

國立交通大學
光電工程研究所
碩士論文

一維光子晶體應用在波束掃描之特性研究和設



**Research and design of the beam steering
application by one-dimensional photonic crystal**

研究生:黃文楓

Wen-Feng Huang

指導教授:張振雄

Chen-Shiung Chang

中華民國九十六年七月

一維光子晶體應用在波束掃描之特性研究和設計

**Research and design of the beam steering
application by one-dimensional photonic crystal**

研究生：黃文楓

Student: Wen-Feng Huang

指導教授：張振雄

Advisor: Prof. Chen-Shiung Chang

國立交通大學

光電工程研究所



A Thesis

Submitted to Institute of Electro-Optical Engineering College
of Electrical Engineering and Computer Science National Chiao
Tung University in Partial Fulfillment of the Requirements for
the Degree of master in Electro-Optical Engineering

July 2007 Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

一維光子晶體應用在波束掃描之特性研究和設計

研究生:黃文楓

指導教授:張振雄

國立交通大學光電工程所



利用一維光子晶體禁帶外的穿透極值以及相位特性設計波束掃描結構。我們分別研究了當介質高低折射率層之週期為 2 的倍數、3 的倍數和 4 的倍數時光子晶體所對應到的頻率和相位特性。根據這些特性，我們也設計出改變不同的結構來達到大角度移動波束方向和調變結構的間距對波束做小角度調動。我們使用穿透矩陣法(TMM)以及有限差分時域法(FDTD)來模擬設計波束的掃描，並經由天線理論來解釋我們的模擬結果，最後以微波實驗來驗證。

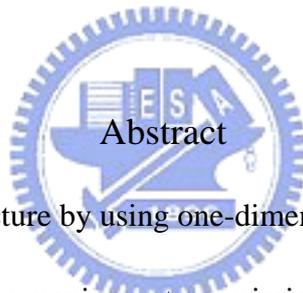
Research and design of the beam steering application by one-dimensional photonic crystal .

Student: Wen-Feng Huang

Advisor: Prof. Chen-Shiung Chang

Institute of Electro-Optical Engineering College

National Chiao Tung University



Abstract

We design beam-steering structure by using one-dimensional photonic crystal. We study the frequencies which has maximum transmission and the characteristics of phase when the periods of the structure are multiple 、triple and quadruple. Then we use different structures to steer the main beam angle in big range and tune the length of layers to steer the main beam in small angle. We design our beam-steering structure by Transfer Matrix Method (TMM) and Finite Difference Time Domain method (FDTD), and explain our simulation results by microwave experiment.

誌 謝

在本論文完成前覺得時間過的很慢，但是在寫這誌謝的時候卻有著不一樣的心情。回想以前那段辛苦的過程，大家一起待在實驗室努力打拼的回憶，每天忙到兩眼發昏，感覺可以走出實驗室是一種幸福。現在在經歷了這一段成長，覺得自己可以完成一項偉大的任務，當然背後要感謝很多人的幫忙與指導。首先是我的老師張振雄教授，他會指點我應該前進的方向，告訴我沒有注意到的地方，另外還有謝文峰教授以及程思誠教授在研究上的建議，讓我的研究可以更完善；再來是博班龔彥彰學長，雖然已有家庭，本身工作上也很忙，但是還是百忙當中不辭辛勞來到學校給我們指導，以及給我們實驗上的幫助，因為有學長的協助才有今天的成果，實在是非常感謝；接下來就是我的實驗室夥伴，無聊的研究生活因為有他們才顯得有點樂趣，累的時候聊聊天打打電動，心情不好的時候可以互相安慰，遭遇困境的時候可以給予幫助；我的女朋友-一帆，是我在工作時的好伙伴，因為她讓我學會很多事情，了解到自己的不足，也讓我在吃這方面有了一個伴；最後是我的家人，很感謝你們的鼓勵與支持，我只想說，我愛你們，我愛所有我的朋友以及關心我的人，謝謝大家。

黃文楓 2007.07 于新竹交大

論文目錄

頁次

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
論文目錄.....	iv
圖目錄.....	vi
表目錄.....	ix
第一章 研究背景介紹.....	1
1-1 光子晶體簡介.....	1
1-2 波束掃描簡介.....	1
1-3 本文架構.....	2
第二章 天線理論及模擬方法介紹.....	3
2-1 天線陣列理論介紹.....	3
2-2 傳輸矩陣法(Transfer matrix method).....	8
2-2.1 單一均勻等向介質層之計算.....	8
2-2.2 多層等向介質結構之矩陣運算法.....	13
2-3 有限差分時域法(Finite Difference Time Domain method, FDTD).....	16
2-3.1 有限差分時域法簡介.....	16

2-3.2	基本概念.....	17
2-3.3	用有限差分時域法法解析馬克斯威爾方程式.....	19
2-3.4	穩定條件.....	22
2-3.5	吸收邊界.....	24
第三章 光子晶體在波束掃描的特性研究.....		26
3-1	光子晶體的穿透與相位特性分析.....	27
3-1.1	高低折射率層週期為的 2 的倍數的穿透峰值與相位特性..	27
3-1.2	高低折射率層週期為的 3 的倍數的穿透峰值與相位特性..	35
3-1.3	高低折射率層週期為的 4 的倍數的穿透峰值與相位特性....	39
3-2	大角度變動主束方向.....	44
3-3	小角度變動主束方向.....	48
第四章 實驗量測與結果討論.....		54
4-1	儀器設置及架設.....	54
4-2	量測方法.....	56
4-3	實驗結果與討論.....	57
第五章 結論與未來發展.....		67
5-1	結論.....	67
5-2	未來工作.....	67
參考文獻.....		68

圖目錄

圖(2.1) 二元陣列.....	3
圖(2.2) 波束角對d值的關係圖.....	7
圖(2.3)相位差與波束角的關係圖.....	8
圖(2.4) 單一均勻等向介質層之示意圖.....	9
圖(2.5) 多層均勻等向介質層之示意圖.....	14
圖(2.6)：同一時刻FDTD 中電場、磁場分佈的情形.....	17
圖(2.7)：在FDTD 中，電場與磁場是隨著時間不同而獨立的量值.....	18
圖(3.1) 偶數層的光子晶體結構.....	26
圖(3.2)奇數層的光子晶體結構.....	26
圖(3.3) 偶數層(2-4-6-8)下的穿透率頻譜圖.....	27
圖(3.4)第一禁帶附近的穿透率圖.....	28
圖(3.5) 在設計為 $n_H=3$ ， $n_L=1$ 之光子晶體其 $f_1^{(1)}$ 、 $f_2^{(1)}$ 與帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 的關係.....	29
圖(3.6) 在不同 $\frac{n_H}{n_L}$ 比例之光子晶體結構中 $\frac{f_1^{(1)}}{f_0^{(1)}}$ 和 $\frac{f_2^{(1)}}{f_0^{(1)}}$ 的變化圖.....	30
圖(3.7)左:四層光子晶體圖 右:通過光子晶體之穩定態電場場強分佈圖.....	32
圖(3.8)左:六層光子晶體圖 右:通過光子晶體之穩定態電場場強分佈圖.....	32
圖(3.9)光通過結構相位表示圖.....	33
圖(3.10) $n_H=3$ ， $n_L=1$ ， $f_0=30\text{GHz}$ 的相位圖.....	34
圖(3.11)輸入頻率為 $f_1^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}$ 時的總相位差和折射率比的關係(n_L 皆為 1).....	34
圖(3.12) $n_H=3.5$ ， $n_L=1$ ， $f_0=30\text{GHz}$ 的穿透率圖.....	35
圖(3.13)週期為 3 的倍數的光子晶體 $f_1^{(1)}/f_0^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}/f_0^{(1)}$ 與 n_H/n_L 的關係.....	36

圖(3.14)相位表示說明圖.....	37
圖(3.15) $f_1^{(1)}=12.24\text{GHz}$ 的相位圖.....	38
圖(3.16) $f_2^{(1)}=29.76\text{GHz}$ 的相位圖.....	38
圖(3.17)在不同結構下 $f_1^{(1)}/f_0$ 隨折射率(n_H/n_L)變化的關係圖.....	40
圖(3.18) $f_2^{(1)}/f_0$ 在不同結構下與 n_H/n_L 的變化關係圖.....	41
圖(3.19) $f_1^{(1)} = 0.591f_0 = 6.91\text{GHz}$ 在不同週期層數下的相位關係圖.....	41
圖(3.20)不同週期結構下相位差對折射率的關係圖.....	42
圖(3.21)高低折射率層數為 2-5-7-10-12 的結構圖.....	43
圖(3.22)結構示意圖(此為週期變化為 2 的倍數的晶體結構圖，最高到八層)....	44
圖(3.23)FDTD 結構示意圖.....	46
圖(3.24)穩定態時電場強度分佈圖與天線理論圖.....	46
圖(3.25)波束在不同結構下的電場強度歸一化分佈圖.....	47
圖(3.26)週期變化為 2 的倍數共 4 個週期(2-4-6-8)的光子晶體在 $d=1.5\sim 3.5\text{cm}$ 波束的電場強度歸一化分布圖($n_H=1.7, n_L=1, f_1=5.5\text{GHz}$)	49
圖(3.27) 在週期變化為 2 的倍數和 3 的倍數共 4 個週期下於不同 d 值所對應的波束方向角關係圖.....	50
圖(3.28 上)週期變化為 2-4-6-8 的波束電場強度歸一化變化圖.....	51
圖(3.28 下) 週期變化為 3-6-9-12 的波束電場強度歸一化變化圖.....	51
圖(3.29)光子晶體結構週期變化分別為 2、3 的倍數共 4 個週期的波束半高寬角與 d 值的關係圖.....	52
圖(3.30)在變化週期為 2 的倍數下($n_H = 1.7, n_L = 1, d=3\text{cm}$)，週期數量和波束半高	

