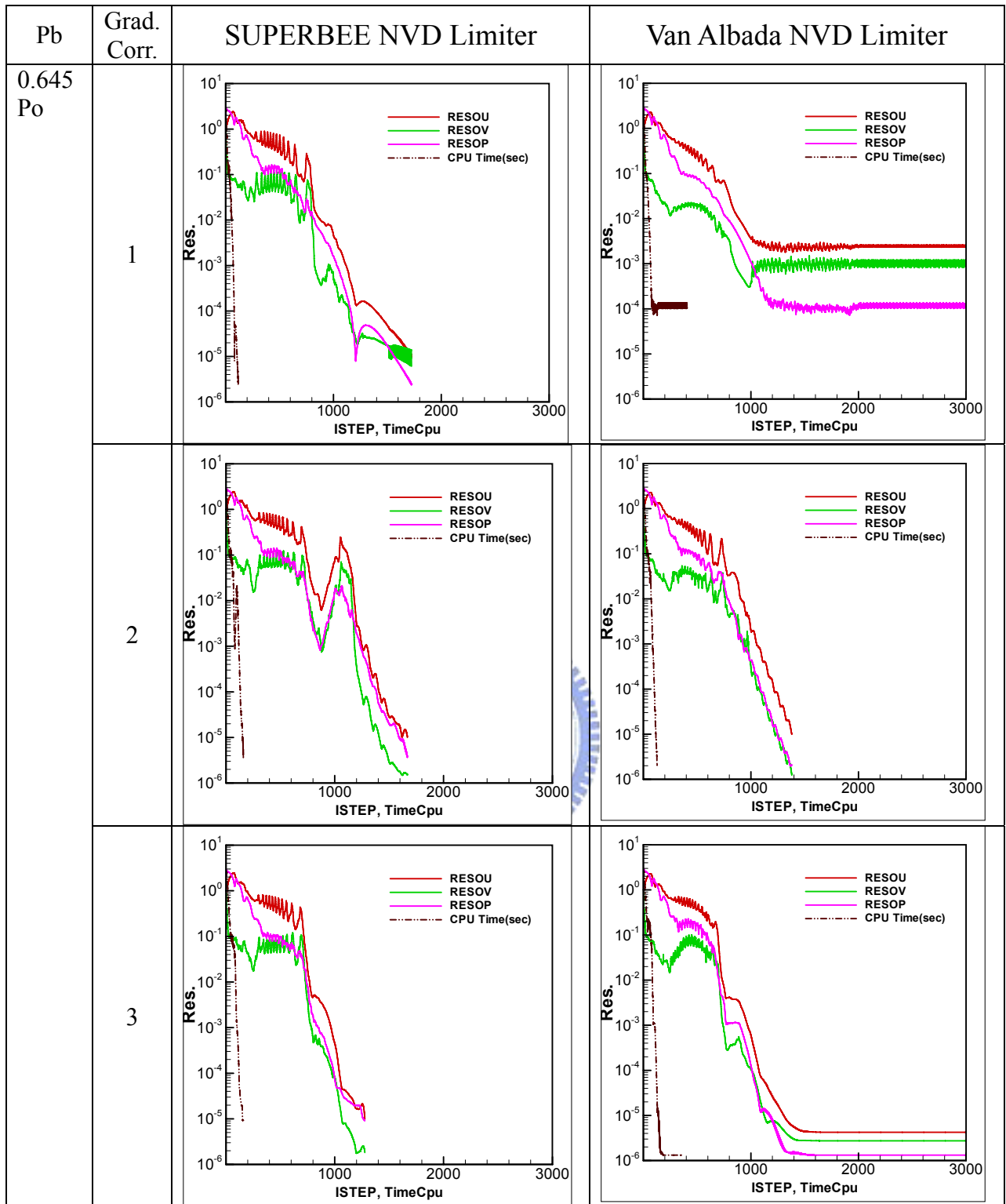
圖 7-149：C-D 噴嘴內流場，梯度修正 2 次之 SUPERBEE 與 Van Albada 限制函數法結果比較(a)噴嘴中心馬赫數分佈；(b)震波局部放大圖



(a)

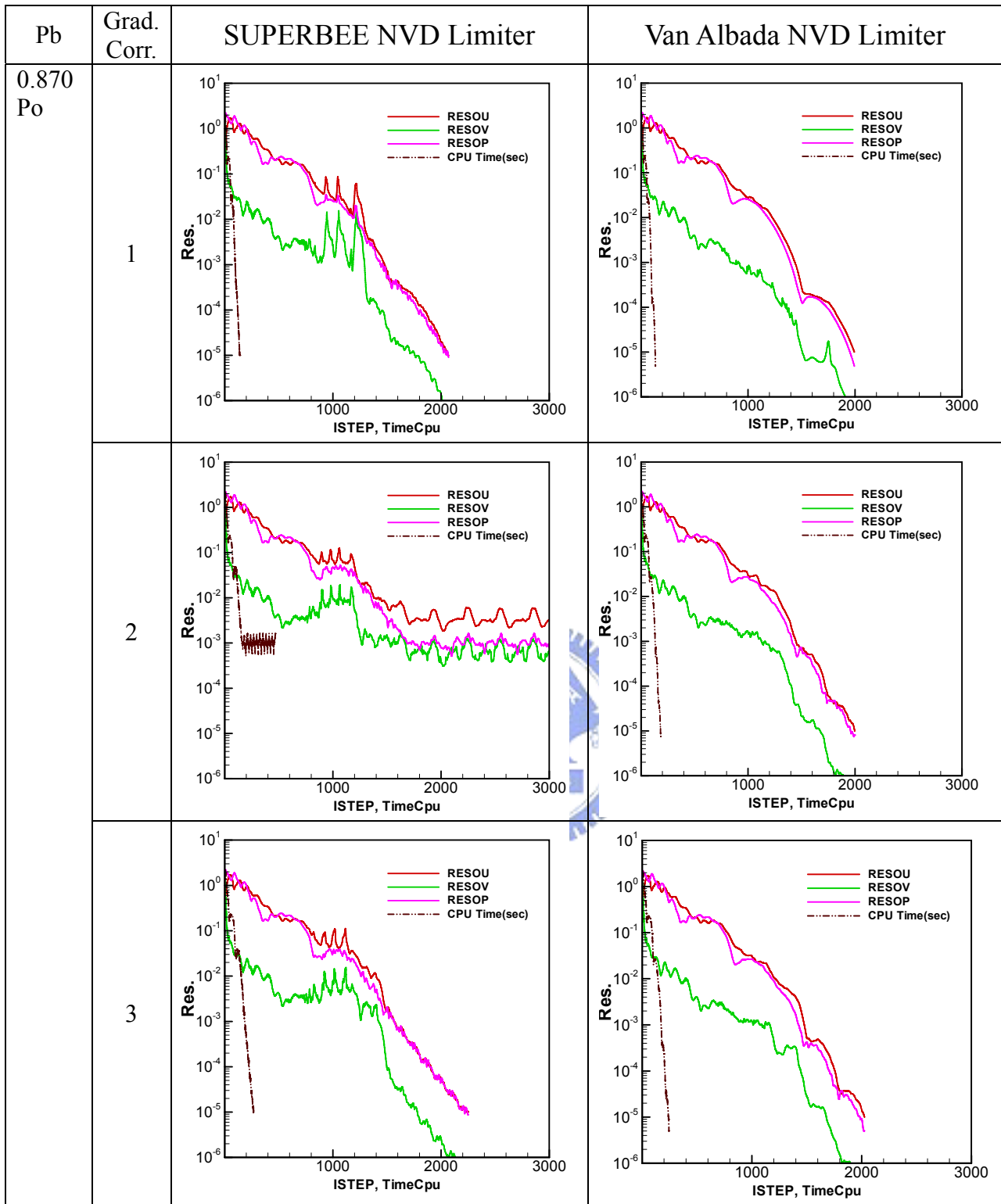


(b)

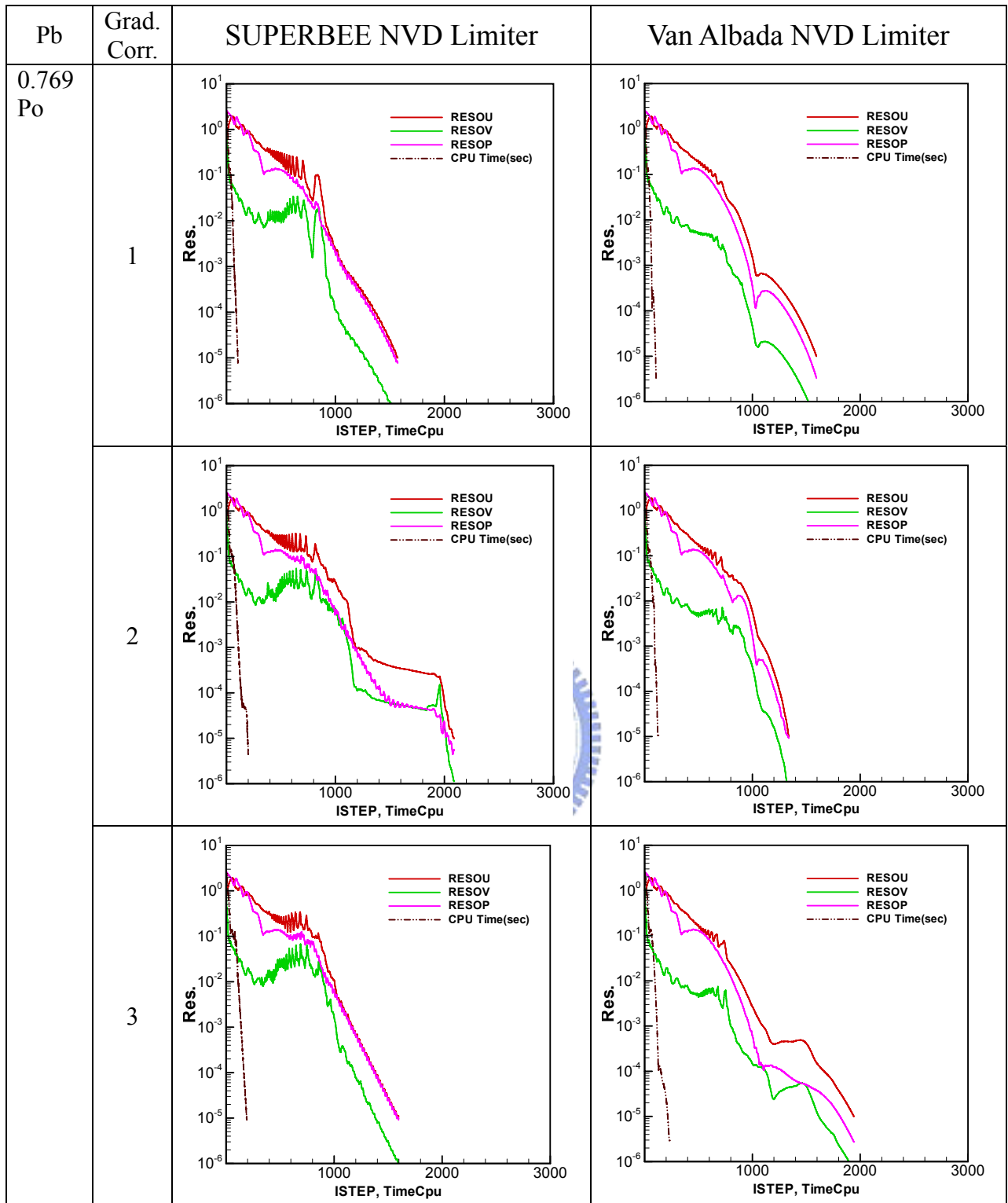


(c)

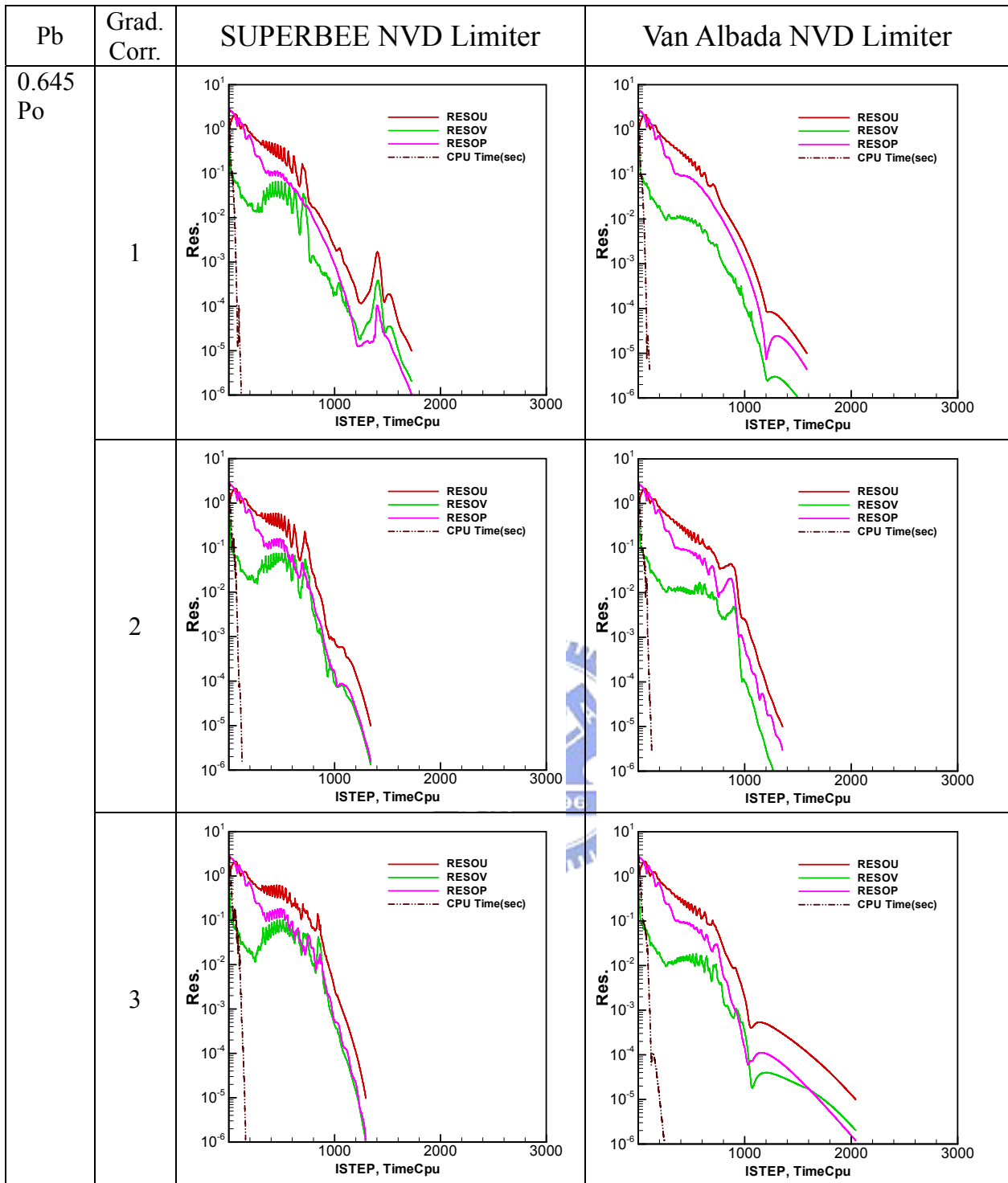
圖 7-150：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD1 之計算殘值比較(a) $P_b=0.870P_o$ ；
(b) $P_b=0.769P_o$ ；(c) $P_b=0.645P_o$



(a)



(b)



(c)

圖 7-151：C-D 噴嘴內流場，特徵變數 MD2，計算殘值比較(a)Pb=0.870Po；
(b)Pb=0.769Po；(c)Pb=0.645Po

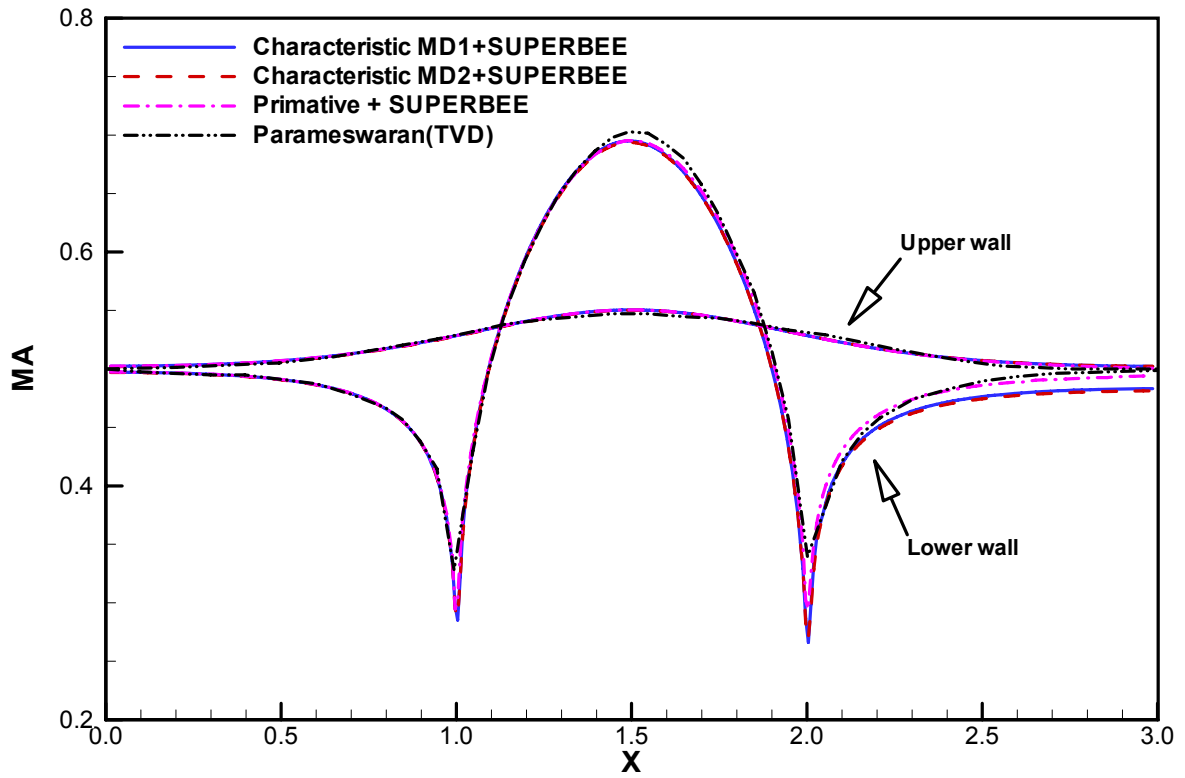


圖 7-152 : $M_{in}=0.5$ 次音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖

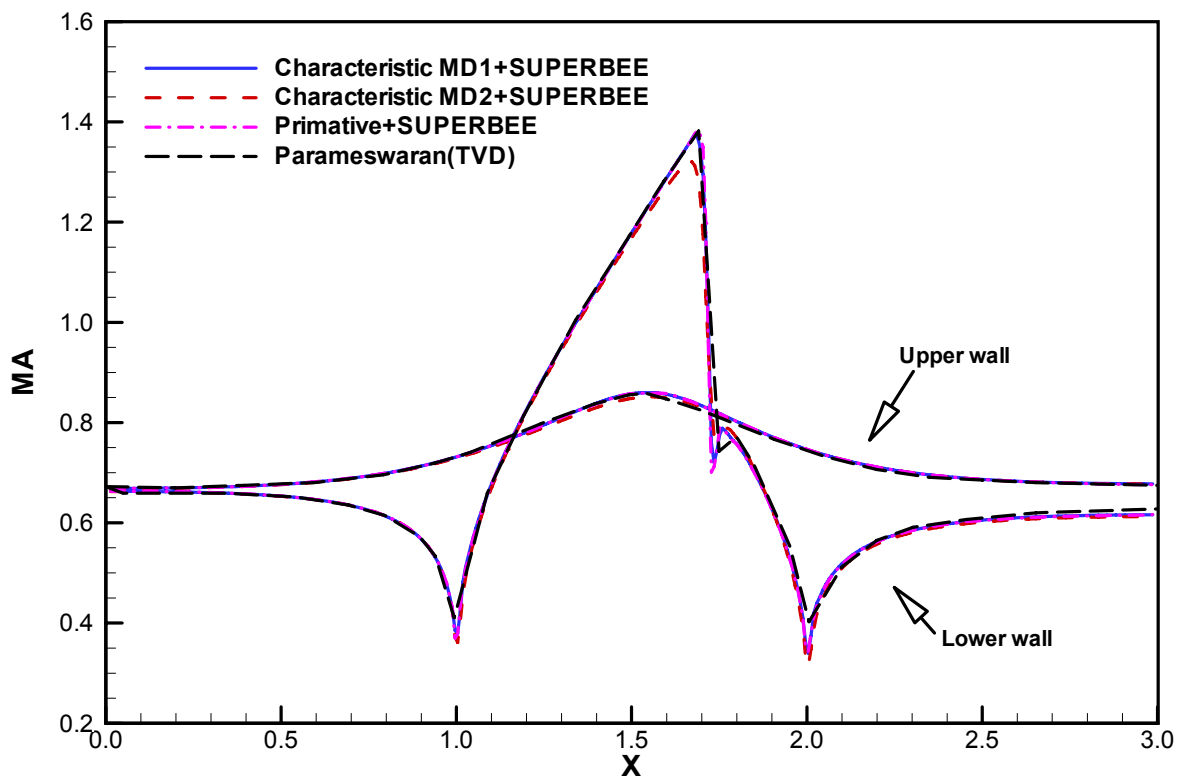


圖 7-153 : $M_{in}=0.675$ 穿音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖

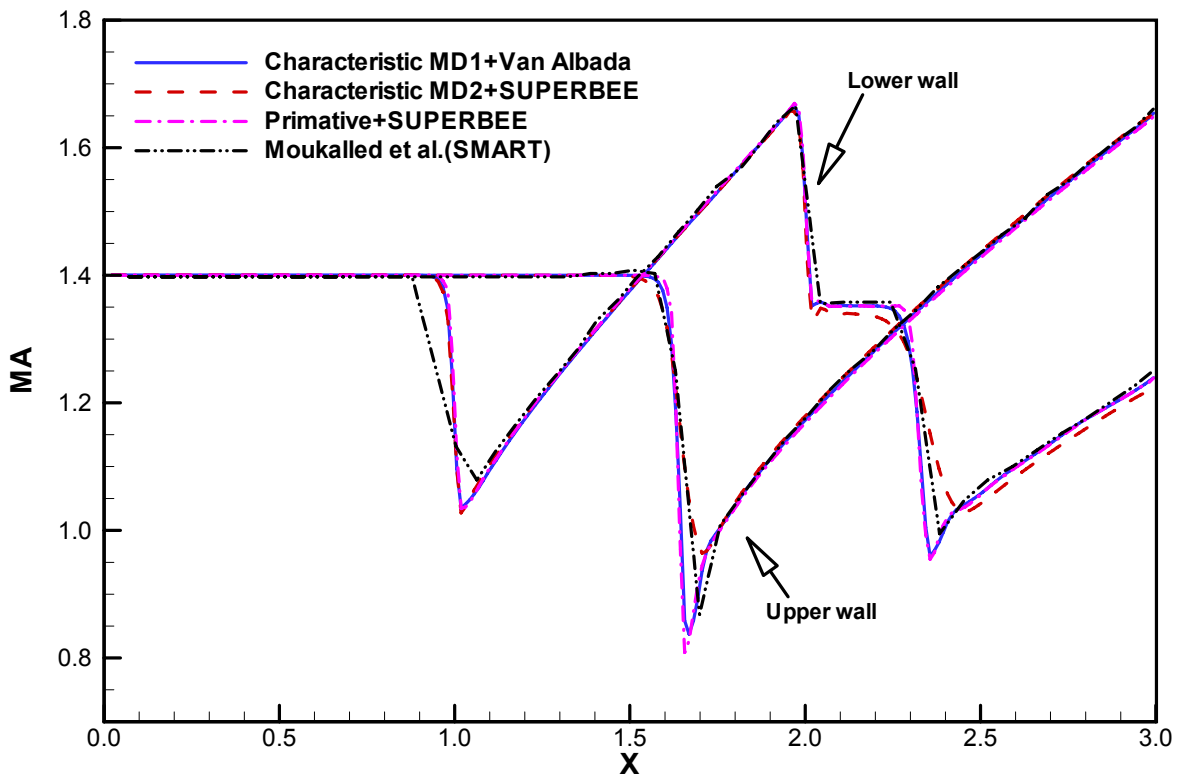


圖 7-154 : $M_{in}=1.4$ 超音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖

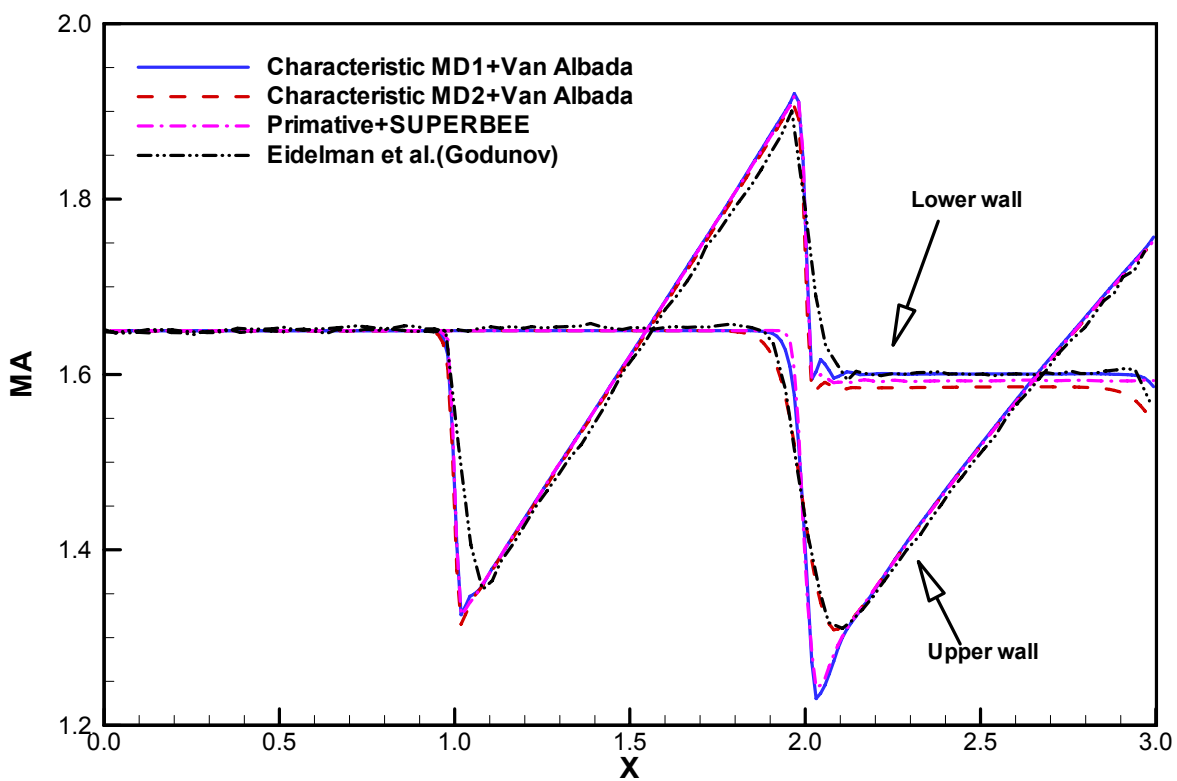


圖 7-155 : $M_{in}=1.65$ 超音速渠道流場壁面馬赫數分佈比較圖

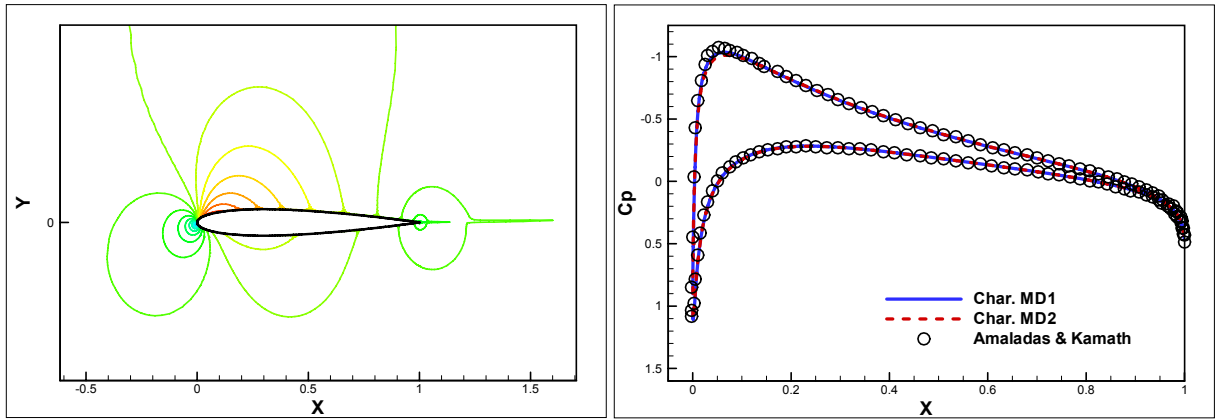


圖 7-156：NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$ ， $\alpha=2^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(特徵變數法，SUPERBEE 限制函數)

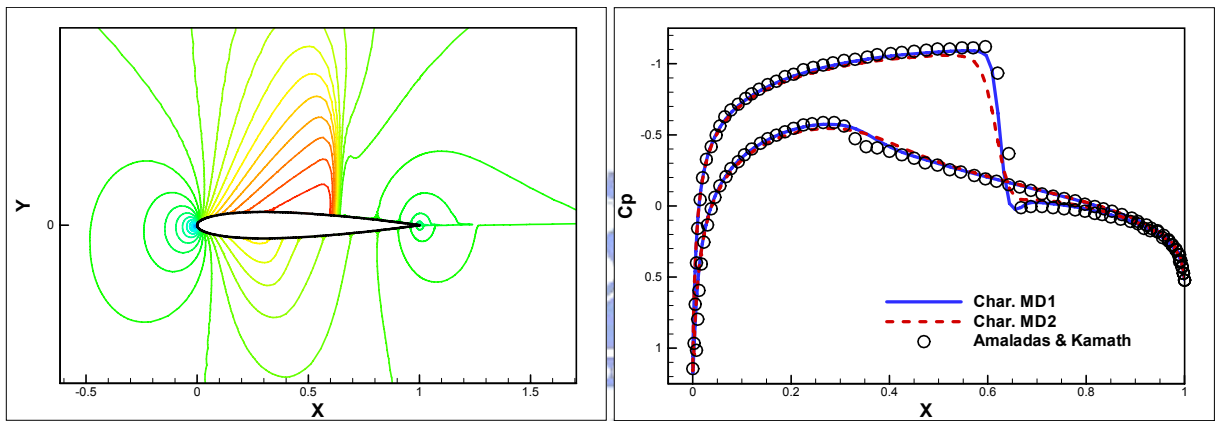


圖 7-157：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.8$ ， $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(特徵變數法，SUPERBEE 限制函數)

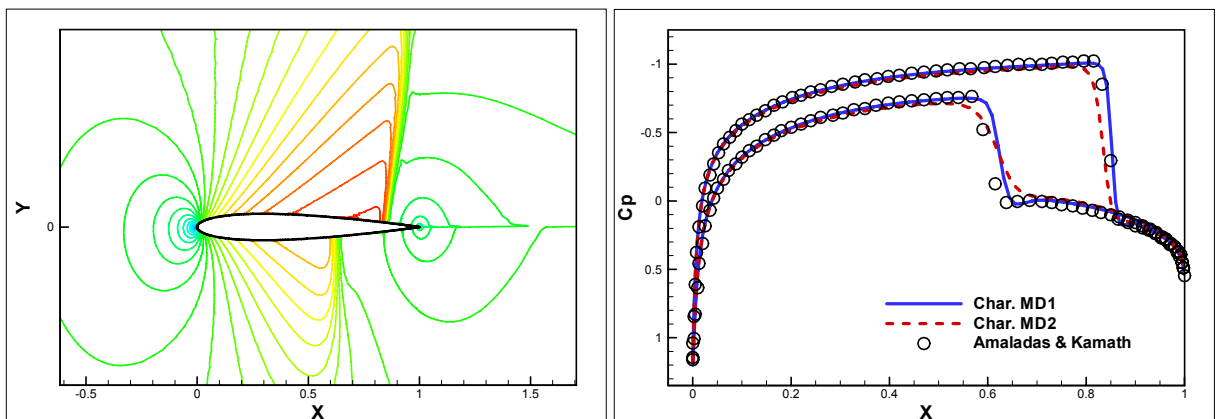


圖 7-158：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(特徵變數法，SUPERBEE 限制函數)

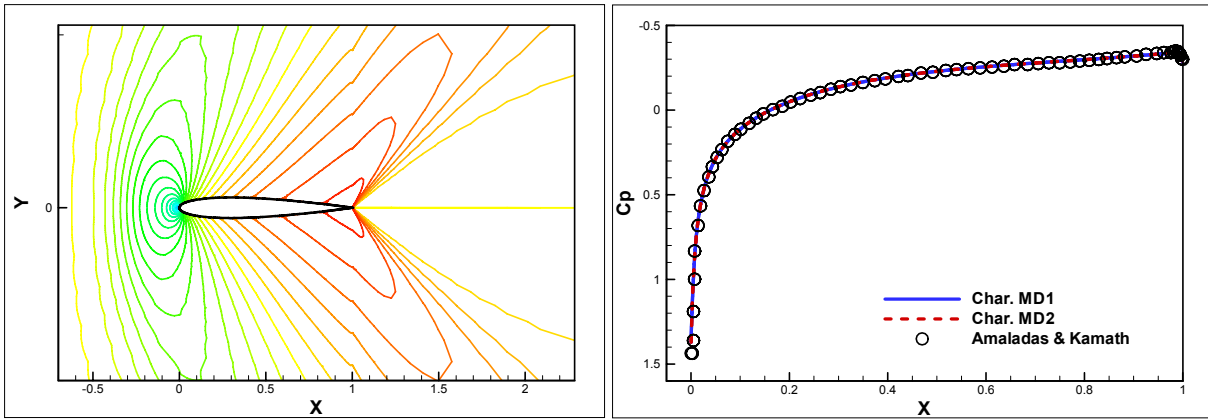


圖 7-159：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.2$ ， $\alpha=0.0^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(特徵變數法，SUPERBEE 限制函數)

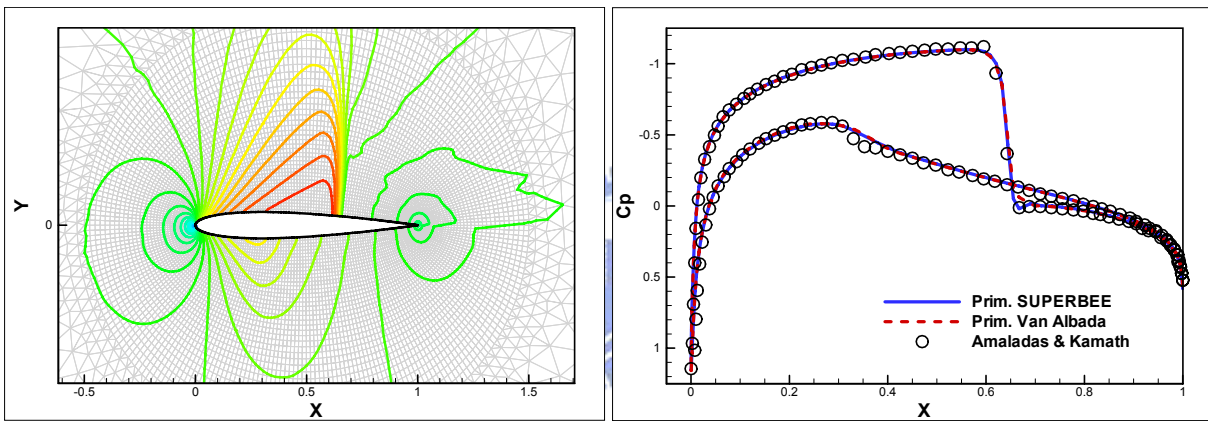


圖 7-160：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(原始變數限制函數法)

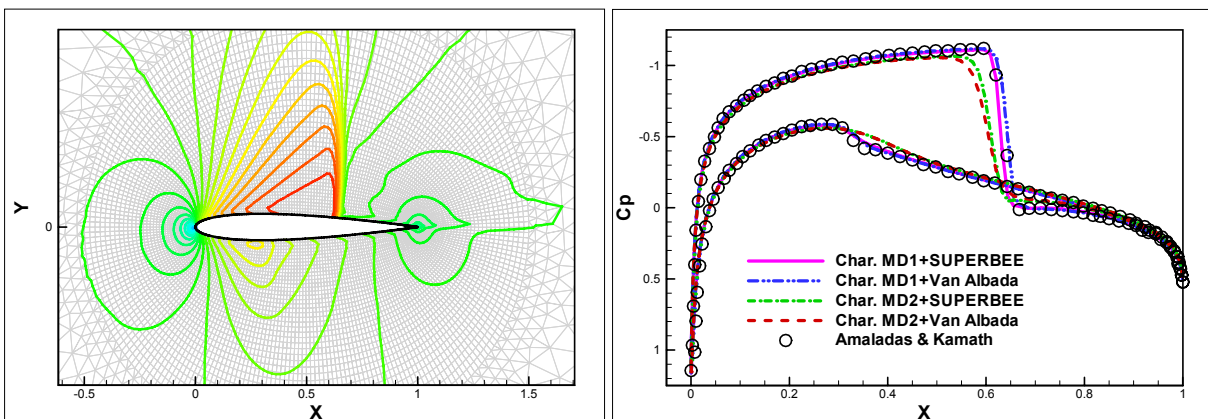


圖 7-161：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(特徵變數限制函數法)

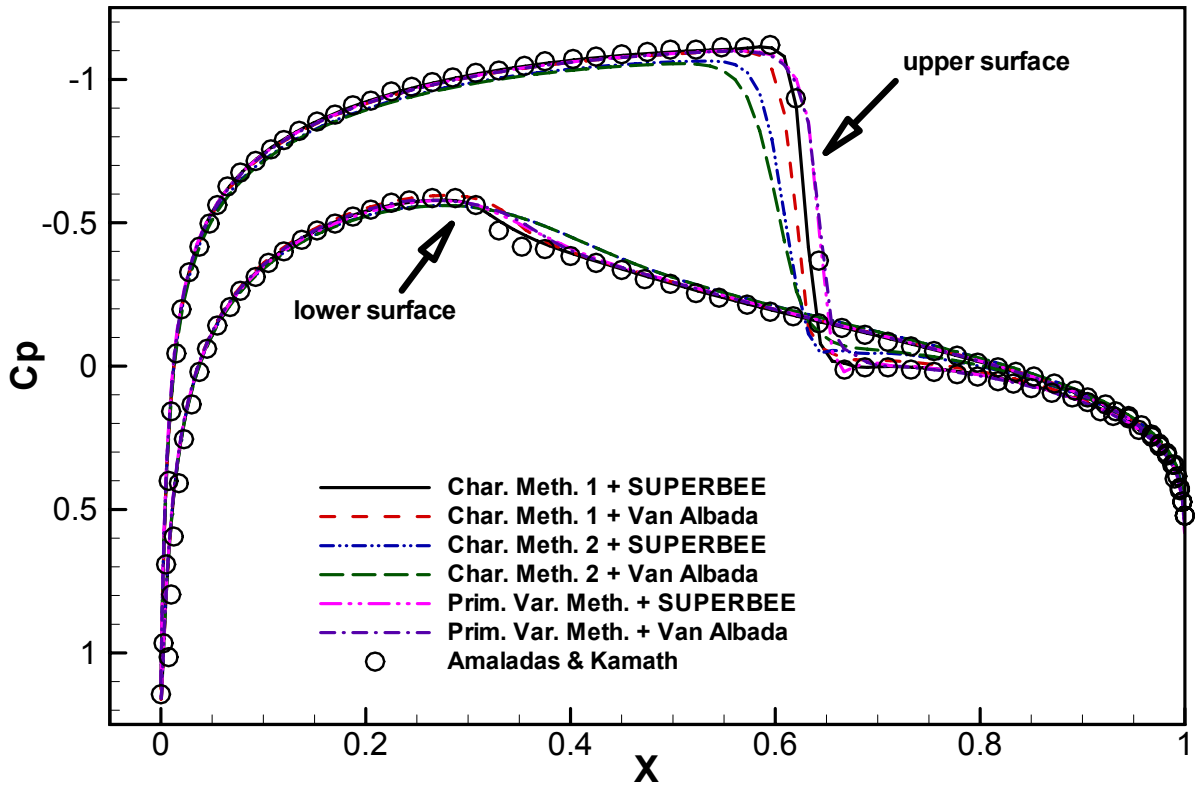


圖 7-162：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ，原始變數及特徵變數通量限制法之翼表面壓力分佈比較圖

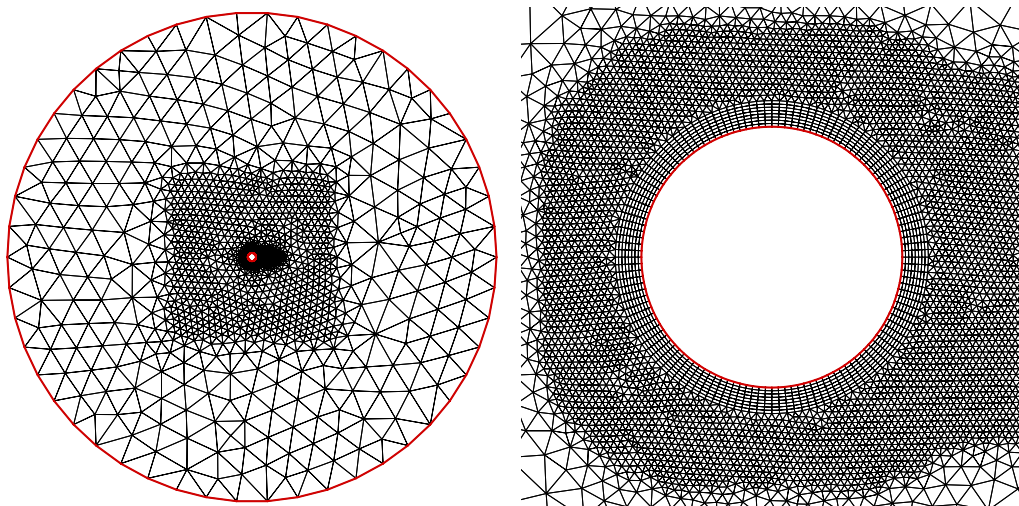


圖 7-163：圓柱外流場四邊形(128×8 CV)與三邊形(18556 CV)混合網格

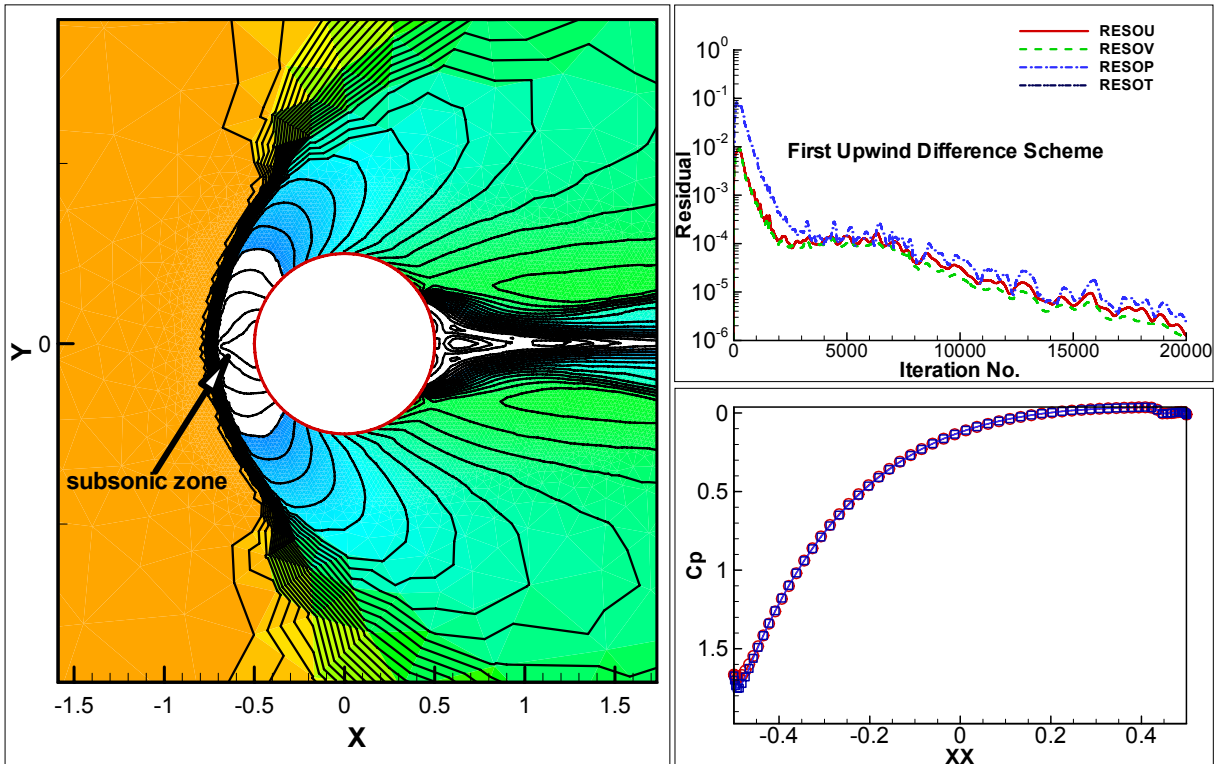


圖 7-164： $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場，原始變數 UDS 法(a)馬赫數等值圖；(b) 殘值收斂情形；(c)圓柱表面之壓力分佈