寬的關係.....	53
圖(4.1)量測系統之儀器架設相關方塊示意圖.....	55
圖(4.2)微波量測系統基本架設圖.....	56
圖(4.3)拱橋量測法示意圖.....	57
圖(4.4) $f=4\text{GHz}$ 在 H-Plane 的入射波強度分佈圖.....	58
圖(4.5) $f=4\text{GHz}$ 在 E-Plane 量測的入射波強度分佈圖.....	58
圖(4.6) ($n_H = 1.7, n_L = 1, d_H = 0.5\text{cm}, d_L = 0.85\text{cm}$)週期變化為偶數層共十層的光子 晶體結構圖.....	59
圖(4.7)未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖($d=3.5\text{cm}$)	60
圖(4.8) 未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖($d=3\text{cm}$)	61
圖(4.9)未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖($d=2.5\text{cm}$)	63
圖(4.10)未調變和調變後的波束能量在 $f=13.42\text{GHz}$ 下的歸一化與理論預測圖 ($d=3.5\text{cm}$)	64
圖(4.11) $f=18\text{GHz}$ 的入射波強度分佈圖.....	65
圖(4.12) 在 $f=4.22\text{GHz}$, $n_H = 1.7, n_L = 1$, 通過(2-4-6-8-10)理論角度變化與實驗數 據圖.....	66

表目錄

表(3.1)各個峰值所對應頻率符號.....	27
表(3.2) 帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 與 $f_1^{(1)}$ & $f_2^{(1)}$ 的變動列表關係.....	28
表(3.3)不同禁帶 $f_0^{(n)}$ 與 $f_1^{(n)}$ 的關係.....	31
表(3.4) 帶隙中心頻率 f_0 與 $f_1^{(1)}$ & $f_2^{(1)}$ 之關係列表.....	35
表(3.5)不同結構下的波束角度表.....	47
表(4.1) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=4.22\text{GHz}$ 時對波束調變前與調變後的比較表($d=3.5\text{cm}$)	60
表(4.2) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=4.22\text{GHz}$ 時對波束調變前與調變後的比較表($d=3\text{cm}$)	62
表(4.3) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=4.22\text{GHz}$ 時對波束調變前與調變後的比較表($d=2.5\text{cm}$)	63
表(4.4)週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=13.42\text{GHz}$ 時對波束調變前與調變後的比較表($d=3.5\text{cm}$)	64
表(4.5)d 值與波束方向在 $f=4.22\text{GHz}$ 的理論與實驗數據表.....	65

第一章 研究背景介紹

1-1 光子晶體簡介

當不同的介電材質在空間中呈週期性排列時，某些波段的電磁波會因為破壞性干涉而無法通過，我們稱為光子帶隙(photonic frequency bandgap，簡稱 PBG)，而具有光子帶隙的週期性介電結構就稱為光子晶體。當其中的週期排列適度的破壞時就會在光子帶隙中產生可穿透的頻段，也就是所謂的缺陷態。因為光子晶體具有這些獨特的性質，所以可以發展出許多高價值的應用，例如濾波器[1]、高效率反射鏡[2]、色散補償器[3]、增加 LED 的穿透率[4]、波束掃描(beam-steering)結構[5]...。以折射率的變化來說，若只在一維方向上變化就是一維光子晶體，若折射率在二維方向上變化就是二維光子晶體，同理可以定義三維光子晶體，雖然二維和三維光子晶體比一維光子晶體更有發展潛能，但是在製造上的難度使得目前無法做普遍性的應用，因此本文以一維光子晶體作為設計的基礎。



1-2 波束掃描應用介紹

近年來無線通信系統蓬勃發展，不論是 3G 通訊、GSM 手機通訊，訊號傳送成為一項很重要的技術，為了避免訊號之間的干擾以及提升訊號傳送的方向性，讓特定用戶端可以接受到訊號，波束掃描結構扮演著非常重要的腳色。而傳統改變波束方向是利用相位天線[6]，透過改變相位來造成波束干涉的不同來調變主波束方向。而相位的改變是透過：一、改變操作頻率，也就是不同的頻率會產生不同程度的相位差，但是對於固定頻率下的波此方法無法使用。二、透過相移器(phase shifter)來改變相位，不過要達到精準的變化要使用價值不斐的相移器。所以近年來有人透過特殊結構[7]，V 型天線來改變主束角，或是利用多端口微帶漏波天線[8]來達到目的，或是利用光子晶體來調變波束[5]。光子晶體具有光子能隙(禁帶)，而在禁帶外側有穿透率極大的頻率點，本論文即是利用在規律的層數變化下又不會對電磁波造成功率率的損耗，讓波在通過不同層數的光子晶體時會產

生出固定的相位差。所以不需要額外使用相移器，只要利用結構的變化就可以達到設計波束掃描的目的。而透過不同的結構波束可以達到大角度掃描，若在同一結構內改變高低折射率層的大小(相當於改變波源間距)也可以做小角度的波束掃描。此技術不僅應用在通訊方面，也可運用在雷達系統，所以有很大的商用價值。

1-3 文章架構

本文共分為五個章節，第一章說明研究背景，第二章介紹天線理論和模擬工具，第三章探討一維光子晶體於不同情況下的穿透和相位特性並設計出波束掃描結構，第四章以微波實驗來驗證我們的模擬設計結果，第五章為本論文之總結並提出未來可繼續研究的方向。



第二章 天線理論及模擬方法介紹

前言：

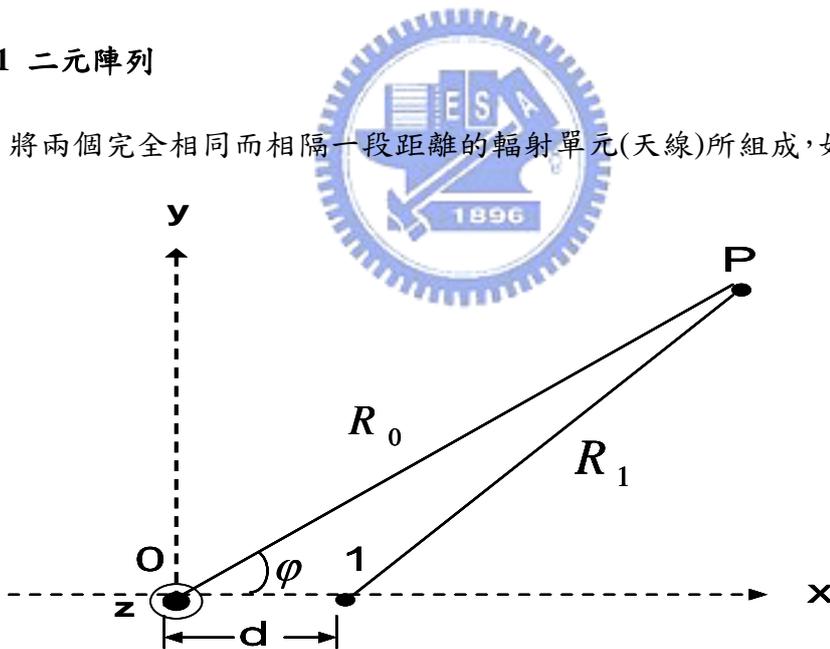
波束掃描的基本理論就是干涉效應，所以本章會先介紹天線理論以及一些特性，在後半段的部份說明所使用的模擬方法和工具。

2-1 天線基本理論 [10]

將一組類似的天線排列成某種陣型，使這些天線間保有適當的振幅及相位關係，以產生所要的輻射圖形，這樣的組合叫做”天線陣列”。而天線陣列裡頭需要注意的是波束方向、波束空間分佈寬以及波束的增益。我們先以二元陣列為例來做說明，再將範圍擴大到多元陣列。

2-1.1 二元陣列

將兩個完全相同而相隔一段距離的輻射單元(天線)所組成，如圖(2.1)所示。



圖(2.1) 二元陣列

假設天線的遠區電場在 θ 的方向(與 z 軸的夾角)，且天線沿著 x 方向排列。用相同的電流來激發此兩天線，但是天線 1 的相位較天線 0 的相位領先 ζ 角。

$$E_0 = E_m F(\theta, \varphi) \frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} \quad (2.1.1)$$

$$E_1 = E_m F(\theta, \varphi) \frac{e^{j\zeta} e^{-j\beta R_1}}{R_1} \quad (2.1.2)$$

上兩式中， $F(\theta, \varphi)$ 是各天線的圖騰函數(φ 是 x-y 平面上的與 x 軸的夾角)， E_m 是振幅函數，而遠區電場為 E_0 和 E_1 的合，即：

$$E = E_0 + E_1 = E_m F(\theta, \varphi) \left[\frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} + \frac{e^{j\zeta} e^{-j\beta R_1}}{R_1} \right] \quad (2.1.3)$$

由遠場近似條件：

$$R_1 \cong R_0 - d \sin \theta \cos \varphi \quad (2.1.4)$$

我們可以得到：

$$\begin{aligned} E &= E_m \frac{F(\theta, \varphi)}{R_0} e^{-j\beta R_0} [1 + e^{j\zeta} e^{j\beta d \sin \theta \cos \varphi}] \\ &= E_m \frac{F(\theta, \varphi)}{R_0} e^{-j\beta R_0} e^{j\psi/2} (2 \cos \frac{\psi}{2}) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

其中：

$$\psi = \beta d \sin \theta \cos \varphi + \zeta \quad (2.1.6)$$

陣列的電場大小為：

$$|E| = \frac{2E_m}{R_0} |F(\theta, \varphi)| \left| \cos \frac{\psi}{2} \right| \quad (2.1.7)$$

上式中， $|F(\theta, \varphi)|$ 為單元因式(element factor)； $\left| \cos \frac{\psi}{2} \right|$ 為歸一化陣列因式(array factor)。單元因式是各輻射單元的圖騰函數的大小，而陣列因式與陣列的幾何排列及各單元中的激發的相對振幅及相對相位有關，如果陣列的輻射單元是各相同性的，那只要用陣列因式便足以描述此陣列的電場。

接下來看一般的均勻直線陣列，我們考慮一個由相同天線組成的陣列且沿著一條直線放置，有相同的間隔和遞增式的相位移，相鄰單元間的相位移為 ζ ，則歸一化陣列因式為：

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N} \left| 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} \right| \quad (2.1.8)$$

其中:

$$\psi = \beta d \cos \varphi + \zeta \quad (2.1.9)$$

(2.1.8)式的右側為一個幾何級數，總和可以寫成:

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N} \left| \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} \right| \quad (2.1.10)$$

即:

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(N\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \right| \quad (2.1.11)$$

(2.1.11)式是均勻直線陣列的歸一化陣列因式的通式。真正的輻射圖騰是 φ 的函數，亦與 βd 及 ζ 之值有關。當 φ 之值由0變成 2π ， ψ 之值則會由 $\beta d + \zeta$ 變成 $-\beta d + \zeta$ ，包括了 $2\beta d$ 之範圍，此範圍即為輻射圖騰的可見區。

由(2.1.11)可以得到下列幾個重要的特性:

1. 波束方向:波束的最大值發生於 $\psi=0$ 處，此時，

$$\beta d \cos \varphi + \zeta = 0$$

可得:

$$\cos \varphi_0 = -\frac{\zeta}{\beta d} \quad (2.1.12)$$

(2.1.12)式為後來我們設計光子晶體在波束掃瞄的主要理論基礎，透過此式可以得到波束方向。

2. 零值位置:當 $|A(\psi)|=0$ 或當下式成立時，

$$\frac{N\psi}{2} = \pm k\pi, k=1,2,3\dots \quad (2.1.13)$$

我們便可以得到陣列圖騰的零值。但是這是以 ψ 來表示零值的位置，對於不同的陣列而言，比如說垂射陣列(波束在90度方向)或是端射陣列(波束在0度方向)

則所對應到的 θ 值會有所不同，因為在 ψ 的表示式中，他們的 ζ 值各不相同。

3 波束寬: 所謂的波束寬指的是第一對零值間波束的角度寬度。令 ψ_{01} 表示第一對零值的 ψ 值，則:

$$\frac{N\psi_{01}}{2} = \pm\pi \quad \text{或} \quad \psi_{01} = \pm\frac{2\pi}{N},$$

又根據(2.1.9)式我們可得:

$$\beta d \cos \varphi_{01} + \zeta = \pm\frac{2\pi}{N} \quad (2.1.14)$$

其中 $\varphi_{01} = \varphi_0 + \Delta\varphi$ ， φ_0 為波束中心角， $\Delta\varphi$ 為波束零值對應到的角度與波束中心角的差，將(2.1.14)進一步寫成下式:

$$\cos(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \frac{\pm\frac{2\pi}{N} - \zeta}{\beta d} \quad (2.1.15)$$

(2.1.15)式為判斷波束寬($2\Delta\varphi$)的一般式，現在我們來看兩個特殊的情況:

對垂射陣列而言($\zeta = 0, \varphi_0 = \pi/2$)，可以得到:

$$\Delta\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{Nd}\right) \cong \frac{\lambda}{Nd}$$

最後的近似關係只有當 $Nd \gg \lambda$ 時才成立。此時波束寬約等於陣列長度的倒數之兩倍。

對端射陣列($\zeta = -\beta d, \varphi_0 = 0$)而言，在 N 很大且 $\Delta\varphi$ 很小的時候可以得到:

$$\Delta\varphi \cong \sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}}$$

由此兩種特例可以知道要使得波束寬變小，可以從增加 N 值或是增加 d 值來達到目的，但是若是改變 d 值，會連帶影響到波束中心角，後面會對此現象做說明。

要做到對單頻波的掃描，可藉由改變 d 值和 ζ 值來做調變，現在針對此兩值

來做分析:

(1) d 值的影響: 把(2.1.12)寫成以下形式:

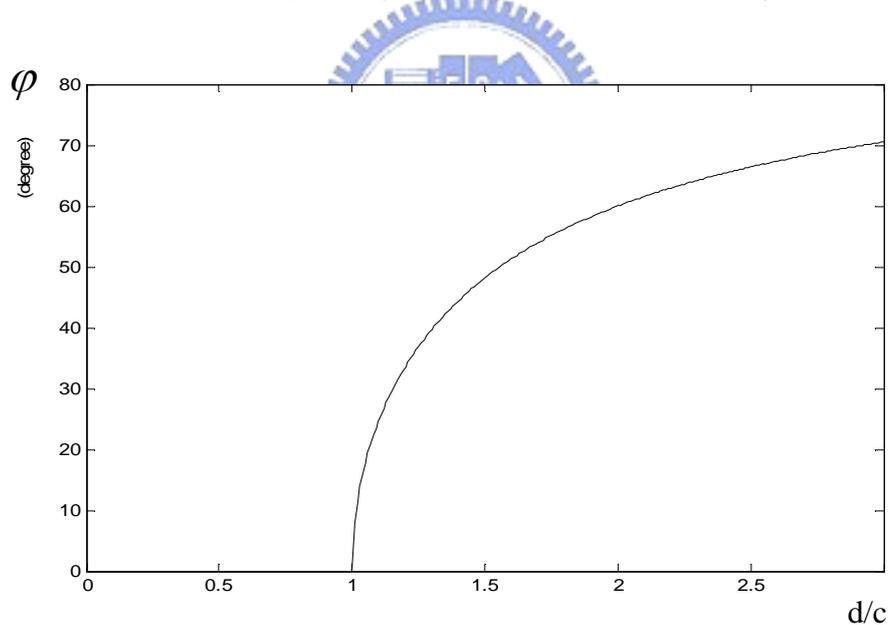
$$\begin{aligned}\cos \varphi_0 &= -\frac{\zeta}{\beta d} = -\frac{\zeta \lambda}{2\pi d} = -\frac{\left(\frac{\zeta \lambda}{2\pi}\right)}{d} \\ \Rightarrow \varphi_0 &= \cos^{-1}\left(-\frac{\left(\frac{\zeta \lambda}{2\pi}\right)}{d}\right)\end{aligned}\quad (2.1.16)$$

因為現在只改變 d 值, 所以 $-\frac{\zeta \lambda}{2\pi}$ 為一常數, 令為 c, (2.1.16)式就會變成:

$\varphi_0 = \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$, 圖(2.2)為 φ 對 d 的關係圖。觀察圖(2.2)在 d/c 的比值介於 1 到 1.5

中波束的變化比較明顯, 可以從 0 度到 50 度, 但是比值在 1.5 以後到 3 之間,

波束變化只從 50 度到 70 度明顯趨於緩和, 這是 cos 函數的特性。

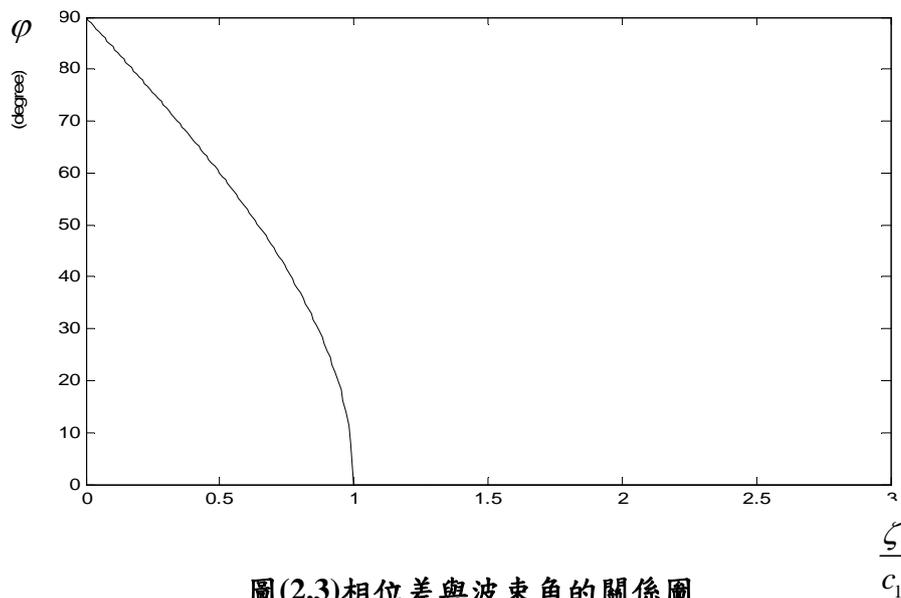


圖(2.2) 波束角對 d 值的關係圖

(2) ζ 值的影響: 在只改變 ζ 值的情況下, 固定其他參數:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= -\frac{\zeta}{\beta d} \\ \Rightarrow \varphi &= \cos^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\beta d}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)\end{aligned}\quad (2.1.17)$$

φ 對上 $\frac{\zeta}{c_1}$ 關係以圖(2.3)表示。



圖(2.3)相位差與波束角的關係圖

由圖(2.3) 可知在 $\frac{\zeta}{c_1}$ 比值介於 0.5 到 1 之間波束角度變化較快，所以若從相位差要改變波束方向則比值不宜太小。

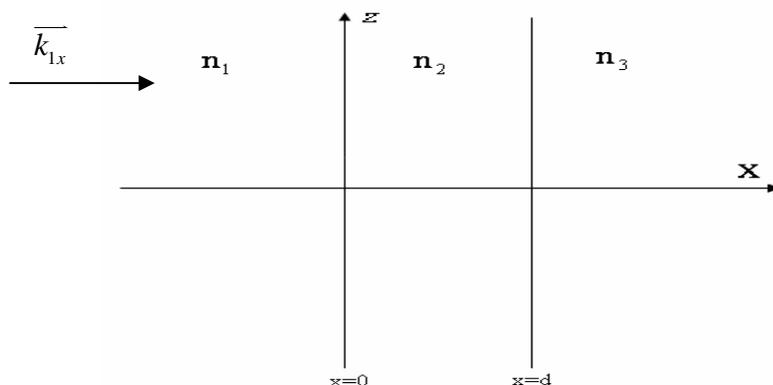
以上的分析前提都是在固定振幅，各輻射單元間具有相同的距離和相位差的情況下所得到的結果。而光子晶體在某些特殊的情況下可以達到穿透振幅不隨層數改變而改變，以及相差為定值的特性。所以我們可以利用光子晶體來達到波束掃描的目的，在第三章的部份會針對光子晶體做詳細的分析。