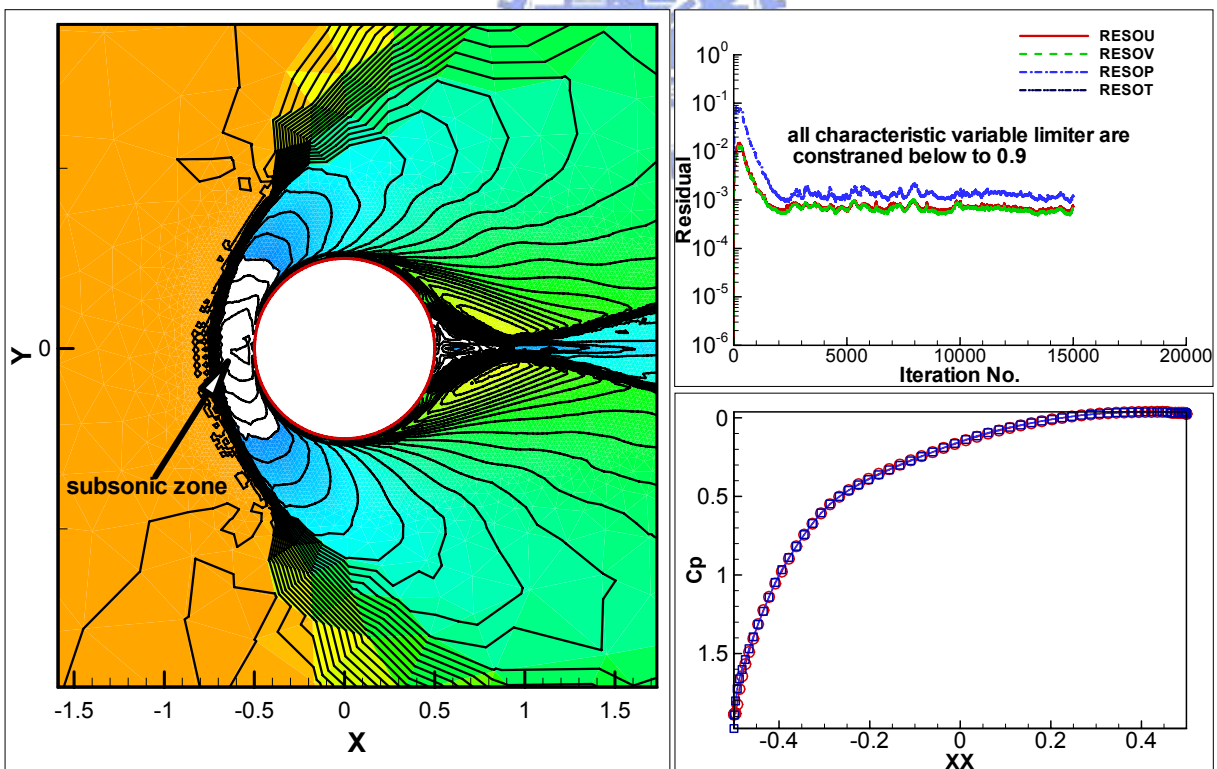


圖 7-165： $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場，特徵變數 MD1, $dm=0.9$ (a)馬赫數等值圖；(b) 殘值收斂情形；(c)圓柱表面之壓力分佈

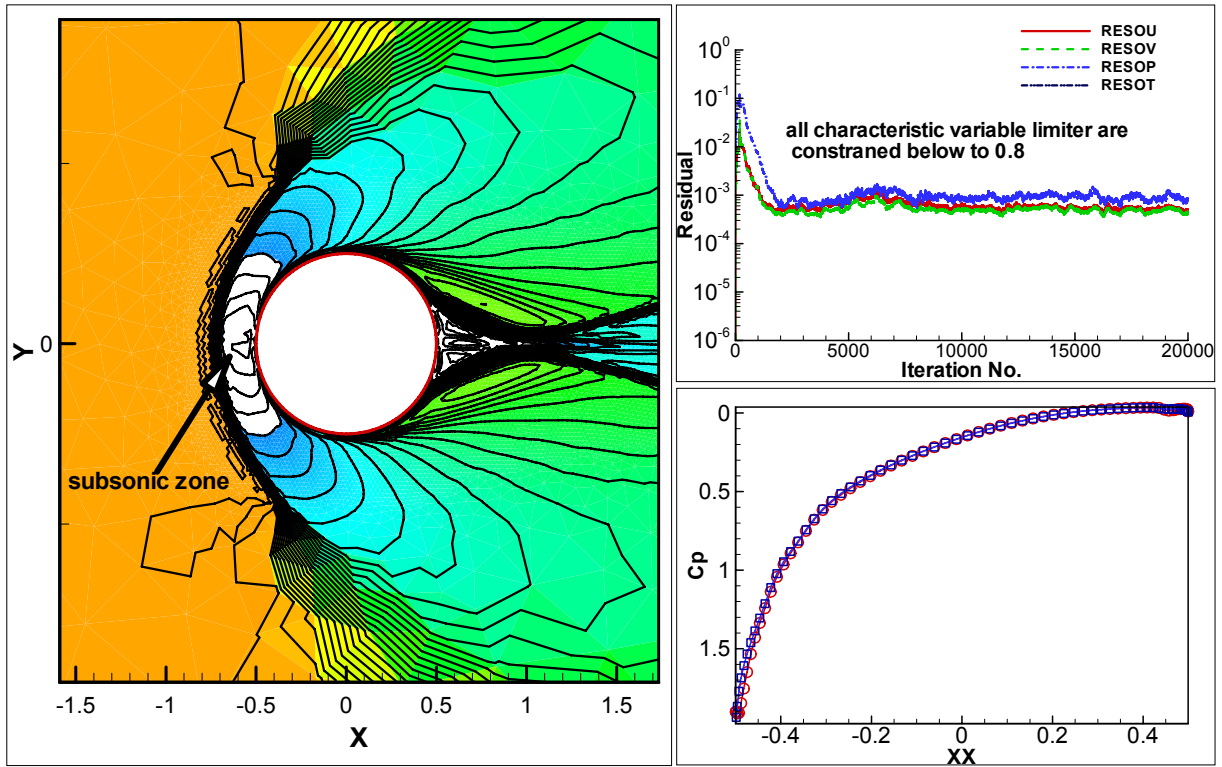


圖 7-166： $M_\infty=6$ 超音速圓柱外流場，特徵變數 MD2, $d_m=0.8$ (a)馬赫數等值圖；(b) 殘值收斂情形；(c)圓柱表面之壓力分佈。

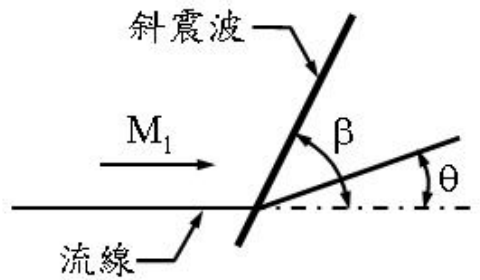


圖 7-167：斜震波示意圖

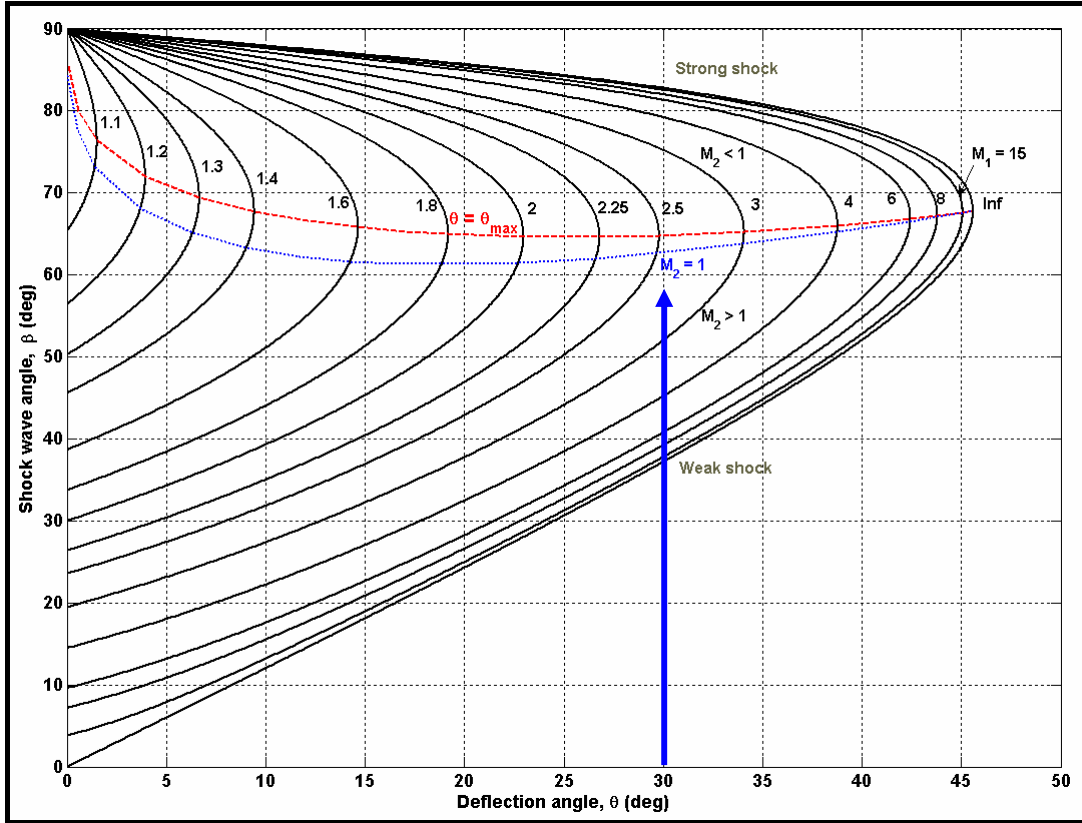


圖 7-168：斜震波 θ - β - M 關係圖(摘自 Wikipedia 網站)

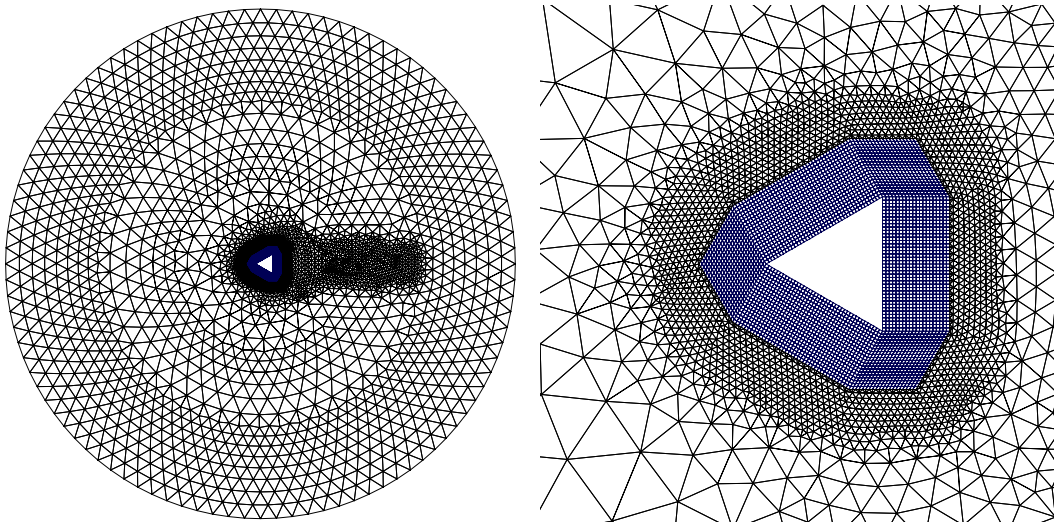


圖 7-169：三角柱外流場計算網格

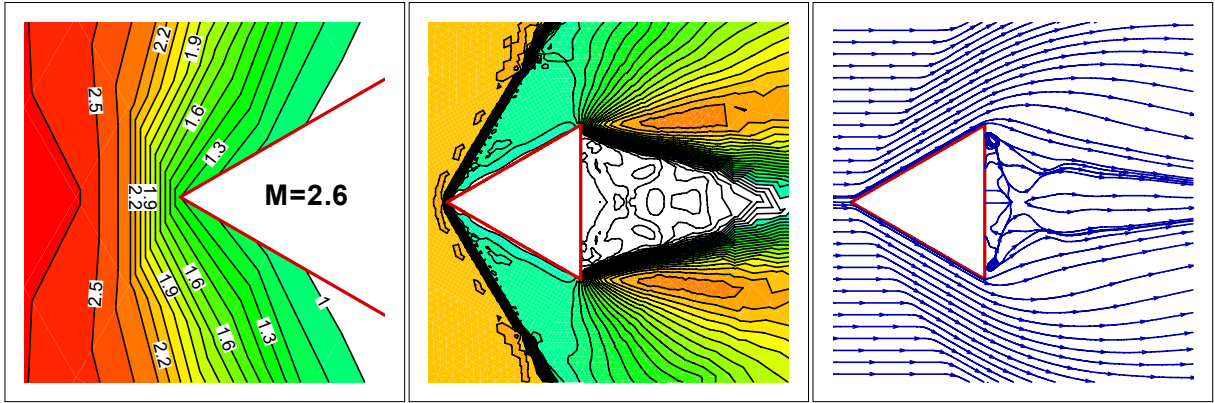


圖 7-170： $M_\infty=2.6$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

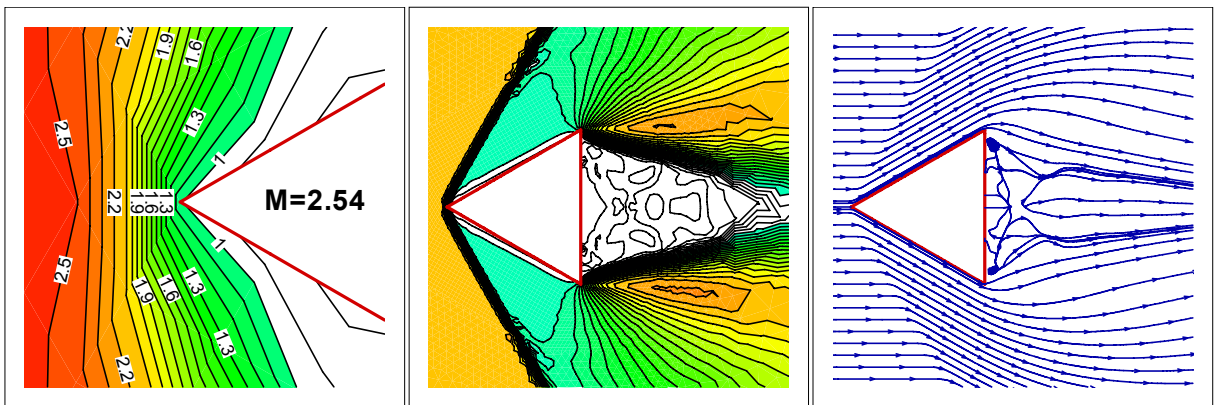


圖 7-171： $M_\infty=2.54$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

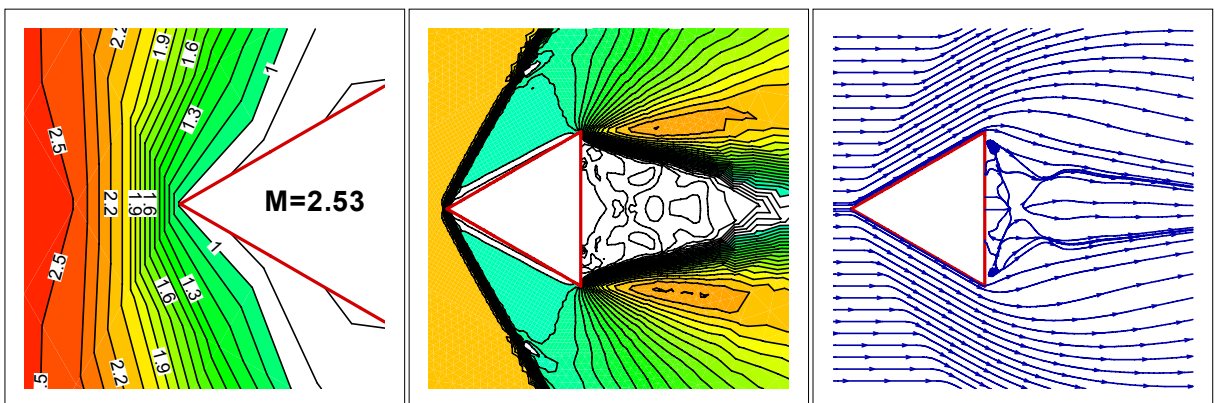


圖 7-172： $M_\infty=2.53$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

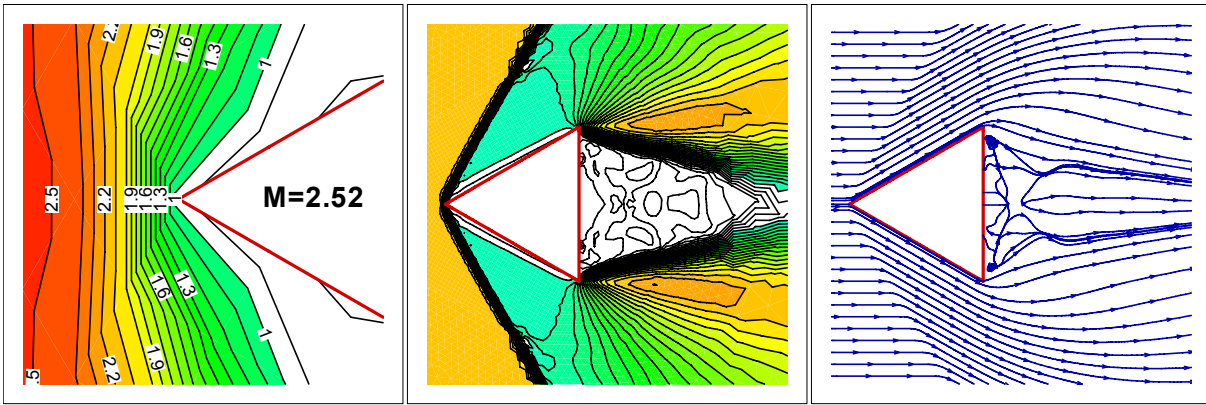


圖 7-173： $M_\infty=2.52$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

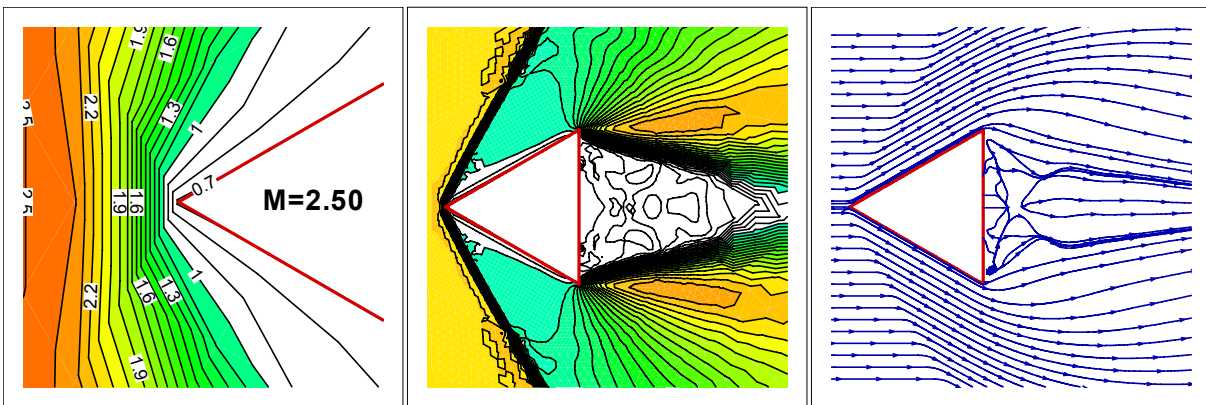


圖 7-174： $M_\infty=2.50$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

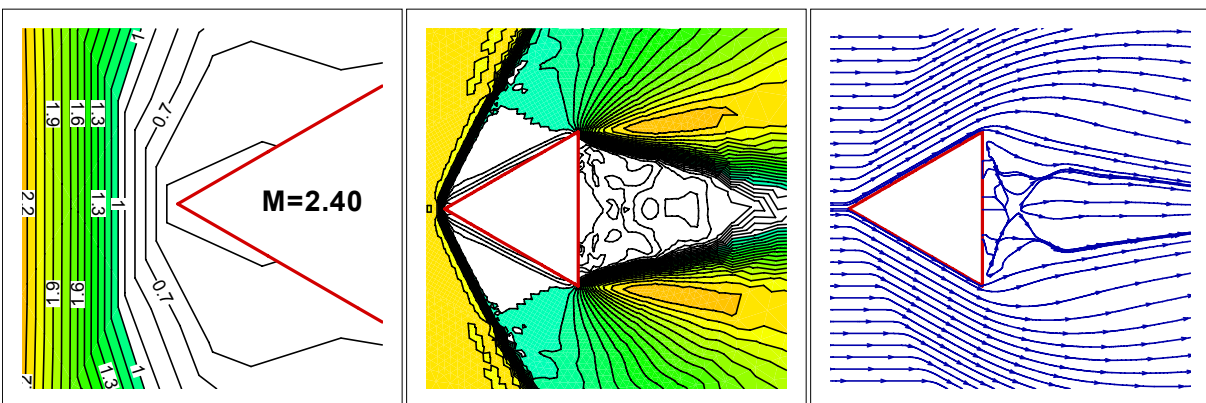


圖 7-175： $M_\infty=2.40$ 三角柱超音速流場(a)馬赫數等值圖局部放大圖；(b)馬赫數等值圖；(c)流線圖

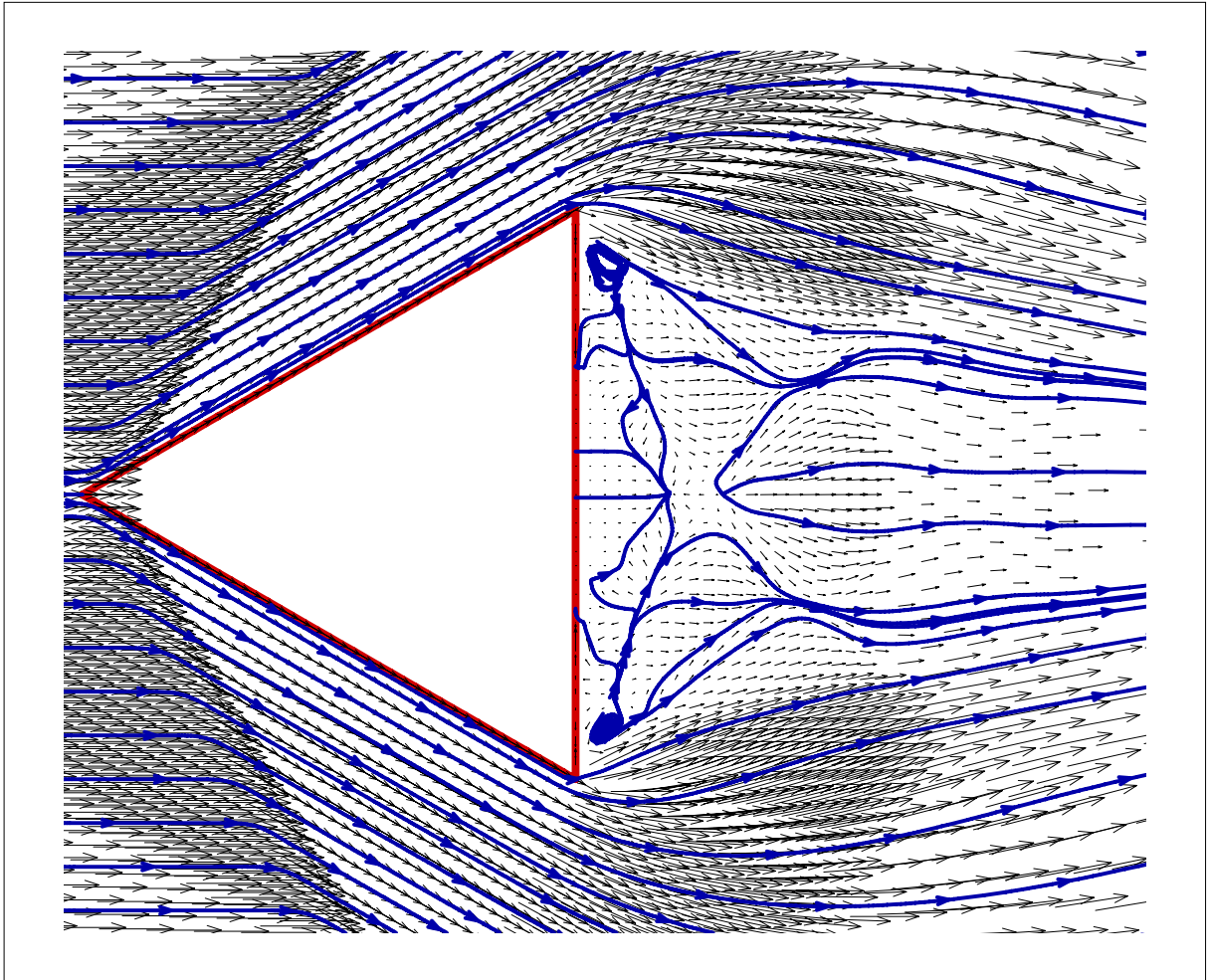


圖 7-176：三角柱附近流場之流線及速度向量分佈圖($M_\infty=2.53$)

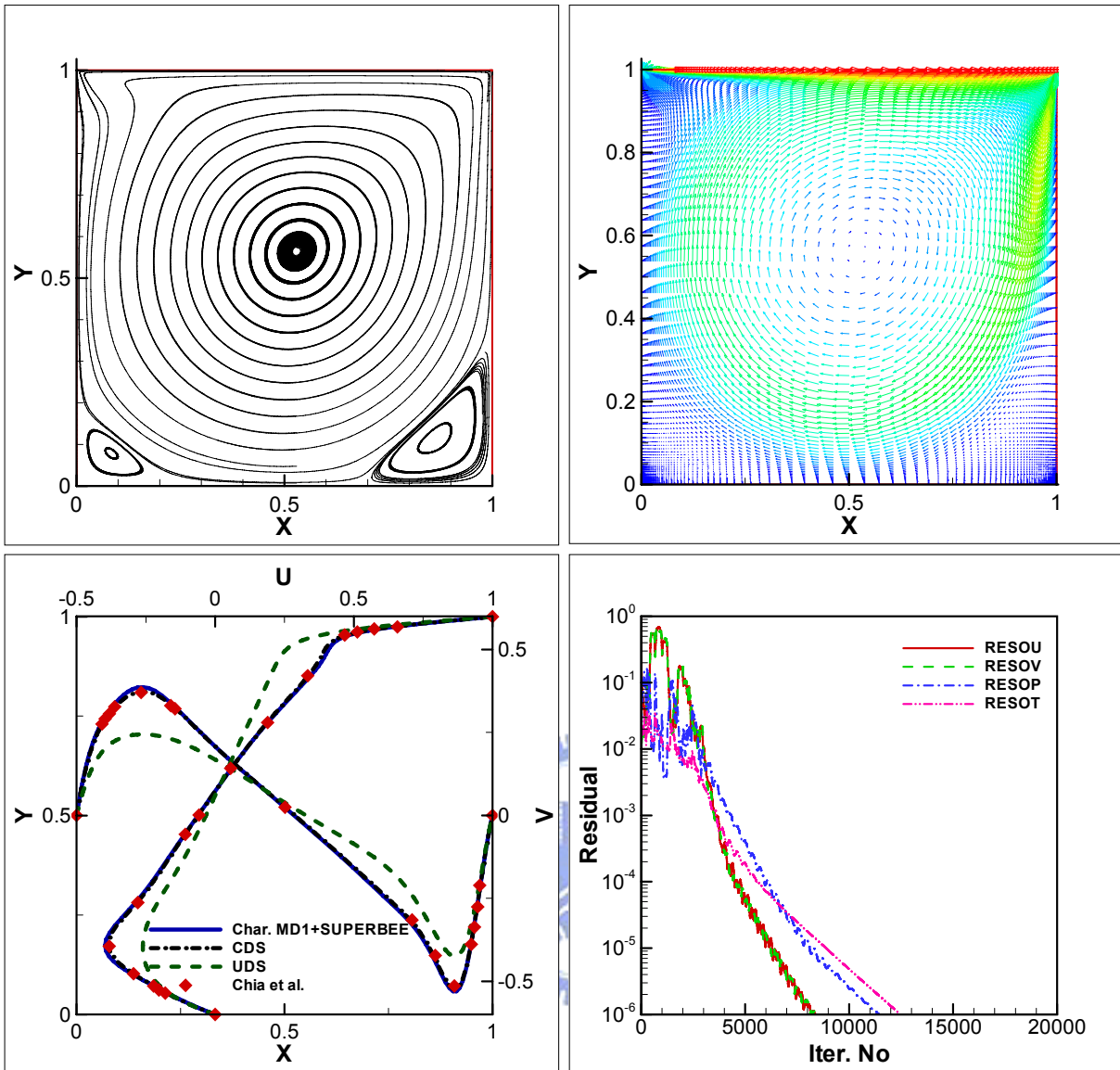


圖 7-177：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD-1, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)

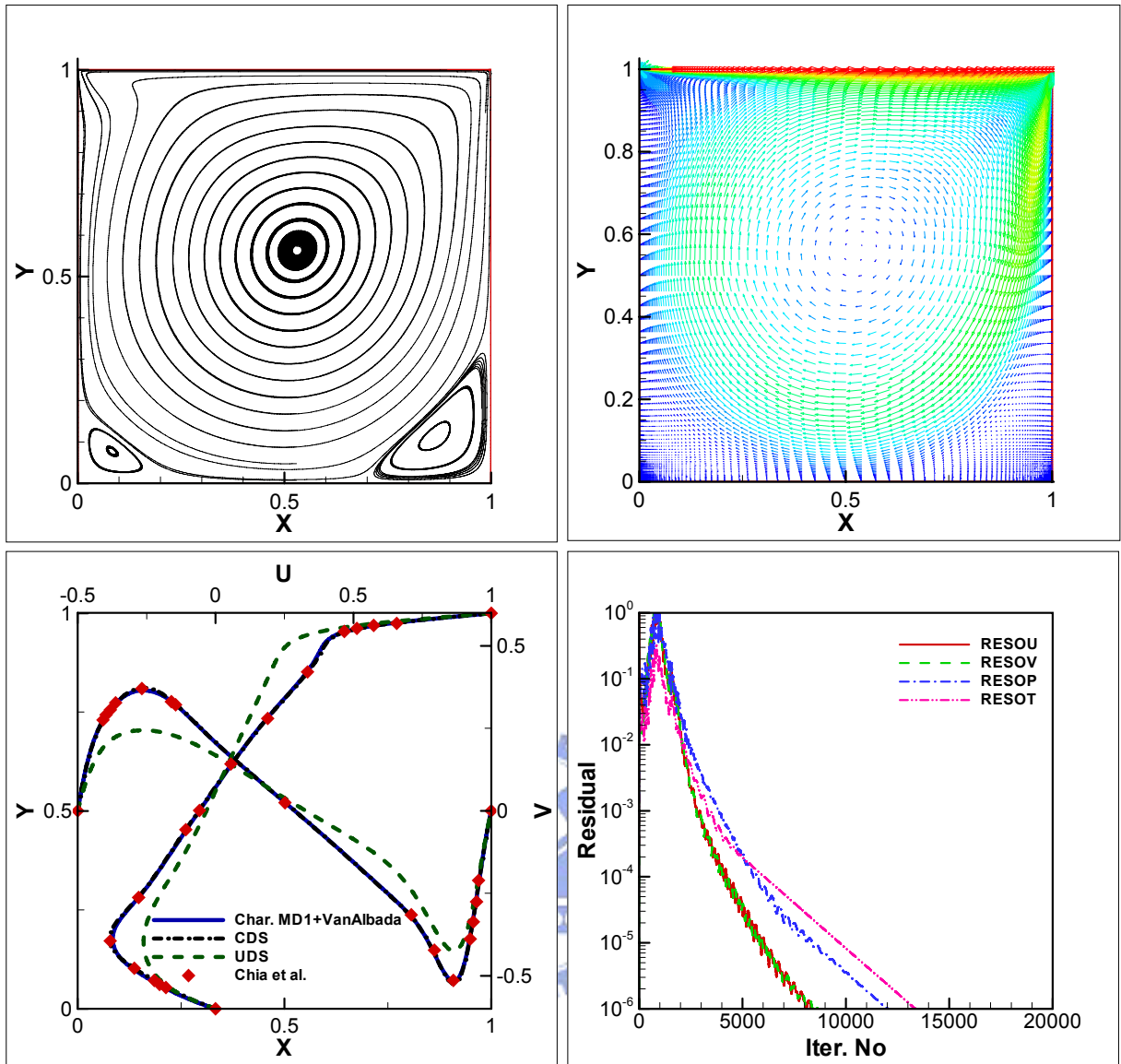


圖 7-178：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD-1, Van Albada 限制函數(a)流線圖；
 (b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形 (QUSG)

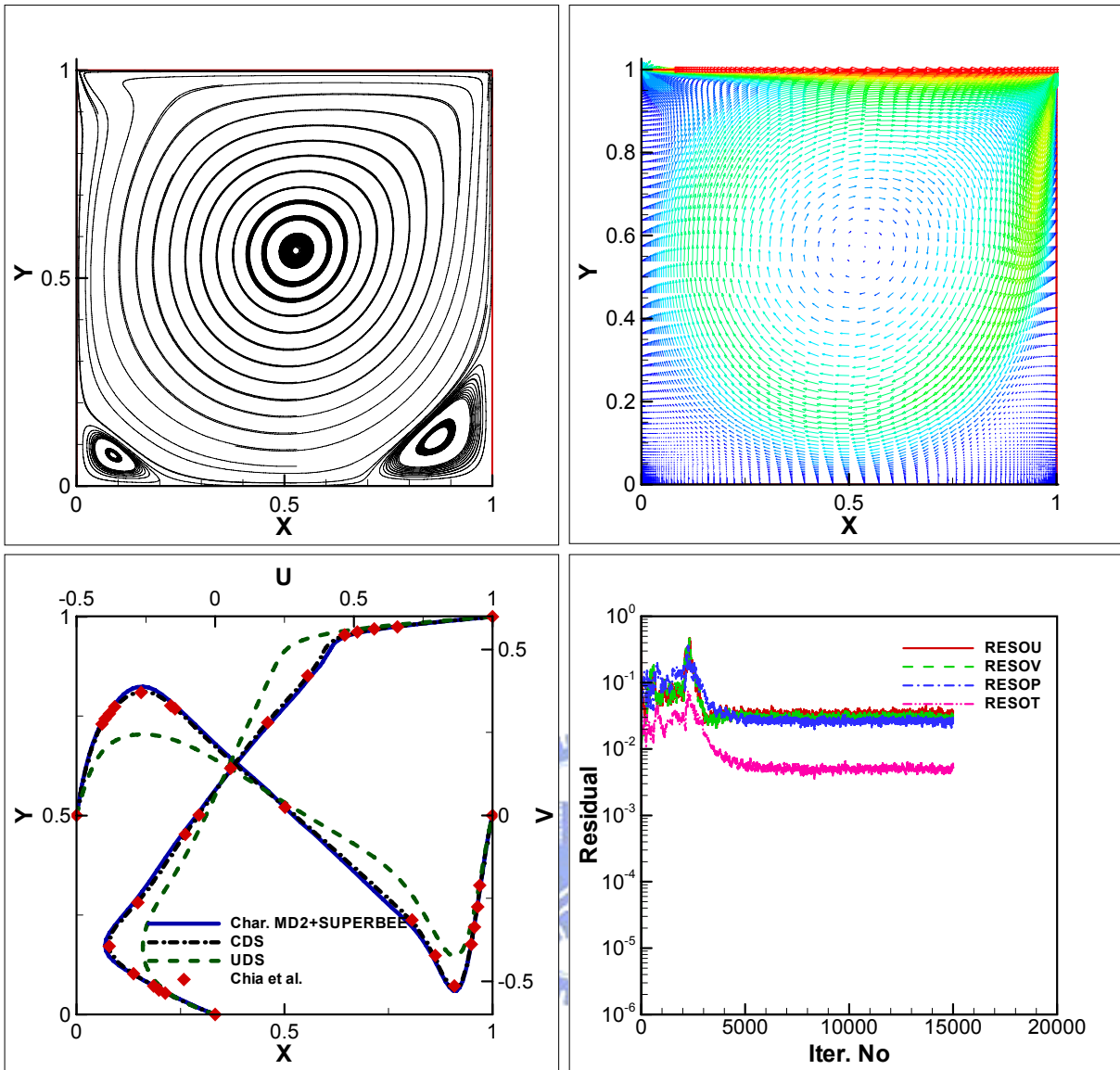


圖 7-179：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD-2, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)

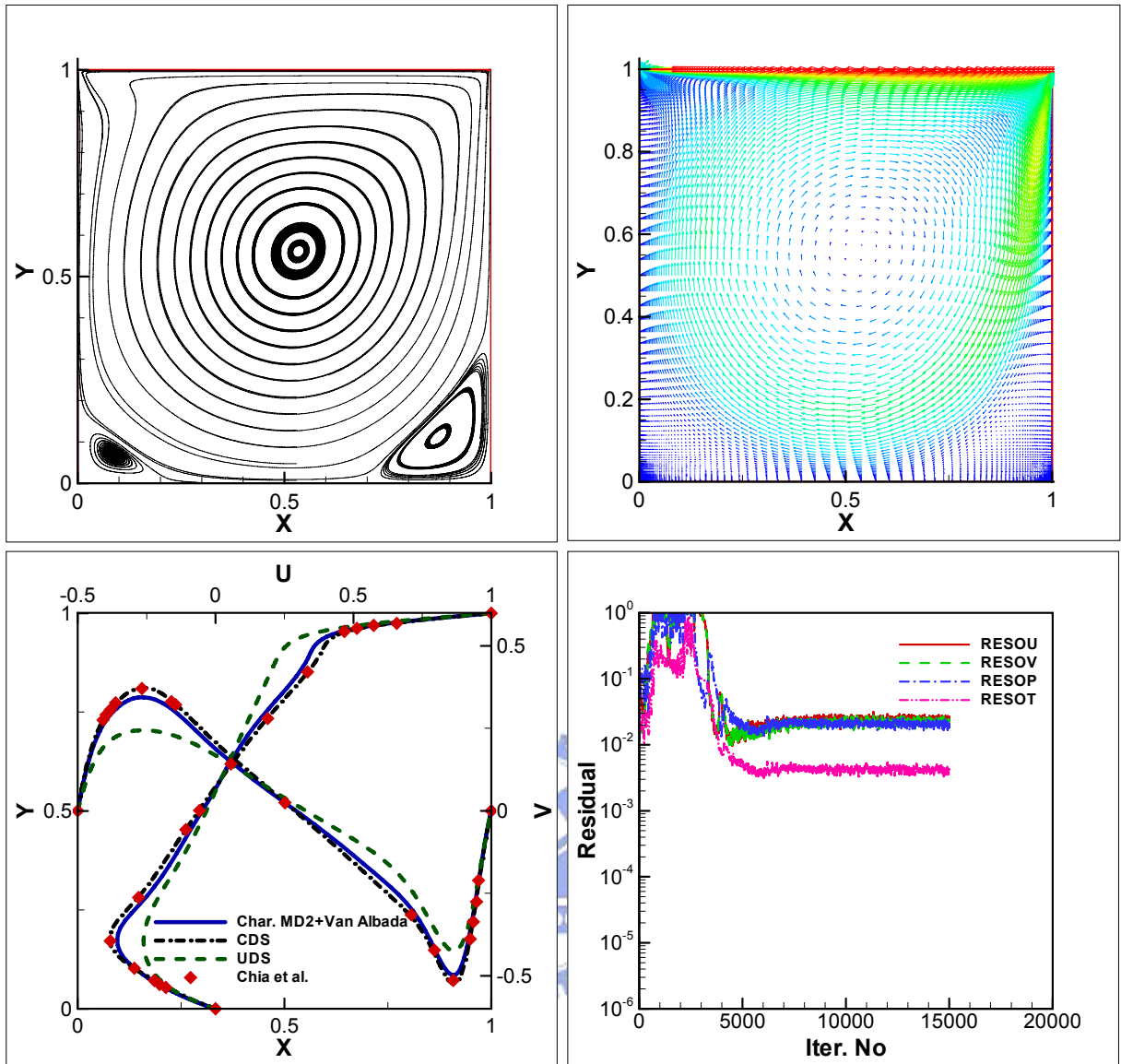


圖 7-180：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD-2, Van Albada (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(QUSG)

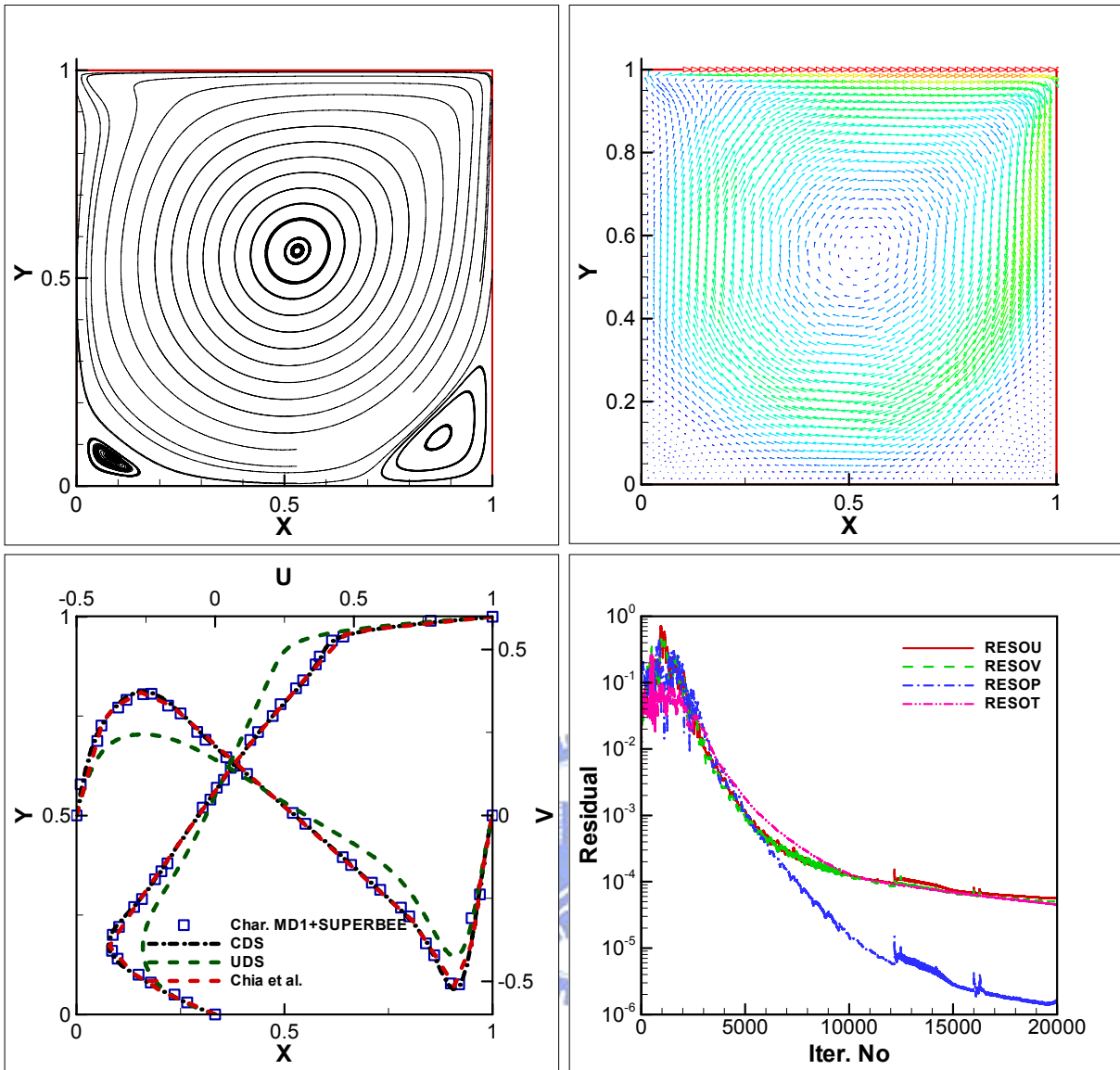


圖 7-181：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c)x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)

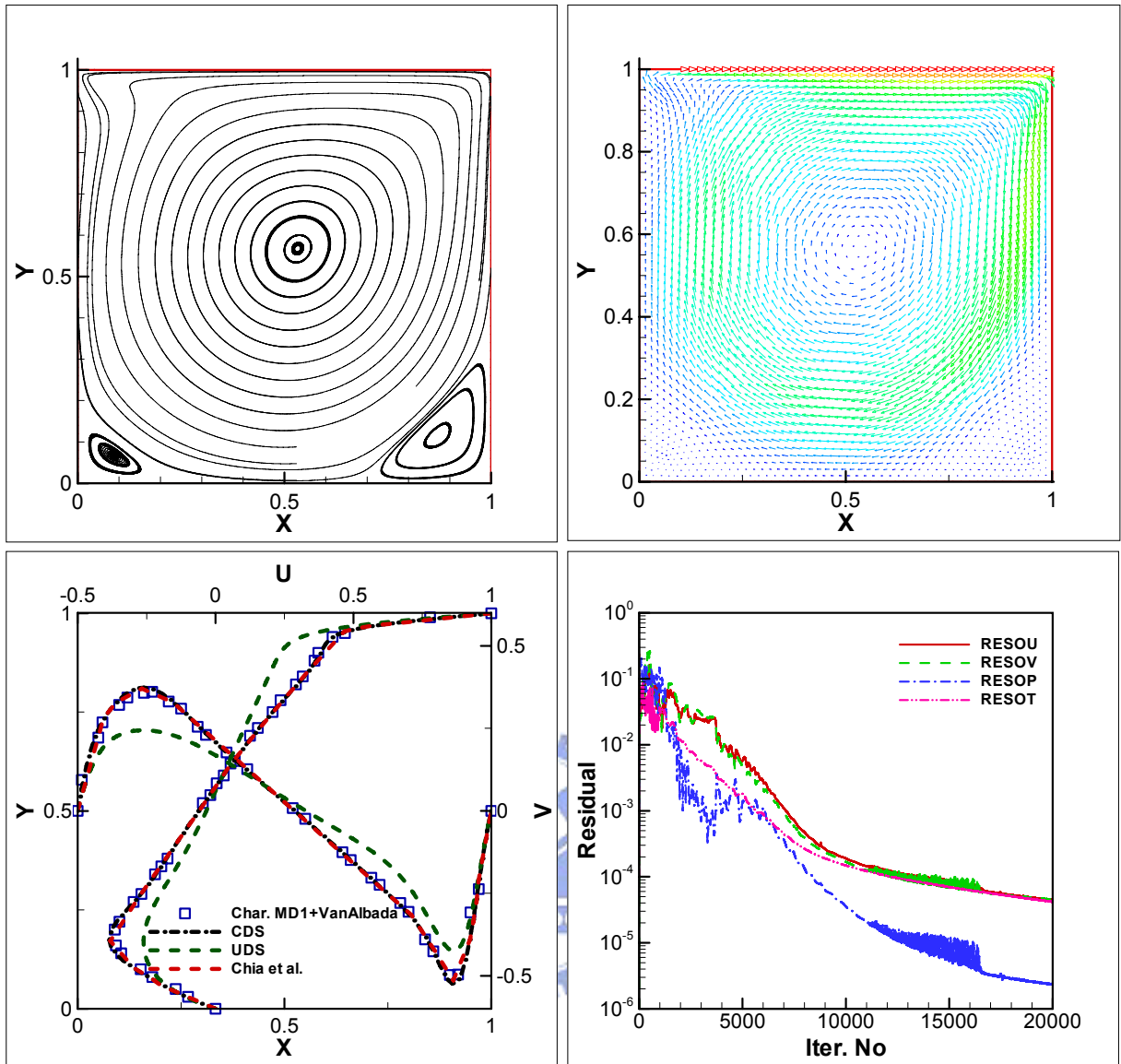


圖 7-182：穴流 $Re=1000$ ，特徵變數 MD1, Van Albada (a)流線圖；(b)速度向量分佈圖；(c) x,y 中心截面速度分佈；(d)殘值收斂情形(TUSG)

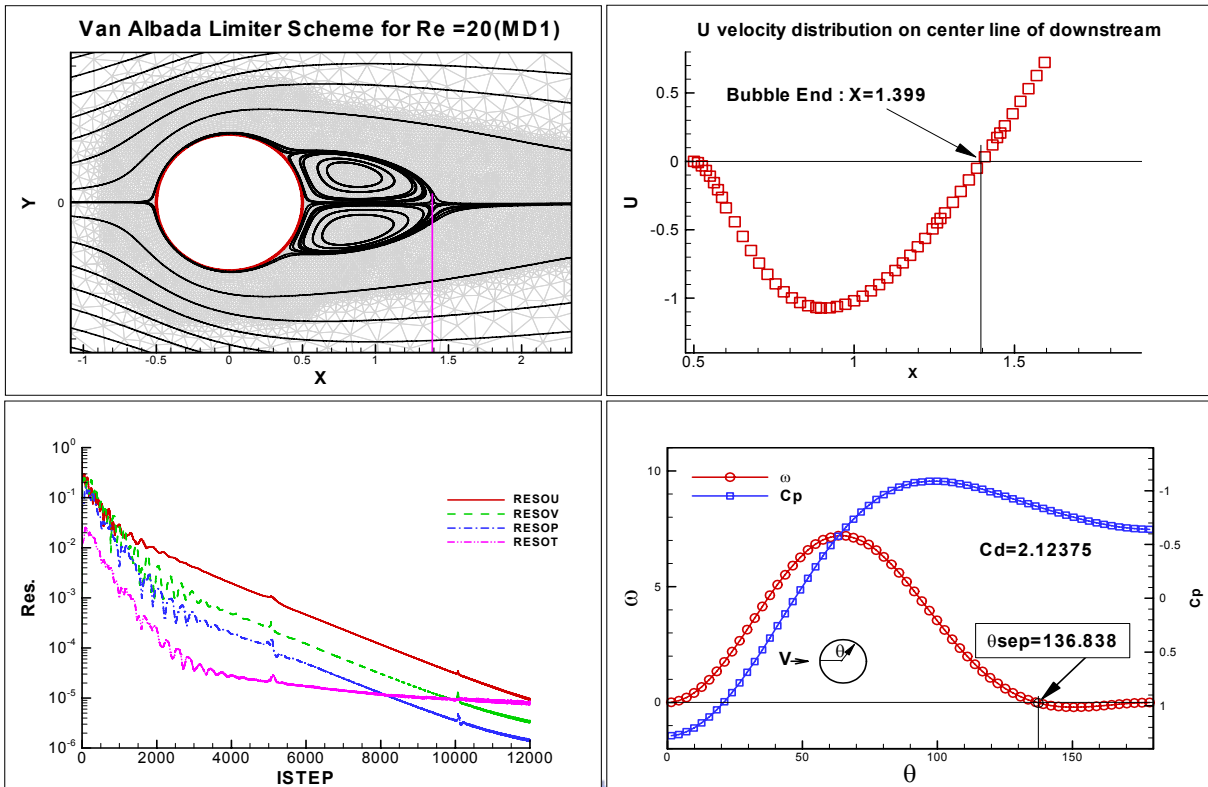


圖 7-183：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

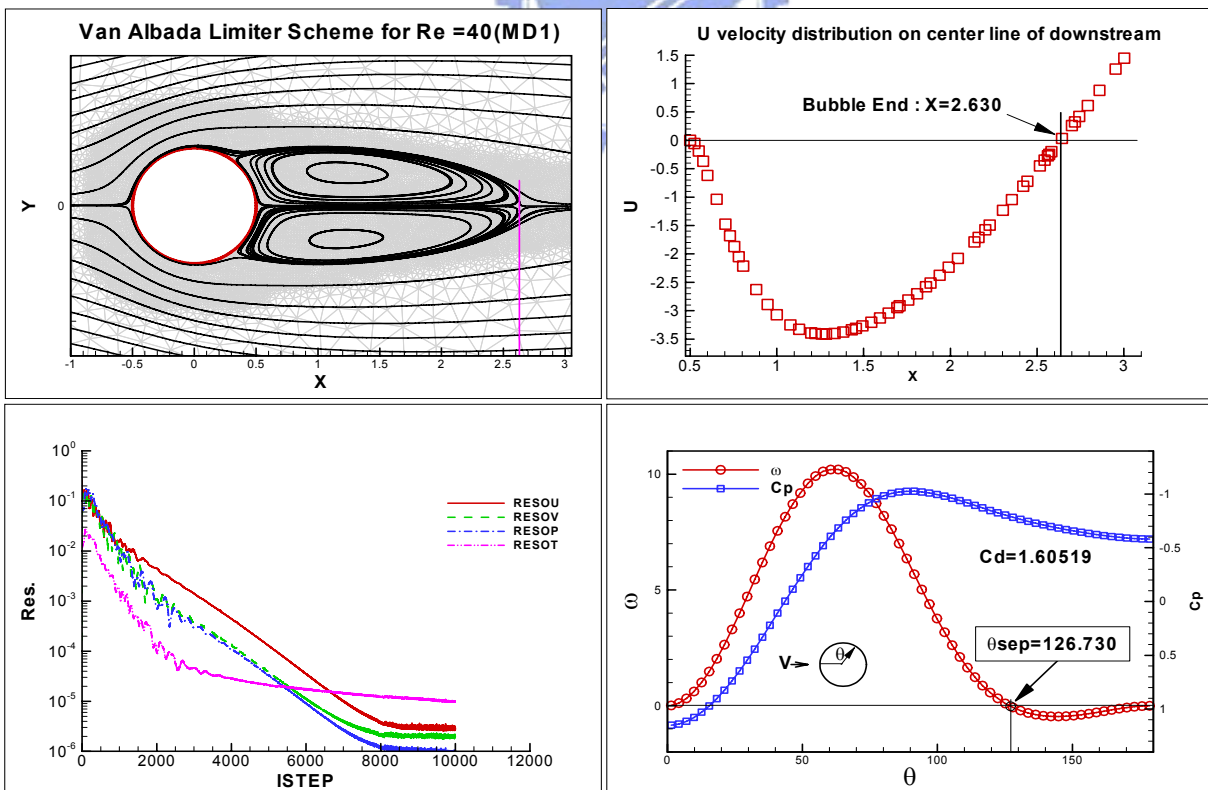


圖 7-184：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

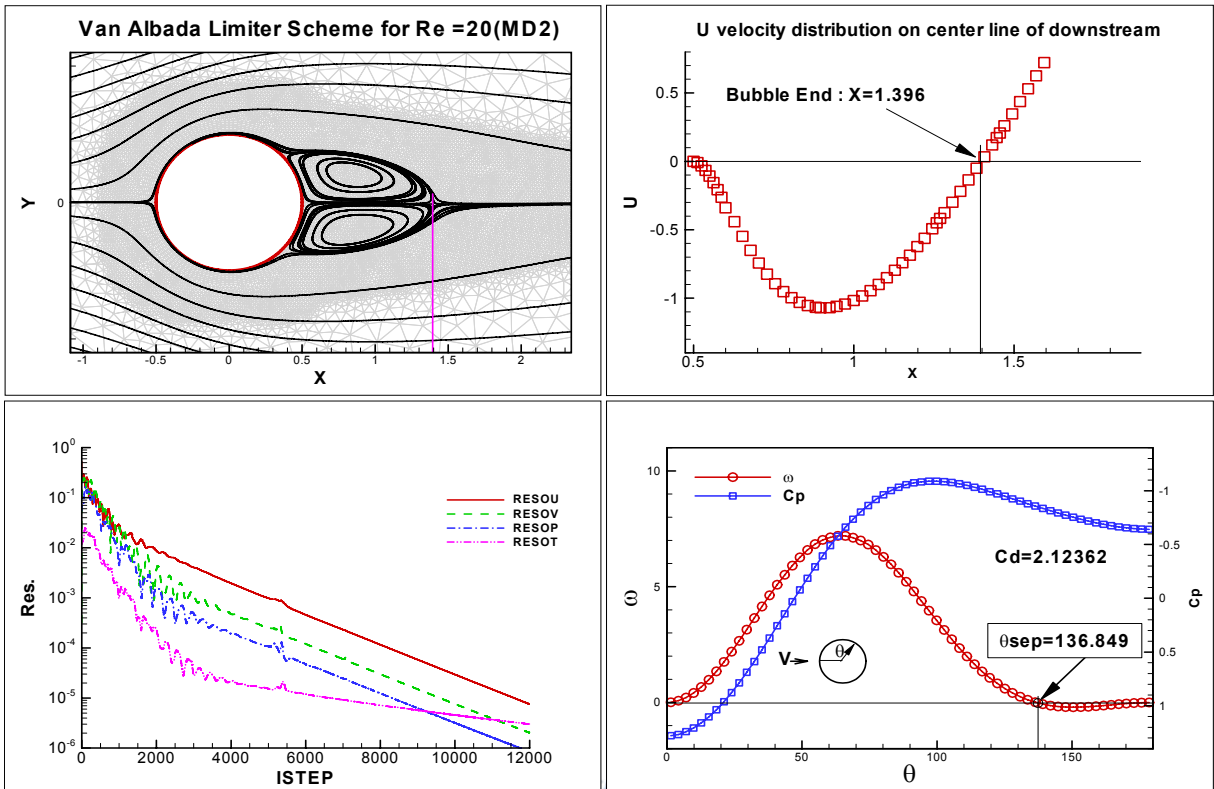


圖 7-185：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

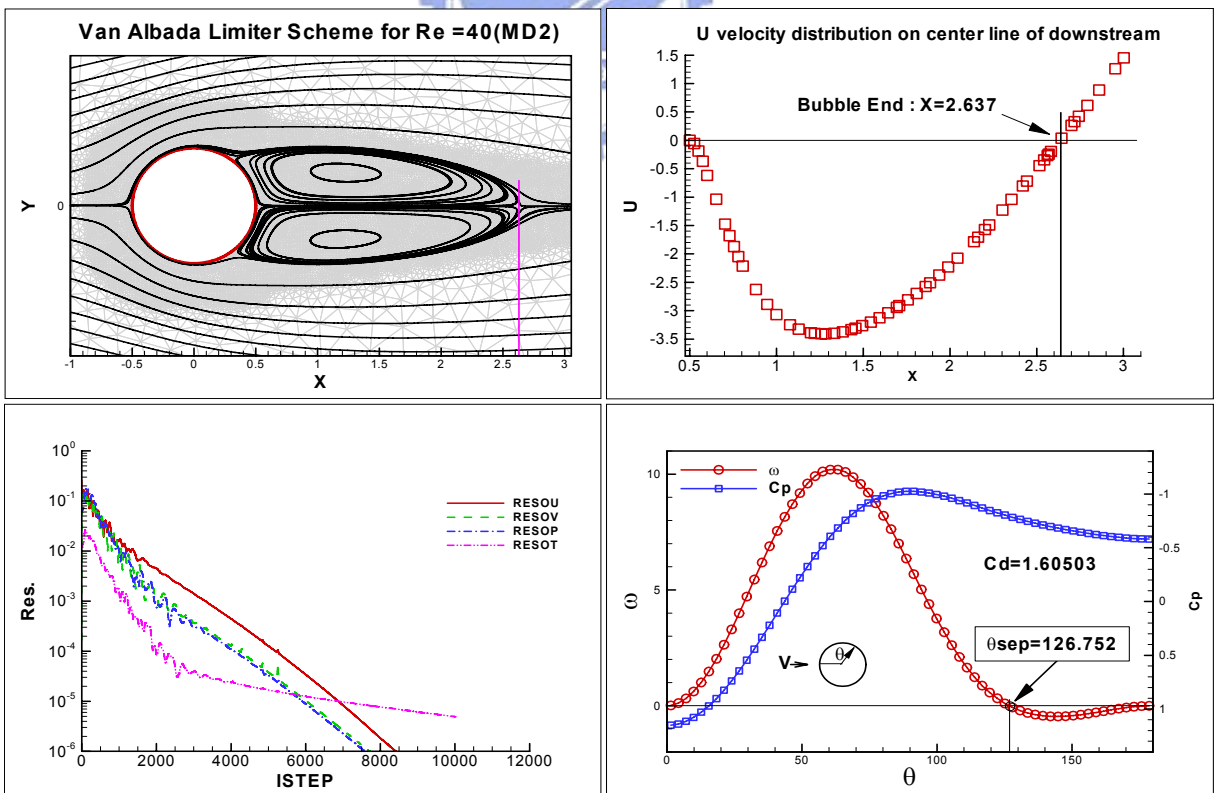


圖 7-186：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

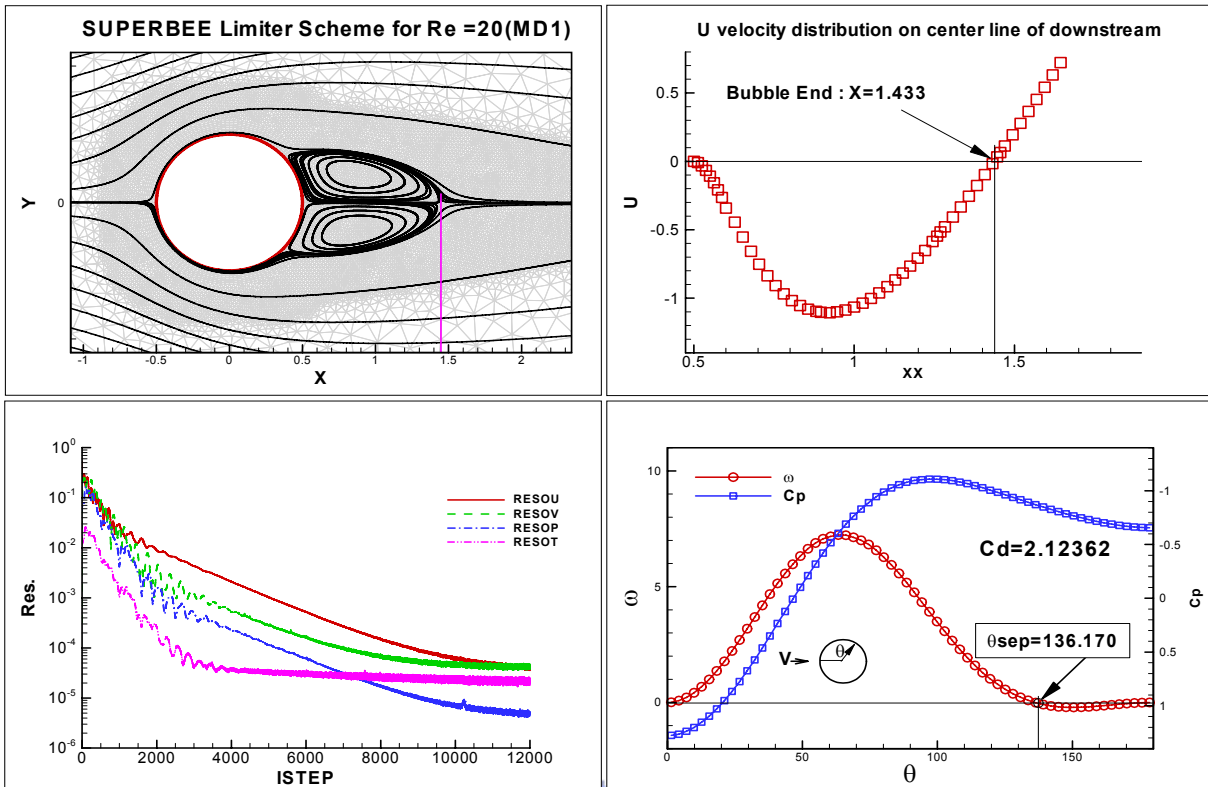


圖 7-187：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

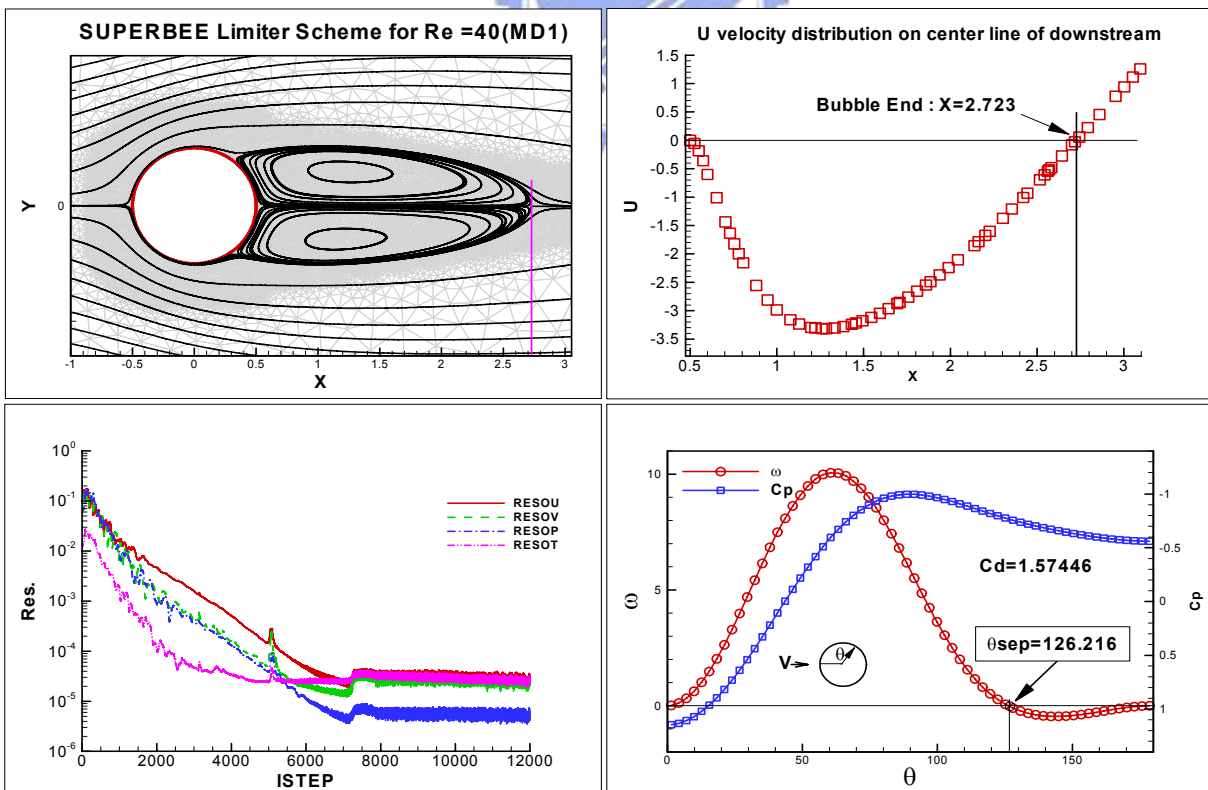


圖 7-188：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

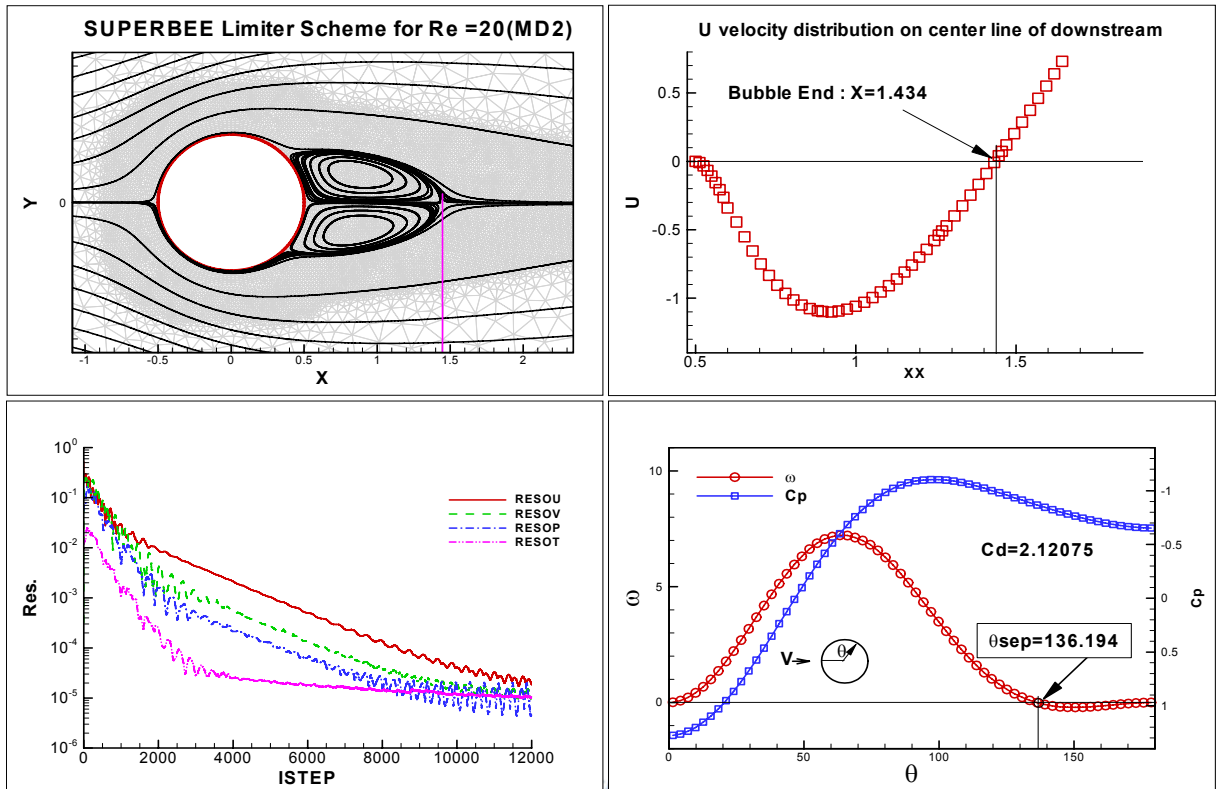


圖 7-189：圓柱低速流 $Re=20$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈

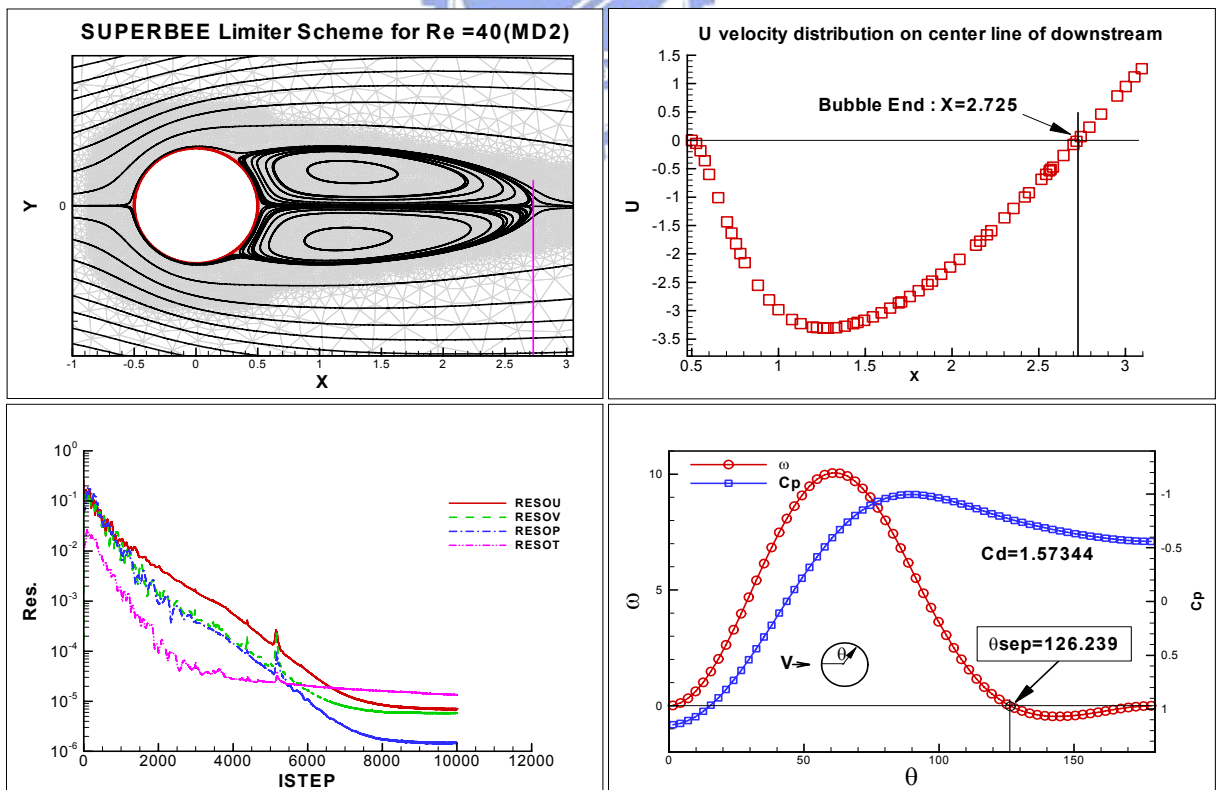
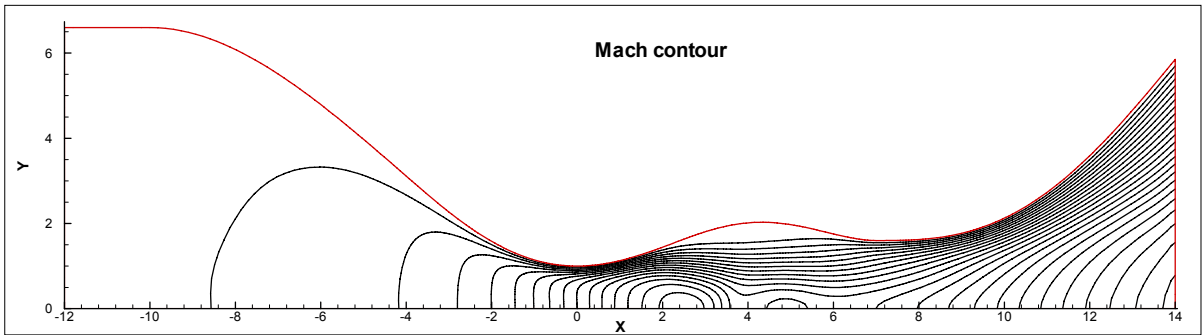
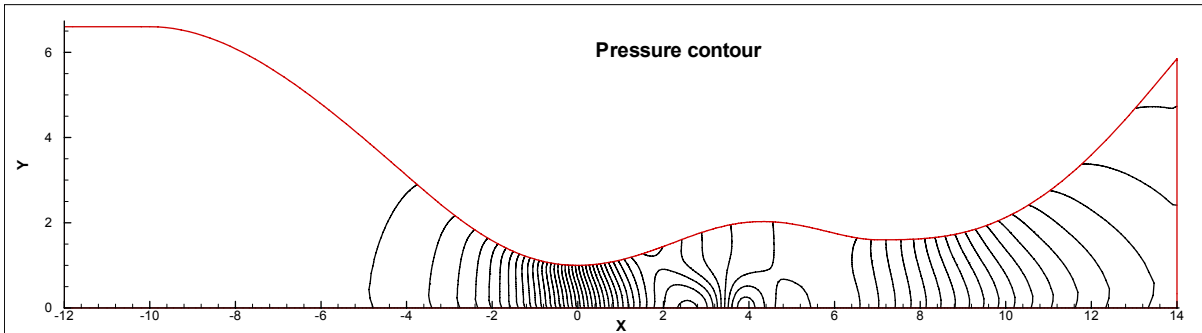


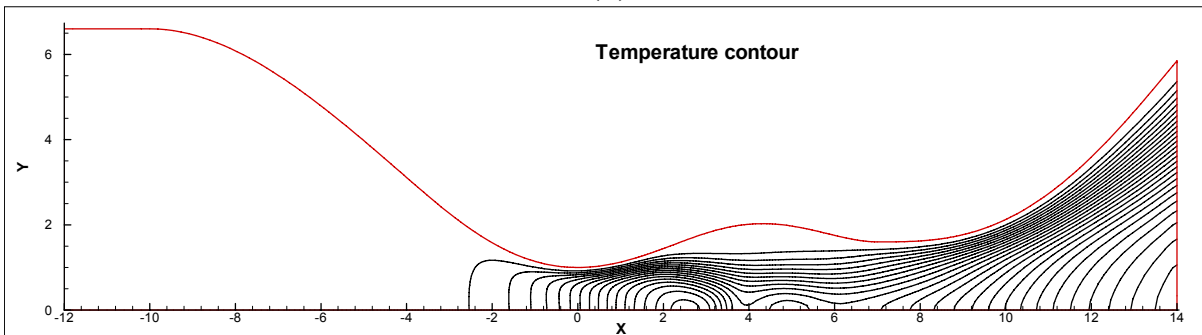
圖 7-190：圓柱低速流 $Re=40$ ，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數(a)流線圖；(b)尾流 u 速度分佈；(c)收斂殘值；(d)壁面渦度與壓力分佈



(a)

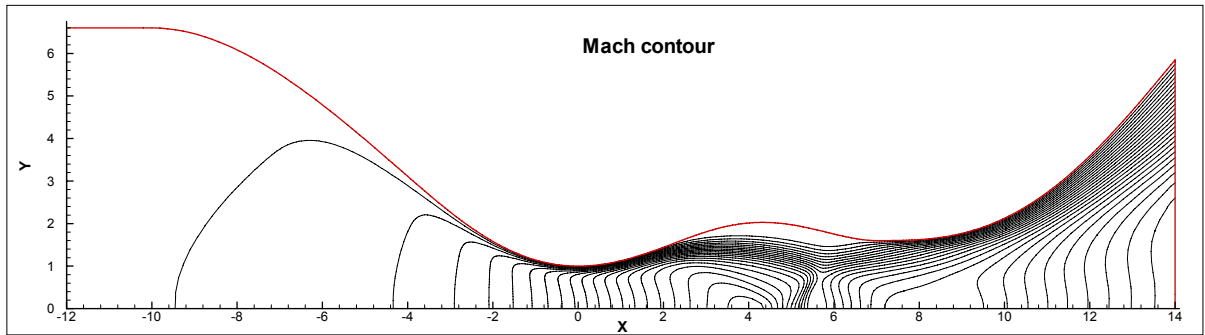


(b)

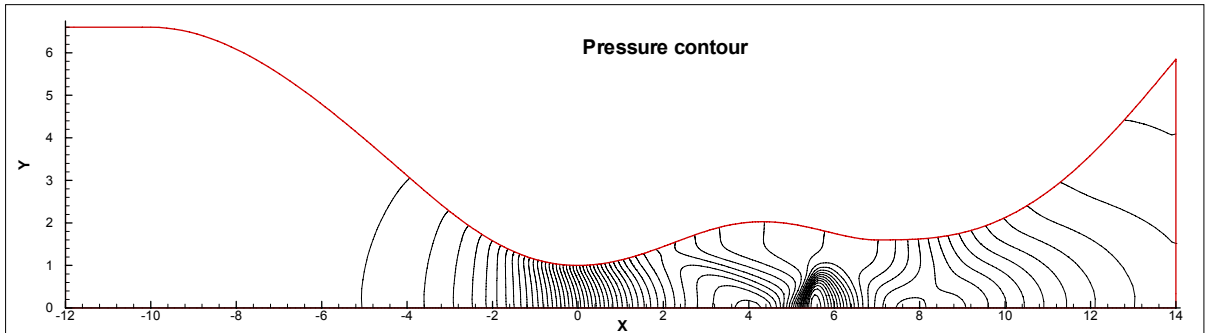


(c)

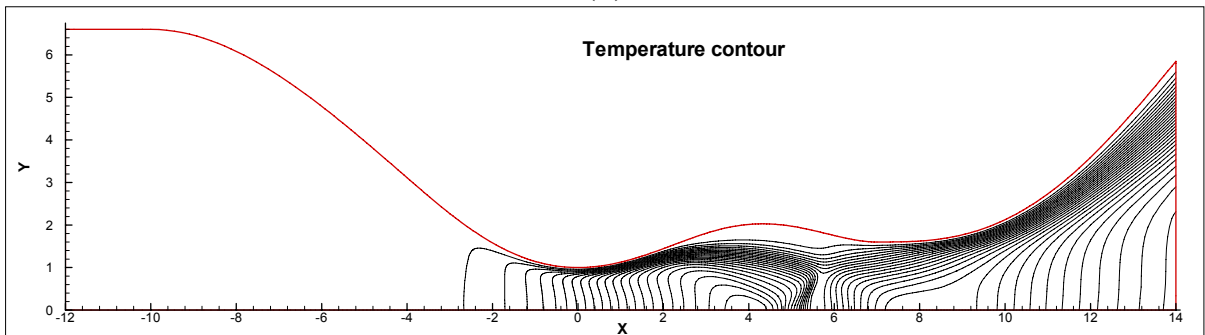
圖 7-191：雙喉部噴嘴 $Re_0=100$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)



(a)

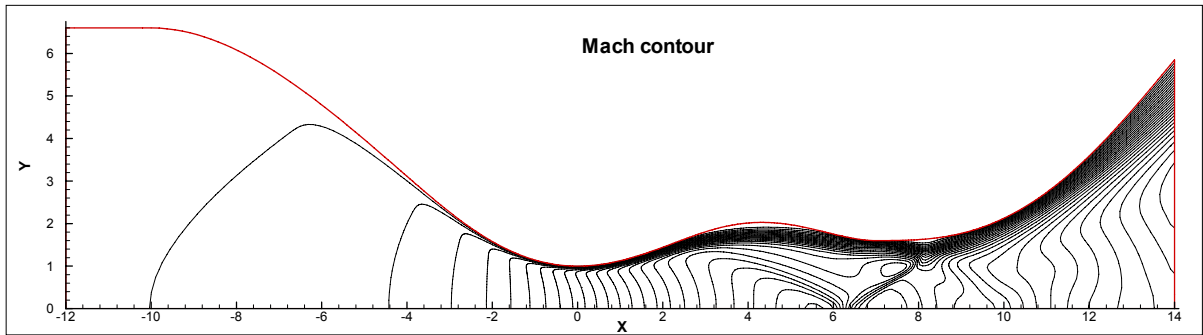


(b)

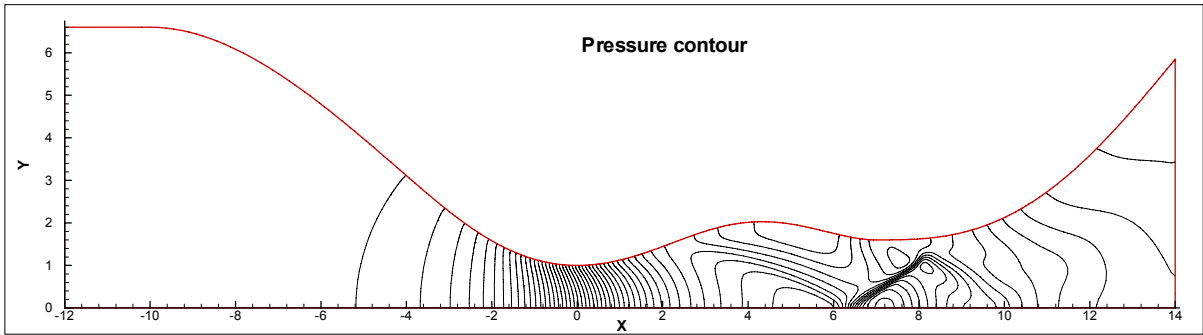


(c)

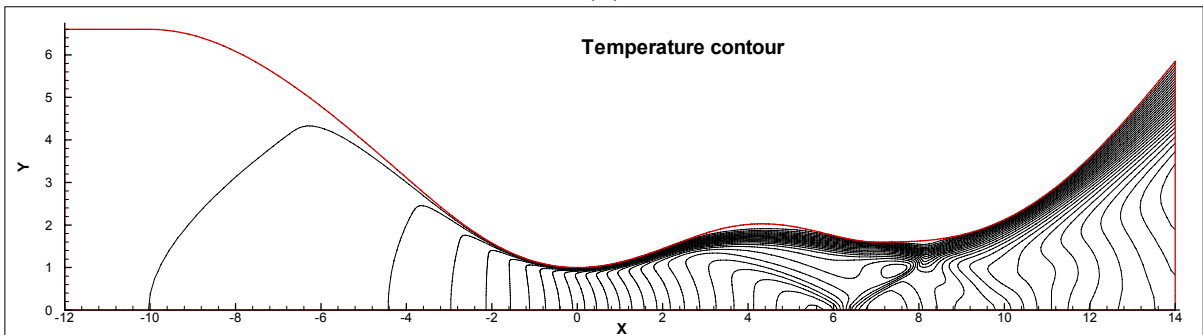
圖 7-192：雙喉部噴嘴 $Re_0=400$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)



(a)

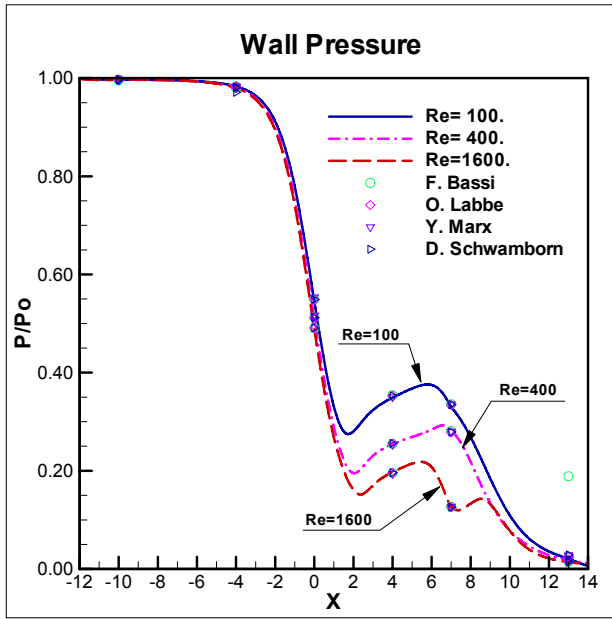


(b)

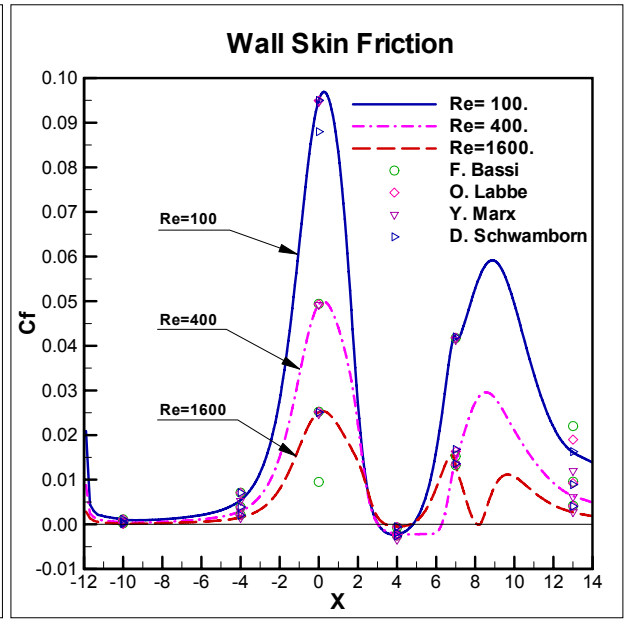


(c)

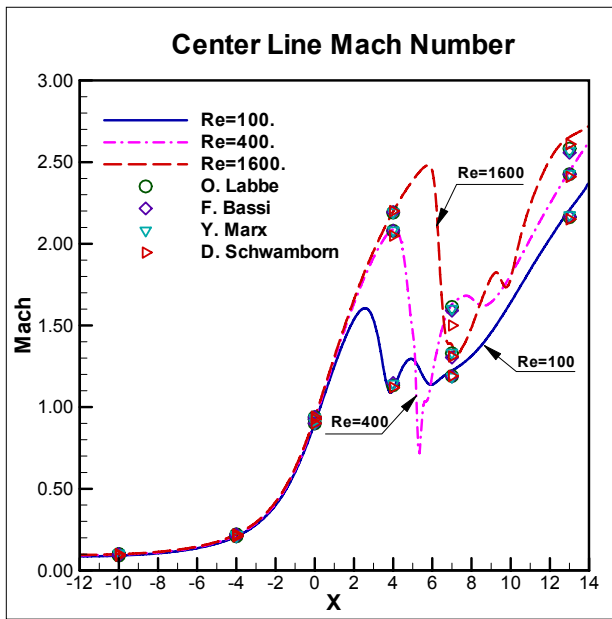
圖 7-193：雙喉部噴嘴 $Re_0=1600$ (a)馬赫數等值圖；(b)壓力等值圖；(c)溫度等值圖(特徵變數法)



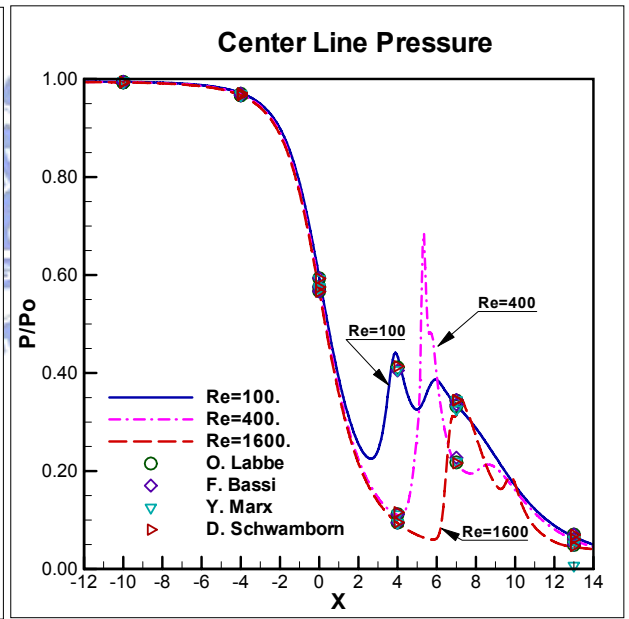
(a)



(b)