2-2 模擬工具

在本論文中我們使用 TMM(Transfer Matrix Method)以及有限差分時域法(Finite Difference Time Domain method，簡稱“FDTD”)來模擬分析光子晶體的特性，以下介紹所使用的模擬工具。

2-2.1 傳輸矩陣計算法(TMM)[11][12]

我們首先考慮單一介質層 n_2 ，介於兩個半無窮大的介質 n_1, n_3 中，如圖 2.4 所示



圖(2.4) 單一均勻等向介質層之示意圖

我們假設所有的介質均具有均勻性(homogeneous)及等向性(isotropic)，圖(2.1)整個結構之折射率分佈可以被表示成

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & x < 0 \\ n_2, & 0 < x < d \\ n_3, & d < x \end{cases} \quad (2.2.1)$$

假設以一平面電磁波沿法線以 θ 入射介質層 n_2 ，則我們可以將電場波動方程式表示為以下的形式：

$$E(x, z) = E(x) \exp[(i(\omega t - \beta z))] \quad (2.2.2)$$

其中 β 為傳播向量在 z 方向上分量。

如果我們假設平面波是由 $x = -\infty$ 處入射，則電場向量 $E(x)$ 可以寫成

$$E_y(x) = \begin{cases} Ae^{-ik_{1x}x} + Be^{ik_{1x}x}, & x < 0, \\ Ce^{-ik_{2x}x} + De^{ik_{2x}x}, & 0 < x < d, \\ Fe^{-ik_{3x}(x-d)}, & d < x \end{cases} \quad (2.2.3)$$

在此我們假設電場向量為 s 極化(垂直入射面)。A, B, C, D 及 F 為常數， k_{1x} ,

k_{2x} , k_{3x} 為電磁波在各介質中傳輸時波向量 \vec{k} 之 x 分量，其中

$$k_{ix} = [(\frac{n_i \omega}{c})^2 - \beta^2] = (\frac{\omega}{c}) n_i \cos \theta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.4)$$

θ_i 為平面波在各介質中與 x 軸之夾角， A, C, B, D, F 則分別代表入射波、反射波、透射波之振幅。由式(2.2.3)，再利用馬克士威方程式，我們可推導出在各介質中的磁場向量 $H_z(x)$ 表示式：

$$H_z(x) = \begin{cases} \frac{k_{1x}}{\omega\mu} (Ae^{-ik_{1x}x} - Be^{ik_{1x}x}), & x < 0, \\ \frac{k_{2x}}{\omega\mu} (Ce^{-ik_{2x}x} - De^{ik_{2x}x}) & 0 < x < d, \\ \frac{k_{3x}}{\omega\mu} Fe^{-ik_{3x}(x-d)} & d < x \end{cases} \quad (2.2.5)$$

其中 μ 為導磁係數，並假設它在 3 個介質中都是相同數值。

在此利用 E_y 及 H_z 在 $x=0$ 及 $x=d$ 介面場必需是連續，代入這些條件可得

$$A + B = C + D \quad (2.2.6a)$$

$$k_{1x}(A - B) = k_{2x}(C - D) \quad (2.2.6b)$$

$$Ce^{-ik_{2x}d} + De^{ik_{2x}d} = F \quad (2.2.6c)$$

$$k_{2x}(Ce^{-ik_{2x}d} - De^{ik_{2x}d}) = k_{3x}F \quad (2.2.6d)$$

再上述的四個式子中，我們可將參數 B, C, D 及 F 均以 A 來表示。經過一些代數運算步驟後，我們可得

$$F = A \frac{4k_{1x}k_{2x}e^{-ik_{2x}d}}{(k_{1x} + k_{2x})(k_{2x} + k_{3x}) + (k_{1x} - k_{2x})(k_{2x} - k_{3x})e^{-i2k_{2x}d}} \quad (2.2.7)$$

及

$$B = A \frac{(k_{1x} - k_{2x})(k_{2x} + k_{3x}) + (k_{1x} + k_{2x})(k_{2x} - k_{3x})e^{-i2k_{2x}d}}{(k_{1x} + k_{2x})(k_{2x} + k_{3x}) + (k_{1x} - k_{2x})(k_{2x} - k_{3x})e^{-i2k_{2x}d}} \quad (2.2.8)$$

而 C 及 D 可分別寫成

$$C = \frac{1}{2}F \left(1 + \frac{k_{3x}}{k_{2x}}\right) e^{ik_{2x}d}, \quad (2.2.9)$$

$$D = \frac{1}{2}F \left(1 - \frac{k_{3x}}{k_{2x}}\right) e^{-ik_{2x}d} \quad (2.2.10)$$

如果我們利用式(2.1.4)，我們可以寫出介電質在各介面之穿透及反射係數

$$r_{12} = \frac{k_{1x} - k_{2x}}{k_{1x} + k_{2x}}, \quad (2.2.11)$$

$$r_{23} = \frac{k_{2x} - k_{3x}}{k_{2x} + k_{3x}}, \quad (2.2.12)$$

$$t_{12} = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{2x}}, \quad (2.2.13)$$

$$t_{23} = \frac{2k_{2x}}{k_{2x} + k_{3x}}。 \quad (2.2.14)$$

將各介質介面穿透及反射係數之表示式代入式整理可得總穿透及總反射係數

$$t = \frac{F}{A} = \frac{t_{12}t_{23}e^{-i\phi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\phi}}, \quad (2.2.15)$$

及

$$r = \frac{B}{A} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-2i\phi}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\phi}}, \quad (2.2.16)$$

其中， $\phi = k_{2x}d = \frac{2\pi d}{\lambda} n_2 \cos \theta_2$ 。 ($\because k_{2x} = k_2 \cos \theta_2 = (\frac{w}{c}) n_2 \cos \theta_2$)

在此反射率定義為能量的反射比率：

$$R = |r|^2。 \quad (2.2.17)$$

穿透率定義為能量的穿透比率，

$$T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} |t|^2, \quad (2.2.18)$$

$\frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1}$ 為相速度的修正項。

假如所有介質均為實數且無吸收，則依據能量守恆可以寫出

$$R + T = 1, \quad (2.2.19)$$

在前面的敘述中，我們所計算的為單層均向且均勻的結構。但由前面的分析中我們可以想見，當計算多層介質結構時，所需要解的方程式將會變的非常複雜。因此，我們將採用矩陣法來解決此類問題，此種方法尤其適用來解決週期結構的問題。

現在我們首先考慮前面所描述的單層介質結構的問題，電場可以表示成為由向右行進波及向左行進波組成，即

$$E(x) = \text{Re}^{-ik_x x} + L e^{ik_x x} \equiv A(x) + B(x) \quad (2.2.20)$$

其中 $\pm k_x$ 為波向量在 x 上分量，而 R 及 L 為在各均勻層中之常數， $A(x)$ 代表向右行進之波的電場表示式，而 $B(x)$ 代表向左行進波之電場表示式。

在此我們定義

$$\begin{aligned} A_1 &= A(0^-), \\ B_1 &= B(0^-), \\ A_2' &= A(0^+), \\ B_2' &= B(0^+), \\ A_2 &= A(d^-), \\ B_2 &= B(d^-), \\ A_3' &= A(d^+), \\ B_3' &= B(d^+), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

在此 0^- 代表 $x=0$ 左邊界面， 0^+ 代表 $x=0$ 右邊界面。相同的， d^- 及 d^+ 分別代表 $x=d$ 左邊界面及右邊界面。如果我們將各界面上之電場振幅改以行向量來表示，則我們可得以下之關係：

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix}, \quad (2.2.22a)$$

$$\begin{pmatrix} A_2' \\ B_2' \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.22b)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = D_2^{-1} D_3 \begin{pmatrix} A_3' \\ B_3' \end{pmatrix}, \quad (2.2.22c)$$

其中 D 矩陣可以表示成

$$D_\alpha = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_\alpha \cos \theta_\alpha & -n_\alpha \cos \theta_\alpha \end{pmatrix} & \text{for s wave,} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_\alpha & \cos \theta_\alpha \\ n_\alpha & -n_\alpha \end{pmatrix} & \text{for p wave,} \end{cases} \quad (2.2.23)$$

$\alpha=1,2,3$ 而 θ_α 為各介質層中波向量與 x 軸的光夾角。

而 P_2 稱為解釋波傳播經過此層狀結構之傳播矩陣，其中 $\phi_2 = k_{2,x} d$ 。

從式 (2.1.22)， A_1, B_1, A_3', B_3' 之關係可表示為：

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_3 \begin{pmatrix} A_3' \\ B_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3' \\ B_3' \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

在此，我們可以定義穿透及反射係數分別為

$$r = \left. \left(\frac{B_1}{A_1} \right) \right|_{B_3'=0} = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \quad (2.2.25)$$

$$t = \left. \left(\frac{A_3'}{A_1} \right) \right|_{B_3'=0} = \frac{1}{M_{11}}. \quad (2.2.26)$$



而反射率及穿透率分別為，

$$R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2, \quad (2.2.27)$$

$$T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} |t|^2 = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2, \quad (2.2.28)$$

其中 θ_1 及 θ_3 為電磁波在晶體中之入射角及出射角。

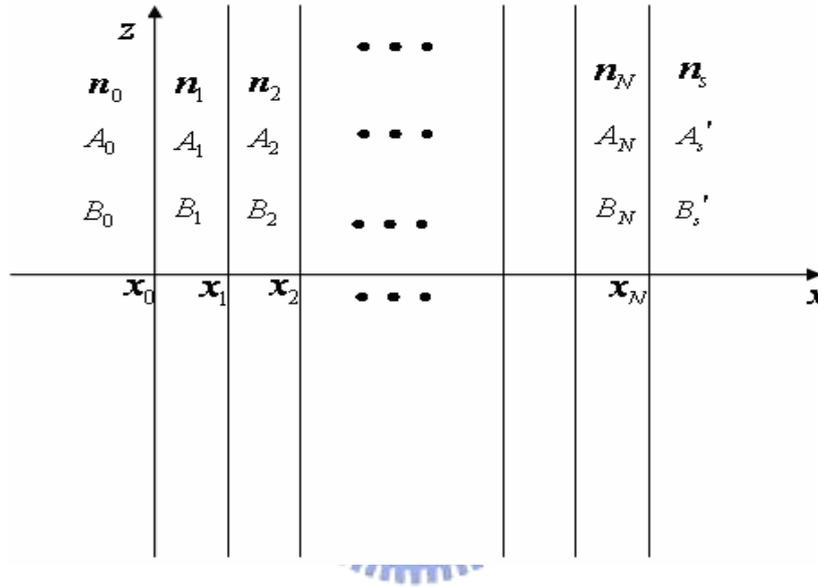
2-2.2 多層等向介質結構之矩陣運算法

接下來我們將考慮計算多層等向介質結構(如圖 2.5)之矩陣運算法，首先，

我們考慮此結構之折射率分佈如所示：

$$n(x) = \begin{cases} n_0, & x < x_0 \\ n_1, & x_0 < x < x_1, \\ n_2, & x_1 < x < x_2, \\ \vdots & \vdots \\ n_N, & x_{N-1} < x < x_N, \\ n_s, & x_N < x \end{cases} \quad (2.2.29)$$

其中 n_l 代表第 l_{th} 層之折射率， x_l 代表第 l_{th} 層與第 $l_{th}+1$ 層介面之位置， n_s 為出射端之折射率。



圖(2.5) 多層均勻等向介質層之示意圖

各層之厚度分別為

$$\begin{aligned} d_1 &= x_1 - x_0 \\ d_2 &= x_2 - x_1 \\ &\vdots \\ d_N &= x_N - x_{N-1} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

而電場 $E(x)$ 之分佈可以寫成

$$E(x) = \begin{cases} A_0 e^{-ik_{0x}(x-x_0)} + B_0 e^{ik_{0x}(x-x_0)}, & x < x_0; \\ A_l e^{-ik_{lx}(x-x_l)} + B_l e^{ik_{lx}(x-x_l)}, & x_{l-1} < x < x_l; \\ A_s' e^{-ik_{sx}(x-x_N)} + B_s' e^{ik_{sx}(x-x_N)}, & x_N < x \end{cases} \quad (2.2.31)$$

其中，

$$k_{lx} = \left[\left(n_l \frac{\omega}{c} \right)^2 - \beta^2 \right]^{1/2} = n_l \frac{\omega}{c} \cos \theta_l, \quad l=1,2,\dots,N, \quad (2.2.32)$$

， θ_l 為平面波進入 l_{th} 層介質之入射角度， A_l 及 B_l 代表在 $x = x_l$ 介面上之電場振幅大小，依照前節中我們所分析的結果，我們可以寫出

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} &= D_0^{-1} D_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} &= P_l D_l^{-1} D_{l+1} \begin{pmatrix} A_{l+1} \\ B_{l+1} \end{pmatrix}, \quad l=1,2,\dots,N, \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

其中 $A_{N+1} = A'_s, B_{N+1} = B'_s$ ，而 D 矩陣及 P 矩陣分別可寫成

$$D_l = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n_l \cos \theta_l & -n_l \cos \theta_l \end{pmatrix} & \text{for s wave,} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_l & \cos \theta_l \\ n_l & -n_l \end{pmatrix} & \text{for p wave,} \end{cases} \quad (2.2.34)$$

$$P_l = \begin{pmatrix} e^{ik_{lx}d_l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{lx}d_l} \end{pmatrix} \quad (2.2.35)$$

由式(2.2.33)整理可得，

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = D_0^{-1} \left[\prod_{l=1}^N D_l P_l D_l^{-1} \right] D_s \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix} \quad (2.2.36)$$

在此，我們可以計算穿透及反射係數分別為

$$r = \left(\frac{B_0}{A_0} \right)_{B'_s=0} = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \quad (2.2.37)$$

$$t = \left(\frac{A_s}{A_0} \right)_{B'_s=0} = \frac{1}{M_{11}} \quad (2.2.38)$$

其中， $t = |t|^{i\theta}$ ， θ 為穿透係數之相位角。

而反射率及穿透率分別為

$$R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2, \quad (2.2.39)$$

$$T = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} |t|^2 = \frac{n_s \cos \theta_s}{n_0 \cos \theta_0} \left| \frac{1}{M_{11}} \right|^2, \quad (2.2.40)$$

其中 θ_0 及 θ_s 為平面波在晶體中之入射角及出射角。

2-3 有限差分時域法(FDTD)[8]

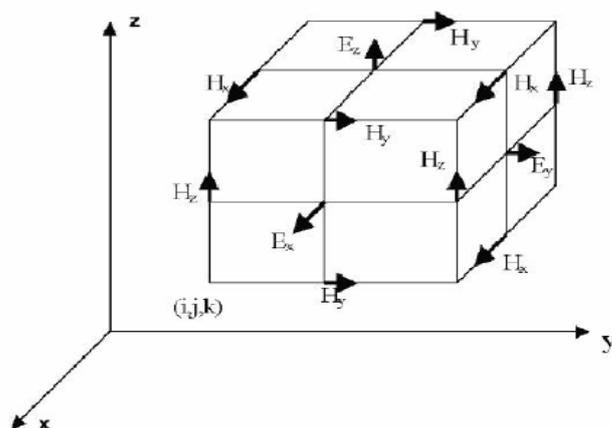
2-3.1 有限差分時域法簡介

有限差分時域法簡單來說，是將Maxwell's 方程式的微分方程式改成以有限差分的形式化開，並獨立於時間領域（Time Domain）中來表示。它最早是由K.S.Yee 教授於1966 年所發表，當時僅只是用來模擬電磁波在空間中的傳播，後來經過許多科學家的努力，將其進行修正與改進，例如：為了使我們可以在有限的計算空間內模擬無限大的物理空間，Mur 教授曾經發表了吸收邊界層介質的方法（Absorbing Boundary Condition，ABC），之後Berenger 教授提出了一個更精確而完美的吸收介質邊界—完全匹配層（Perfectly Matched Layer—ABC，PML—ABC）的概念，並與Katz 教授等人合力將這個方式推廣到3D 空間的計算上。另外，為了模擬計算上的方便，出現了將總場區及散射場區分開的方法，使得入射波的參數設置以及散射物質的參數設置變得更為簡單容易。由於以上的改進，FDTD 法便可進一步應用到其它的用途上，例如：Toflove 教授和Brodwin 教授便以FDTD 的方式計算出二維、三維電磁波散射問題的穩

定解，而Holland 教授、Kunz 教授和Yee 教授更運用了FDTD法解析了EMP 的問題。另外，Taflove 教授等人廣泛的運用FDTD的模型來解決或模擬電磁波在不同的物質結構下的響應；以上這些種種的應用，都在在證明了FDTD 法在物理學領域裡是不可或缺的重要角色。

2-3.2 基本概念

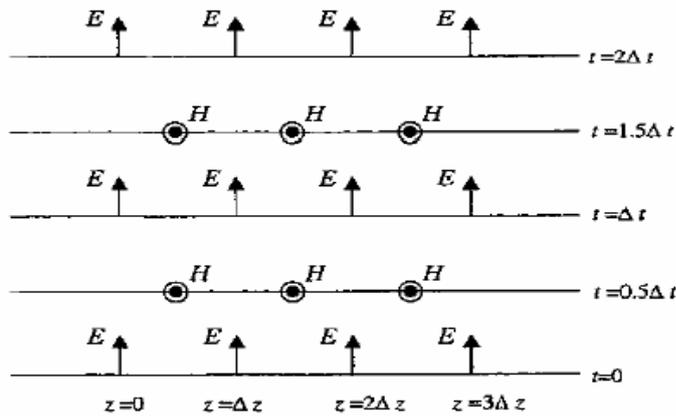
為了計算時域中的電磁場，從與時間相依的Maxwell's 旋度方程式 (Maxwell's curl equation) 出發是很合理的。所以Yee 教授的FDTD法就是利用Maxwell's 旋度方程式來計算電場跟磁場在不同空間位置跟時間點的獨立分量，而並非以電場或是磁場的波方程式進行解析。從空間的角度上來說，Yee 教授的方法是交叉設置電場及磁場分量的取值點，使得每個電場分量的四周由磁場分量環繞，而每個磁場分量的四周由電場分量環繞。如圖(2.6)所示：



圖(2.6)：同一時刻FDTD 中電場、磁場分佈的情形。其中電場可由<1>前一時刻同位置上的電場 與 <2>四周圍的磁場所組合而成。磁場的也是相同情形。

Z軸方向上的電場 E_z 是以XY平面上四個磁場分 H_{y1} 、 H_{y2} 、 H_{x1} 、 H_{x2} 所合成的；X軸方向上磁場 H_x 則以YZ平面上四個電場 E_{z1} 、 E_{z2} 、 E_{y1} 、 E_{y2} 分量所合成的。這

樣的空間配置符合電磁場的基本規律—法拉第 (Faraday) 定律及安培 (Ampere) 定律，因此利用FDTD 法來模擬電磁波傳播並與物體作用時，其邊界的連續條件將自然滿足而使結構複雜的電磁波計算簡化，這也是FDTD 法能夠被廣泛運用的原因。以時間的角度來看的話，電場跟磁場的分佈也是以交錯一個時間間隔而存在的。如圖(2.7)，電場分佈是可以完全被儲存與記憶在前一個時刻的磁場分量及電場分量之中；而磁場同樣的也是可以被儲存並記憶在前一時刻裡的電場分量及磁場分量。整個計算的方式就是在於電場跟磁場之間的量值的交換運算當中進行。



圖(2.7)：在FDTD 中，電場與磁場是隨著時間不同而獨立的量值。

FDTD 法的另一個重要的概念，就是將Maxwell's 旋度方程式中的偏微分方程以差分的形式表現出來。其作法為先把時間和空間劃分成網格狀，空間每個網格點的位置寫成 $(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ ，其中 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分別是指向 x, y, z 軸方向上增加的間距， i, j, k 則表示變化的整數；而時間則寫成 $n\Delta t$ ，其中 Δt 是指時間間距， n 為整數。現在我們假設一個空間跟時間的方程式為 $f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = f_{i,j,k}^n$ ，在考慮在時間不變的情況下， f 對空間中 x 軸的偏微分可化為中間差分的形式：

$$\frac{\partial f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_{i,j,k}^{n+1/2} - f_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta x} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1/2} - f_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta x} \quad (2.2.41)$$