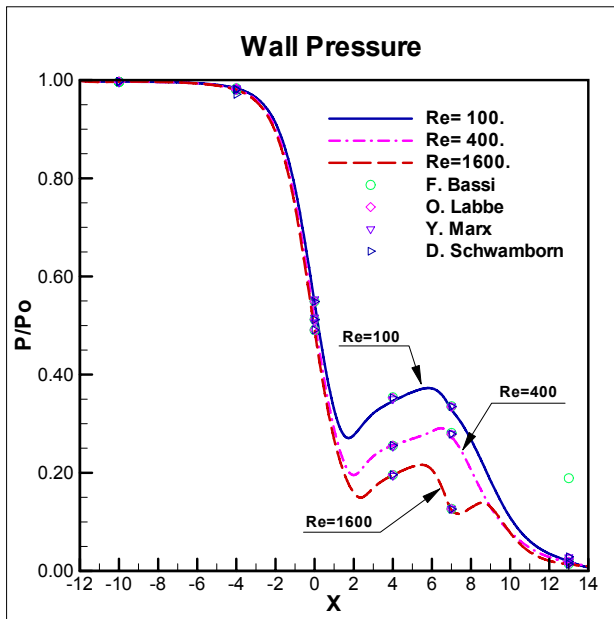


(c)

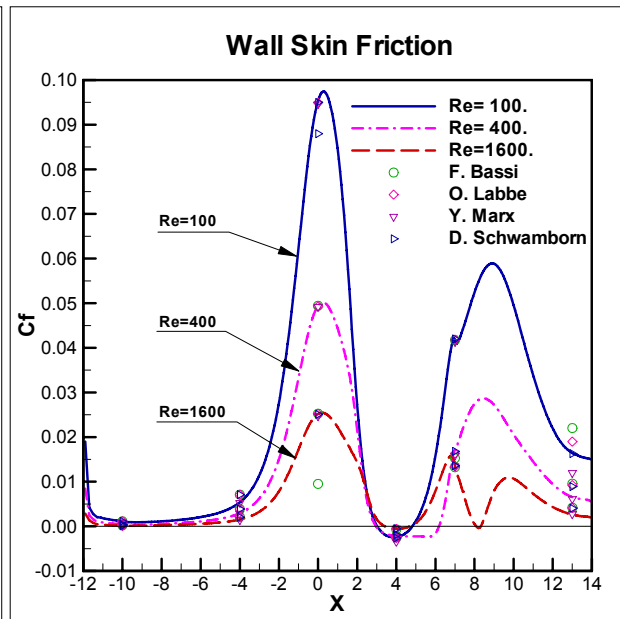


(d)

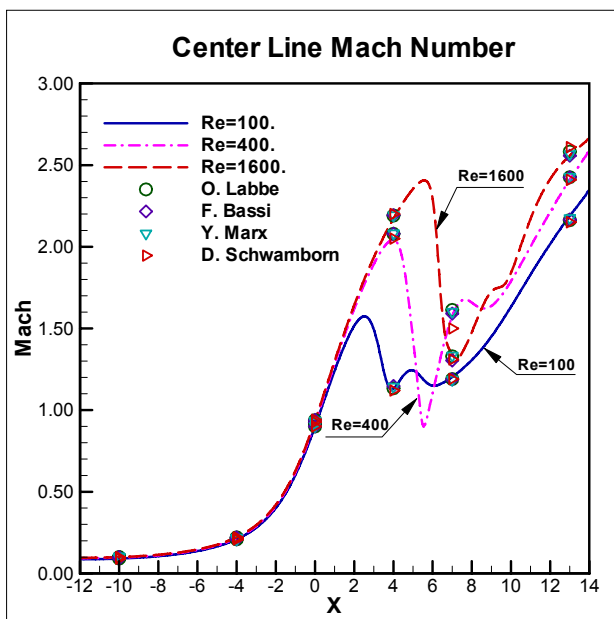
圖 7-194：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1, SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖



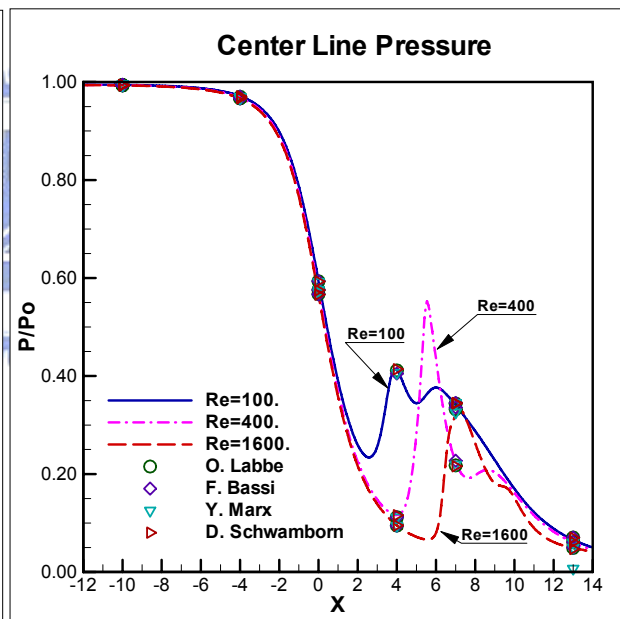
(a)



(b)

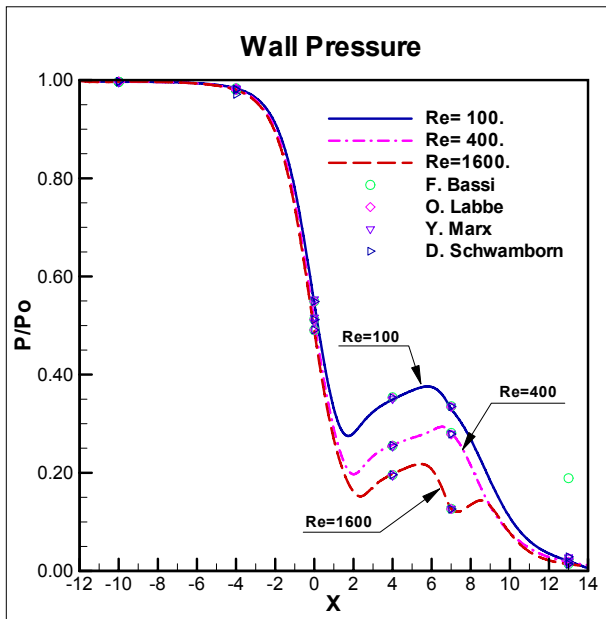


(c)

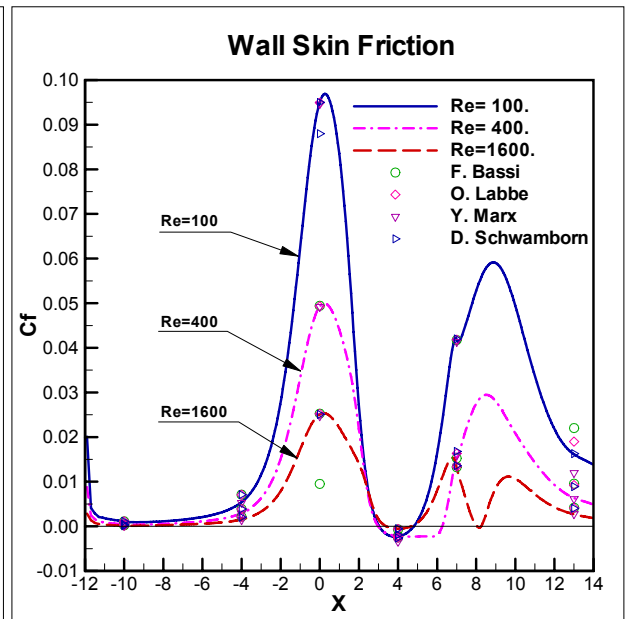


(d)

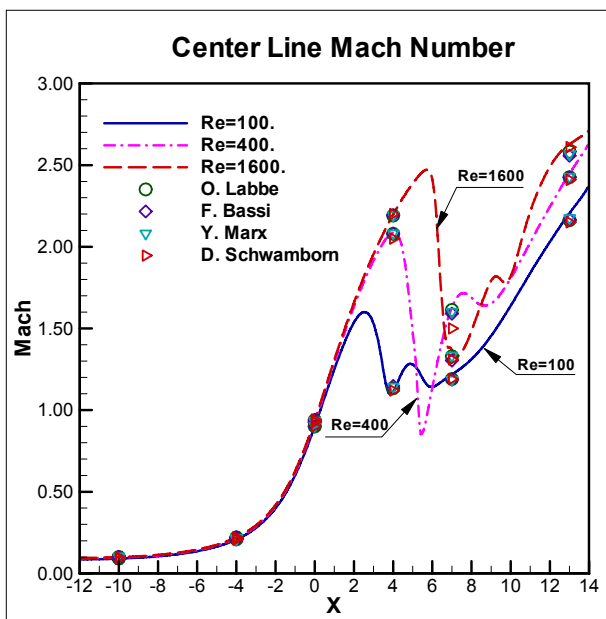
圖 7-195：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2, SUPERBEE 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖



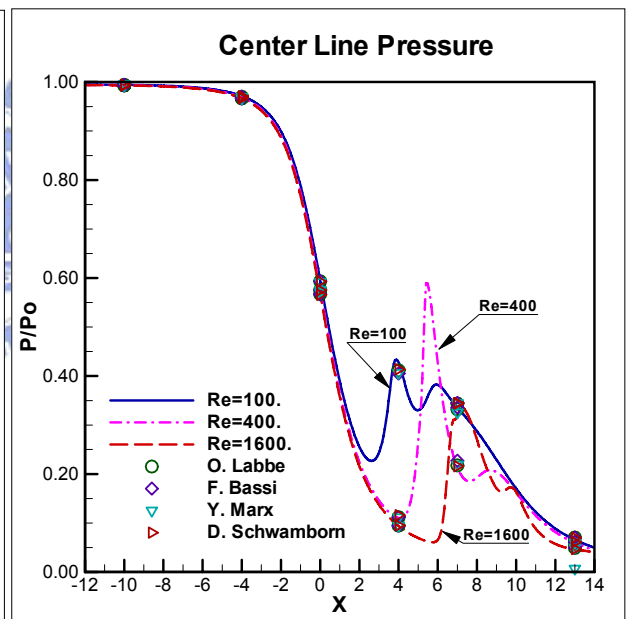
(a)



(b)

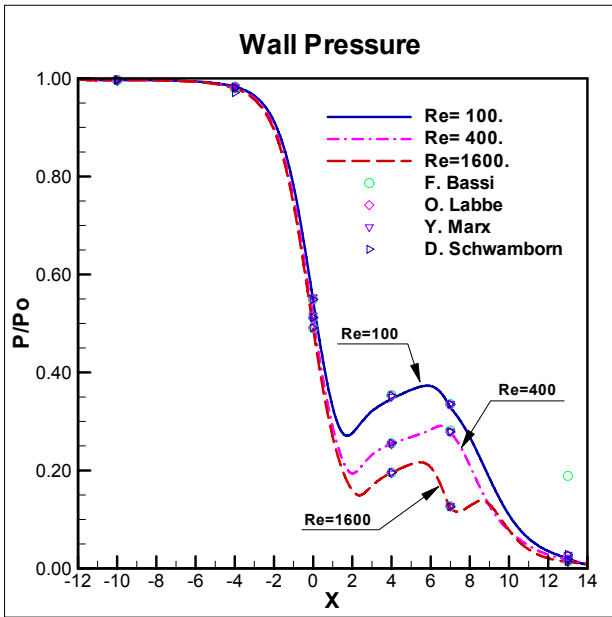


(c)

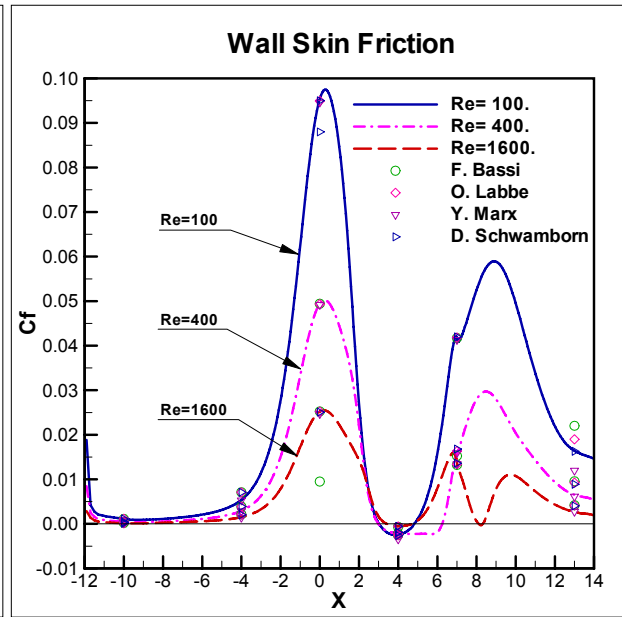


(d)

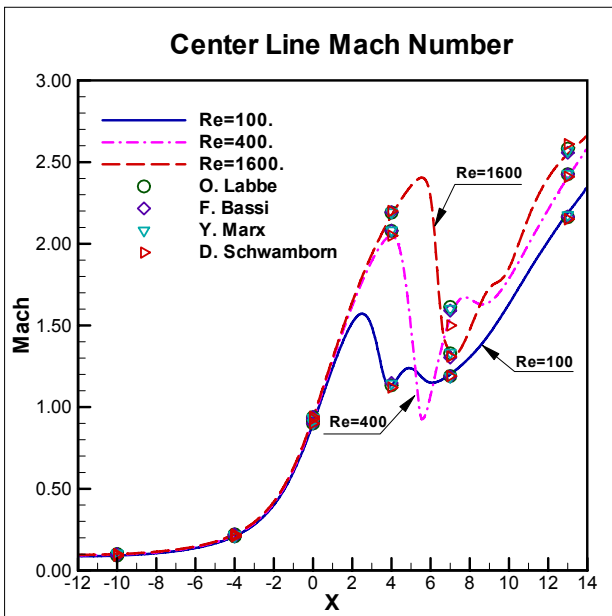
圖 7-196：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1, Van Albada 限制函數法 (a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d) 對稱中心壓力分佈圖



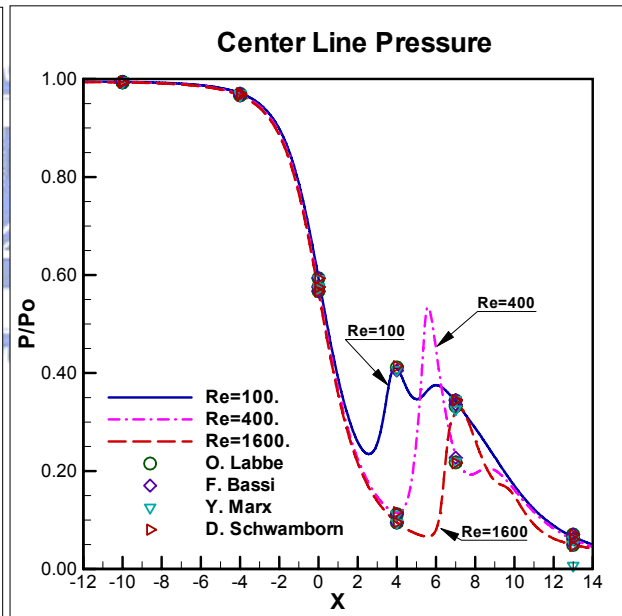
(a)



(b)

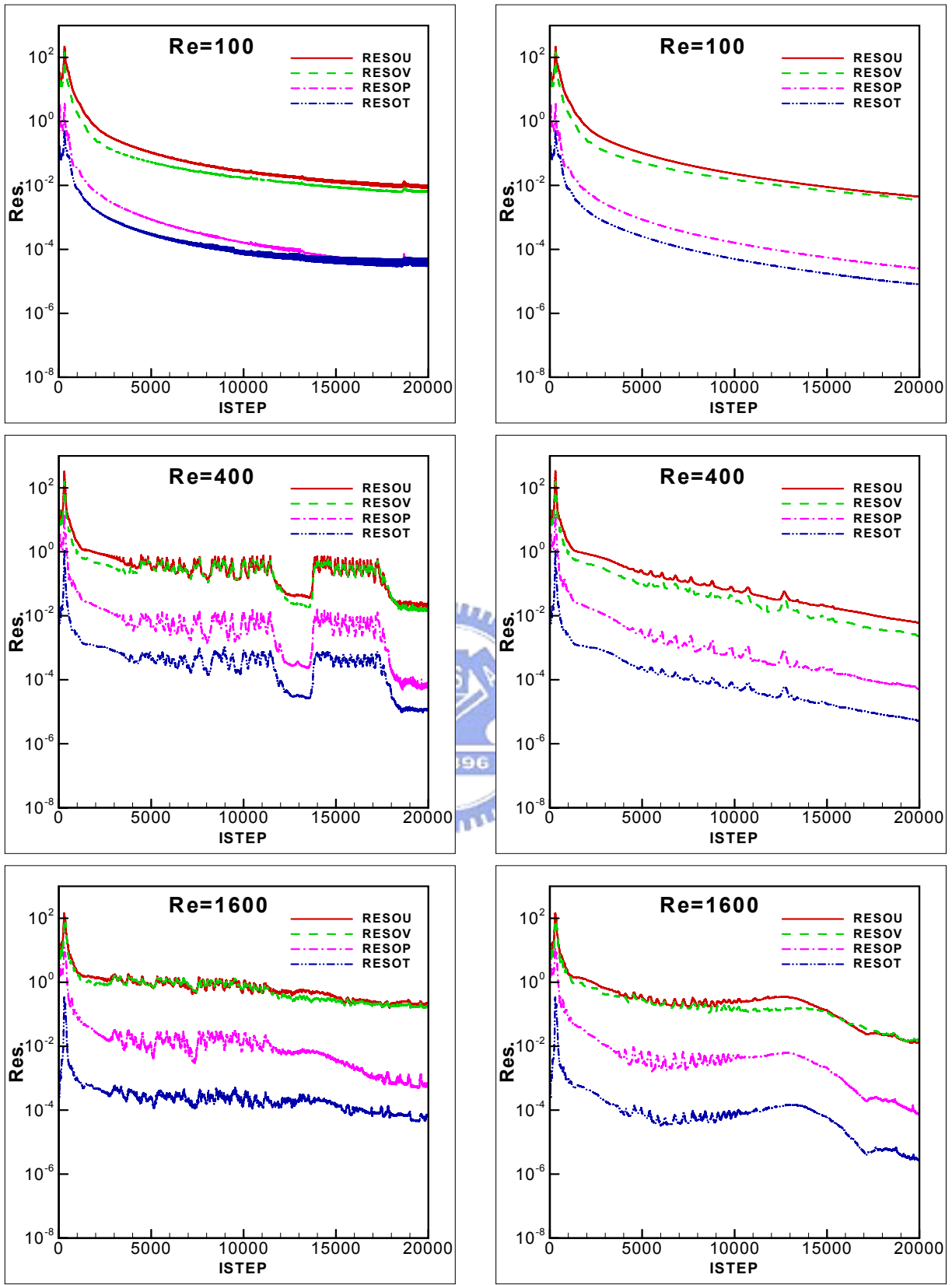


(c)



(d)

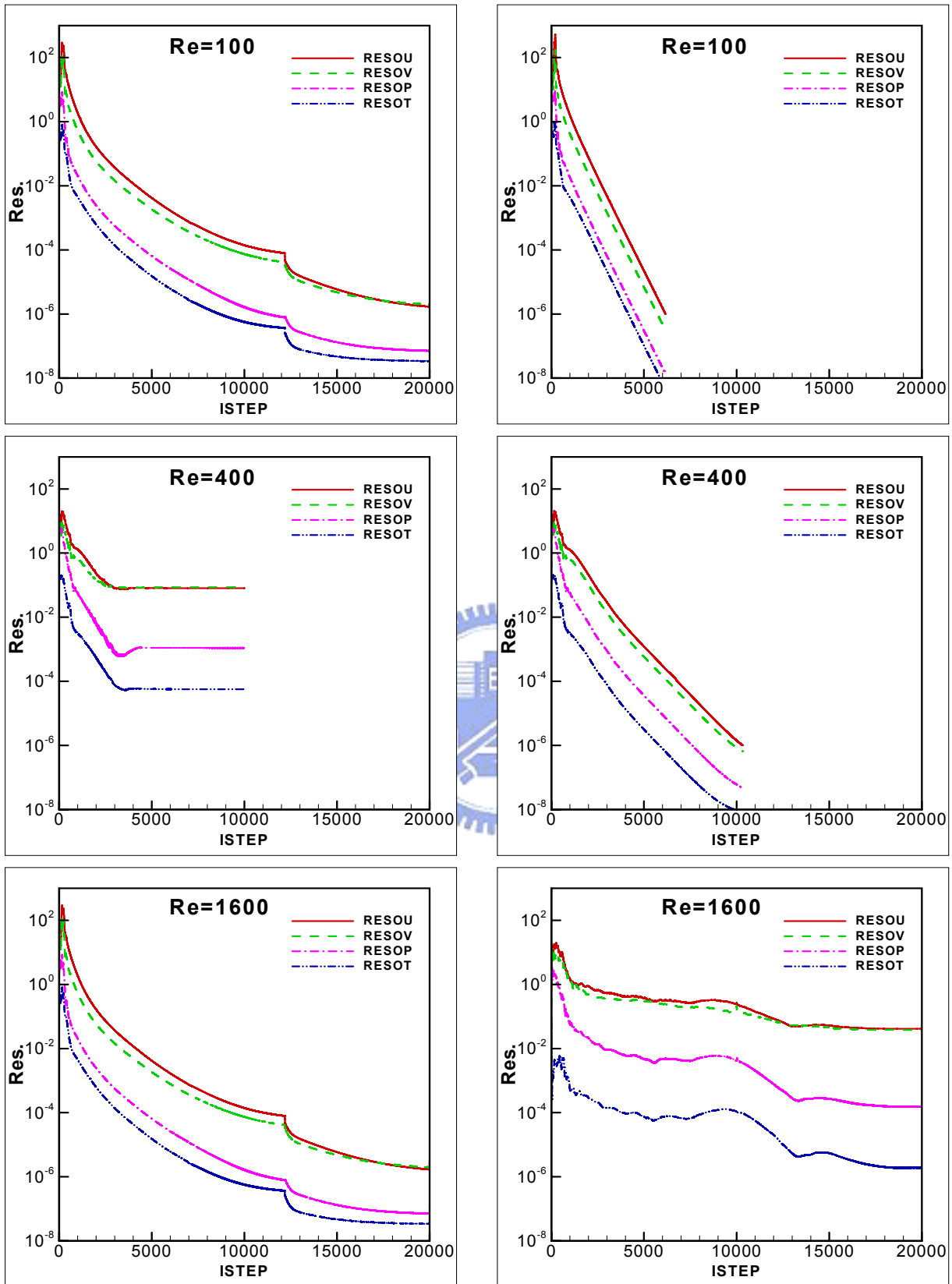
圖 7-197：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2, Van Albada 限制函數法(a)壁面壓力分佈圖；(b)壁面摩擦係數分佈圖；(c)對稱中心馬赫數分佈圖；(d)對稱中心壓力分佈圖



(a)

(b)

圖 7-198：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD1 數值收斂情形(a) SUPERBEE 限制函數；(b) Van Albada 限制函數



(a)

(b)

圖 7-199：雙喉部噴嘴，特徵變數 MD2 數值收斂情形(a) SUPERBEE 限制函數；(b) Van Albada 限制函數

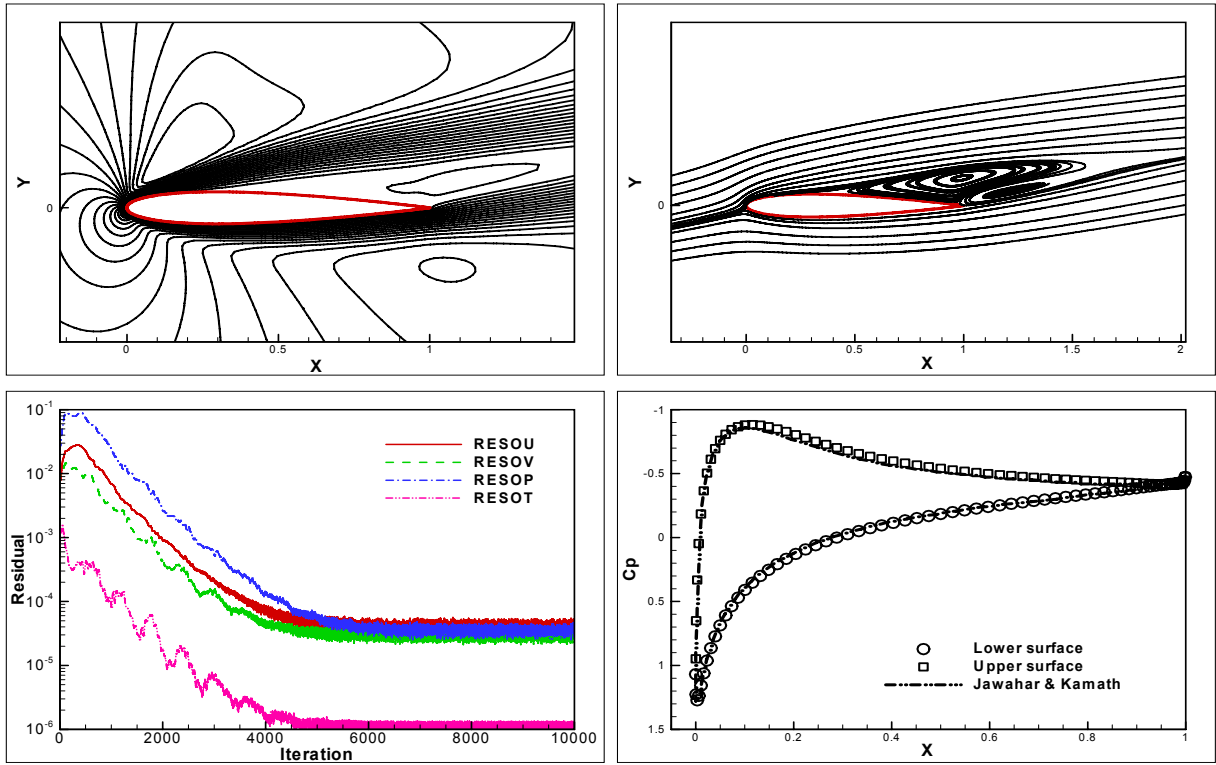


圖 7-200: NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$, 特徵變數 MD1, SUPERBEE 通量限制函數($dm=0.7$) (a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖

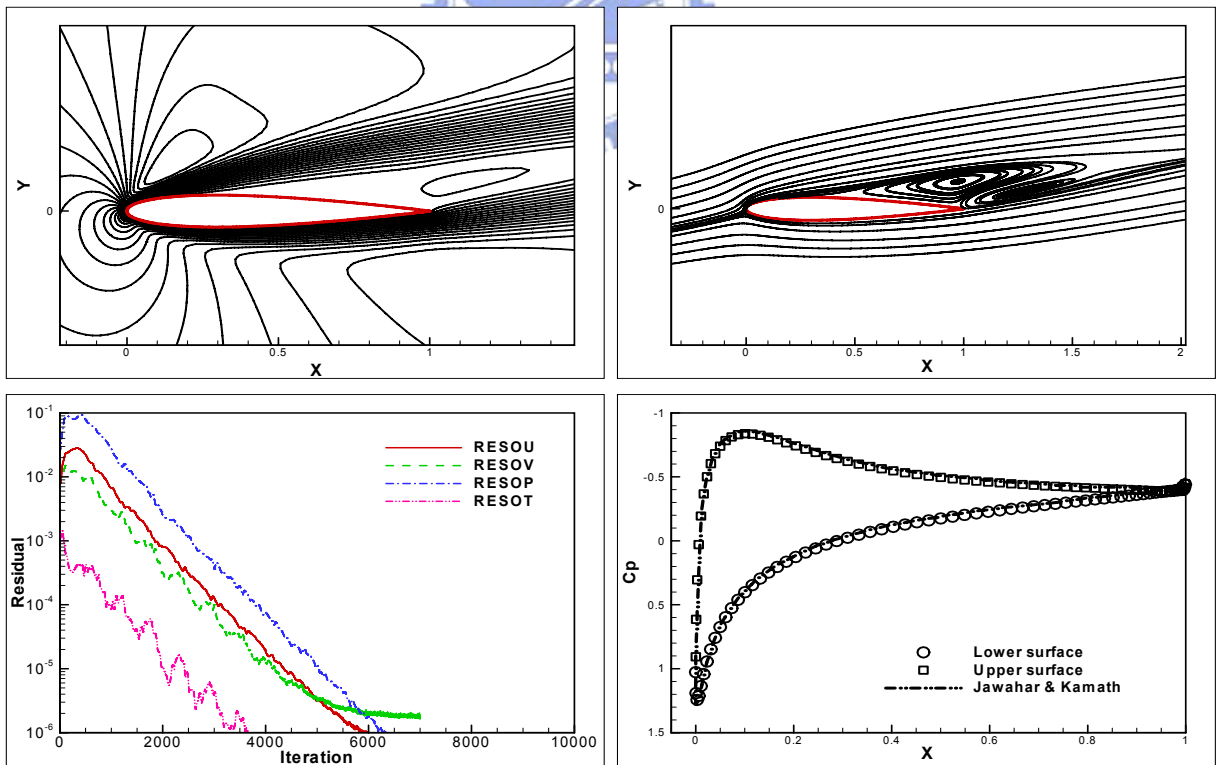


圖 7-201: NACA 0012, $M_\infty=0.8$, $\alpha=10^\circ$, $Re_\infty=500$, 特徵變數 MD2, SUPERBEE 通量限制函數($dm=1$) (a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖

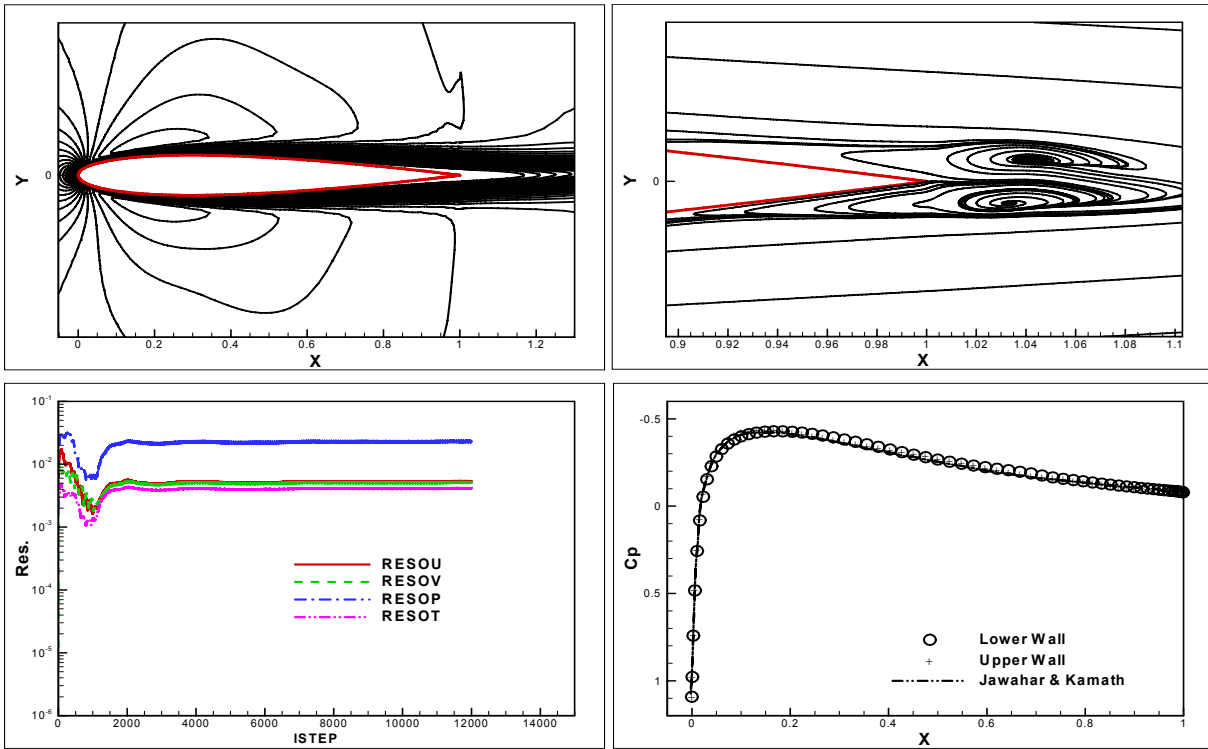


圖 7-202: NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$, 特徵變數 MD1, Van Albada 通量限制函數(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖

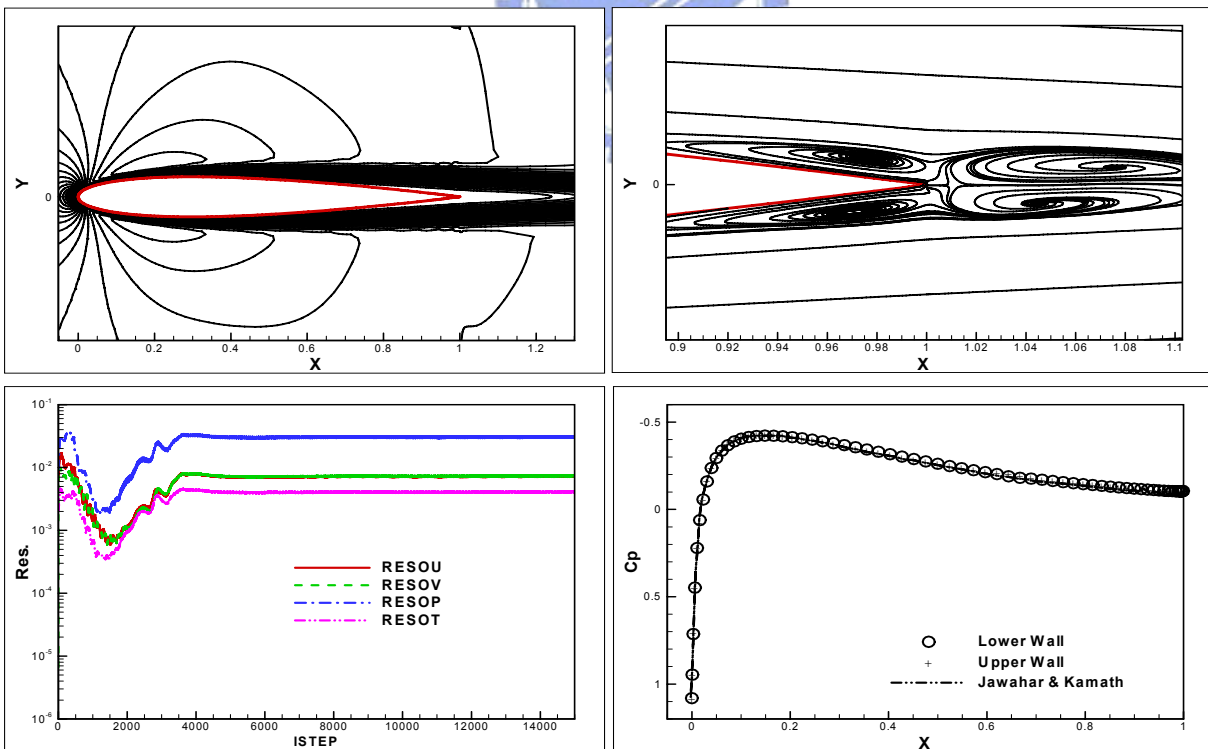


圖 7-203: NACA 0012, $M_\infty=0.50$, $\alpha=0^\circ$, $Re_\infty=5000$, 特徵變數 MD2, SUPERBEE 通量限制函數(a)馬赫數等值圖；(b)尾部流線圖；(c)收斂殘值；(d)翼面壓力分佈比較圖

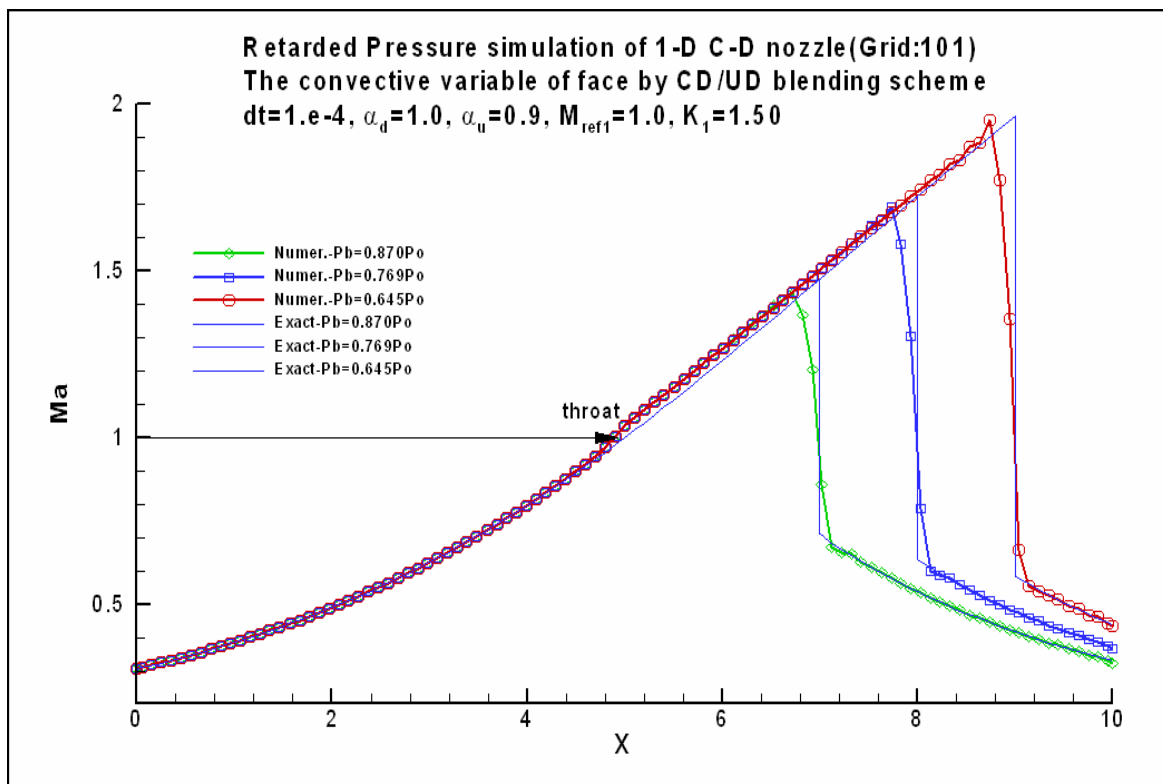


圖 7-204：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)

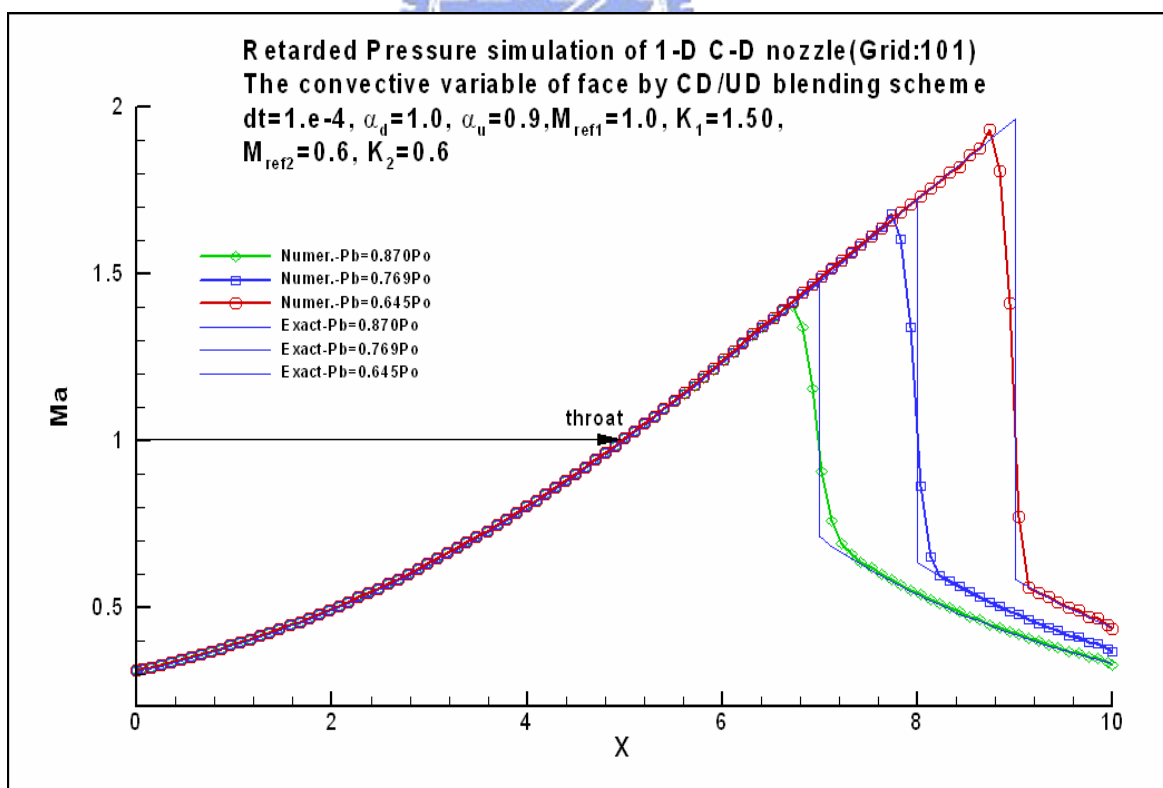


圖 7-205：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)

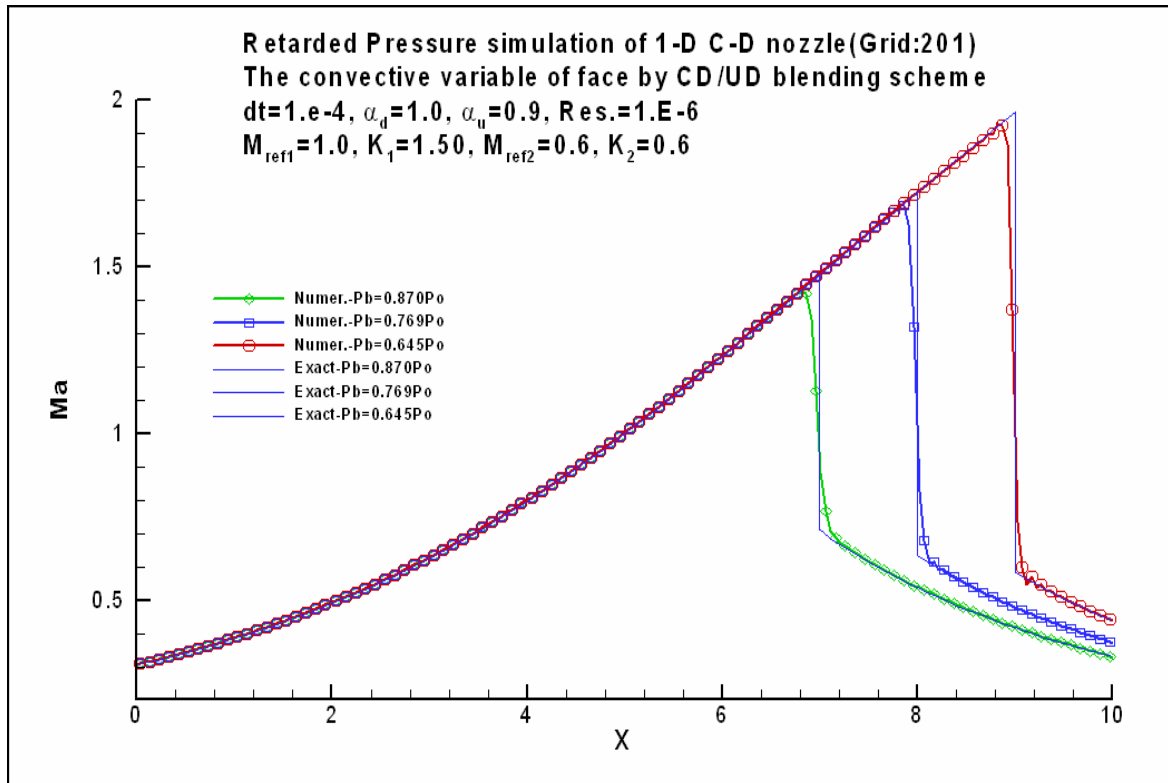


圖 7-206：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯壓力法，加密網格)

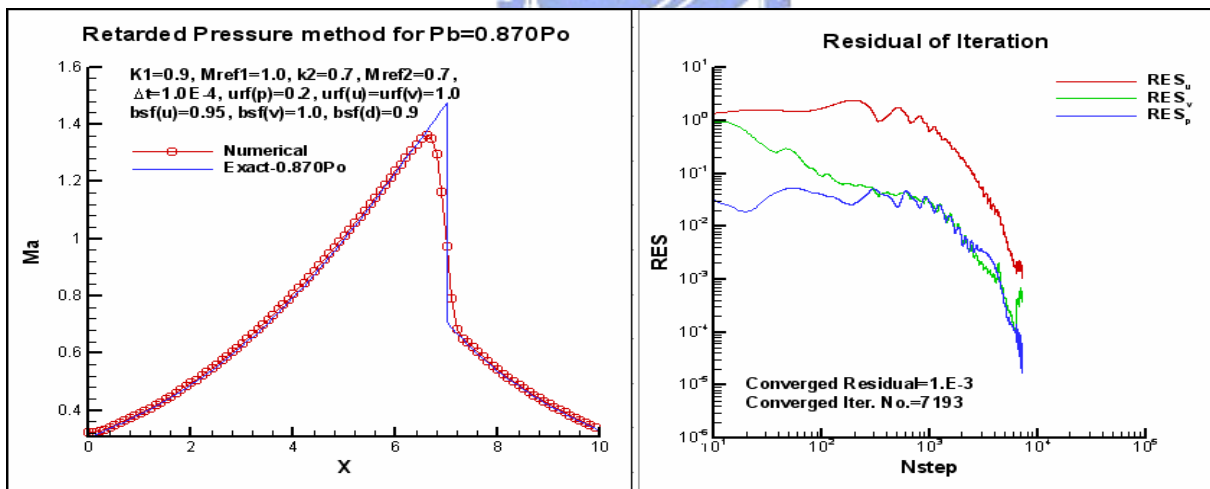


圖 7-207：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯壓力法)