若在考慮位置不變的情況下，f 對時間偏微分的差分化：

$$\frac{\partial f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_{i,j,k}^{n+1/2} - f_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1/2} - f_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (2.2.42)$$

一次差分有前差分、後差分和中間差分三種不同的形式。由於前差分、後差分的誤差範圍為 Δx ，而中間差分的誤差範圍是 Δx^2 ，所以一般FDTD 法都是以中間差分的方式作運算。

2-3.3 用有限差分時域法解析馬克士威方程式

考慮一個沒有電流源或磁流源的空間裡，與時間相依的馬克士威方程式有

如下的表示：

$$\text{Faraday's Law} : \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} \quad (2.2.43a)$$

$$\text{Ampere's Law} : \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} \quad (2.2.43b)$$

$$\text{Gauss's Law for the E-field} : \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.2.43c)$$

$$\text{Gauss's Law for the M-field} : \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2.43d)$$

其中D 與E 關係可以寫成

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r(\omega) \cdot \vec{E}(\omega) \quad (2.2.44)$$

為了方便計算，我們改寫 $\vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{\tilde{E}}$, $\vec{D} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \vec{\tilde{D}}$ ，所以馬克士威方程式改為：

$$\frac{\partial \vec{\tilde{D}}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \vec{\tilde{H}} \quad (2.2.45a)$$

$$\vec{\tilde{D}}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \vec{\tilde{E}}(\omega) \quad (2.2.45b)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \nabla \times \tilde{E} \quad (2.2.45c)$$

因為FDTD 法是在時域內計算，所以 $\tilde{D}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega)$ 必須經過傅利葉轉換轉成時域空間，然而這個轉換需固定介電質的 $\epsilon_r^*(\omega)$ ，這個部分將會在下一章討論。

之後將式(2.2.45)中的電場和磁場分成x、y、z 三個方向的分量：

$$\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{D}_y}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{D}_z}{\partial y} \right) \quad (2.2.46a)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{D}_z}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial z} \right) \quad (2.2.46b)$$

$$\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{D}_y}{\partial x} \right) \quad (2.2.46c)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(-\frac{\partial \bar{H}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial y} \right) \quad (2.2.47a)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(-\frac{\partial \bar{H}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial z} \right) \quad (2.2.47b)$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(-\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} \right) \quad (2.2.47c)$$



現在運用式(2.2.41)、(2.2.42)的觀念，代入三維Maxwell's 旋度方程式(2.2.46)、

(2.2.47)中即可得到電場及磁場的時間與空間差分轉換形式。以 \tilde{D}_z 為例來說明：

$$\frac{\partial \tilde{D}_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(-\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} \right) \quad (2.2.48)$$

假設在 \tilde{D}_z (i, j, k, n) 的位置上，使其有著類似式(2.2.41)、(2.2.42)的展開，則

可推得：

$$\frac{\tilde{D}_z \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} - \tilde{D}_z \Big|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\bar{H}_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - \bar{H}_y \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{\bar{H}_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n - \bar{H}_x \Big|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right)$$

(2.2.49)

經過整理歸納後可得：

$$\tilde{D}_z \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \tilde{D}_z \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left(\frac{\bar{H}_y \Big|_{i+1/2,j,k}^n - \bar{H}_y \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} - \frac{\bar{H}_x \Big|_{i,j+1/2,k}^n - \bar{H}_x \Big|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (2.2.50a)$$

藉由同樣的方法及計算過程我們可以得到Yee 三維空間中，電場跟磁場之FDTD

的各方向分量的表示式：

$$\tilde{D}_x \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \tilde{D}_x \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \left(\frac{\bar{H}_z \Big|_{i+1/2,j,k}^n - \bar{H}_z \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta y} - \frac{\bar{H}_y \Big|_{i,j,k+1/2}^n - \bar{H}_y \Big|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \quad (2.2.50b)$$

$$\tilde{D}_y \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} = \tilde{D}_y \Big|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \left(\frac{\bar{H}_x \Big|_{i,j,k+1/2}^n - \bar{H}_x \Big|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{\bar{H}_z \Big|_{i+1/2,j,k}^n - \bar{H}_z \Big|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \quad (2.2.50c)$$

$$\bar{H}_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \bar{H}_x \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \left(\frac{\tilde{D}_y \Big|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - \tilde{D}_y \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{\tilde{D}_z \Big|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - \tilde{D}_z \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \quad (2.2.51a)$$

$$\bar{H}_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} = \bar{H}_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \left(\frac{\tilde{D}_z \Big|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2} - \tilde{D}_z \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{\tilde{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \tilde{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \quad (2.2.51b)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_z \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \bar{H}_z \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^n \\ &+ \frac{\Delta t}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \left(\frac{\tilde{D}_x \Big|_{i+1/2, j+1, k}^{n+1/2} - \tilde{D}_x \Big|_{i+1/2, j, k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\tilde{D}_y \Big|_{i+1, j+1/2, k}^{n+1/2} - \tilde{D}_y \Big|_{i, j+1/2, k}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (2.2.51c)$$

以上六式即為FDTD 法在三維空間中的公式。

2-3.4 穩定條件

馬克士威旋度方程式經由FDTD 解析後導出的方程式為(2.2.50)、(2.2.51)，它是按照「隨著時間步數的增加來計算電磁場在空間內的變化」的模式來執行。然而這種方法存在穩定性的問題，即時間變量 Δt 與空間變量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 之間必須滿足一定條件，否則會出現數值不穩定：隨著計算步數的增加，被計算的場量數值將無限制的增大。這並不是因為誤差的累積，而是由於電磁波傳波的因果關係被破壞所造成的。因此，為了進行穩定的計算，就需要合理的決定時間變量 Δt 與空間變量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 之間的關係。為了方便討論，我們使用一維

Helmholtz 方程式來說明：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x^2} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 t^2} = 0 \quad (2.2.52)$$

在這裡 ϕ 是個一維與時間相關的波方程。令 β_x 為x方向的波數，可以將上式展開成：

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \exp(i\beta_x x) \exp(\alpha t) \\ &= \exp(i\beta_x p \Delta x) \exp(\alpha n \Delta t) \\ &= \exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^n \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

其中 $\xi = \exp(\alpha \Delta t)$ 。如果整個系統要穩定， ξ 必須滿足 $|\xi| \leq 1$ 。首先將(2.2.53)式代

入Helmholtz 方程式：

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ \exp[i\beta_x(p+1)\Delta x] \xi^n - 2 \exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^n + \exp[i\beta_x(p-1)\Delta x] \xi^n \right\} - \frac{\varepsilon \mu_0}{(\Delta t)^2} \left\{ \exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^{n+1} - 2 \exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^n + \exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^{n-1} \right\} = 0 \quad (2.2.54)$$

將 $\exp(i\beta_x p \Delta x) \xi^n$ 提出：

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ \exp(i\beta_x \Delta x) - 2 + \exp(-i\beta_x \Delta x) \right\} - \frac{\varepsilon \mu_0}{(\Delta t)^2} (\xi - 2 + \xi^{-1}) = 0 \quad (2.2.55)$$

再將 $\frac{\varepsilon \mu_0}{(\Delta t)^2} \xi$ 提出，由(2.2.54)式的第一項可以推得：

$$\left\{ \exp(i\beta_x \Delta x) - 2 + \exp(-i\beta_x \Delta x) \right\} = 2(\cos(\beta_x \Delta x) - 1) = -4 \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (2.2.56)$$

$$\Rightarrow (\xi^2 - 2\xi + 1) - \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon \mu_0} \left[-\frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \xi = 0 \quad (2.2.57)$$

$$\Rightarrow \xi^2 - 2A\xi + 1 = 0 \quad (2.2.58)$$

這裡A 我們定為

$$A = -\frac{2(\Delta t)^2}{\varepsilon \mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1 \quad (2.2.59)$$

所以 ξ 的解為：

$$\xi_1 = A + \sqrt{A^2 + 1}, \quad \xi_2 = A - \sqrt{A^2 + 1} \quad (2.2.60)$$

因為 $|\xi| \leq 1$ ， $0 \leq \sin^2 \theta$ ，所以我們可以得到這樣的關係式：

$$A = -\frac{2(\Delta t)^2}{\varepsilon \mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1 \leq 1 \quad (2.2.61)$$

可以具體的討論 A 穩定的情況：

1. 當 $A \geq 1$ ，由式(2.2.60)，推得 $1 \leq |\xi_2|$ ，所以沒有穩定解
2. 當 $-1 \leq A \leq 1$ 時， ξ_1 和 ξ_2 可以展開成：

$$\xi_1 = A + A\sqrt{A^2 - 1} = A + i\sqrt{1 - A^2} \quad (2.2.62a)$$

$$\xi_2 = A - A\sqrt{A^2 - 1} = A - i\sqrt{1 - A^2} \quad (2.2.62b)$$

絕對值可以展開成 $|\xi_1| = |\xi_2| = A^2 + (1 - A^2) = 1$ ，所以當 $-1 \leq A \leq 1$ ，有穩定解。可以

將關係重新寫成：

$$-1 \leq -\frac{2(\Delta t)^2}{\epsilon\mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1 \leq 1 \quad (2.2.63)$$

因為中間與右邊的關係是永遠滿足的，所以只需要考慮左邊跟中間的式子：

$$-1 \leq -\frac{2(\Delta t)^2}{\epsilon\mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + 1 \quad (2.2.64)$$

將兩邊同乘以-1 並且考慮右邊的式子有最大值時，也就是當

$\sin^2\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) = 1$ 時，可以重寫上面的關係式 $1 \geq \frac{2(\Delta t)^2}{\epsilon\mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} - 1$ ，得到：

$$2 \geq \frac{2(\Delta t)^2}{\epsilon\mu_0} \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad (2.2.65)$$

推得 $(\Delta t)^2 \leq \epsilon\mu_0 \left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)^{-1}$ ，這樣的關係式可以重寫成受限制於時間間距

Δt 的形式：

$$\Delta t \leq \sqrt{\epsilon\mu_0} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{C_0} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2}\right)^{-1/2} \quad (2.2.66)$$

其中 Δx 是空間的間距， Δt 是時間間距， C_0 ， ϵ_r ， $v = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ ，分別代表

的是真空中的光速，介電值的比，和介質中的光速。所以將1D 推廣

到3D 的話，由式可以推得：

$$\Delta t \leq \frac{1}{v} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}\right)^{-1/2} \quad (2.2.67)$$

2-3.5 吸收邊界

當初Yee 教授在使用FDTD 解析空間中電磁場分佈時並沒有使用吸收邊界條件的概念，因為一般在計算的時候皆假設周遭為一個無限延伸的區域；但若用電腦模擬時因為記憶體是有限的，故計算空間不可能無限大，必定有一個邊界存在。然而FDTD 每個網格點的計算都要使用周圍的點值，邊界若處理不當則

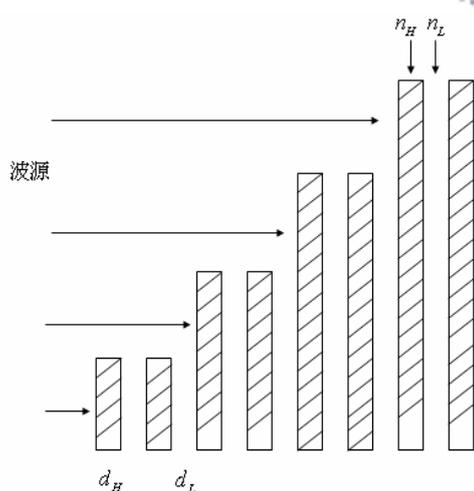
可能會無法運算或是出現非物理性的反射。因此為了使計算正確與快速，我們必須加入邊界吸收的條件，以使得電磁波從主要計算區域進入邊界時不會反射並被完全吸收，就如同進入了廣大的自由空間一般，則此模擬結果可以與真實空間裡的情況相同。為了處理這樣的一個問題，前人有許多不同的方式，包括Mur教授的一階、二階吸收層的方式、消除波前的方式、The Higdon Method...等等。其中以Berenger 教授所提出的完全匹配層（Perfectly Matched Layers—ABC, PML—ABC）為最有效的達成吸收邊界條件。所以在本論文中，將選擇採用Berenger教授的PML 當作我們模擬計算上的吸收邊界。



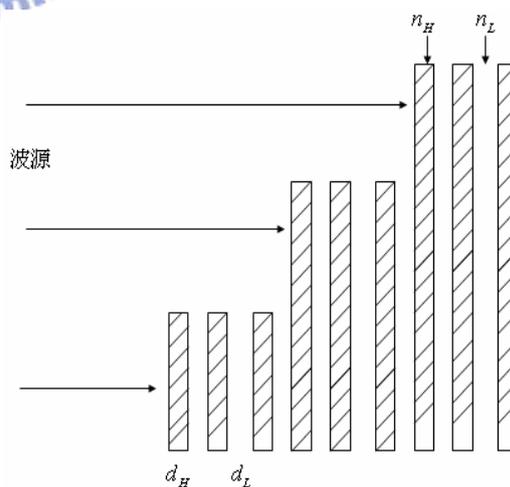
第三章 光子晶體在波束掃描的特性研究

前言:

由 2-1 節的天線理論我們找到在某一特殊狀況下，固定波源的振幅、相位差的情況下以改變波源間距可以達到調變波束方向的目的。而一維光子晶體即擁有在禁帶外側穿透峰值，在規律的層數變化下不變的特性以及光通過此結構可以維持固定相位差特性。在本章的 3-1 節將會介紹在不同的結構下，也就是高低折射率層週期變化分別為 2 的倍數(如圖(3.1))、3 的倍數(如圖(3.2))以及 4 的倍數時穿透峰值以及相位的特性，之後透過結構改變可設計大角度調變(3-2 節)，若僅調整板隔長短變化可做出小角度調變(3-3 節)。



圖(3.1) 偶數層的光子晶體結構



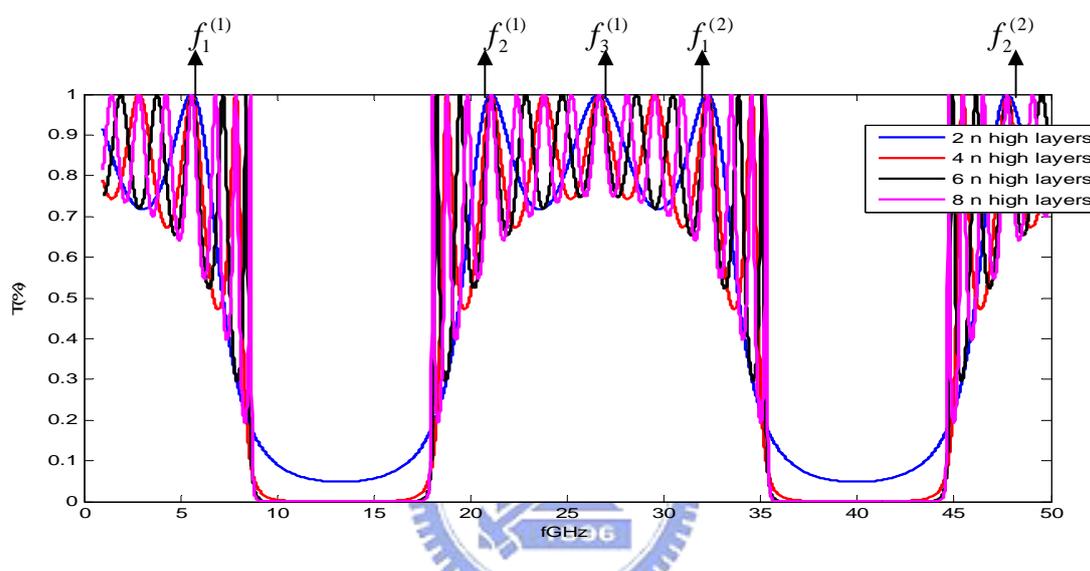
圖(3.2) 奇數層的光子晶體結構

(網狀格子折射率為 n_H ，厚度為 d_H ，空白區域間隔部分折射率為 n_L ，厚度為 d_L)

3-1 光子晶體的穿透與相位特性分析

3-1.1 高低折射率層週期為 2 的倍數的穿透峰值與相位特性

在介質層厚度固定為四分之波長的結構下，先設計帶隙之中心頻率 $f_0=13.33\text{GHz}$ ， $n_H=3$ ， $n_L=1$ 。當層數週期變化為 2 的倍數的情況下，用 TMM 方法計算出穿透率與頻率的關係如圖(3.3)所示。



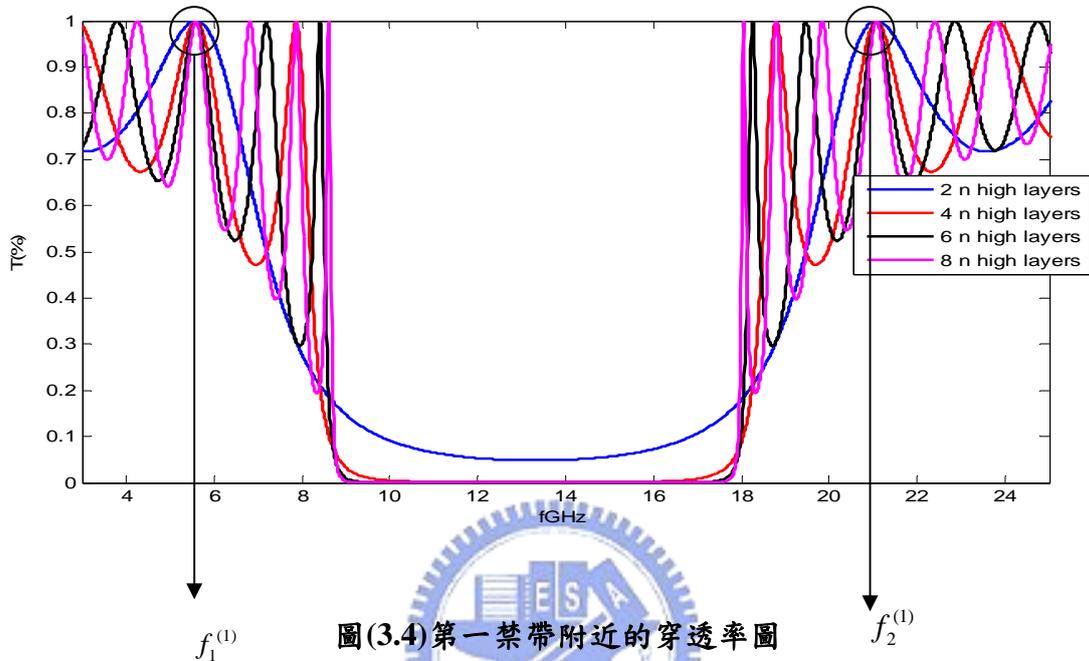
圖(3.3) 偶數層(2-4-6-8)下的穿透率頻譜圖

由圖(3.3)可以看到在禁帶外側有幾個穿透率極值不會隨層數變化而改變，我們把這些峰值所對應到的頻率編號如下表(3.1):

	第一禁帶	第二禁帶	第 n 禁帶
帶隙中心頻率	$f_0^{(1)}$	$f_0^{(2)}$	$f_0^{(n)}$
左側第一峰值(穿透率為 1)	$f_1^{(1)}$	$f_1^{(2)}$	$f_1^{(n)}$
右側第一峰值(穿透率為 1)	$f_2^{(1)}$	$f_2^{(2)}$	$f_2^{(n)}$
第一與第二禁帶中間峰值	$f_3^{(1)}$		