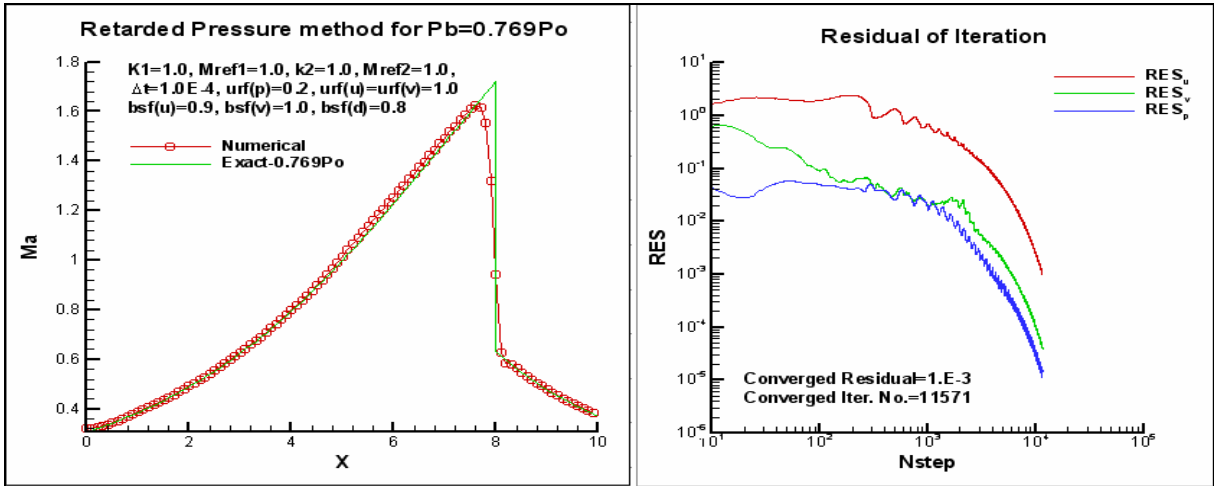


圖 7-208：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)

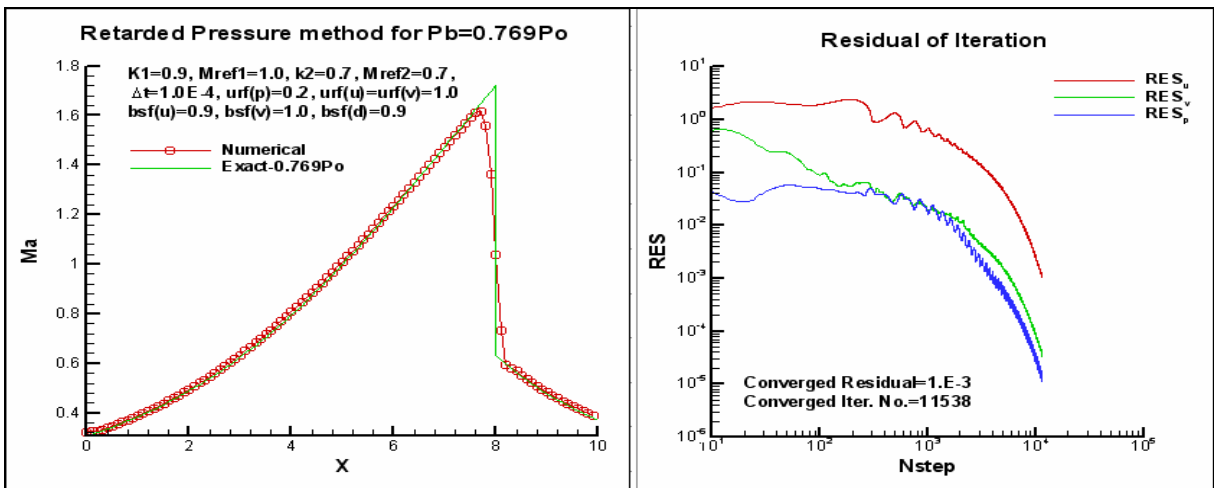


圖 7-209：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)

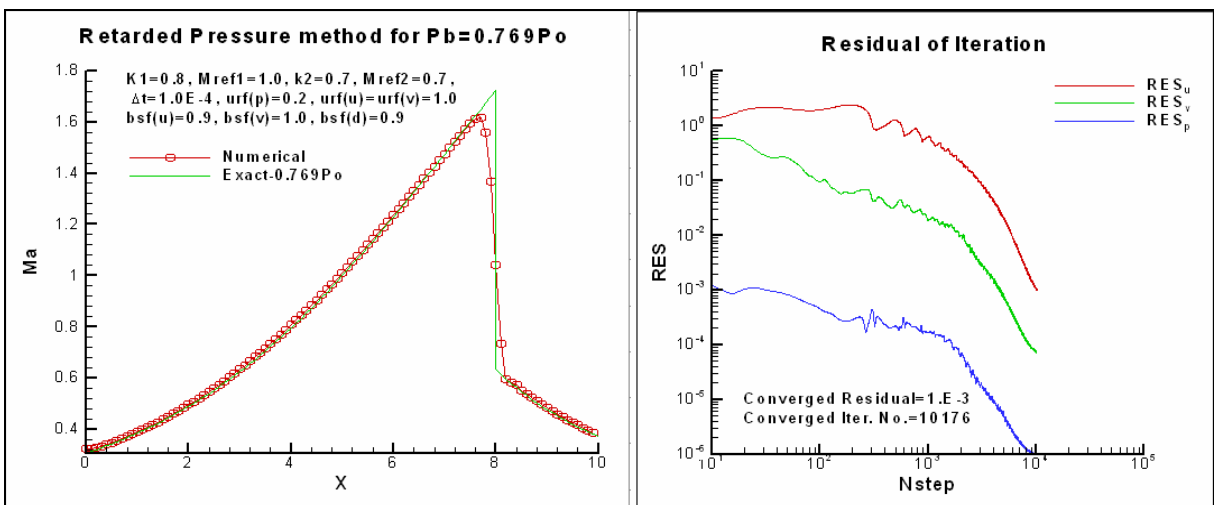


圖 7-210：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖 ($P_b=0.769P_o$ ，遲滯壓力法)

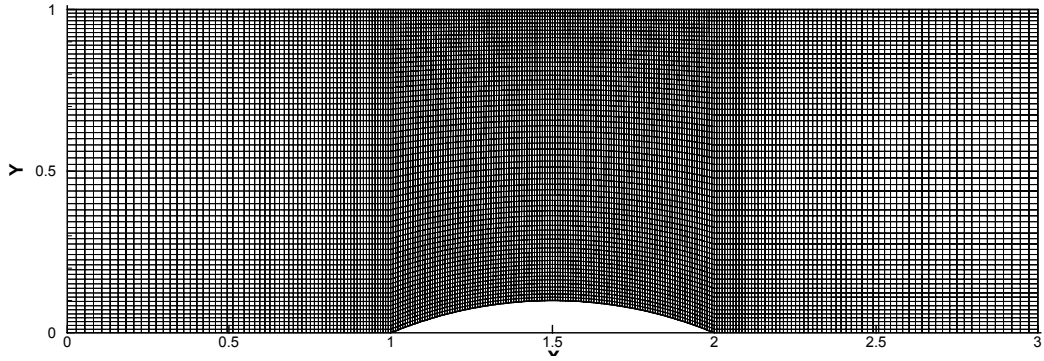


圖 7-211：渠道流場計算網格(256×64 CV， $t/c=10\%$)

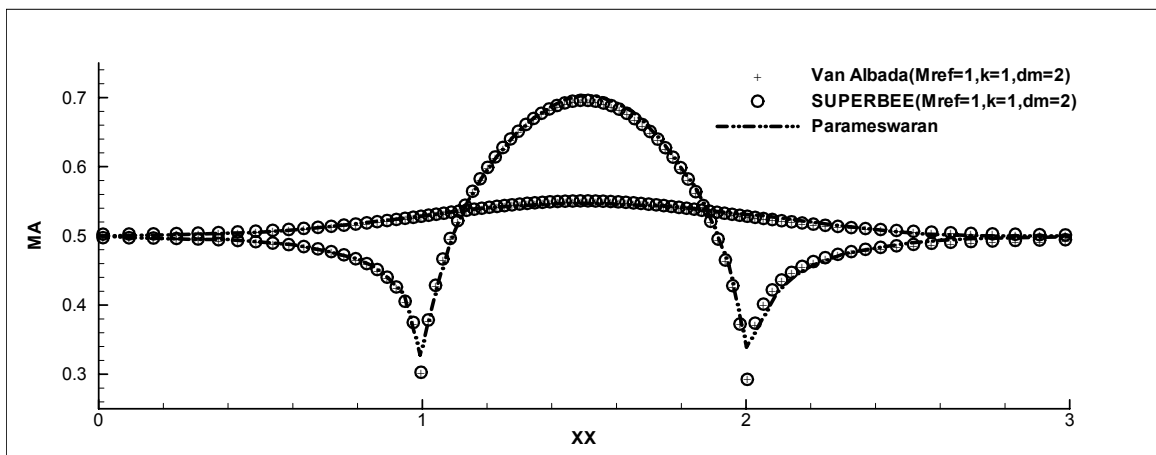


圖 7-212： $M_{in}=0.5$ 次音速流場壁面馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)

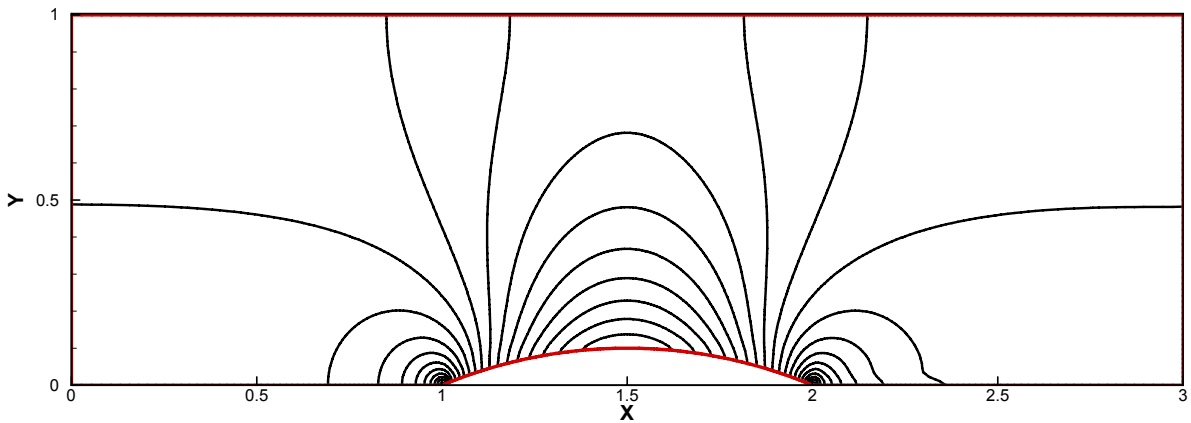


圖 7-213： $M_{in}=0.5$ 次音速流場馬赫數等值圖(遲滯壓力法)

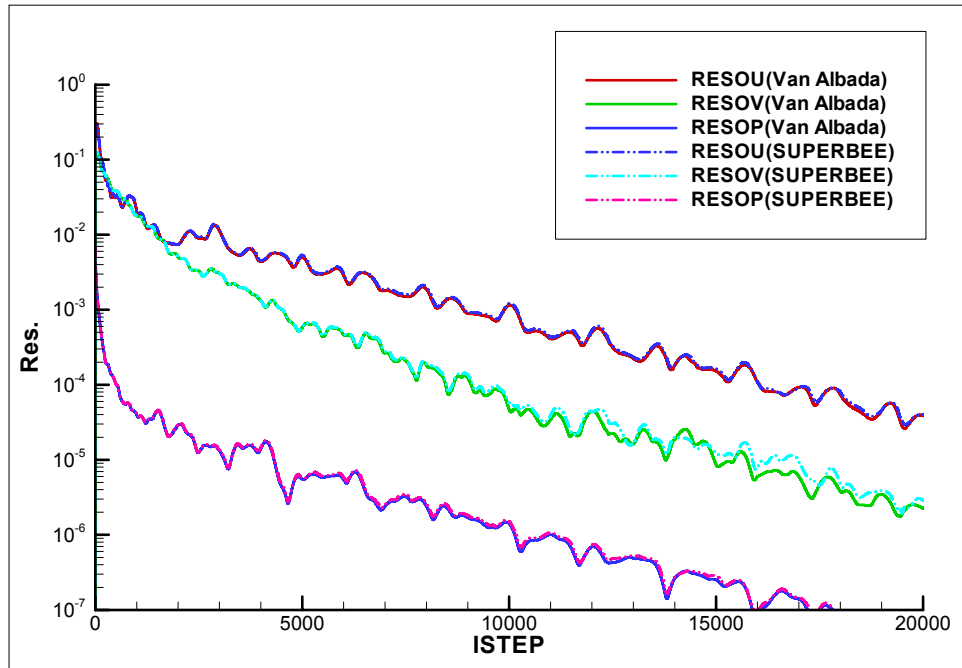


圖 7-214： $M_{in}=0.5$ 次音速流場 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數法殘值收斂情況比較圖

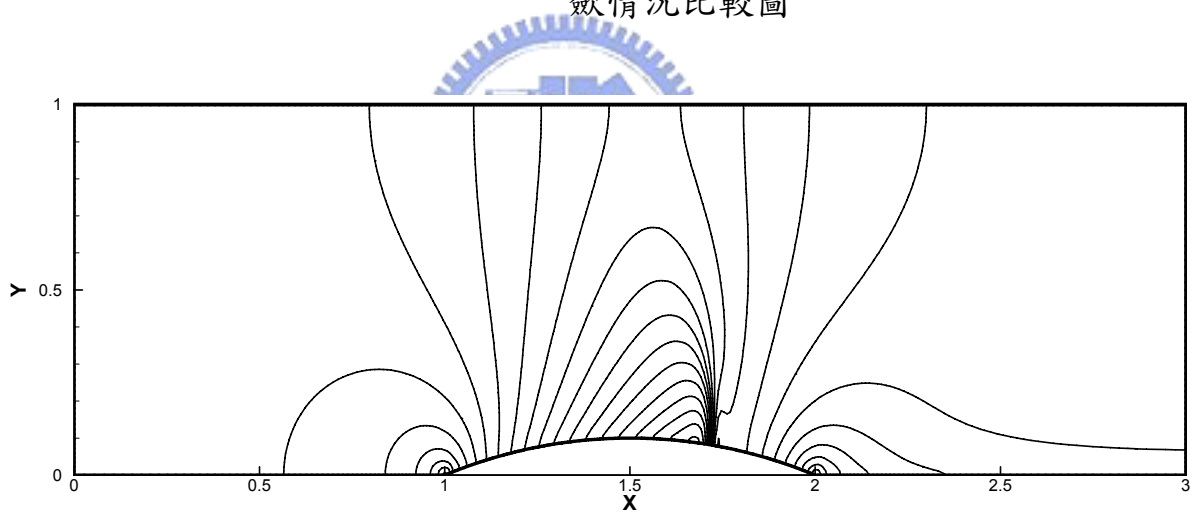


圖 7-215： $M_{in}=0.675$ 穿音速流場馬赫數等值圖(遲滯壓力法)

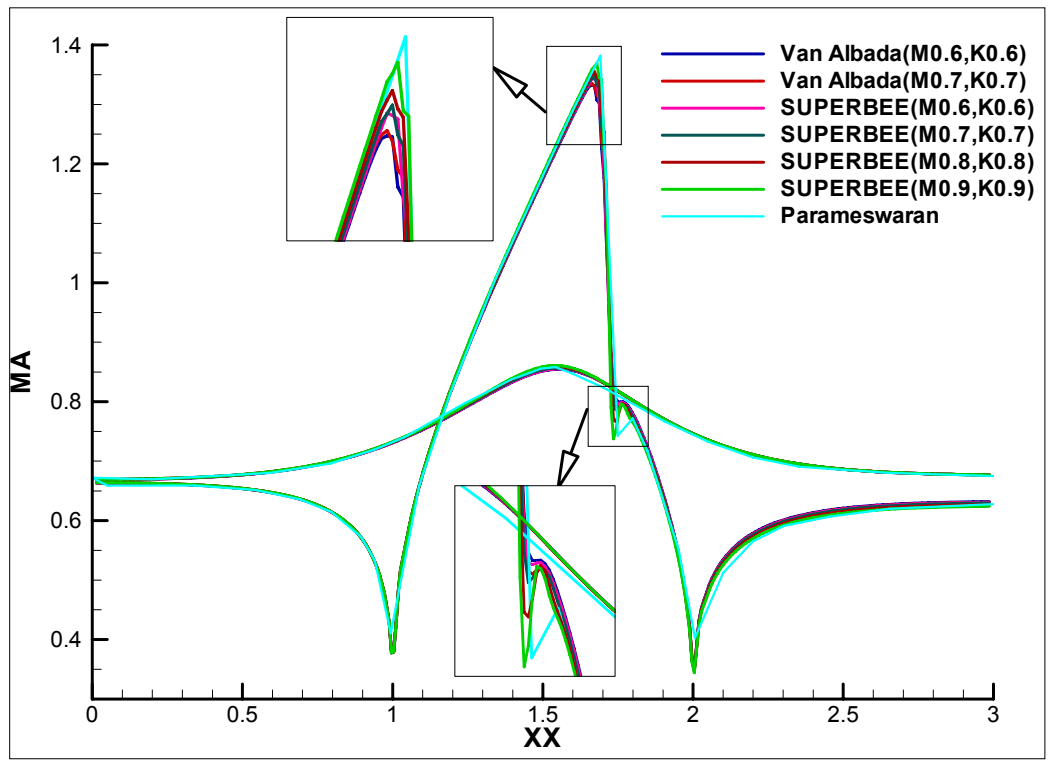


圖 7-216 : $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨 M_{ref} 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯壓力法)

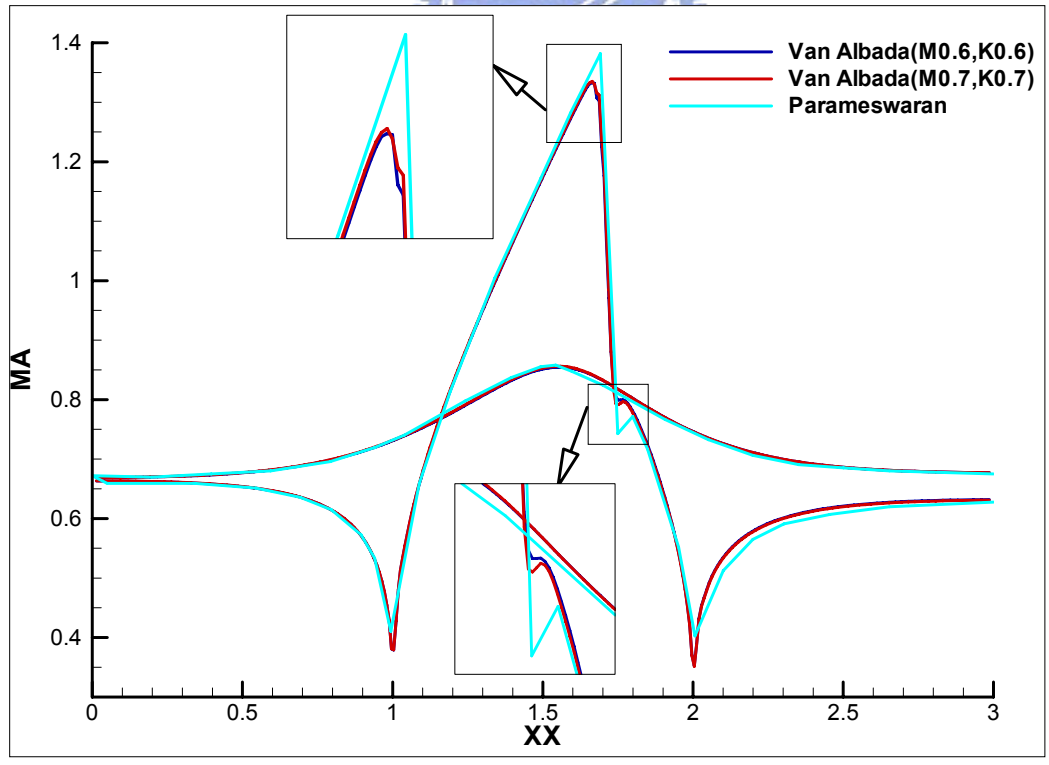


圖 7-217: $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨 M_{ref} 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖(Van Albada, 遲滯壓力法)

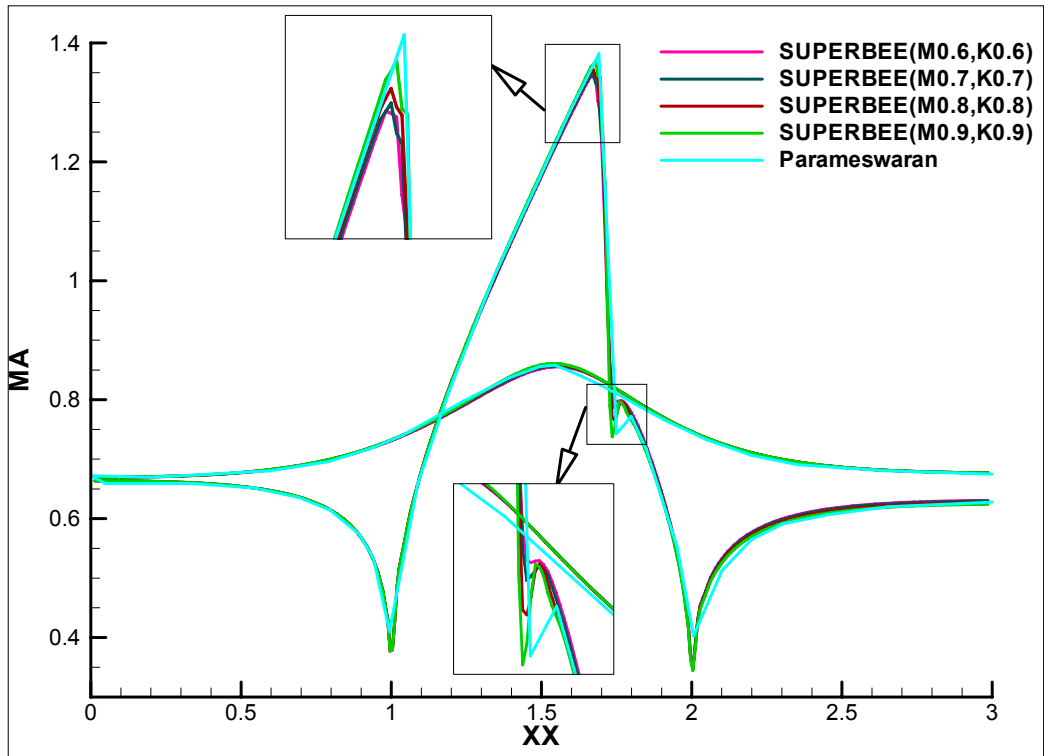


圖 7-218： $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨 M_{ref} 及 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖 (SUPERBEE，遲滯壓力法)

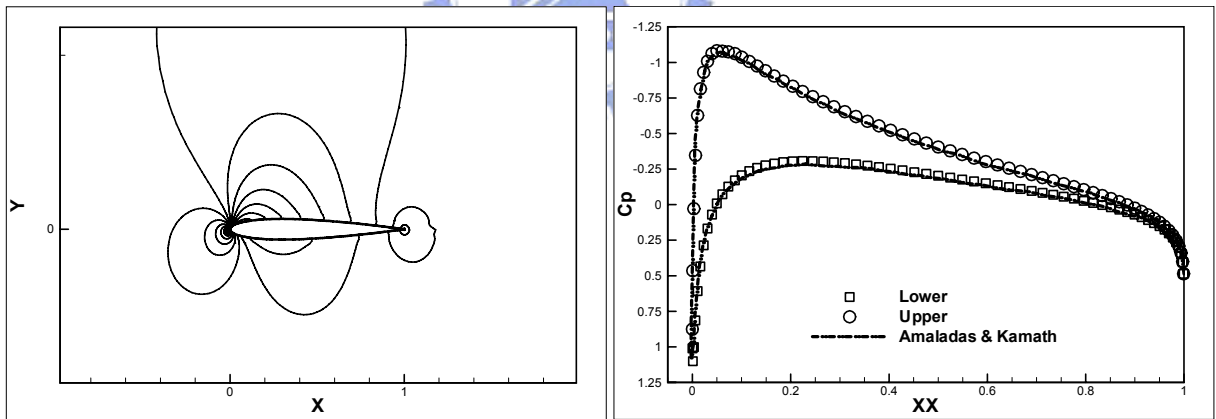


圖 7-219：NACA 0012 次音速流場 $M_{\infty}=0.63$ ， $\alpha=2^\circ$ ， $dm=2.0$ (SUPERBEE) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)

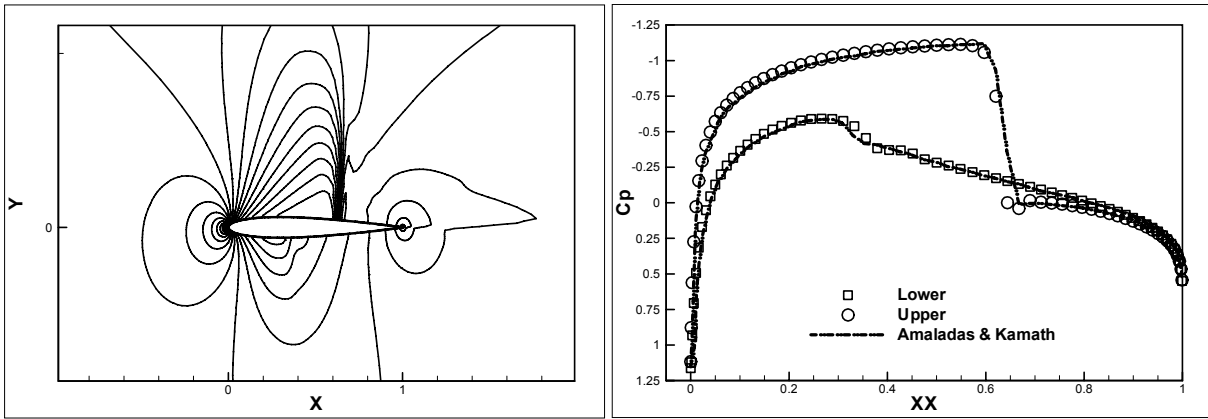


圖 7-220：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ， $dm=0.8$ (SUPERBEE)
 (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)

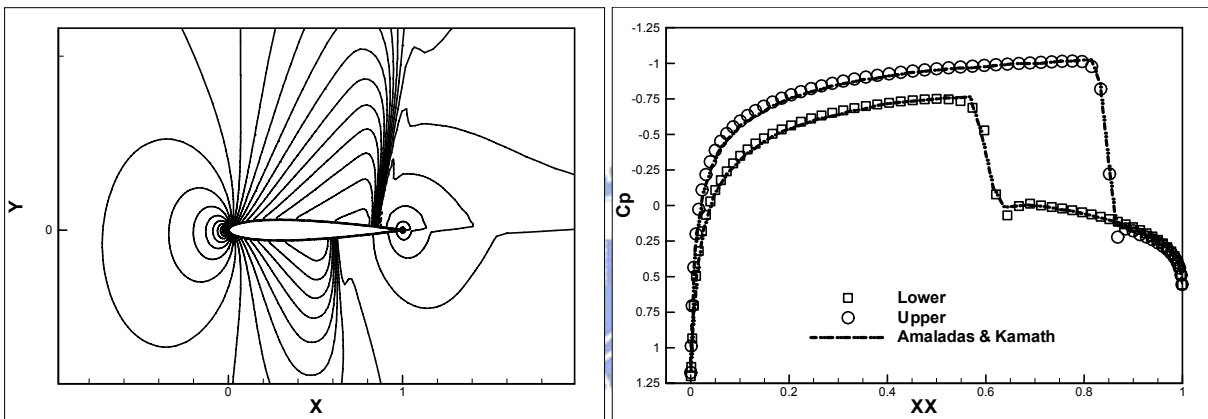


圖 7-221：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a)
 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)

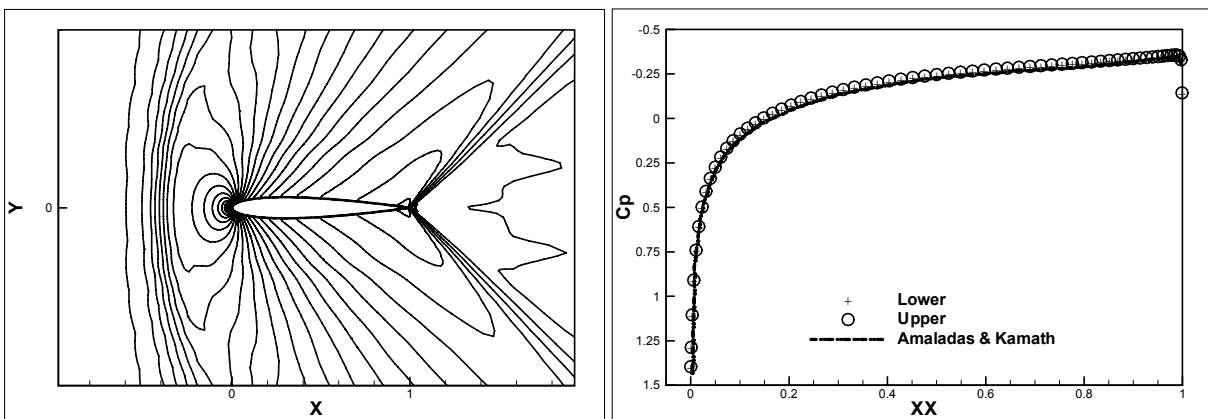


圖 7-222：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.20$ ， $\alpha=0.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a)
 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯壓力法)

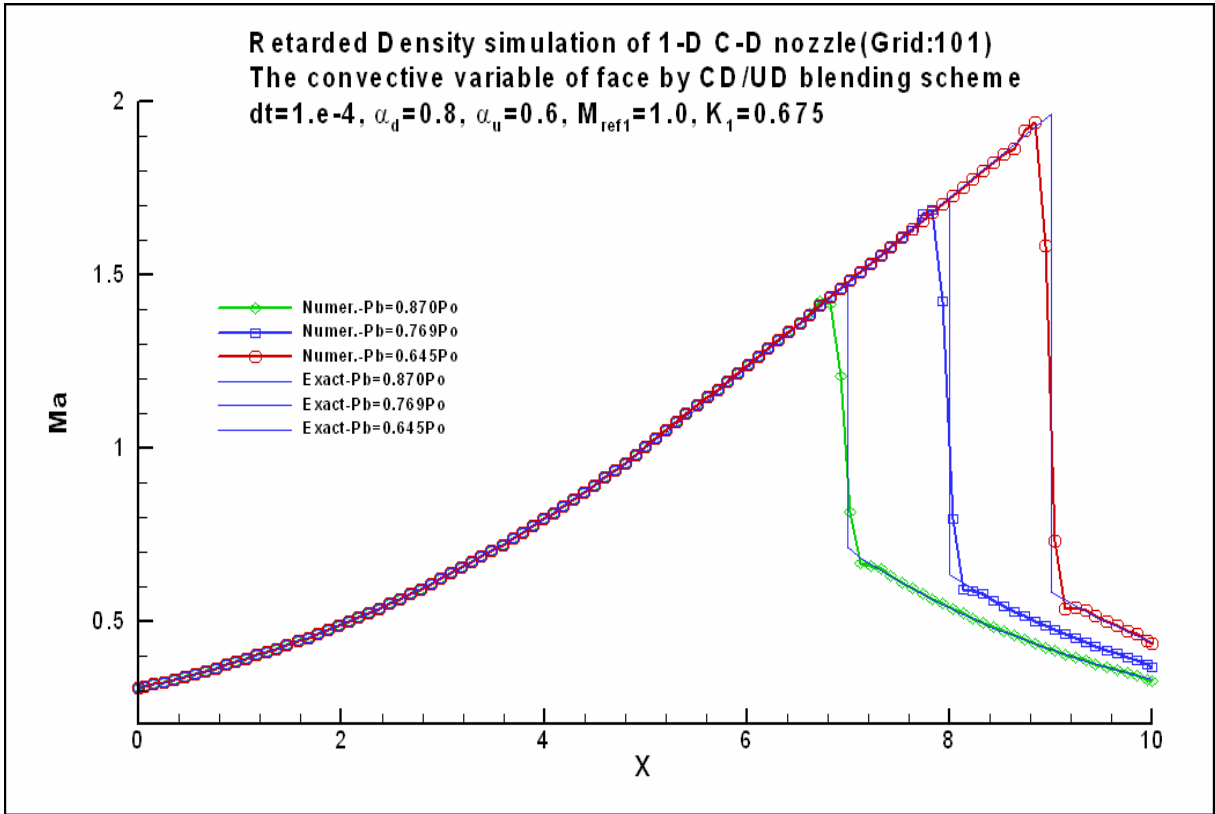


圖 7-223：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

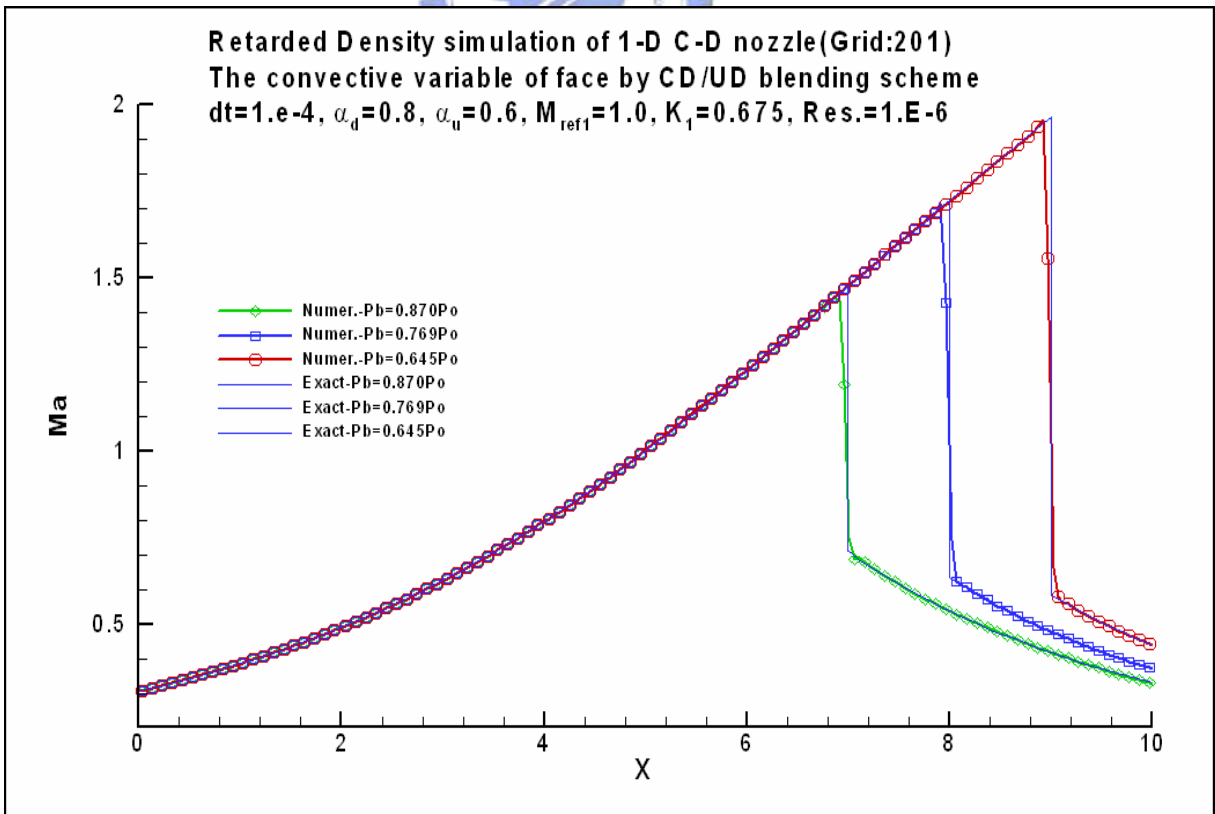


圖 7-224：一維 C-D 噴嘴之中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法，加密網格)

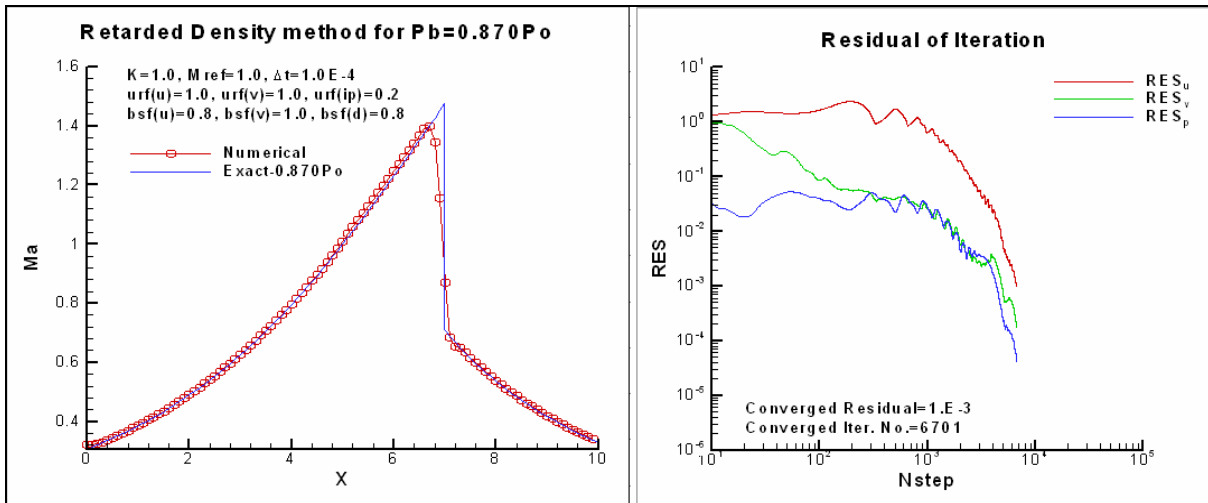


圖 7-225：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯密度法)

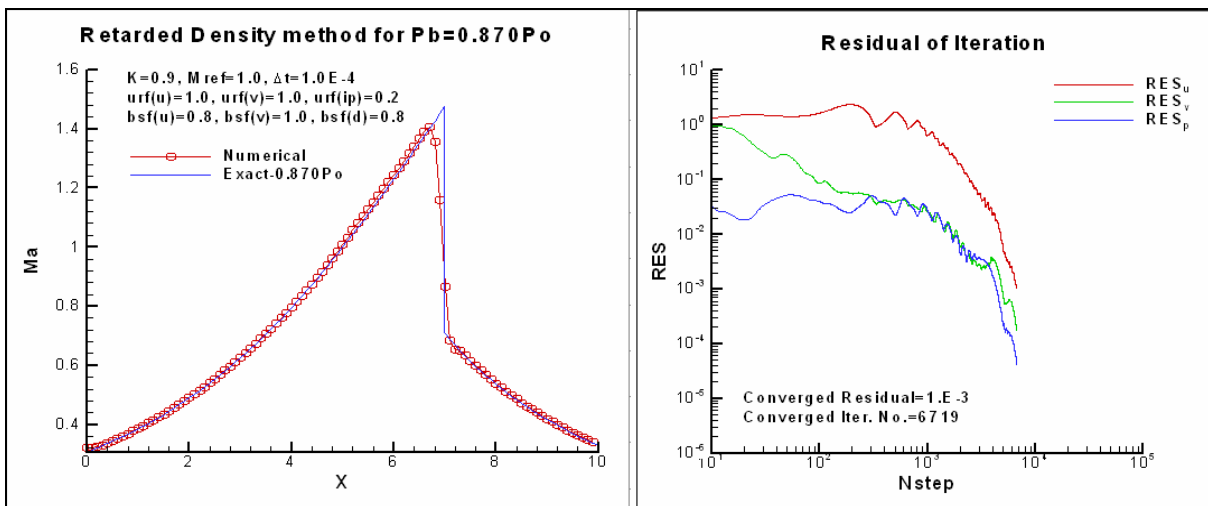


圖 7-226：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯密度法)

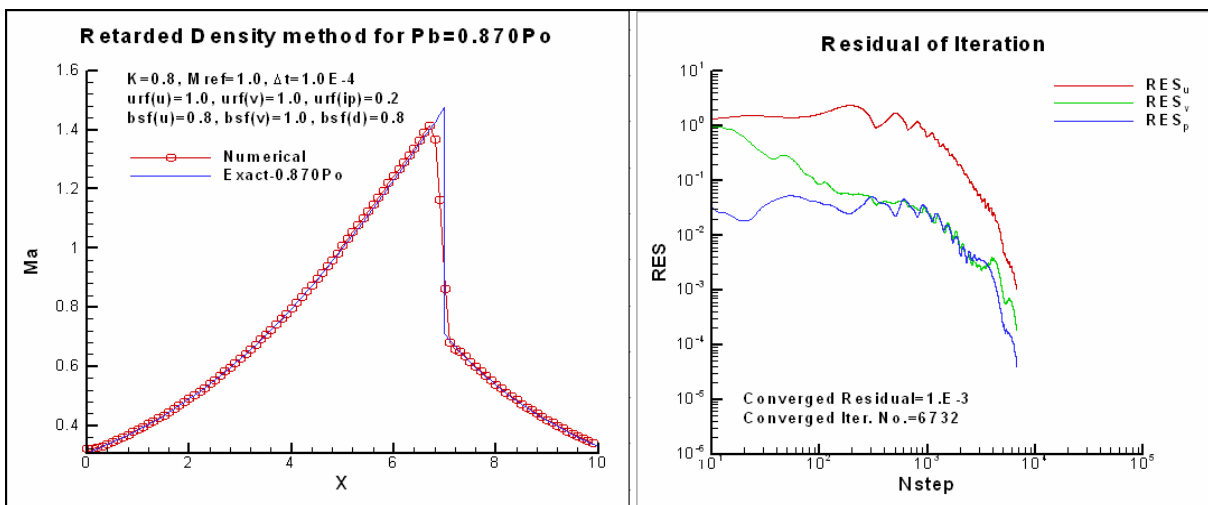


圖 7-227：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯密度法)

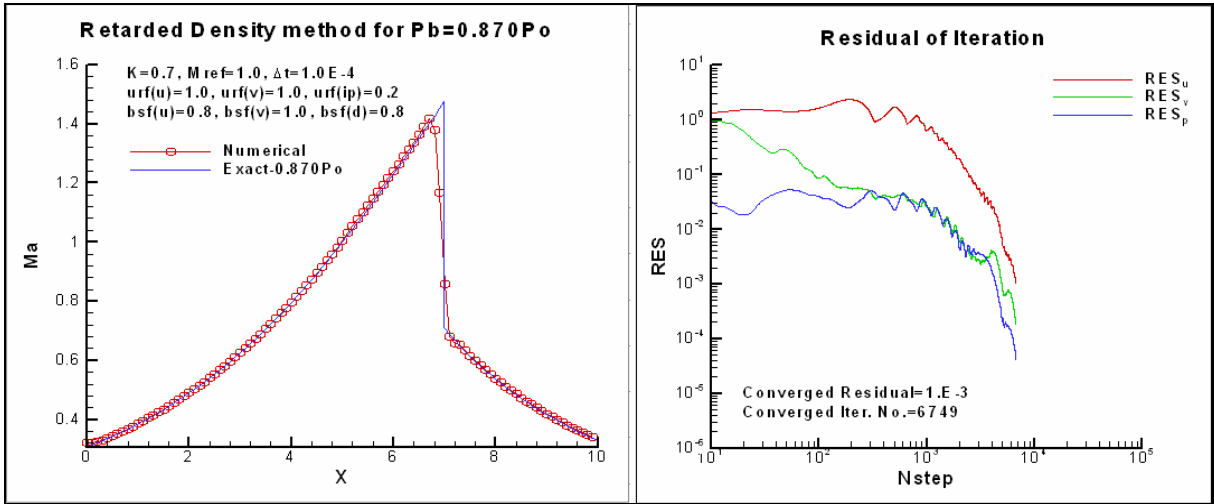


圖 7-228：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯密度法)

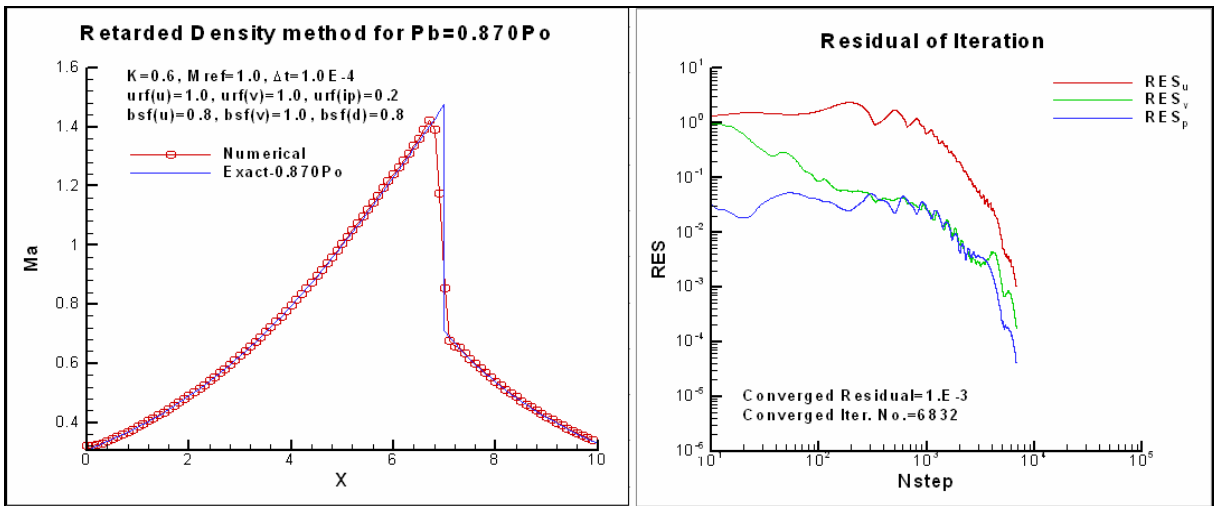


圖 7-229：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.870P_o$ ，遲滯密度法)

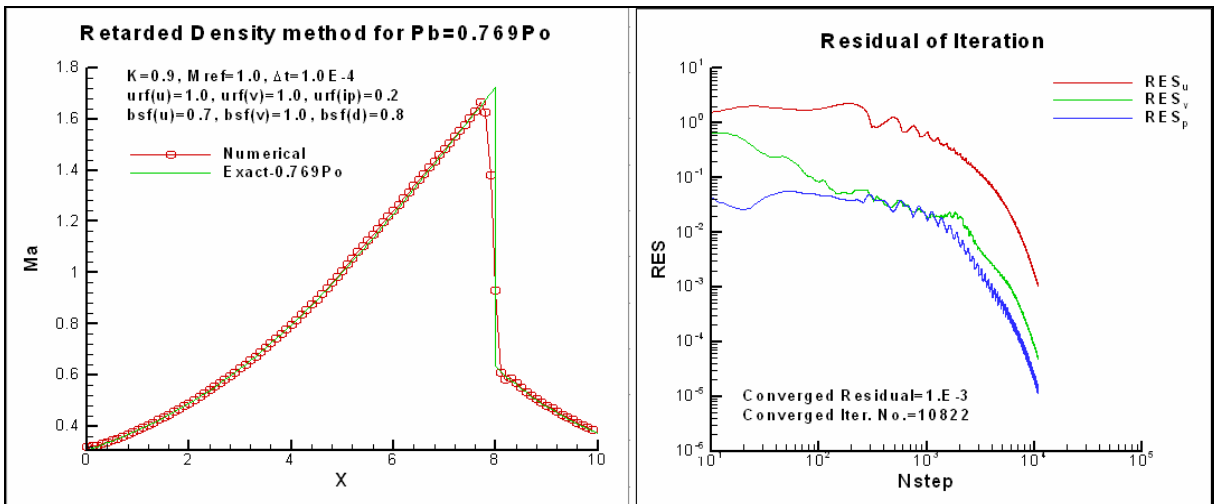


圖 7-230：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$ ，遲滯密度法)

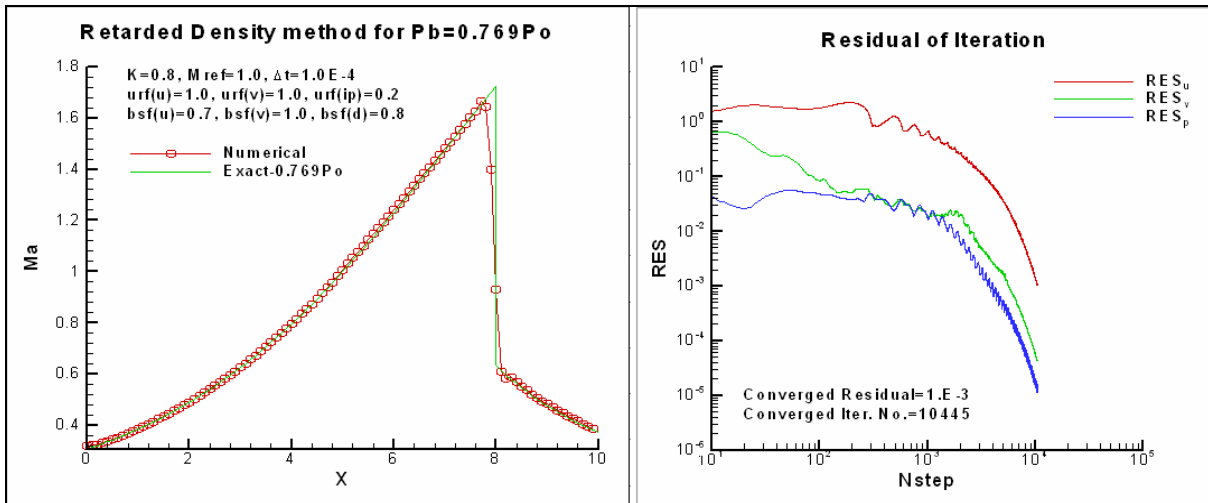


圖 7-231：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$ ，遲滯密度法)

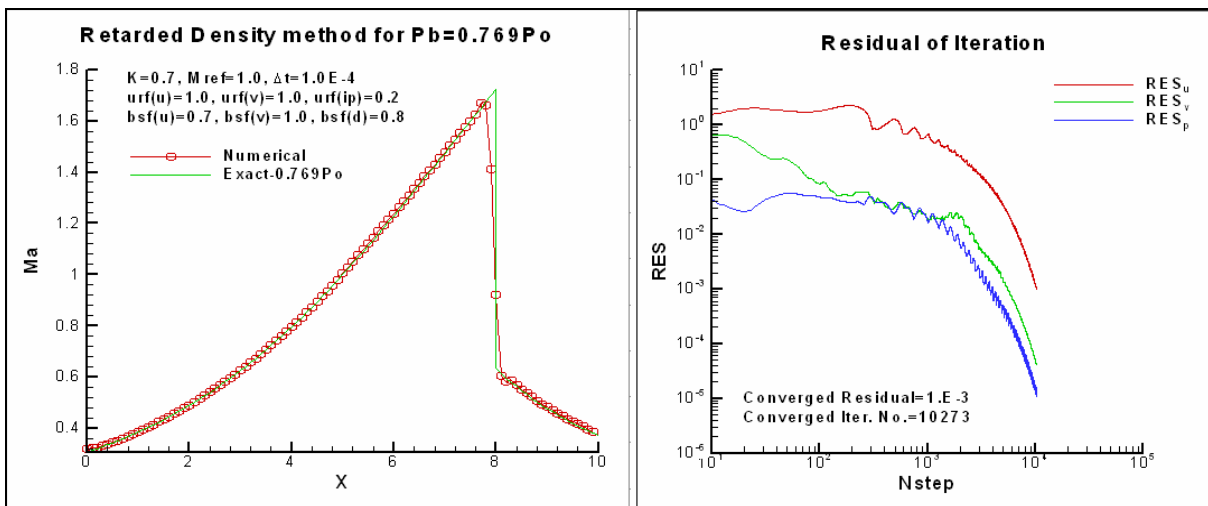


圖 7-232：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$ ，遲滯密度法)

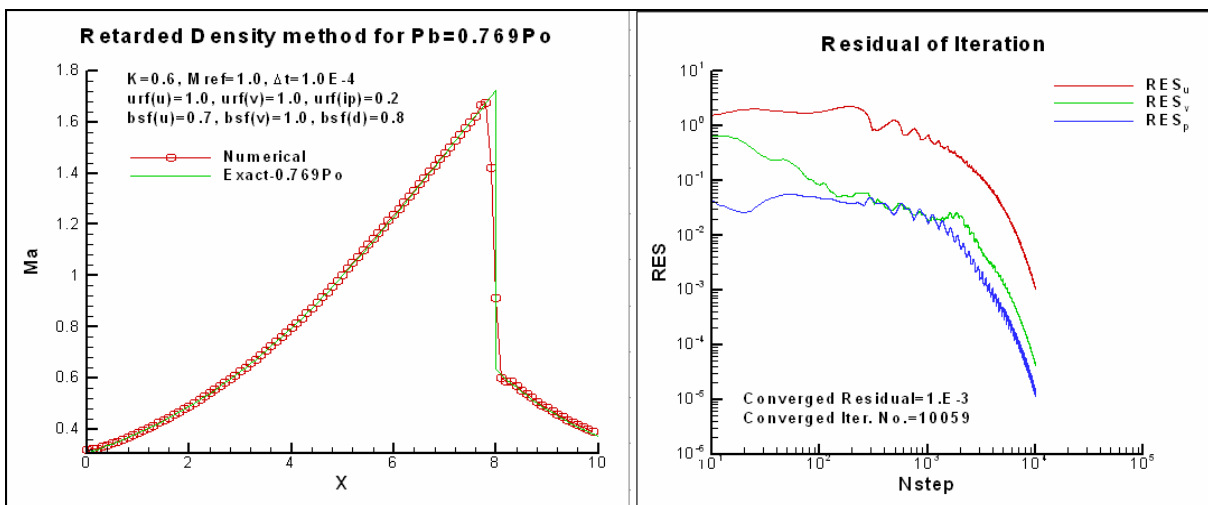


圖 7-233：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$ ，遲滯密度法)

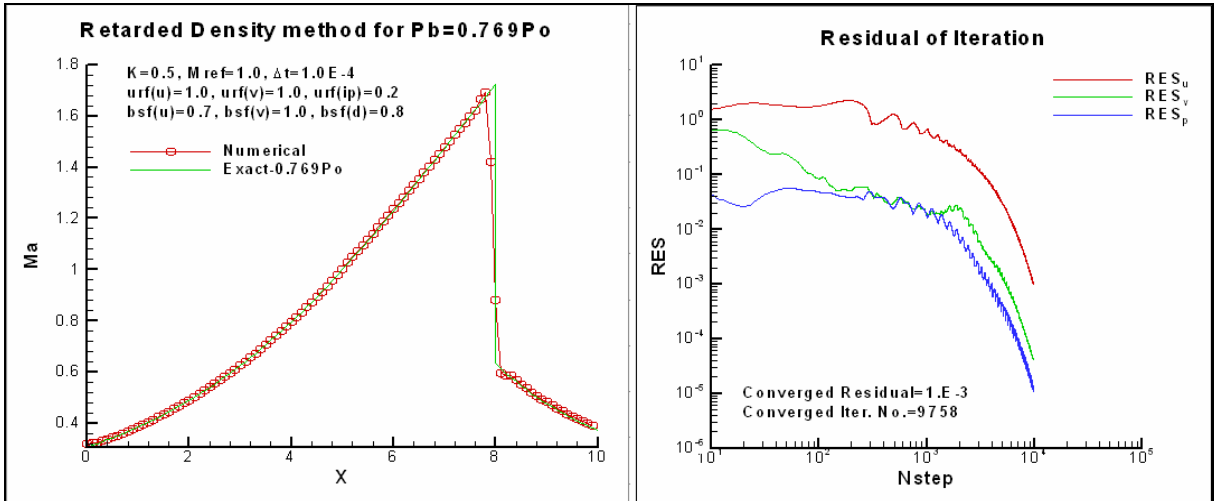


圖 7-234：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.769P_o$ ，遲滯密度法)

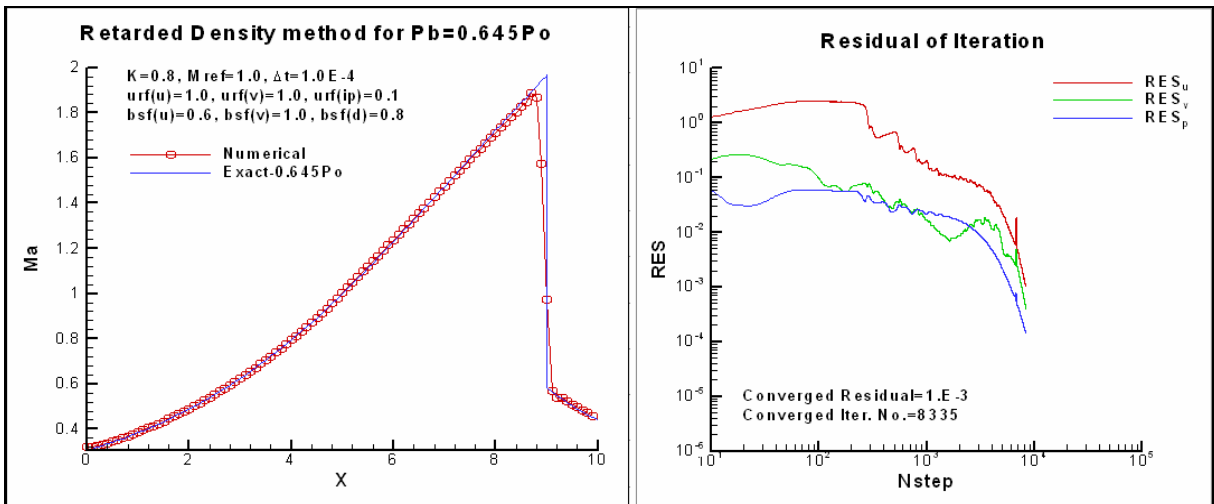


圖 7-235：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$ ，遲滯密度法)

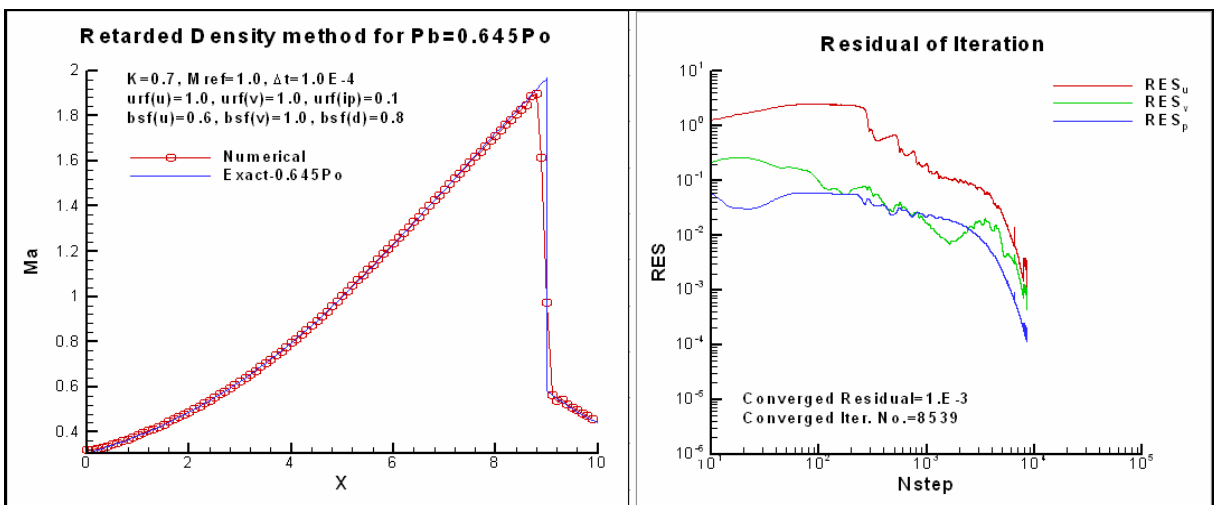


圖 7-236：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$ ，遲滯密度法)

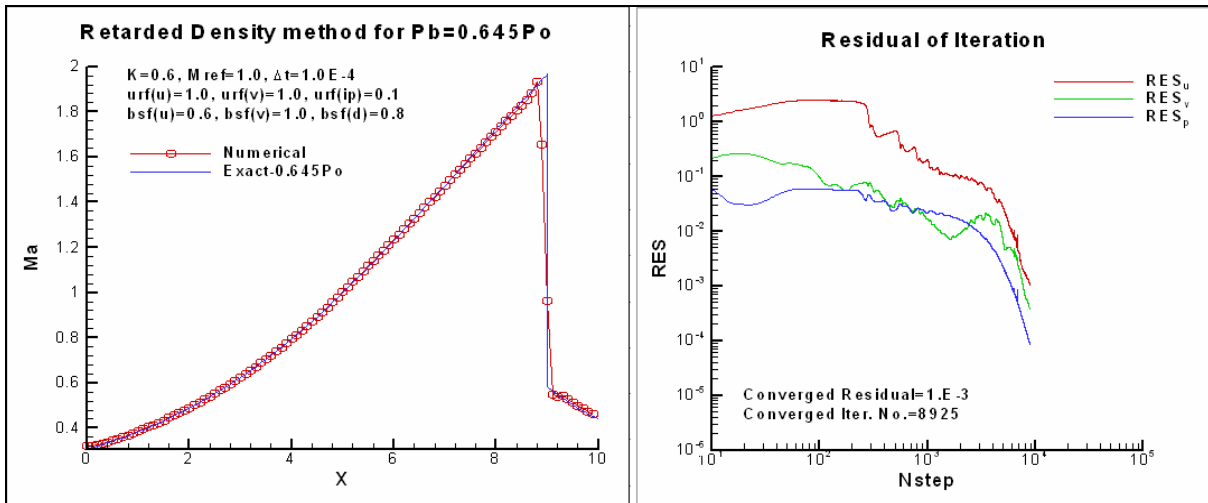


圖 7-237：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖($P_b=0.645P_o$ ，遲滯密度法)

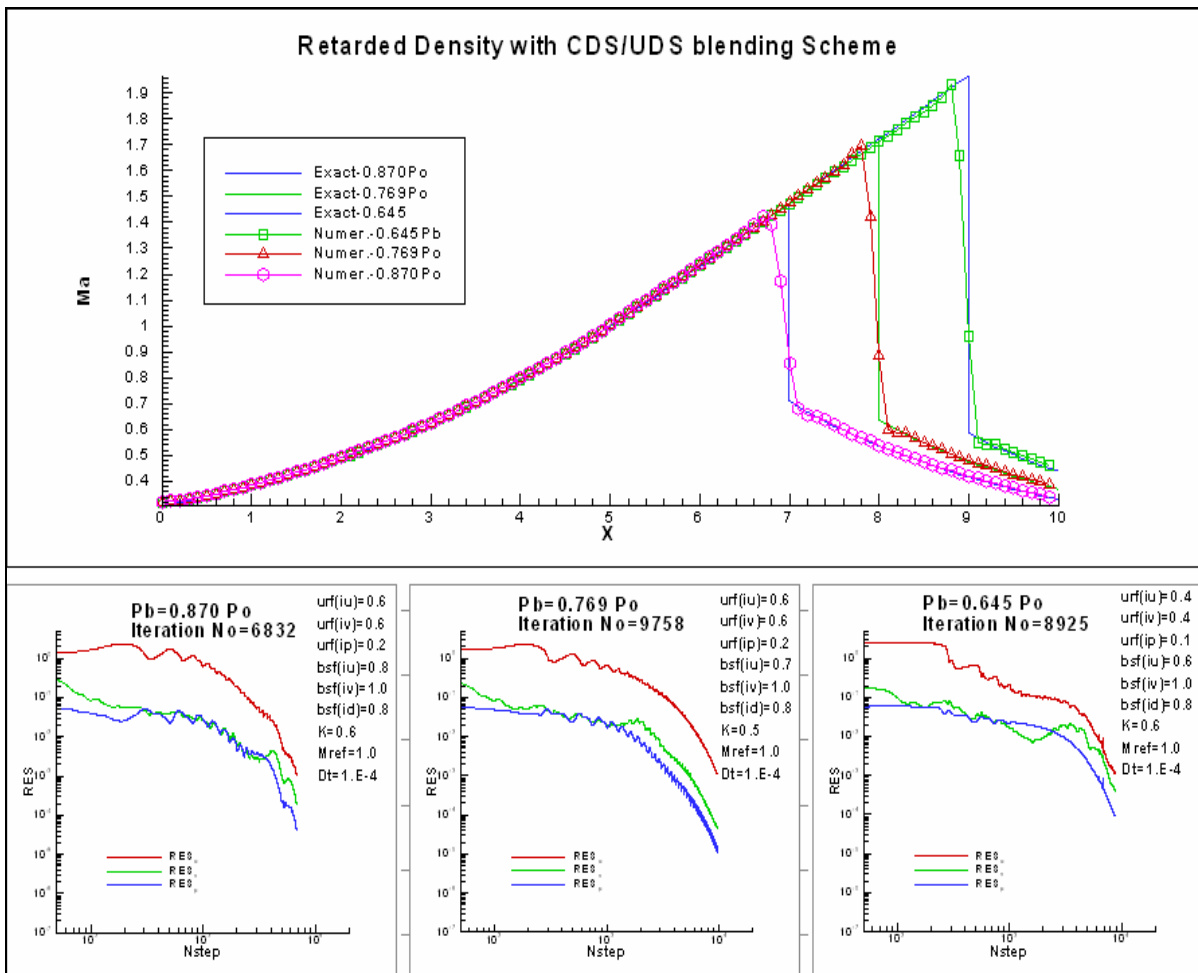


圖 7-238：二維 C-D 噴嘴中心馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

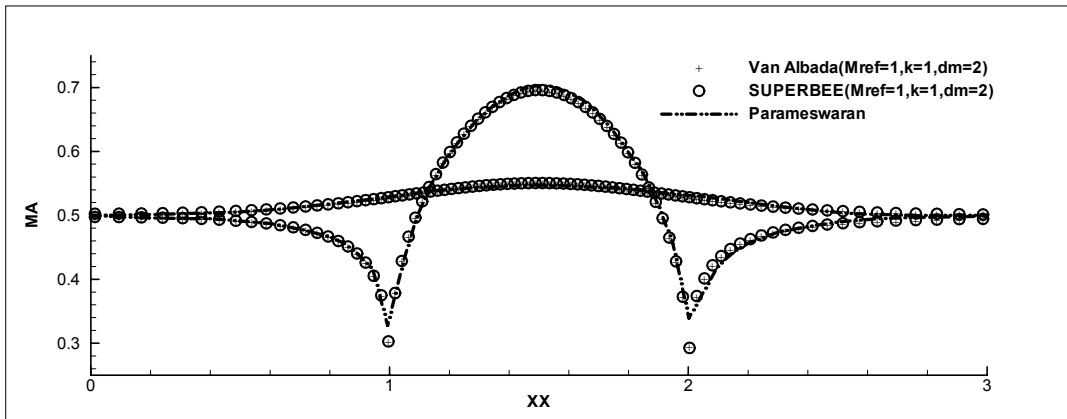


圖 7-239 : $M_{in}=0.5$ 次音速流場壁面馬赫數比較圖(遲滯密度法)

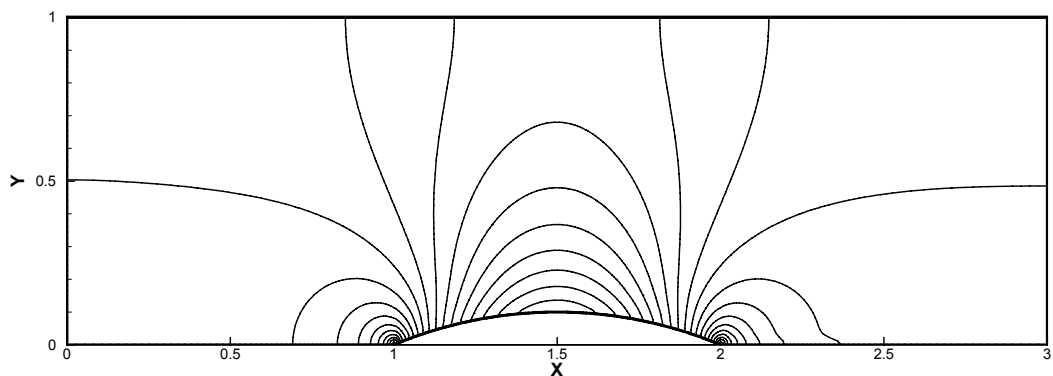


圖 7-240 : $M_{in}=0.5$ 次音速流場馬赫數等值圖(遲滯密度法)

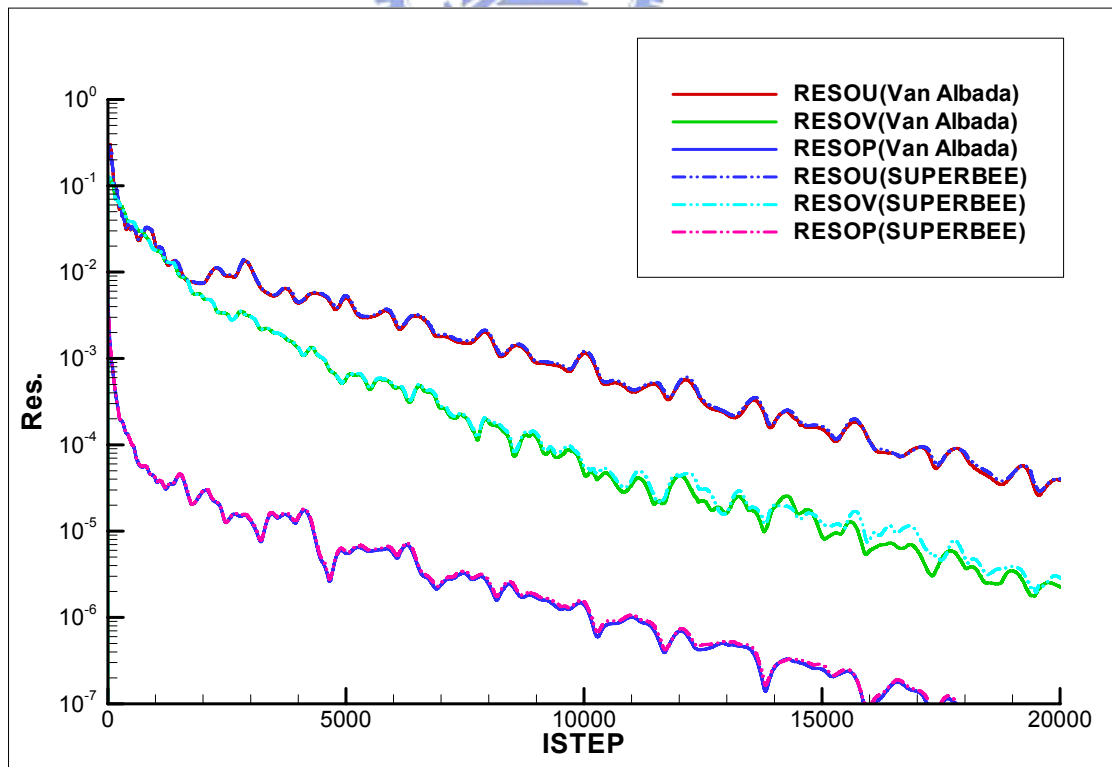


圖 7-241 : $M_{in}=0.5$ 次音速流場 Van Albada 及 SUPERBEE 限制函數法殘值收斂比較

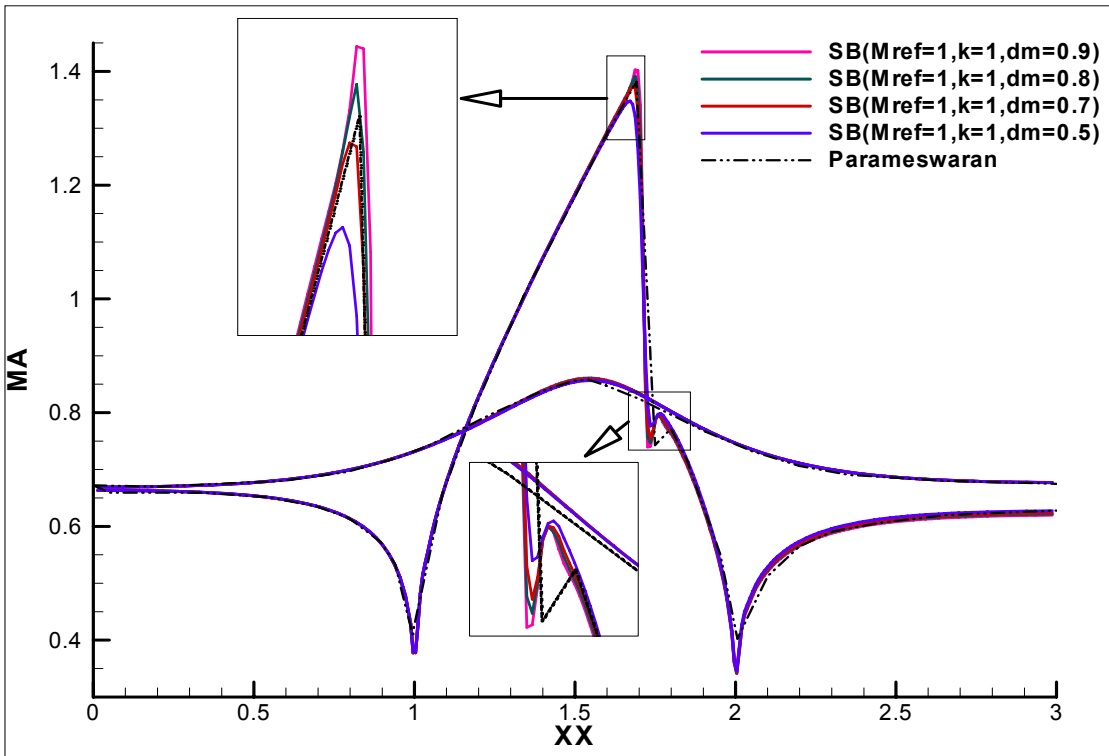


圖 7-242： $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨參數 dm 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

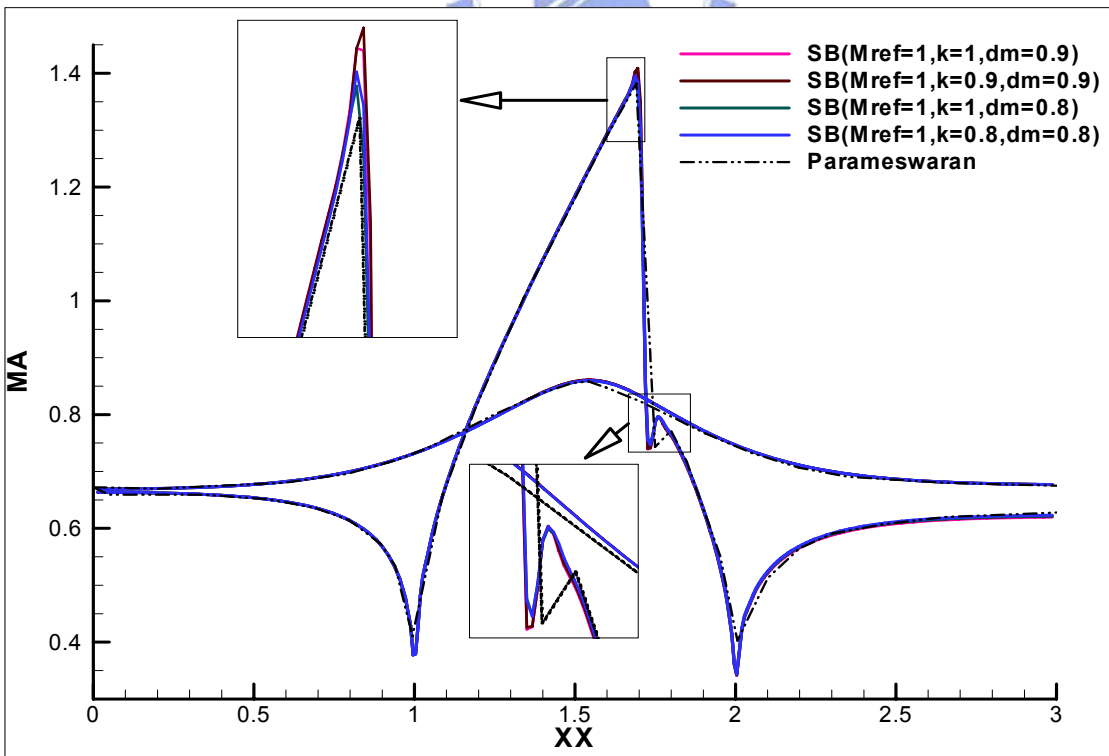


圖 7-243： $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨參數 k 值變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

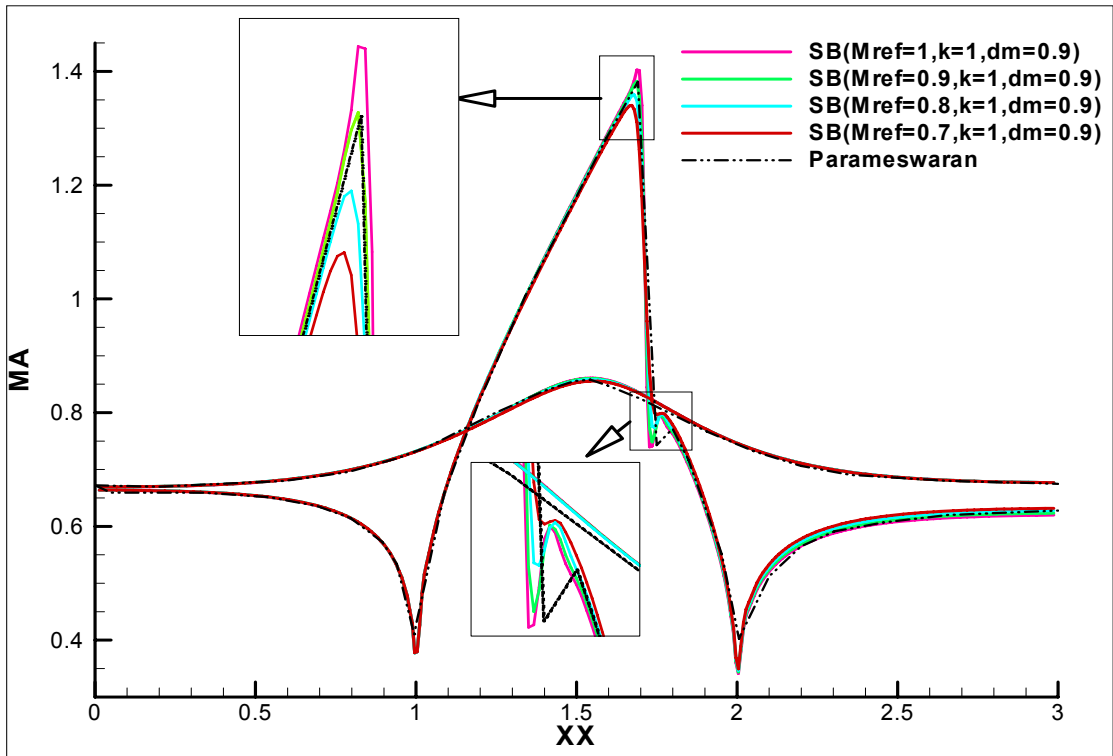


圖 7-244 : $M_{in}=0.675$ 穿音速流場隨參數 M_{ref} 變化之壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

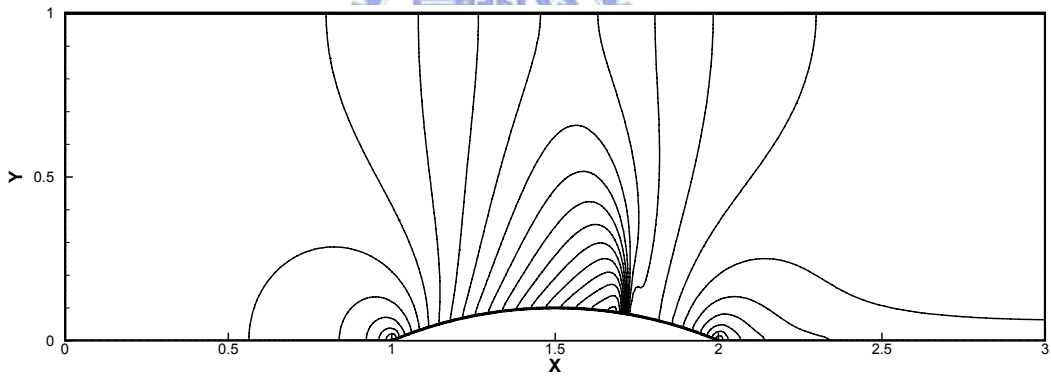


圖 7-245 : $M_{in}=0.675$ 穿音速流場馬赫數等值圖(遲滯密度法)

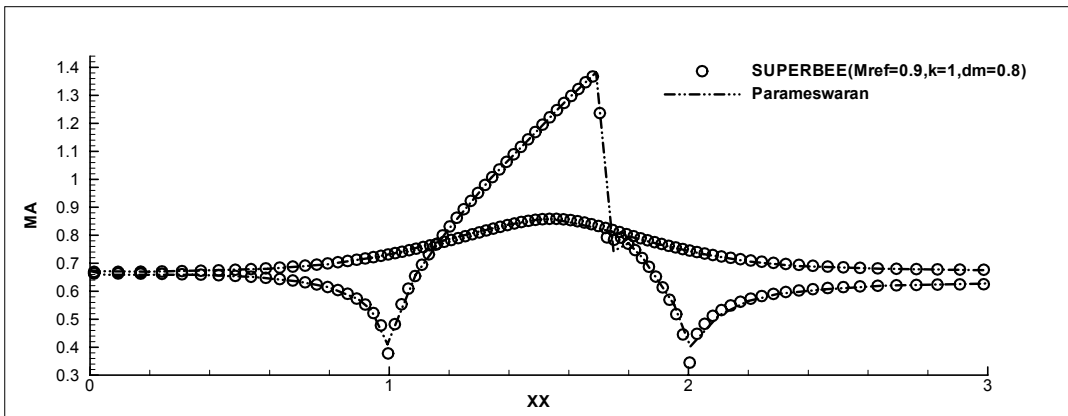


圖 7-246 : $M_{in}=0.675$ 穿音速流場壁面馬赫數分佈圖(遲滯密度法)

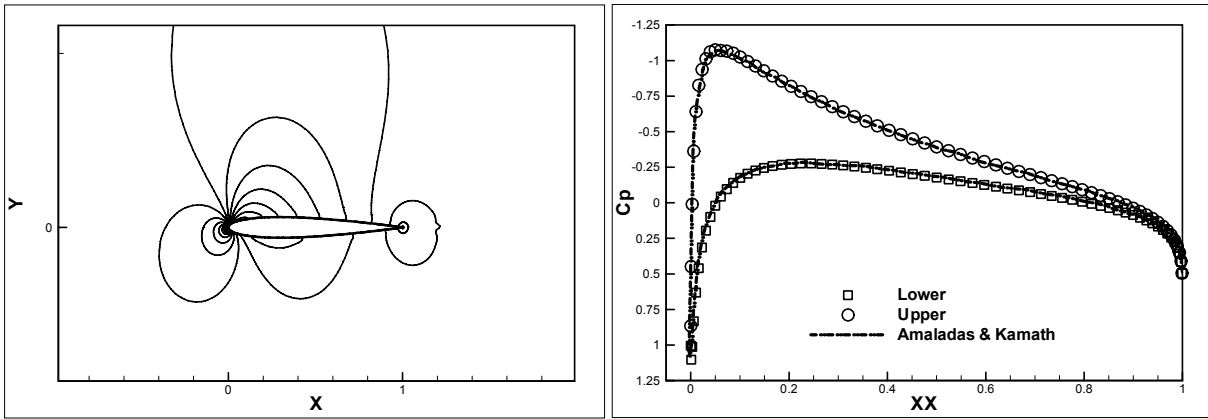


圖 7-247：NACA 0012 次音速流場 $M_\infty=0.63$ ， $\alpha=2^\circ$ ， $dm=2$ (SUPERBEE) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)

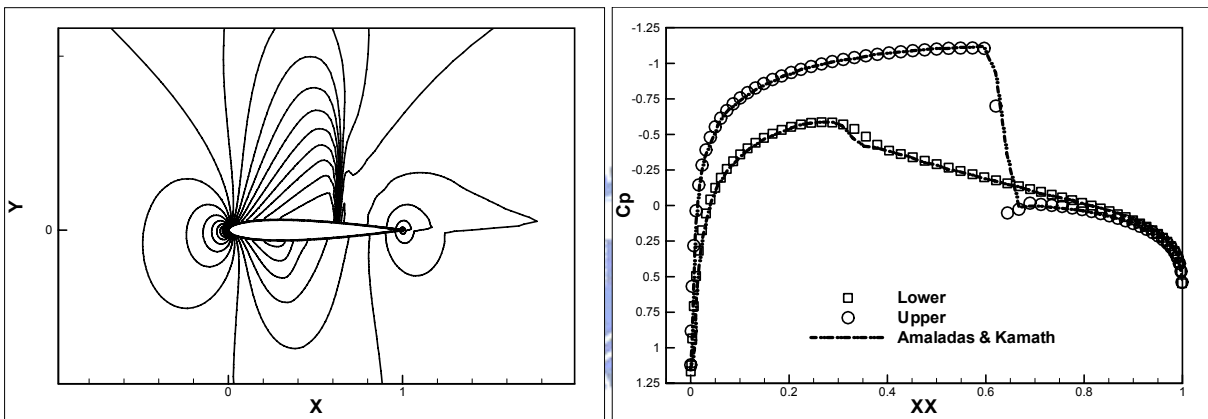


圖 7-248：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.80$ ， $\alpha=1.25^\circ$ ， $dm=0.8$ (SUPERBEE) (a)馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)

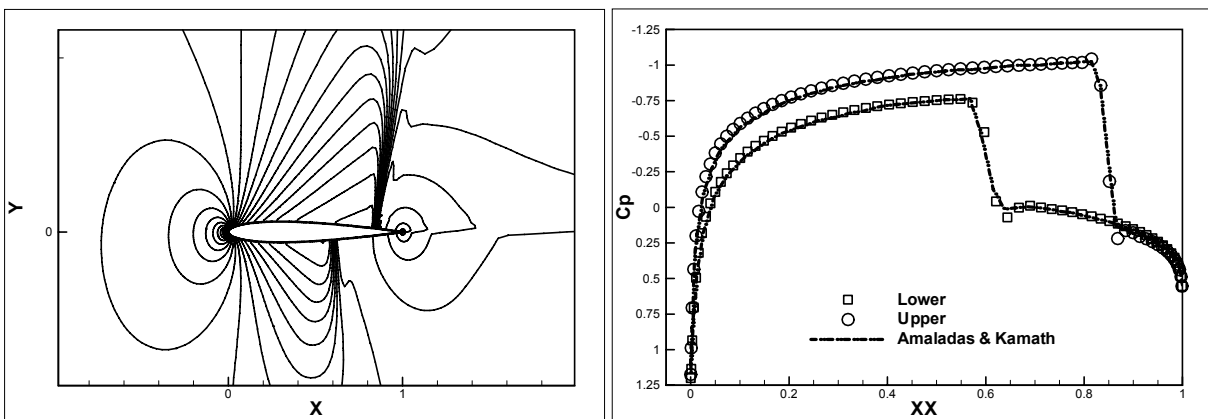


圖 7-249：NACA 0012 穿音速流場 $M_\infty=0.85$ ， $\alpha=1.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)

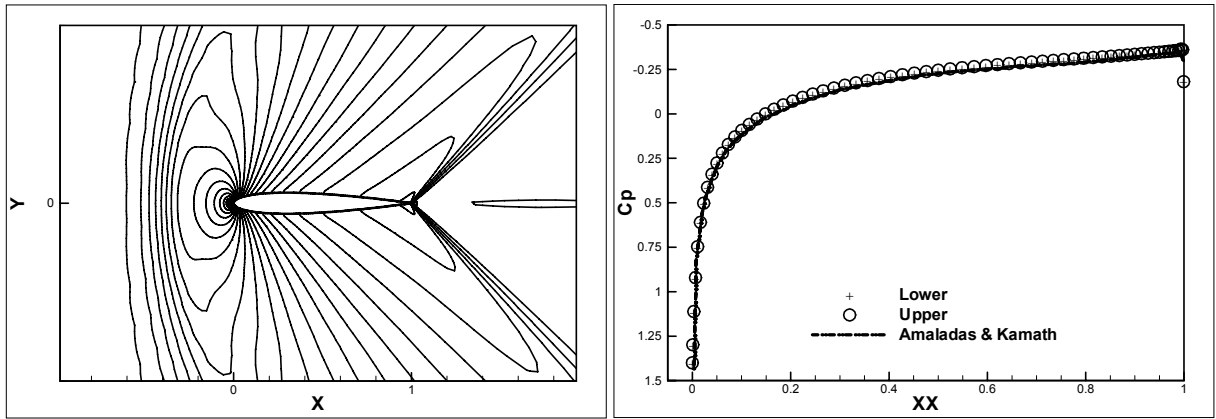


圖 7-250：NACA 0012 超音速流場 $M_\infty=1.20$ ， $\alpha=0.0^\circ$ ， $dm=1$ (Van Albada) (a) 馬赫數等值圖；(b)翼表面壓力分佈(遲滯密度法)



附錄 A：特徵變數限制法公式推導[124-125]

一個雙曲線型系統(hyperbolic system)的守恆律：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0$$

其中 Jacobian 矩陣定義 $A \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$, $B \equiv \frac{\partial G}{\partial x}$

此系統之線性形式為：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

(1) 存在一個相似轉換矩陣(similarity transformation)如下：

$$Q^{-1}AQ = \Lambda_A = \begin{bmatrix} \lambda_1^A & & & \\ & \lambda_2^A & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^A \end{bmatrix}, \quad R^{-1}BR = \Lambda_B = \begin{bmatrix} \lambda_1^B & & & \\ & \lambda_2^B & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^B \end{bmatrix}$$

其中 Λ_A 及 Λ_B 為對角矩陣(diagonal matrices), λ_i^A 與 λ_i^B 為矩陣 A 與 B 的特徵值(eigenvalue) 且為實數, 矩陣 Q , Q^{-1} , R , R^{-1} 的值(norms)具有唯一界限性(uniformly bounded)。

或(2) 定義 $P = k_1A + k_2B$, k_1 及 k_2 為任意實數, 存在一個相似轉換矩陣(similarity transformation)如下：

$$T^{-1}PT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

其中矩陣 P 的特徵值為實數, 矩陣 T 及 T^{-1} 的值(norms)具有唯一界限性(uniformly bounded)。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e_0) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} e_0) = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\underline{T} \cdot \vec{V}) + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} \dots \dots \dots (1) \\ (\vec{V} \cdot \text{mom.eq.}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \frac{v^2}{2}) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \frac{v^2}{2}) = -\vec{V} \cdot \nabla p + \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}) + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} \dots (2) \\ \text{where } e_0 = e + \frac{1}{2} v^2, \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \end{array} \right.$$

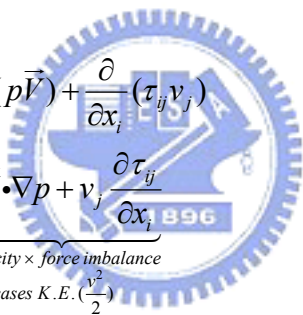
(1)-(2) ⇒

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} e) &= -p \nabla \cdot \vec{V} + \tau \otimes \nabla \vec{V} - \nabla \cdot \vec{q} \\ \Rightarrow \rho \frac{De}{Dt} &= -p \nabla \cdot \vec{V} + \tau \otimes \nabla \vec{V} - \nabla \cdot \vec{q}, \quad (e = c_v T) \end{aligned}$$

轉換為焓 $h (= e + p/\rho = c_p T)$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \tau \otimes \nabla \vec{V} - \nabla \cdot \vec{q}$$

<注意>

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{T} \cdot \vec{V}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ij} - v_j) = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) \\ &= \underbrace{-p \nabla \cdot \vec{V} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}_{\substack{\text{force} \times \text{deformation} \\ \text{increases internal} \\ \text{energy } e}} \underbrace{-\vec{V} \cdot \nabla p + v_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_{\substack{\text{velocity} \times \text{force imbalance} \\ \text{increases K.E. } (\frac{v^2}{2})}} \end{aligned}$$


以原始變數 $(\rho, u, v, \varepsilon)$ 統御之非黏性氣體方程式表示如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}) + \rho (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{p}{\rho} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}) + \rho (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{p}{\rho} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)\varepsilon/\rho & u & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & p/\rho & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)\varepsilon/\rho & 0 & v & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & p/\rho & v \end{bmatrix}$$

Jacobian A 的特徵值：

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} u - \lambda & \rho & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)\varepsilon/\rho & u - \lambda & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & u - \lambda & 0 \\ 0 & p/\rho & 0 & u - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (u - \lambda)^4 - (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} (u - \lambda)^2 - (\gamma - 1)\varepsilon (u - \lambda)^2 \\ &= (u - \lambda)^2 \left[(u - \lambda)^2 - (\gamma - 1) \left(\frac{p}{\rho} + \varepsilon \right) \right] \\ &= (u - \lambda)^2 \left[(u - \lambda)^2 - c^2 \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = u, u, u \pm c$$

Jacobian B 的特徵值(eigenvalue)：

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= \begin{vmatrix} v - \lambda & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v - \lambda & 0 & 0 \\ (\gamma - 1)\varepsilon/\rho & 0 & v - \lambda & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & p/\rho & v - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (v - \lambda)^4 - (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} (v - \lambda)^2 - (\gamma - 1)\varepsilon (v - \lambda)^2 \\ &= (v - \lambda)^2 \left[(v - \lambda)^2 - c^2 \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = v, v, v \pm c$$

$$\text{令 } P = k_1 A + k_2 B$$

$$|P - \lambda I| = \begin{vmatrix} z - \lambda & k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ k_1(\gamma - 1)\varepsilon/\rho & z - \lambda & 0 & k_1(\gamma - 1) \\ k_2(\gamma - 1)\varepsilon/\rho & 0 & z - \lambda & k_2(\gamma - 1) \\ 0 & k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & z - \lambda \end{vmatrix}, z \equiv k_1 u + k_2 v$$

$$\begin{aligned} & (z - \lambda) \begin{vmatrix} z - \lambda & 0 & k_1(\gamma - 1) \\ 0 & z - \lambda & k_2(\gamma - 1) \\ k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & z - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (z - \lambda) \left[(z - \lambda)^3 - k_1^2(\gamma - 1) \frac{p}{\rho} (z - \lambda) - k_2^2(\gamma - 1) \frac{p}{\rho} (z - \lambda) \right] \\ & - k_1(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \begin{vmatrix} k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ 0 & z - \lambda & k_2(\gamma - 1) \\ k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & z - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -k_1(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \left[k_1 \rho (z - \lambda)^2 + k_1 k_2^2 (\gamma - 1) p - k_1 k_2^2 (\gamma - 1) p \right] \\ &= -k_1(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \left[k_1 \rho (z - \lambda)^2 \right] \\ & k_2(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \begin{vmatrix} k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ z - \lambda & 0 & k_1(\gamma - 1) \\ k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & z - \lambda \end{vmatrix} \\ &= k_2(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \left[k_1^2 k_2 (\gamma - 1) p - k_2 \rho (z - \lambda)^2 - k_1^2 k_2 (\gamma - 1) p \right] \\ &= k_2(\gamma - 1)\varepsilon/\rho \left[-k_2 \rho (z - \lambda)^2 \right] \\ &\Rightarrow (z - \lambda)^4 - (z - \lambda)^2 \left[(k_1^2 + k_2^2)(\gamma - 1) \frac{p}{\rho} + (k_1^2 + k_2^2)(\gamma - 1)\varepsilon \right] = 0 \\ &\Rightarrow (z - \lambda)^4 - (z - \lambda)^2 \left[(k_1^2 + k_2^2)(\gamma - 1) \left(\frac{p}{\rho} + \varepsilon \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow (z - \lambda)^2 \left[(z - \lambda)^2 - (k_1^2 + k_2^2)c^2 \right] = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = z, z, z \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2} c \\ &\therefore \lambda = k_1 u + k_2 v, k_1 u + k_2 v, k_1 u + k_2 v \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2} c \end{aligned}$$

$$P = k_1 A + k_2 B = \begin{bmatrix} k_1 u + k_2 v & k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ k_1(\gamma - 1)\varepsilon/\rho & k_1 u + k_2 v & 0 & k_1(\gamma - 1) \\ k_2(\gamma - 1)\varepsilon/\rho & 0 & k_1 u + k_2 v & k_2(\gamma - 1) \\ 0 & k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & k_1 u + k_2 v \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } \lambda = k_1 u + k_2 v$$

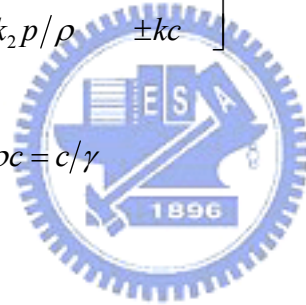
$$\Rightarrow P - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ k_1(\gamma-1)\varepsilon/\rho & 0 & 0 & k_1(\gamma-1) \\ k_2(\gamma-1)\varepsilon/\rho & 0 & 0 & k_2(\gamma-1) \\ 0 & k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{X}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\varepsilon/\rho \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{X}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } \lambda = k_1 u + k_2 v \pm kc$$

$$\Rightarrow P - \lambda I = \begin{bmatrix} \pm kc & k_1 \rho & k_2 \rho & 0 \\ k_1(\gamma-1)\varepsilon/\rho & \pm kc & 0 & k_1(\gamma-1) \\ k_2(\gamma-1)\varepsilon/\rho & 0 & \pm kc & k_2(\gamma-1) \\ 0 & k_1 p/\rho & k_2 p/\rho & \pm kc \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{X}}_3 = \begin{bmatrix} \rho/c \\ k_1/k \\ k_2/k \\ p/\rho c \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{X}}_4 = \begin{bmatrix} \rho/c \\ -k_1/k \\ -k_2/k \\ p/\rho c \end{bmatrix}, \quad p/\rho c = c/\gamma$$



$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \rho/c & \rho/c \\ 0 & k_2 & k_1/k & -k_1/k \\ 0 & -k_1 & k_2/k & -k_2/k \\ -\varepsilon/\rho & 0 & c/\gamma & c/\gamma \end{bmatrix}$$

使用高斯消去法(Gauss elimination)求得反矩阵 T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} (\gamma-1)/\gamma & 0 & 0 & -(\gamma-1)\rho/c^2 \\ 0 & k_2/k^2 & -k/k^2 & 0 \\ c/2\gamma\rho & k_1/2k & k_2/2k & (\gamma-1)/2c \\ c/2\gamma\rho & -k_1/2k & -k_2/2k & (\gamma-1)/2c \end{bmatrix}$$

附錄 B：整合式網格轉換產生程式(IGTP23D)發展及使用說明

無結構性網格在二維流場多採用 3 邊形或 4 邊形，在三維則為 4 面體或 6 面體，當然亦有任意邊形或混合式網格，但其產生方式就較複雜。故無結構性網格之計算解子均採用有限體積法(Finite Volume Method)求解。

流場計算分析工作依程序可概分為三個部份，一是前處理即網格產生、二是計算即計算解子、三是後處理即是流場狀態顯示。無結構性網格之產生有很多技巧及方式，然而，因其是流場計算分析工作之前處理，產生之網格必須能依照一定的格式正確地輸入計算解子以進行流場計算，雖然已具有簡單外形之 3 邊或 4 邊形網格之產生工具，鑑於對複雜外形網格之產生須投入大量時間，以區塊網格方式產生後再合併處理，網格常需配合計算需求而調整亦相當費時；且目前在市面上雖有許多發展相當成熟且可快速產生網格之商業化工程分析軟體，可以快速產生二維或三維之複雜外形無結構性網格，例如 MSC.Patran、FLUENT、CATIA、SolidWork 或 Advancing Front 法之網格產生程式等，但因其格式均搭配其自身之計算解子(solver)，對吾人自行發展計算程式所需之網格格式而言，無法直接使用，然而其亦有一些問題，如網格之疏密控制及任意邊形混合網格等。

為了解決網格產生問題，吾人發展一套網格產生處理程式，可以將不同方式產生之不同形狀(3 邊(面)至 6 邊(面))、相鄰區塊之網格，整合為一組滿足吾人所發展之計算解子所需網格，大大地縮短前處理時間。

只需要獲得網格最基本的元素，即「格點(vertices) x, y, z 座標」及「構成網格之格點編號」，即可經由本套網格產生處理程式輕易地獲得所需之網格資料，若應用 MSC.Patran 所產生之網格，因其輸出格式無單純之網格資料，必須使用吾人發展之網格資料擷取程式，將網格輸出資料轉化為所需之「格點(vertices) x, y, z 座標」及「構成網格之格點編號」之格式，才能進行後續之整合式網格轉換。在本文所發展之全速流計算解子需要之網格輸入資料共計 23 項。

1. 網格資料種類及名稱說明如下：

- (1). 總網格數(No of Total Cells)：ntotc
- (2). 總格點數(No of Total Vertices)：ntotv
- (3). 總網格面數(No of Total Faces)：ntotf
- (4). 總邊界數(No of Total Boundaries)：ntotb
- (5). 構成網格之邊或面的數目(No of Cell Faces)：ncf(mc)
- (6). 網格格點座標(X Y Z of Vertices)：x(mv), y(mv), z(mv)
- (7). 網格中心座標(X Y Z of Cell center)：xc(mb:mc), yc(mb:mc), zc(mb:mc)
- (8). 網格面積或體積(VOLume of cell)：vol(mb:mc)
- (9). 內插權重因子(Weighting Factor)：wf(mb:mf)
- (10). 面向量(Normal vector of Surface f)：sx(mb:mf), sy(mb:mf), sz(mb:mf)，方向朝外
(注意：是以編號較大的網格為觀點)。

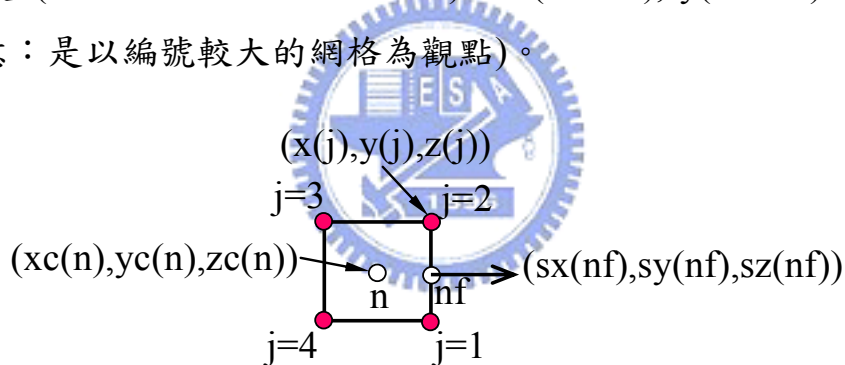


圖 B-1：體心、格點幾何座標及面向量示意圖

- (11). 相鄰網格編號(Index of Neighboring Cells)：inc(n)
- (12). 構成網格之邊或面編號(Index of Neighboring Faces)：inf(n)
- (13). 構成一個網格之格點編號(Index of Cell Verties)：icv(n,i)

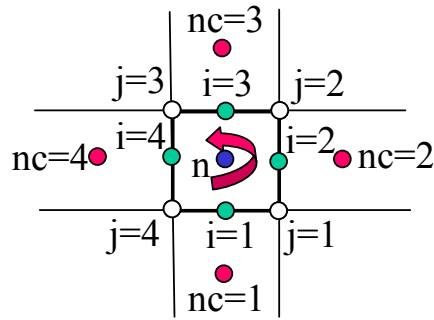


圖 B-2 : $inc(n,nc)$ 、 $icv(n,j)$ 及 $icf(n,i)$ 幾何關係示意圖

- (14). 構成網格邊或面之格點(Index of Face Vertices) : $ifv(nf,2)$ 或 $ifv(nf,3)$,
 注意 : 以網格之順時針方向觀之 , 依序排列。
- (15). 網格邊或面之相鄰網格編號(Index of Face neighbor Cells) : $ifc(nf,2)$,
 注意 : n 或 nc 中編號較小者先排 , 大者在後 , 即 $ifc(nf,1) < ifc(nf,2)$ 。

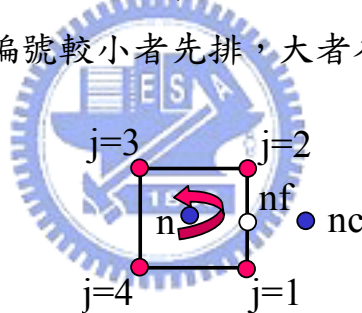


圖 B-3 : $ifv(nf,j)$ 幾何關係示意圖

- (16). 網格 n 為相鄰網格 nc 之第 i 個相鄰網格 : $incf(nc,mc)$, 即 $i = incf(n,j)$,
 $n = inc(nc,i)$, $incf(n,j) = 0$ 則表示第 j 個相鄰網格為邊界網格。
- (17). 邊界條件之類別(Boundary Type) : $ibdt(mb)$
- (1). $ibdt=1$ 表示入口邊界(inlet) ;
 - (2). $ibdt=2$ 表示出口邊界(outlet) ;
 - (3). $ibdt=3$ 表示壁面邊界(wall) ;
 - (4). $ibdt=4$ 表示對稱面邊界(symmetry line) ;
 - (5). $ibdt=5$ 表示遠場邊界(far field) ;

- (6). $ibdt=6$ 表示周期邊界(periodic)
- (18). 邊界之相鄰網格編號： $nc=ibdc(mb)$
- (19). 邊界 nb 為其相鄰網格 nc 之第 i 個相鄰網格邊或面： $ibdf(mb)$ ，即 $i=ibdf(nb)$ ， $-nb=icf(nc,i)$ 。
- (20). 邊界之相鄰網格中心垂直邊界之向量長度： $dn(mb)$

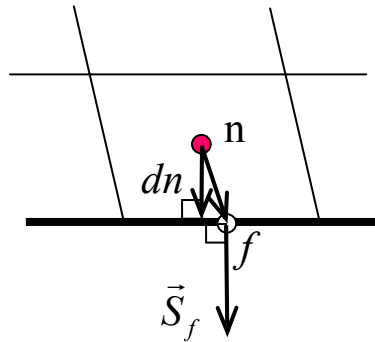


圖 B-4： $dn(mb)$ 幾何關係示意圖

- (21). 格點位置之類別： $indt(mv)$ ， $indt(n)=-1$ 表示格點 n 位於邊界上； $indt(n)=0$ 則表示格點 n 位於邊界內，即計算域內。
- (22). 共用同一格點之網格數目： $NofJ(mv)$
- (23). 共用同一格點之網格編號： $LofJ(mv,mjc)$ ， mjc 表示給定共用同一格點之網格數目最大值，通常設定為 20

2.程式流程：詳如圖 B-5~圖 B-10。

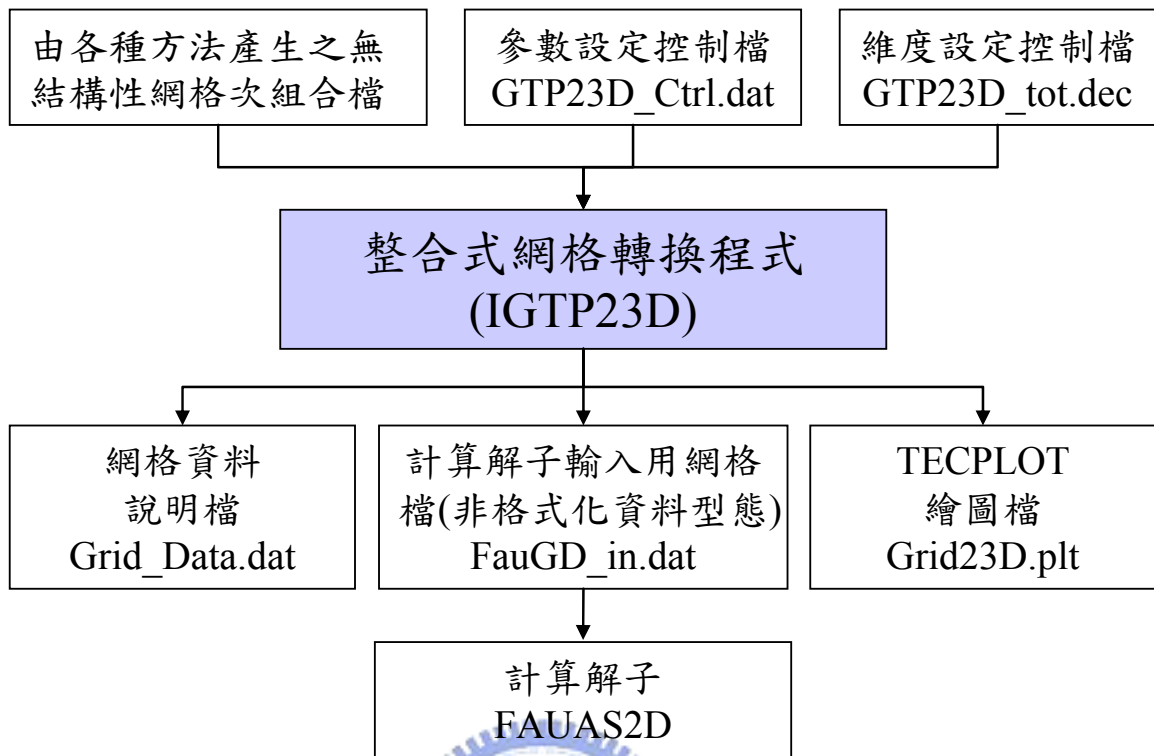
3.程式使用說明：

(1). 程式架構：

程式架構詳如下圖所示，其中由各種方法產生之無結構性網格次組合檔，可以是單個或多個區塊：

A.若為二維網格，則可以是 3 邊形或 4 邊形。

B.若為三維網格，則可以是 4 面體或 6 面體唯其相鄰區塊之界面格點座標必須相互一致。



(2). 維度空間大小參數設定

參數設定控制檔名為 GTP23D_tot.dec，設定方式如下所示：

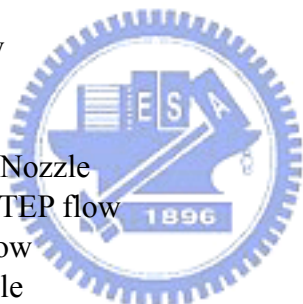
```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
*----2D grid parameter setting-----*
c   PARAMETER (NX=300,NY=100,NXY=NX*NY)
c   PARAMETER (nv=(nx-1)*(ny-1),nc=(nx-2)*(ny-2))
c   PARAMETER (nf=(nx-3)*(ny-2)+(nx-2)*(ny-3))
c   PARAMETER (nb=2*(nx-2+ny-2))
c   PARAMETER (mcf=4,mcv=4,mfe=4,mie=2,mjc=20)
c   PARAMETER (mcf=3,mcv=3,mfe=3,mie=2,mjc=20)
*----3D grid parameter setting-----*
PARAMETER(nx=120,ny=60,nz=50)
PARAMETER(nc=(nx-2)*(ny-2)*(nz-2))
PARAMETER(nf1=(nx-3)*(ny-2)*(nz-2))
PARAMETER(nf2=(nx-2)*(ny-3)*(nz-2))
PARAMETER(nf3=(nx-2)*(ny-2)*(nz-3))
PARAMETER(nf=nf1+nf2+nf3)
PARAMETER(nb=4*(nx-2+ny-2)+4*(nx-2)*(ny-2))
PARAMETER(nv=(nx-1)*(ny-1)*(nz-1))
*----For BRICK CELL-----*
PARAMETER (mcf=6,mcv=8,mfe=4,mie=4,mjc=10)
  
```

```

*---For Tetrahedral CELL-----*
c    PARAMETER (mcf=4,mcv=4,mfe=3,mie=3,mjc=40)
c    PARAMETER(nc=200000,NB=20000,NV=40000,NF=400000)
c    PARAMETER(nc=521000,NB=10000,NV=100000,NF=1050000)
c    PARAMETER (mcf=4,mcv=4,mfe=3,mie=3,mjc=30)
*---3D grid parameter setting-----*
    PARAMETER (IFlow=2)
    common/DIMN/ kDim
*****
* Note:
* 1.For 2D Grid ----->
*   +> TRIANGLE mesh      : mcf=3,mcv=3,mfe=3,mie=2,mjc=20
*   +> QUADRILATERAL mesh: mcf=4,mcv=4,mfe=4,mie=2,mjc=10
* 2.For 3D Grid ----->
*   +> Tetrahedral element : mcf=4,mcv=4,mfe=3,mie=3,mjc=10
*   +> Brick element      : mcf=6,mcv=8,mfe=4,mie=4,mjc=10
*   +> Triangle Bar element: mcf=5,mcv=6,mfe=4,mie=4,mjc=10
*
*--IFlow TYpe
* 1: 2D Cavity flow
* 2: 2D/3D Arc-Bump flow
* 3: 3D M-6 Wing flow
* 4: 2D Airfoil flow
* 5: 2D Converge-Diverge Nozzle
* 6: 2D Forward Faceing STEP flow
* 7: 2D circular cylinder flow
* 8: 2D double throat Nozzle
*****

```



(3). 輸入參數設定

參數設定控制檔名為 GTP23D_Ctrl.dat，依序設定次網格檔名、維度、網格邊數及格點順序控制等參數，若有多區塊次網格則往下填列，區塊數目不限，如下所示：

File: GTP23D_Ctrl.dat

The surface mesh files need to be assembly and ncf(n) Number Define.

Kmcf : 4 ---> Tetrahedron; 6 ---> Brick

KD No.: 0 ---> not change cell direction ; 1---> change cell direction

```
=====
[ The input Grid File ] [ mDim ] [ kmcf ] [KD]
A30(XXXX.SUR)
=====
```

```
'Naca-Grid1.plt'      2      4      0
'Naca-Grid2.plt'      2      3      0
```

次網格檔名

2 : 表示二維
3 : 表示三維

3 : 表示3邊形
4 : 表示4邊形
5 : 表示5邊形
6 : 表示5邊形

0 : 表示格點
順序不變
1 : 表示格點
順序逆轉

(4). 次網格檔格式

每一個次網格檔格式必須包括總格點數、總網格數、每一個格點之 x, y, z 座標(依格點編號序填列)及每一個網格由那些編號的格點所構成(依網格編號序填列)，如下所示。

21604		42480		
-25.00000000000000	0.00000000000000	0.00000000000000E+000		
-24.99798965000000	-0.317068129800000	0.00000000000000E+000		
-24.99195671000000	-0.634093403800000	0.00000000000000E+000		
-24.98190498000000	-0.951010763600000	0.00000000000000E+000		
-24.96783447000000	-1.267781019000000	0.00000000000000E+000		
總格點數		總網格數		
-24.94974709000000	-1.584341407000000	0.00000000000000E+000		
-24.92764473000000	-1.900652885000000	0.00000000000000E+000		
-24.90153503000000	-2.216652632000000	0.00000000000000E+000		
-24.87141800000000	-2.532301903000000	0.00000000000000E+000		
-24.83730125000000	-2.847537756000000	0.00000000000000E+000		
7723	7724	7902		
7724	7725	7903		
7725	7726	7904		
				每一格點之 x, y, z座標
7726	7727	7905		
7727	7728	7906		
7739	7740	7918		
7740	7741	7919		
				網格之格 點編號

4.主程式 GTP23D 內容概要說明

- * Program Name: GTP23D.f (Grid Transfer Program for FAUD23D)
- * PURPOSE:
- * 1.Composition the Grid generated by CATIA, MSC.Patran or Advancing Front
- * grid generation to domain grid.
- * 2.Transfor the 2D/3D Grids to FAUG2D/FAUG3D solver INPUT grid
- informations.
- *-----
- * FILE :
- * File1 : faug2d.gd/faug3d.gd for solver INPUT File
- * File2 : nsgrid2d.dat/nsgrid3d.dat for OUTPUT GRID check File
- * File3 : GTP_Ctrl.dat for contral grid input data file
- * File11 : Grid23D.plt for TECPLOT file
- *-----
- * VARIABLE instruction:
- * J,I,L : Node(Joint), Face(Edge), Cell
- * mcf : The Face numbers of Cell(4, 5, or 6)

- * mfe : The Edge numbers of Cell Face(3, 3&4, or 4)
- * mie : The node numbers of Cell Face(2,3, 3&4, or 4)
- * mcv : The Node numbers of Cell(4, 6, or 8)
- * Nnode : Total No. of Nodes in the full computational domain.
- * Nface : Total No. of Faces(edges) in the domain, not include boundary.
- * Ncell : Total No. of Cells in the full computational domain.
- * Nbond : Total No. of Boundary edges(faces) in the computer domain.
- * JofL(I,k)(icv): k-th Node of Cell-I (k=1~mcv)
- * LofL(I,k)(inc): k-th Neighbor Cell of Cell-I (k=1~mcf)
- * IofL(I,k)(icf): k-th face of Cell-I (k=1~mcf)
- * LofJ(J,k)(ifc): k-th Neighbor Cell of Face(Edge)-J (k=1~2)(ncc2>ncc1)
- * JofJ(J,k) : k-th Node of Face(Edge)-J (k=1~4 for 6-face)(k=1~3 for 4-face)
- * LofJ(J,k) : k-th Cell of share the same Node(k=1~NofJ(J))
- * NofJ(J) : Cell numbers of share the same Node(J)
- * indt(J) : Node type 0--->interior nodes; -1--->boundary nodes.
- * JIofL(K,I,J) : J-th Node of CELL I-th Edge of cell-K (J=1~4(3); I=1~mcf)
- * ibdc(n) : Cell of neighbor boundary Bond-I
- * ibdt(n) : Flow field type of boundary Bond-I,
- * 1---> For Inlet
- * 2---> For Outlet
- * 3---> For Wall
- * 4---> For Symmetry plane
- * ibdf(n) : Boundary edge is the K-th index of beighbor cell
- * dn(n) : near-wall normal distances
- * incf(n) : neighbor face is the K-th index of neighbor cell.
- * ncf(n) : The Face number of every cell-n(6 or 4).
- * nfe(n) : The Edge number of every Face-n(3 or 4).
- * incp(I,K) : The periotic boundary types of cell.
- * nrc(n) : The coordinare system for cell n.
- * nrc(n)=1---->Rotational coordinate Grid.
- * nrc(n)=0---->Cartitional coordinate Grid.
- * nrf(n) : The coordinare system for cell n.
- * nrf(n)=1---->Rotational coordinate Face.
- * nrf(n)=0---->Cartitional coordinate Face.
- * xx(I),yy(I),zz(I) : Coord. of node-I

* xcc(I),ycc(I),zcc(I): center Coord. of Cell-I
 * xf(I),yf(I),zf(I) : center Coord. of Face-I
 * sx(I),sy(I),sz(I) : The normal vector of Face-I, outward the cell face.
 * vol(n) : The Volume of Cell-n
 * wf(I) : The weighting Factor of Face-I

*-----

副程式

* SUBROUTINE :
 * ZERO : NULL of all variables.
 * GRIDSUM: Function is as following--->
 * 1.Read the BLOCKs grid data, including (X,Y,Z), JofL and JIofL(for
 * 3D).
 * 2.Search and delete the same node and rearrange its
 * index of cell:JofL(Ncell,mcv)
 * 3.Assembly all BLOCKs to computational domain.
 * 4.Define the ncf(n) and nfe(k) of Cell n.
 * 5.Read and set the Nnode and Ncell.
 * ReOfCell: Function is as following--->
 * 1.Search the neighbor cell of current cell:LofL(Ncell,mcf)
 * 2.Calculate the number of boundary edge:Nbond
 * 3.Search the nodes of boundary and Face:JofI(-Nbond:Face,mfe)
 * 4.Search the neighbor cells of Face:IofL(nc1,nc2), nc2>nc1.
 * 5.Search the cell of neighbor boundary:ibdc(Nbond)

附圖：

整合式網格轉換程式(IGTP23D)產生方法流程圖

注意：

由各種方法產生之無結構性網格次組合檔，可以是單個或多個區塊：

1. 若為二維網格，則可以是3邊形或4邊形
2. 若為三維網格，則可以是4面體或6面體唯其相鄰區塊之邊界格點座標必須相互一致。

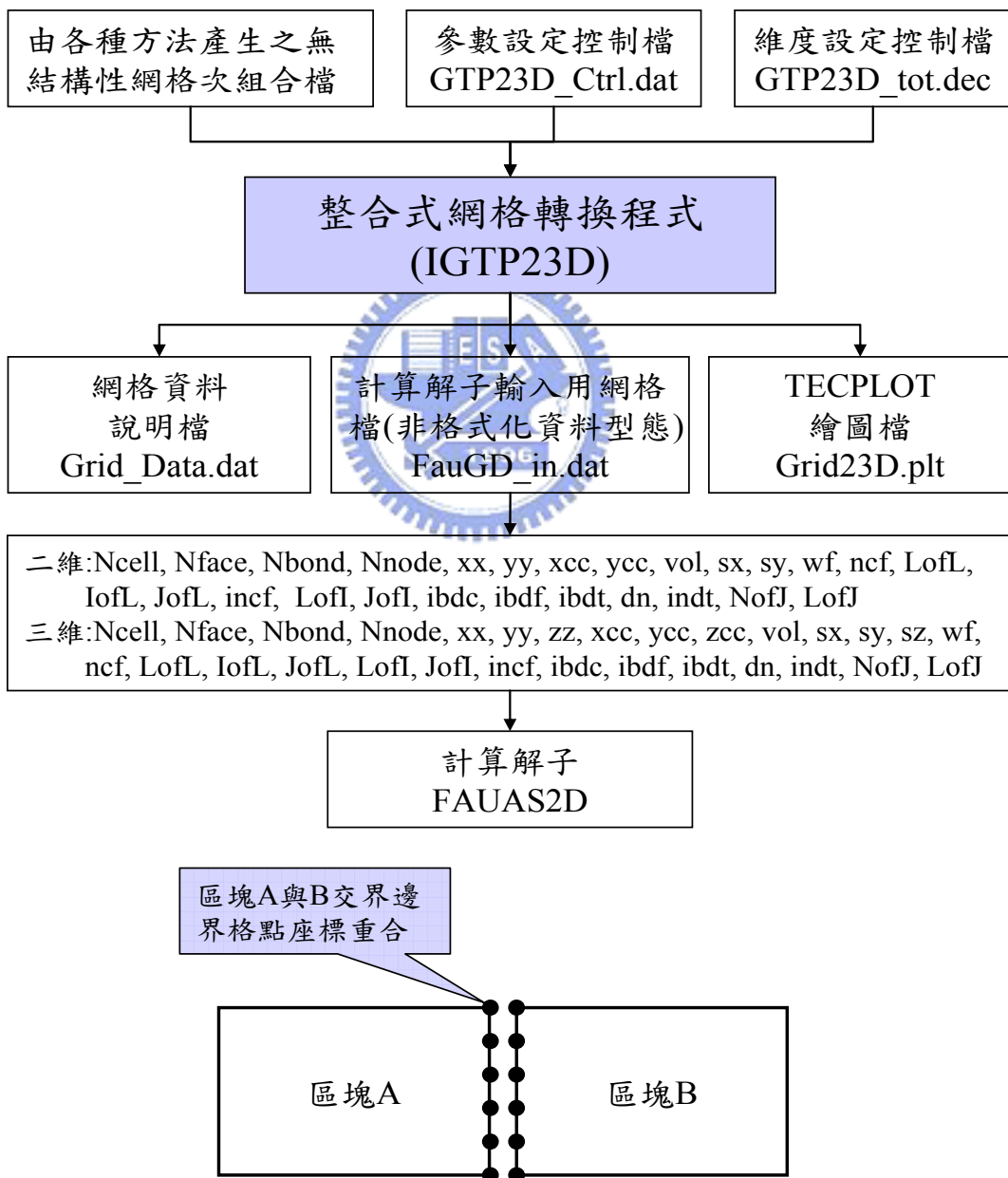


圖 B-5：網格產生流程方塊圖

GTP23D主程式流程圖

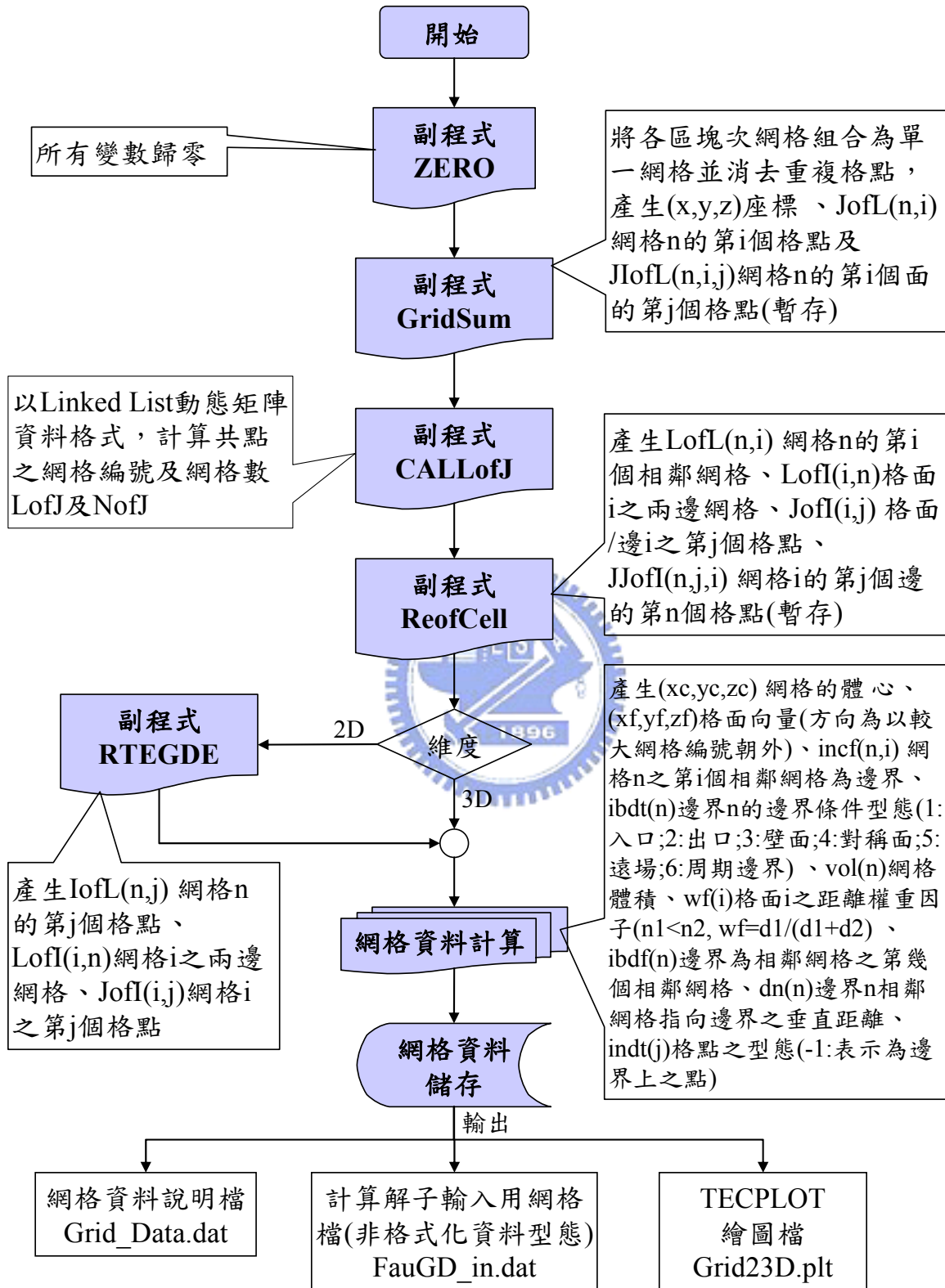


圖 B-6：主程式流程方塊圖

GridSum副程式流程圖

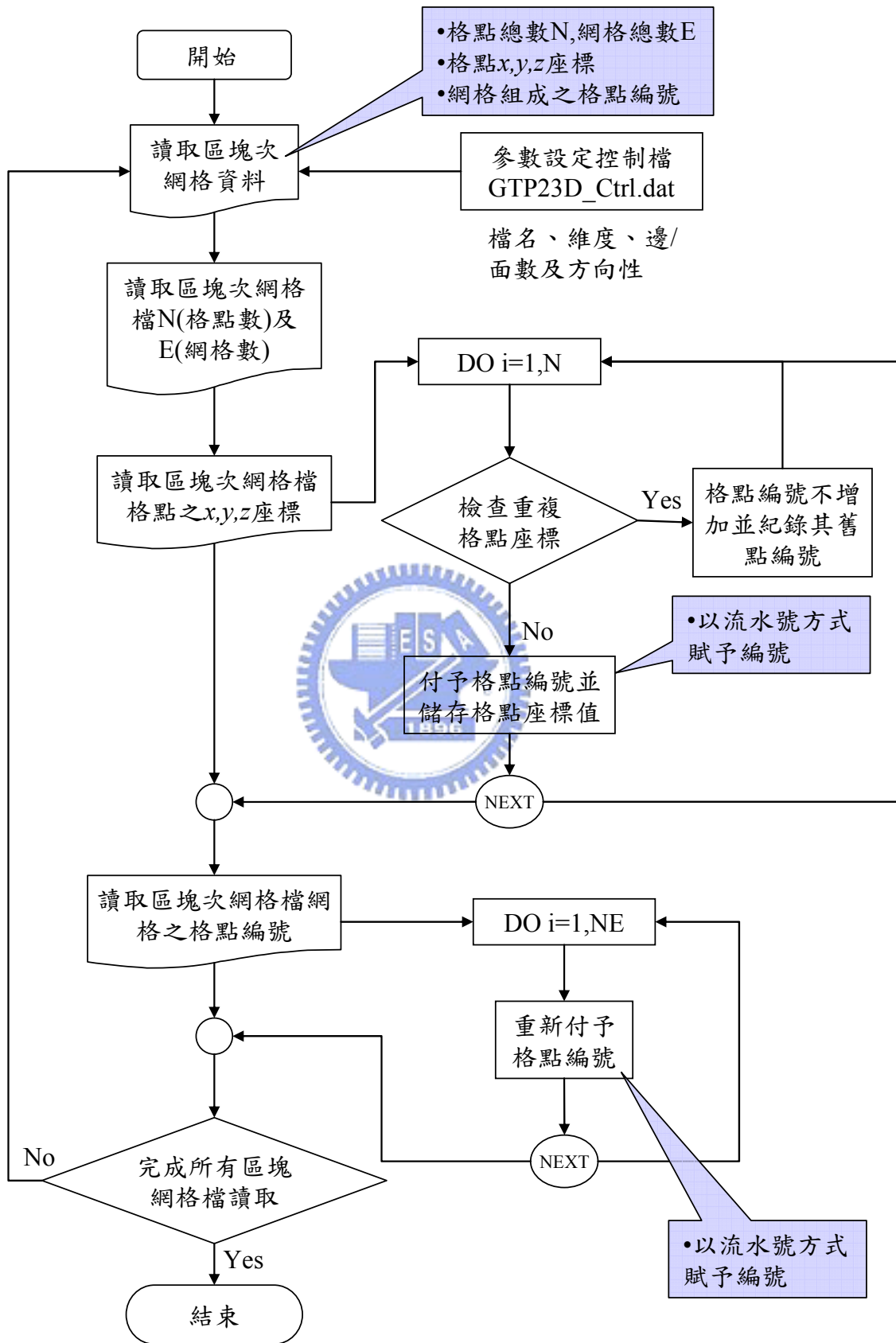


圖 B-7 : GridSum 副程式流程方塊圖

CALLofJ副程式流程圖

本副程式主要在處理共點之網格集合：
 利用Linked List概念來儲存集合之資料，可節省大量的記憶體空間，
 以下用火車之概念來說明：

1. 首先要定義有多少節車廂及每部車廂可容納多少人。
2. 車廂數的設定通常取總格點數的1.2倍；而每部車廂可容納人數：
 二維4邊形網格取10；3邊形則取30。三維6邊形網格取10；4邊形網格取40。

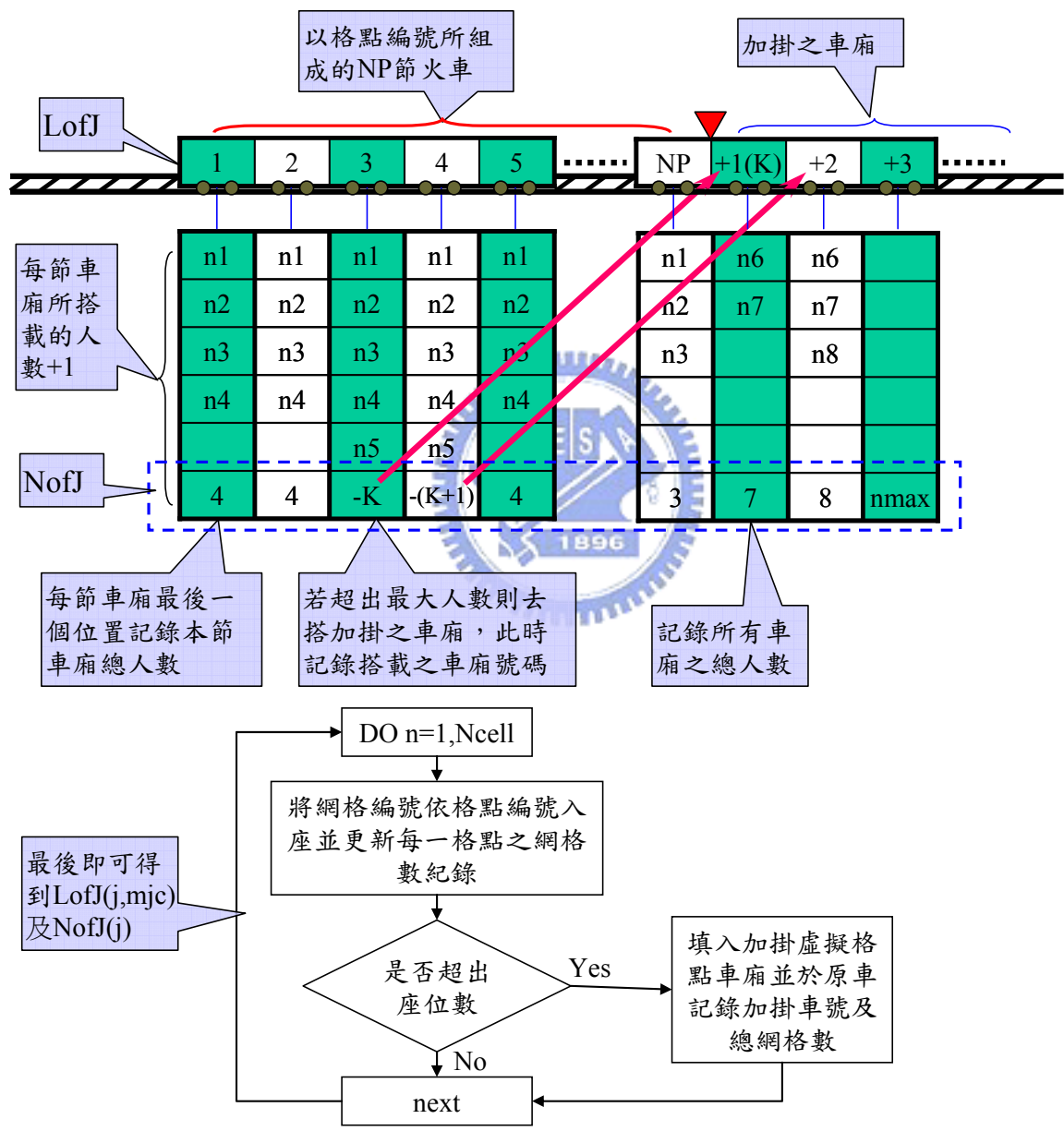


圖 B-8：CALLofJ 副程式流程方塊圖

ReofCell副程式流程圖

本副程式主要在處理：

LofL相鄰網格、Nbond邊界數、ibdc邊界之相鄰網格、JofI網格面或邊之格點、IofL網格的周圍面(3D)、LofI共面的相鄰網格(3D)及JJofI暫存矩陣等之資料蒐尋。

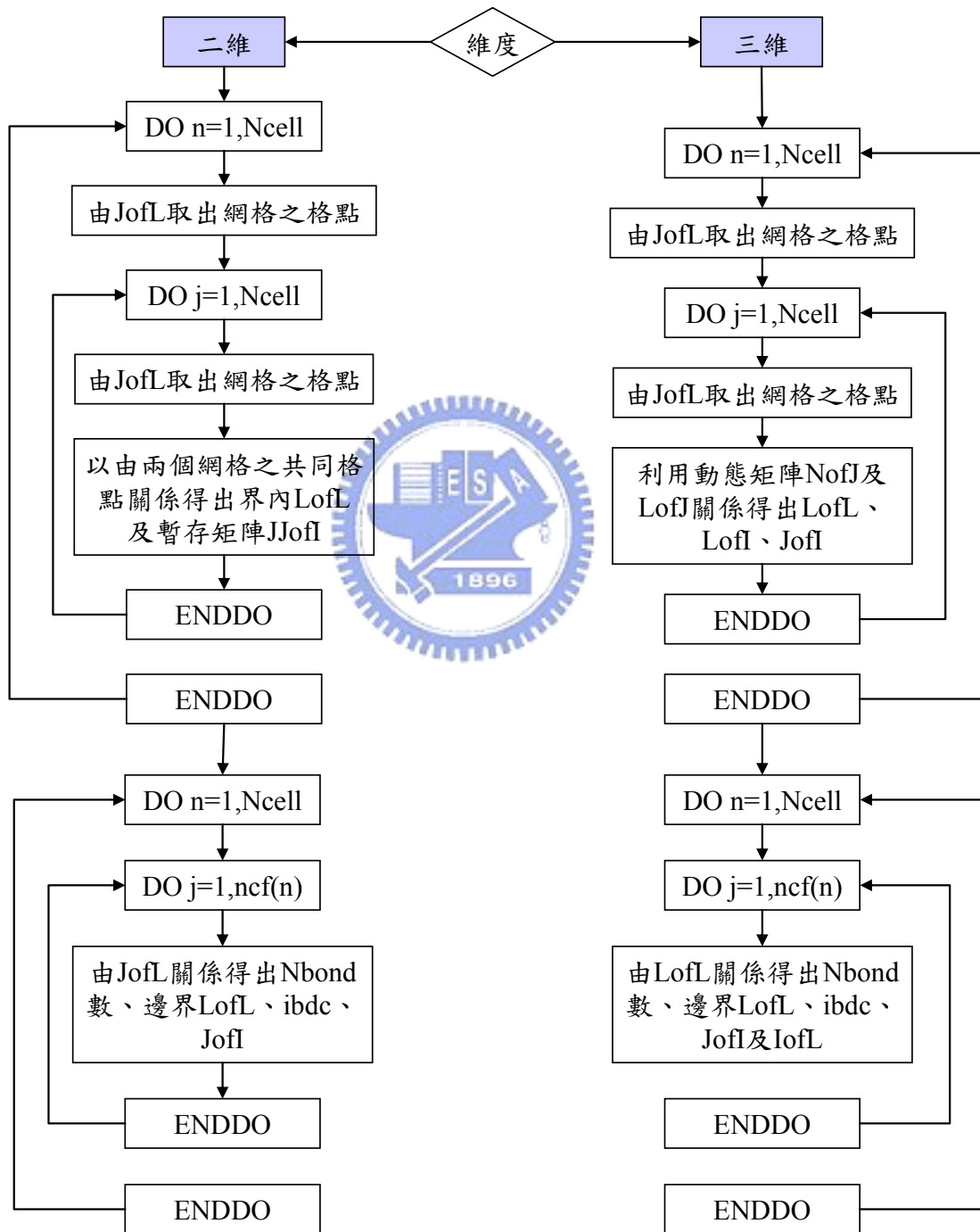


圖 B-9：ReofCell 副程式流程方塊圖

RTEGDE 副程式流程圖

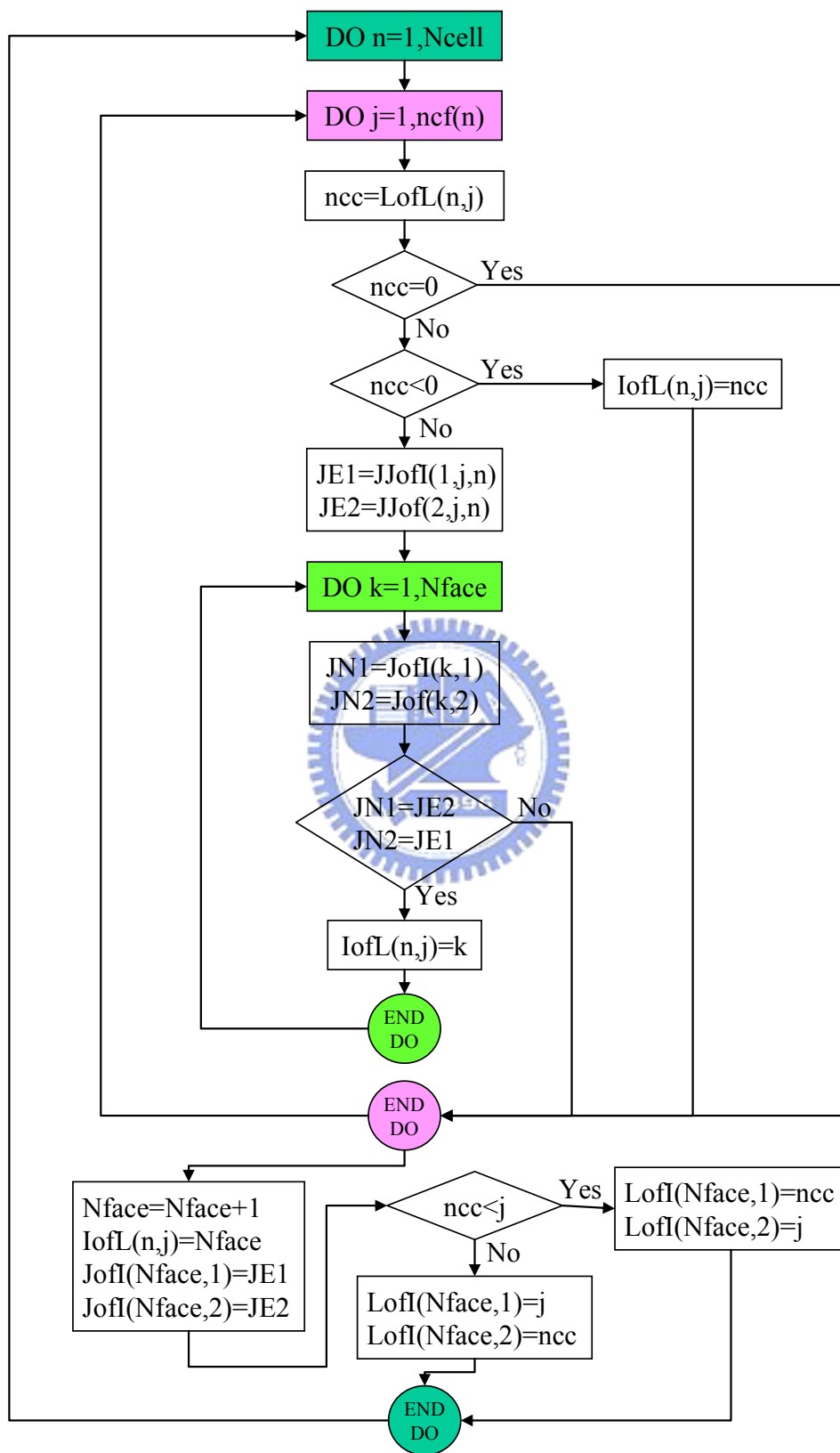
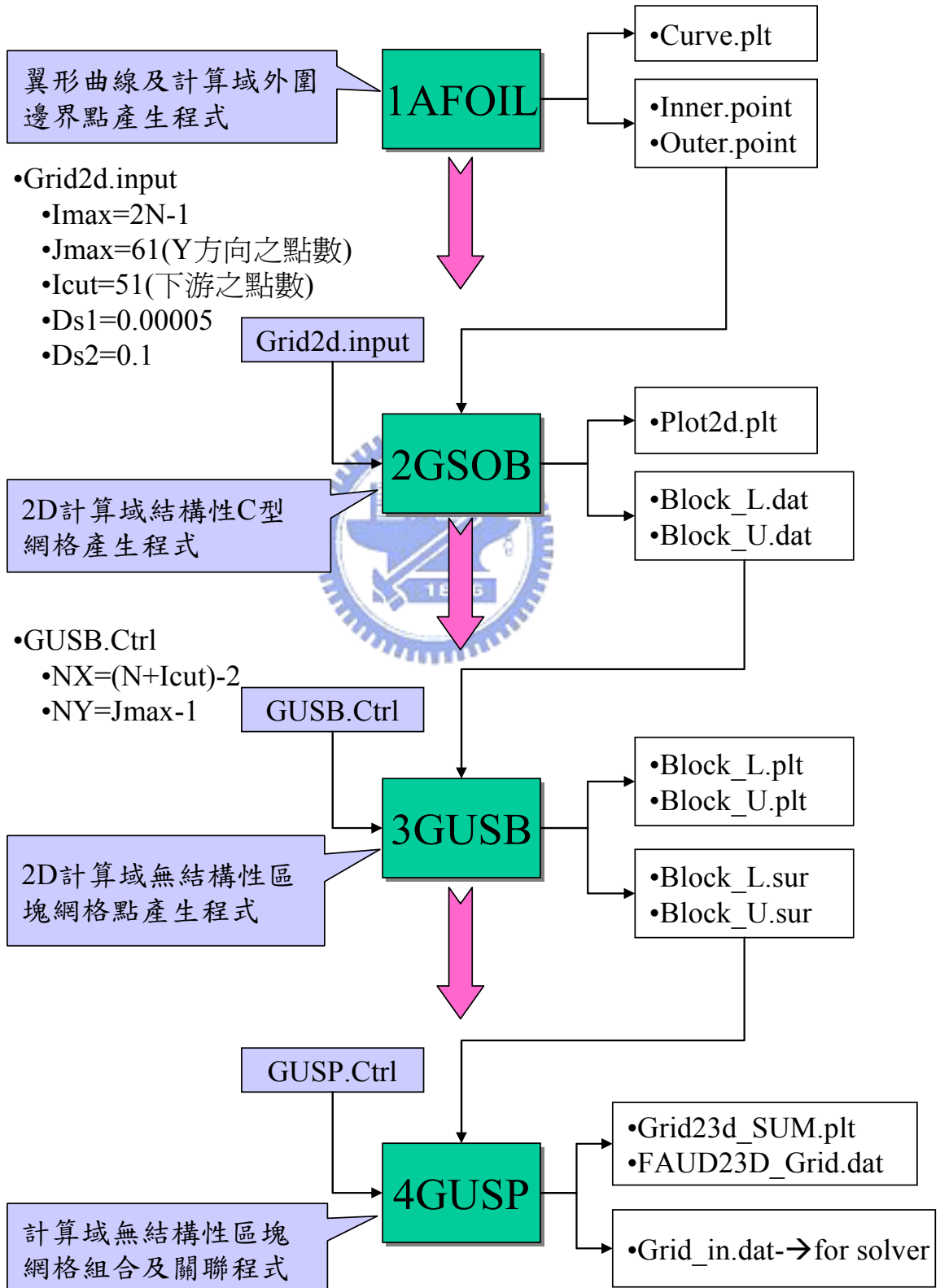
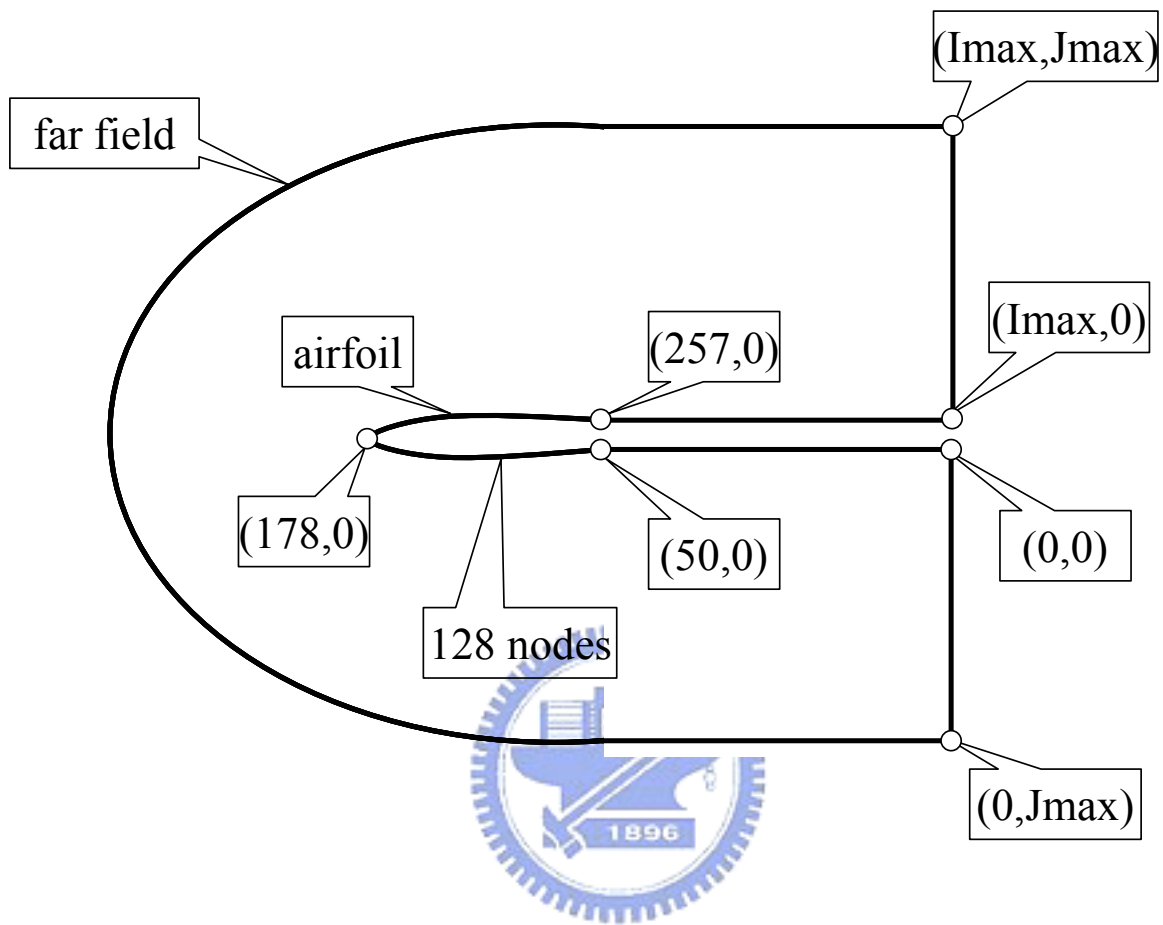


圖 B-10：RTEDGE 副程式流程方塊圖

NACAG翼形無結構性網格產生程式流程架構



GSOB副程式 C型網格之座標定義



附錄 D：正規化變數圖(NVD)

正規化變數圖為 Leonard [37]所提出，其為顯示控容體面上(control volume surface)對流變數局部正規化後與其相鄰上游網格正規化變數之關係圖，可清楚顯示所採用差分方法之準確度及單調特性，在此圖上一般所常用的差分法如一階上風差分法(UDS)與二階上風差分法(LUS)、二階中央差分法(CDS)、Fromm 差分法及 QUICK 差分法等均能用不同的直線表示出來，如圖 D-1 所示。另為了滿足高準確度及單調性等特性而使用非線性函數差分法時，因非線性函數的選擇並非唯一的，可一目瞭然地在正規化變數圖中研判是否滿足解的單調性。

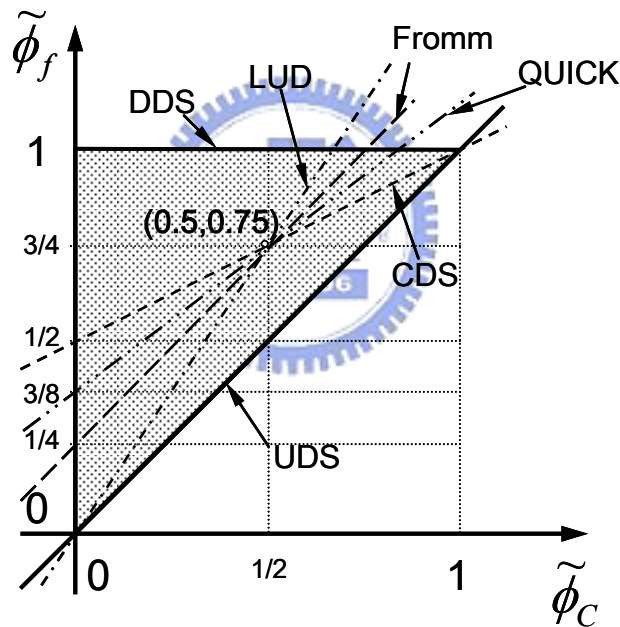


圖 D-1：正規化變數圖(NVD)

一純量變數 $\phi(x, y, z)$ 沿著垂直控容體網格面上之方向作對流，流動方向為向量 \vec{V} ，該網格面之相鄰網格變數分別為網格中心變數 ϕ_C 、下游網格變數 ϕ_D 及上上游網格的變數 ϕ_U ，而其面上之變數為 ϕ_f ，注意必須與流動方向一致。圖 D-2(a) 為原始變數示意圖，而圖 D-2(b) 所示則為相對映的局部正規化變數示意圖，Leonard 所提出正規化變數(NV)之定義如下：

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad \tilde{\phi}_C = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad \tilde{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (\text{D.1})$$

經由此定義可以導出 $\tilde{\phi}_D = 1$ ， $\tilde{\phi}_U = 0$ ， $0 \leq \tilde{\phi}_p \leq 1$ ，

假設網格面上的值為相鄰網格中心值的線性組合，即

$$\phi_f = A\phi_U + B\phi_C + C\phi_D, \quad A + B + C = 1 \quad (\text{D.2})$$

經由正規化變數之定義，可以很容易獲得，

$$\tilde{\phi}_f = B\tilde{\phi}_C + C, \quad (\text{D.3})$$

上式即表示為在平面 $(\tilde{\phi}_C, \tilde{\phi}_f)$ 上的一條直線，將正規化變數 $\tilde{\phi}_f$ 與正規化變數 $\tilde{\phi}_C$ 之函數關係畫在此平面座標圖上，即所謂的正規化變數圖 NVD(如圖 D-1 所示)，此圖為後續發展非線性高階準確及界限(或單調)等特性之對流差分法所使用之重要工具之一。由式(D.3)顯示 $\tilde{\phi}_C$ 為對流差分方式之指標，吾人以圖示方式來說明 $\tilde{\phi}_C$ 對界限性之關聯性，由圖 D-3(a)或(b)顯示 $\tilde{\phi}_f$ 具有界限性之各種狀況：

- (1). 當 $\tilde{\phi}_C = 0$ 時：面上流場性質約等於上游網格值。
- (2). 當 $0 < \tilde{\phi}_C < 0.5$ 時：面上流場性質偏向於上游網格值。
- (3). 當 $\tilde{\phi}_C = 0.5$ 時：面上流場性質為上下游網格線性內插值。
- (4). 當 $0.5 < \tilde{\phi}_C < 1$ 時：面上流場性質偏向於下游網格值。
- (5). 當 $\tilde{\phi}_C = 1$ 時：面上流場性質約等於下游網格值。

由圖 D-3(c)或(d)顯示當 $\tilde{\phi}_C < 0$ 或 $1 < \tilde{\phi}_C$ 時，因已超出界限範圍則強制回歸到一階上風值。

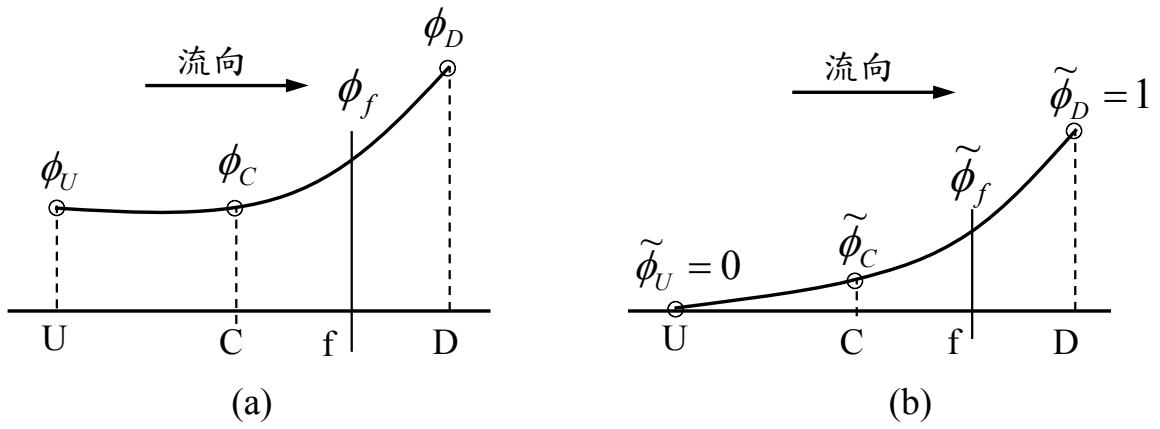


圖 D-2：(a)流場原始變數示意圖；(b)流場正規化變數示意圖

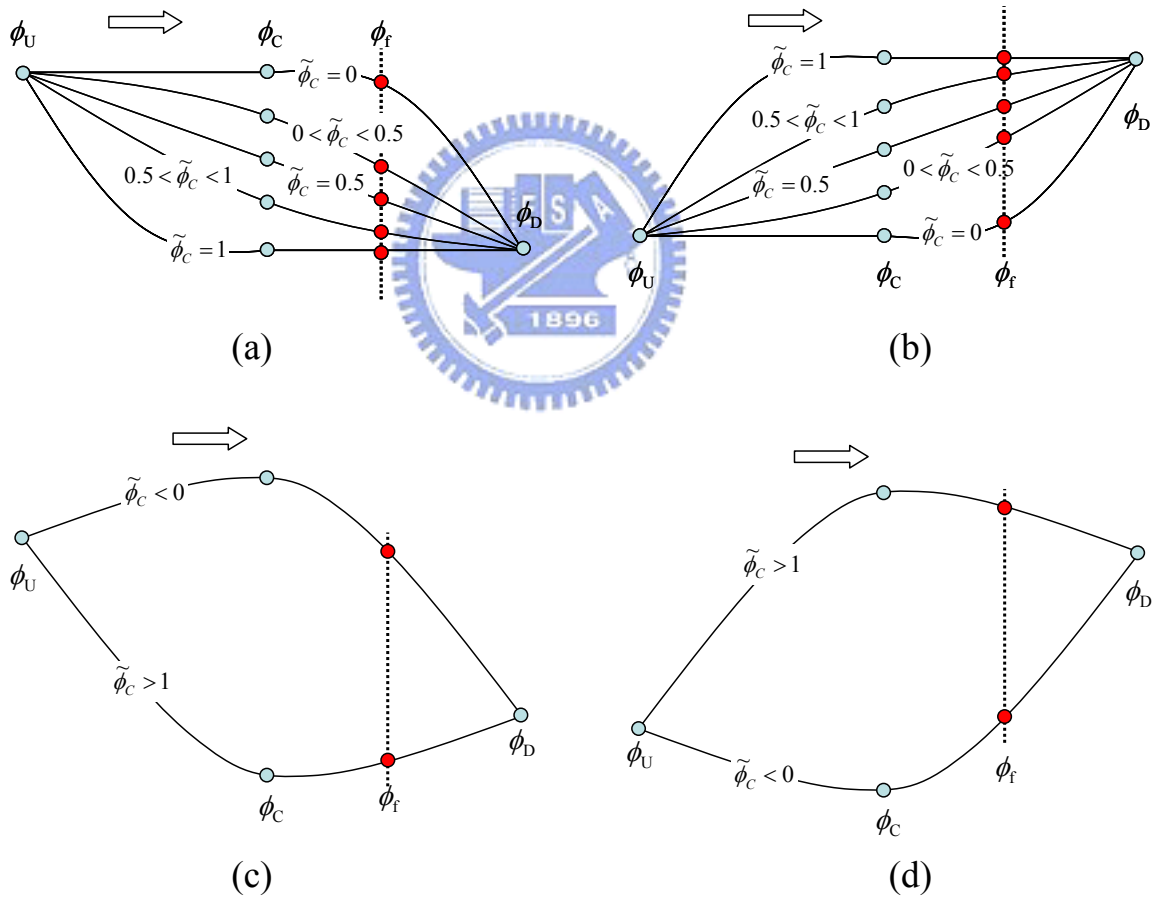


圖 D-3：CBC 界限準則示意圖

一階與二階上風差分法、二階中央差分法、Fromm 差分法及 QUICK 差分法等，在均勻網格情況下，其控容體面上的對流變數均能用上式推得不同的直線函數，如表 4-1 所示。

在 NVD 圖 D-1 上所有二階以上的差分法之直線均會通過點(0.5,0.75)，若斜率為 0.75 則具有三階準確(如 QUICK)，另由曲率因子法推知當 $\tilde{\phi}_c$ 接近 0.5 附近時，表示流場特性為平滑區域。Gaskell 與 Lau [56]以正規化變數分析為基礎，提出對流界限準則(CBC)，其證明對於對流差分法之界限準則可以顯示在 NVD 圖上，並證明 $\tilde{\phi}_f$ 是 $\tilde{\phi}_c$ 的函數，如圖 D-4(a)所示之陰影區域，包括 $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ 之直線部份，即

- 當 $0 \leq \tilde{\phi}_c \leq 1$ 時， $\tilde{\phi}_c$ 被侷限在 $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$ 之直線之上及 $\tilde{\phi}_f = 1$ 之下並通過 (0,0)及(1,1)兩點。
- 當 $\tilde{\phi}_c < 0$ 或 $\tilde{\phi}_c > 1$ 時， $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c$

另依據 Harten [30]的理論所推導 TVD 之限制條件，可以在 NVD 圖上表示出來，TVD 的限制條件式如下：

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_f \leq 1, \tilde{\phi}_f \leq 2\tilde{\phi}_c, \tilde{\phi}_f \geq \tilde{\phi}_c, & \text{if } 0 \leq \tilde{\phi}_c \leq 1; \\ \tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_c, & \text{if } \tilde{\phi}_c \leq 0, \text{ or } \tilde{\phi}_c \geq 1 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

因此若高階非線性差分法之限制函數在如圖 D-4(a)所示之區域內時，只表示具有界限性，但不完全滿足 TVD 之限制，必須再將其範圍縮小為如圖 D-4(b)所示之陰影區域才具有 TVD 性質。

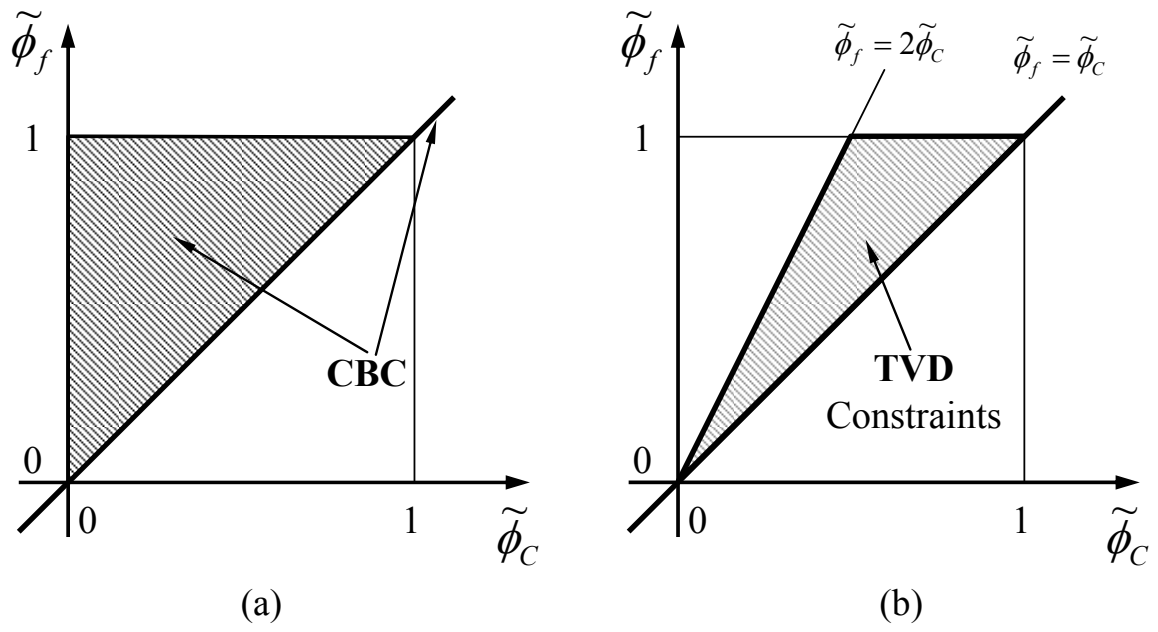


圖 D-4：正規化變數圖(a)對流界限準則(CBC)示意圖；(b)TVD 示意圖



附錄 E：Sweby 的 TVD 關係圖

任何具有單調特性的數值方法架構，須具有下列兩項基本原則：

1. 不會有新的局部(local)極值產生。
2. 不會產生比已存在之局部極小值更小的值，亦不會產生比局部極大值更大的值。

以空間一維純量守恆律而言，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + a \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad a > 0. \quad (\text{E.1})$$

依據 Harten [30] 的理論已證明一維純量守恆式之差分近似法具有解的界限性之條件，為滿足解的單調性，全變量(Total Variation, TV)值必不會增加，所以 TVD 為差分法是否具有單調界限特性的重要指標，首先就對全變量作簡單之說明，全變量的定義可以用下式表示：

$$TV(\phi^{n+1}) = \sum_k |\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}| \quad (\text{E.2})$$

如果滿足下列關係式，則此方程式之解具有 TVD 特性，

$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n) \quad (\text{E.3})$$

Sweby [54] 為了證明藉由在一階上風通量差分法附加一受限制之反擴散通量，可獲得無數值振盪之二階準確差分法，推導出要滿足此需求之限制函數的通用形式，以 Lax-Wendroff 差分法推導 TVD 限制函數之範圍，其用二維座標圖標示出局部守恆梯度比 r 與限制函數 $\phi(r)$ 之關係，可清楚研判所採用之任何限制函數是否具有 TVD 特性，這種圖示即為所通稱之 Sweby 的 TVD 關係圖(如圖 4-5 所示)，並將 Van Leer、Roe、Chakrorthy 與 Osher 等人提出之 TVD 限制函數顯示於此 TVD 關係圖上作比較，以證明二階準確 TVD 限制函數之區域係介於 Lax-Wendroff 與 Warming-Beam [121] 二階上風差分法之交集區域，而在極值產生時，二階準確則會降為一階準確，以維持解的單調性。

任何時間步序法之純量 ϕ 對流傳輸離散式，可表為一階上風擴散項及擴散補償之”反擴散項”之和，而後者即為達到高階準確度並抑制數值振盪之目的而設計，以二階 Lax-Wendroff 差分法將一維純量守恆式離散為下式：

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \underbrace{v\Delta\phi_{i-1/2}^n}_{\text{first-order upwinding}} - \underbrace{\Delta_- \left[\frac{v(1-v)}{2} \Delta\phi_{i+1/2}^n \right]}_{\text{antidiffusive flux}} \quad (\text{E.4})$$

其中 $v = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

由於 Lax-Wendroff 差分法不具有 TVD 特性，為了使其滿足 TVD 之目的，故在反擴散通量項加入一限制函數 $\varphi(r)$ ，

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \underbrace{v\Delta\phi_{i-1/2}^n}_{\text{first-order upwinding}} - \underbrace{\Delta_- \left[\varphi(r_i) \frac{v(1-v)}{2} \Delta\phi_{i+1/2}^n \right]}_{\text{antidiffusive flux}} \quad (\text{E.5})$$

其中 $\varphi(r)$ 為某種型式之限制函數，為了保持反擴散通量項的正負值不會被改變， $\varphi(r)$ 限制函數採用正數，比照 Van Leer、Roe、Chakrathy 與 Osher 等人提出 TVD 限制函數之表示方式，限制函數 $\varphi(r)$ 為局部守恆梯度比 r 的函數，其中

$$r_i = \Delta_{i-1/2}\phi^n / \Delta_{i+1/2}\phi^n \quad (\text{E.6})$$

最後 Sweby 推導出 TVD 限制函數之範圍為：

$$0 \leq \left(\frac{\varphi(r)}{r}, \varphi(r) \right) \leq 2 \quad (\text{E.7})$$

因此任何型式之離散方程中的限制函數 $\varphi(r)$ ，只要符合上式所圍成之區域內(如圖 4-5 所示之斜線陰影部份)，則可稱為 TVD 方法，其必具有解的界限特性，圖中亦同時說明 Lax-Wendroff 的限制函數 $\varphi(r)=1$ 及 Warming-Beam 的限制函數 $\varphi(r)=r$ ，由圖上可看出兩種方法均非 TVD 法。

在圖 4-5 中斜線陰影區域的上邊界(藍粗線所示)，表示會使附加於一階上風差分通量項之受限制的反擴散通量項有振幅的極大值，而此限制函數可表示為：

$$\begin{cases} \varphi(r) = \min(2r, 2), & r > 0 \\ \varphi(r) = 0, & r \leq 0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

其中當 $r \leq 0$ 時 $\varphi(r) = 0$ 為另強加於限制函數 $\varphi(r)$ 的另一條件式，這種情況即為發生極值解的地方，在此要特別注意的是二階準確法將降為一階準確。

另從圖上可以觀察兩種二階準確法均會通過 $\varphi(1) = 1$ 之點，這也是所有二階準確 TVD 法限制函數的一般需求。Van Leer [89] 提出之 Fromm 法時亦證明任何二階準確之離散方法必為 Lax-Wendroff 及 Warming-Beam 兩種方法的權重平均，因此任何二階準確之 TVD 法的限制函數亦必為 Lax-Wendroff 及 Warming-Beam 兩種方法的線性平均混合函數， α 為權重因子，故二階準確之 TVD 限制函數可表為：

$$\varphi(r) = (1 - \alpha)\varphi^{LW}(r) + \alpha\varphi^{WB}(r), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{E.9})$$

其中 $\varphi^{LW}(r) = 1$ 及 $\varphi^{WB}(r) = r$ ，故上式可簡化為

$$\varphi(r) = 1 + \alpha(r - 1), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (\text{E.10})$$

故二階準確之 TVD 限制函數區域範圍則由圖 4-5 之斜線陰影區域再縮小為較暗之陰影區域。

包括上述二階準確之 TVD 限制函數區域範圍上下邊界之通用函數，被稱為 Sweby 的“ Φ -限制函數”，如下所示：

$$\varphi(r)_\Phi = \max[0, \min(\Phi r, 1), \min(r, \Phi)], \quad 1 \leq \Phi \leq 2 \quad (\text{E.11})$$

當 $\Phi = 1$ 時： $\varphi(r)_\Phi$ 為下邊界之路徑(圖 4-5 紅色粗線所示)，則相當於 Roe 所提出之“MINMOD”限制函數，即 $\varphi(r)_\Phi = \min \text{mod}(1, r)$ ，其數學定義為：

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, \text{sgn}(x)y)] \quad (\text{E.12})$$

當 $\Phi = 2$ 時： $\varphi(r)_\Phi$ 為上邊界之路徑(圖 4-5 藍色粗線所示)，則相當於 Roe 所提出之“SUPERBEE”限制函數。

當 Φ 由 2 變化到 1 時，表示限制函數 $\varphi(r)_\Phi$ 由上邊界橫掃至下邊界，且 $\varphi(r)_\Phi$ 為單調遞增並具對稱性之函數，所謂的對稱性條件為 $\varphi(r) = r\varphi(1/r)$ ，此種特性可以確保梯度比值 r 不管是正向比(forward)或反向比(backward)都可保持相同的函數型式。

Van Leer [89]提出之限制函數為單調遞增並具對稱性之函數，如下所示：

$$\begin{cases} \varphi_{VL}(r) = 0, & r \leq 0 \\ \varphi_{VL}(r) = \frac{2r}{1+r}, & r > 0 \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

Roe [29,99]提出之兩種二階差分法，其限制函數即上面所提到 Sweby” Φ -限制函數”的特例，為 MINMOD 及 SUPERBEE 函數，如下所示：

$$\text{MINMOD} : \varphi_{R1}(r) = \max\{0, \min(r, 1)\}, \quad (\text{E.14})$$

$$\text{SUPERBEE} : \varphi_{R2}(r) = \max\{0, \min(2r, 1), \min(r, 2)\}, \quad (\text{E.15})$$

Chakravarthy 與 Osher [31]提出之限制函數為：

$$\varphi_{CO}(r) = \max\{0, \min(r, \psi)\}, \quad 1 \leq \psi \leq 2 \quad (\text{E.16})$$

此限制函數亦在二階 TVD 之區間，當 $\psi = 1$ 時，其相當於 MINMOD，限制函數除了在 $\psi = 1$ 時才具有對稱性。

附錄 F：無結構性網格之正規化變數計算法

不論是 Leonard 的正規化變數(NV)或 Sweby 的 TVD 方法所使用之局部界限限制函數，只適用於結構性均勻網格系統，如何將 NVD 或 TVD 方法運用於無結構性網格系統則為另一個關鍵議題，在無結構性網格系統中對控容面而言，只有局部網格 P 及其相鄰網格 D，並無在結構性網格系統中出現之上游網格 U，所以要求得正規化變數 $\tilde{\phi}_p$ 及 $\tilde{\phi}_f$ 是有困難的。

附錄 D 所述正規化變數的定義係在結構性均勻網格情況下推導而得，而對於結構性非均勻網格則須作修正，Darwish [18]推導提出一通用的 NVD 準則，可運用於結構性非均勻網格，然而此種用的 NVD 準則非常複雜且增加額外的計算成本。而本文所要發展的流場模擬計算程式為適用於無結構性網格系統之有限體積法(FVM)，所以不論是均勻網格或非均勻網格所導出之 NVD 準則均不適用，必須再另尋求解決方案，Jasak [78]提出 Gamma 差分法時所使用之正規化變數 $\tilde{\phi}_p$ 計算方式，則可解決本項問題，其 $\tilde{\phi}_p$ 的計算方式如下：

$$\tilde{\phi}_p = 1 - \frac{(\nabla\phi)_f \cdot \vec{d}}{2(\nabla\phi)_p \cdot \vec{d}} \quad (\text{F.1})$$

其中 \vec{d} 表示控容體網格 P 與相鄰下游網格中心 D 之距離向量(如圖 F-1 所示)，而 $(\nabla\phi)_f \cdot \vec{d}$ 可直接採用網格面與相鄰網格中心之變數值求得，即

$$(\nabla\phi)_f \cdot \vec{d} = \phi_D - \phi_P \quad (\text{F.2})$$

所以實際在計算時，則使用下列之計算式：

$$\tilde{\phi}_p = 1 - \frac{\phi_D - \phi_P}{2(\nabla\phi)_p \cdot \vec{d}} \quad (\text{F.3})$$

另 Bruner [96]所提出之 TVD 方法使用於無結構性網格中的平滑監控因子(smoothness monitor) r ，定義(參照圖 F-2 之標示)如下：

$$r_f = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} \quad (\text{F.4})$$

其以 $2(\phi_f - \phi_P)$ 來近似 $(\phi_P - \phi_U)$ ，故上式可寫為

$$r_f = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} \approx \frac{2(\phi_f - \phi_P)}{\phi_D - \phi_P} = \frac{2\bar{\mathbf{d}} \cdot (\nabla \phi)_P}{\phi_D - \phi_P} \quad (\text{F.5})$$

但是這種近似方式，當逆推回去時會有不一致現象，無法導回原式，如下所示：

$$r_f = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} \neq r_{f,bruner} = \frac{2\bar{\mathbf{d}} \cdot (\nabla \phi)_P}{\phi_D - \phi_P} = \frac{\phi_D - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} \quad (\text{F.6})$$

Darwish 與 Moukalled [74]重新推導 Bruner [96]所提出之平滑監控因子，其結果與 Jasak 之方式有異曲同工之妙，其推導方式摘述如下：

$$r_f = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_P} = \frac{\phi_D + (\phi_P - \phi_U) - \phi_D}{\phi_D - \phi_P} = \frac{(\phi_D - \phi_U) - (\phi_D - \phi_P)}{\phi_D - \phi_P} \quad (\text{F.7})$$

由於 ϕ_P 及 ϕ_D 為網格面 f 相鄰網格中心之變數值，對於無結構性網格而言，是相當容易獲得的值，因此如果可以用已知的值取代上式中的 ϕ_U ，則 r 值就可依上式求得。由於

$$(\phi_D - \phi_U) = \nabla \phi_P \cdot \bar{\mathbf{r}}_{UD} = (2\nabla \phi_P \cdot \bar{\mathbf{r}}_{PD}) \quad (\text{F.8})$$

其中 $\bar{\mathbf{r}}_{UD}$ 表示虛擬格點 U 到格點 D 的距離向量， $\bar{\mathbf{r}}_{PD}$ 表示格點 P 到格點 D 的距離向量(如圖 F-2 所示)，所選定的格點 U 為在 PD 直線上的一點且 UD 線段以 P 為中心，當然格點 U 亦可以有其他的選項，但是會降低準確度，只有在以 P 為中心時梯度 ϕ_P 才會獲得二階之準確度，因此 r 的計算公式就變為：

$$r_f = \frac{(2\nabla \phi_P \cdot \bar{\mathbf{r}}_{PD}) - (\phi_D - \phi_P)}{\phi_D - \phi_P} = \frac{(2\nabla \phi_P \cdot \bar{\mathbf{r}}_{PD})}{\phi_D - \phi_P} - 1 = \frac{\tilde{\phi}_P}{1 - \tilde{\phi}_P} \quad (\text{F.9})$$

上式就可很容易運用於本文無結構性網格系統之計算，先以式(F.3)求得 $\tilde{\phi}_P$ ，再代入式(F.9)得到梯度比 r ，最後再代入表 4-2 中之限制函數。

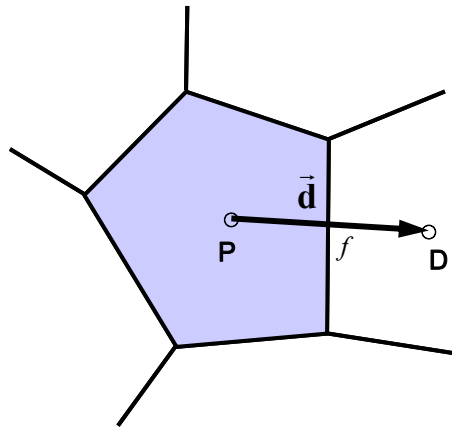


圖 F-1：控容體網格與相鄰網格中心之空間向量示意圖

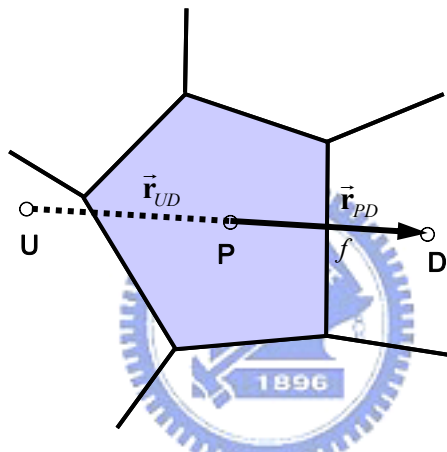


圖 F-2：控容體網格與相鄰網格中心之空間向量示意圖

簡 歷

姓 名：吳添成 Tian-Cherng Wu

生 日：54 年 5 月 27 日

出生地：中華民國 台灣 台東

學 歷：

1. 60 年 9 月～66 年 6 月：台東縣立岩灣國小
2. 66 年 9 月～69 年 6 月：台東縣立卑南國中
3. 69 年 9 月～72 年 6 月：台灣省立台東高中
4. 72 年 8 月～76 年 7 月：中正理工學院 學士
5. 88 年 9 月～90 年 8 月：國立交通大學 碩士
6. 90 年 9 月～98 年 1 月：國立交通大學 博士

論文發表：

1. Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, “A Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithm Using High-Resolution Schemes for All-Speed Flows”, Numerical Heat Transfer, B, vol. 53, pp. 75-96, 2008.
2. Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, “Use of Characteristic-Based Flux Limiters in a Pressure-Based Unstructured-Grid Algorithm Incorporating High-Resolution Schemes”, Numerical Heat Transfer, B, vol. 55, pp. 14-34, 2009.
3. Y.-Y. Tsui and T.-C. Wu, “A Pressure-Based Unstructured Grid Calculation for Compressible Flow”, The 10th National Computational Fluid Dynamics Conference Hua-Lien, August, pp. A3-1-8, 2003. (利用壓力法之無結構性網格可壓縮流計算，以中文發表)