表(3.1)各個峰值所對應頻率符號

這些峰值的特色就是在偶數層的情況下，不隨層數而改變其穿透率，這是光子晶體可以應用在波束掃描一個很重要的特性，雖然光通過不同的層數，但是仍可以維持振幅固定。現在我們將第一禁帶附近的穿透率圖形放大，以圖(3.4)表示。



圖(3.4)第一禁帶附近的穿透率圖

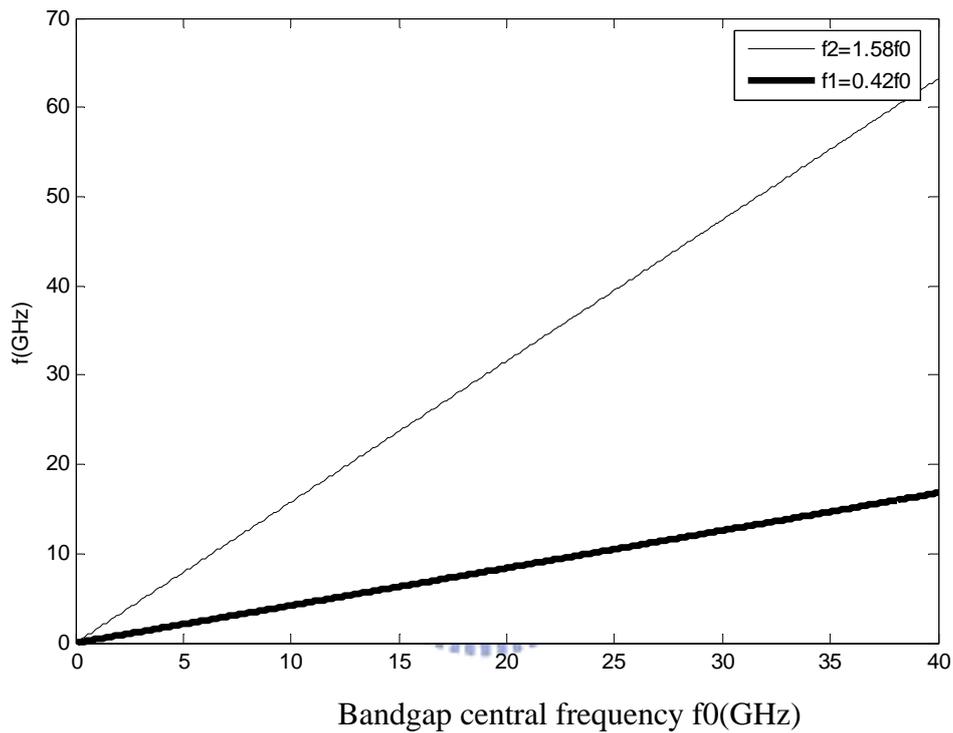
在層數越多的情況下，峰值會越尖，因為層數越多會干涉的越完整。那 $f_1^{(1)}$ 與 $f_2^{(1)}$ 跟帶隙中心頻率 ($f_0^{(1)}$) 有什麼特性呢？針對 $f_1^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}$ 與帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 的關係用表(3.2)表示：

$f_0^{(1)}$ (GHz)	8	10	13	20	40
$f_1^{(1)}$ (GHz)	3.36	4.2	5.45	8.4	16.8
$f_2^{(1)}$ (GHz)	12.64	15.8	20.55	31.6	63.2

表(3.2) 帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 與 $f_1^{(1)}$ & $f_2^{(1)}$ 的變動列表關係

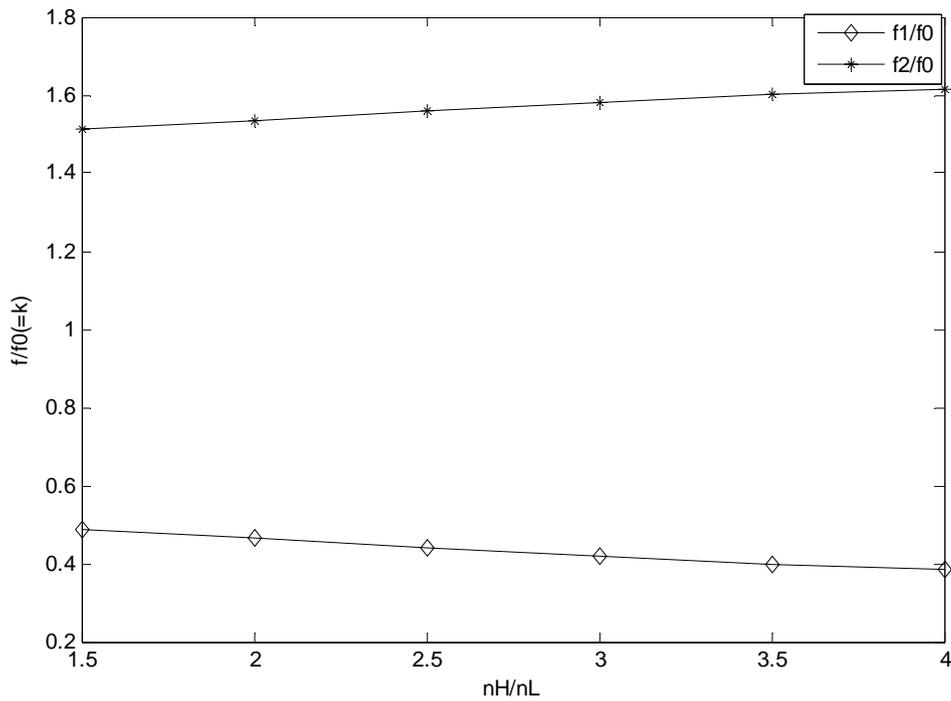
把表(3.2)畫成圖形(3.5)可以很清楚的看到 $f_1^{(1)}$ 與帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 成線性關係，隨著 $f_0^{(1)}$ 頻率的增加而增加，斜率(也就是 $f_1^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的比值)為一定值，同理 $f_2^{(1)}$ 與

$f_0^{(1)}$ 也有同樣的特性存在，透過這個現象可以知道只要結構的折射率比固定時，則 $f_1^{(1)}$ 與 $f_2^{(1)}$ 跟 $f_0^{(1)}$ 的比值就會固定。若根據所需要的使用頻率 ($f_1^{(1)}$ 或 $f_2^{(1)}$) 就可以定出相對應的帶隙中心頻率，那此光子晶體的結構就可以決定。



圖(3.5) 在設計為 $n_H=3$ ， $n_L=1$ 之光子晶體其 $f_1^{(1)}$ 、 $f_2^{(1)}$ 與帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 的關係

以上的討論是在折射率固定的情況下做的分析，但是隨著使用折射率的不同會影響到 $f_1^{(1)}/f_0^{(1)}$ 與 $f_2^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的比值，所以現在來觀察在不同折射率情況下所對應到的比值，以圖(3.6)表示。



圖(3.6) 在不同 $\frac{n_H}{n_L}$ 比例之光子晶體結構中 $\frac{f_1^{(1)}}{f_0^{(1)}}$ 和 $\frac{f_2^{(1)}}{f_0^{(1)}}$ 的變化圖

在高低折射率的比值越大時， $f_1^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的值會變小，而 $f_2^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的值會變大，也就是這兩個峰值頻率會離帶隙中心頻率 $f_0^{(1)}$ 越遠。猜測的原因是因為一維光子晶

體禁帶有以下特性：

$$\frac{\Delta f}{f_0} \cong \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L} \right)$$

其中 Δf 是指禁帶邊緣頻率與帶隙中心頻率的差值。隨著折射率比越大 Δf 的值

也就越大，使得 $f_1^{(1)}$ 與 $f_2^{(1)}$ 離中心頻率越遠，因此造成 $f_1^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的比值變小，

$f_2^{(1)}/f_0^{(1)}$ 的比值變大。因為 $f_1^{(1)}$ 與 $f_2^{(1)}$ 對 $f_0^{(1)}$ 頻率是對稱的，所以 $f_1^{(1)} + f_2^{(1)} = 2f_0^{(1)}$ ，

因此一個比值變小另一個比值就會變大。以上是討論在第一禁帶兩側遇到的第一

個穿透峰值的特性，接下來觀察在更高禁帶的穿透峰值特性。

第二禁帶或更高禁帶的帶隙中心頻率是第一禁帶的奇數倍，而由 TMM 法可

以發現不管是哪個禁帶中心頻率 $f_0^{(n)}$ 與 $f_1^{(n)}$ 的差距 $\Delta f (= f_1^{(n)} - f_0^{(n)})$ 會維持固定，因為頻譜對稱，所以 $f_0^{(n)}$ 與 $f_2^{(n)}$ 的差距也會固定。觀察圖(3.3)可得表(3.3)。

$n_H=3, n_L=1$			
$f_0^{(n)}$ (GHz)	$f_0^{(1)} (=13.33)$	$f_0^{(2)} (=39.99)$	$f_0^{(3)} (=66.65)$
$f_1^{(n)}$ (GHz)	5.6	32.25	58.92
$f_0^{(n)} - f_1^{(n)}$ (GHz)	7.73	7.74	7.73

表(3.3)不同禁帶 $f_0^{(n)}$ 與 $f_1^{(n)}$ 的關係

從表(3.3)可以看出 $f_1^{(n)}$ 與 $f_0^{(1)}$ 呈線性關係，整理如下：

$$f_1^{(n)} = 2(n-1)f_0^{(1)} + kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_1^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} - \Delta f \quad n=1,2,3\dots \quad (3.1.1)$$

其中 k 為在不同折射率比的情況下 $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 的比值(參照圖(3.6))，

$\Delta f = f_0^{(1)} - f_1^{(1)}$ 。以 $n_H=3$ 、 $n_L=1$ 來說， $k=0.42$ 。這樣就可以預估其他穿透峰值所

對應到的頻率點($f_1^{(n)}$)，同理 $f_2^{(n)}$ 也有類似的關係式：

$$f_2^{(n)} = 2nf_0^{(1)} - kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_2^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} + \Delta f \quad n=1,2,3\dots \quad (3.1.2)$$

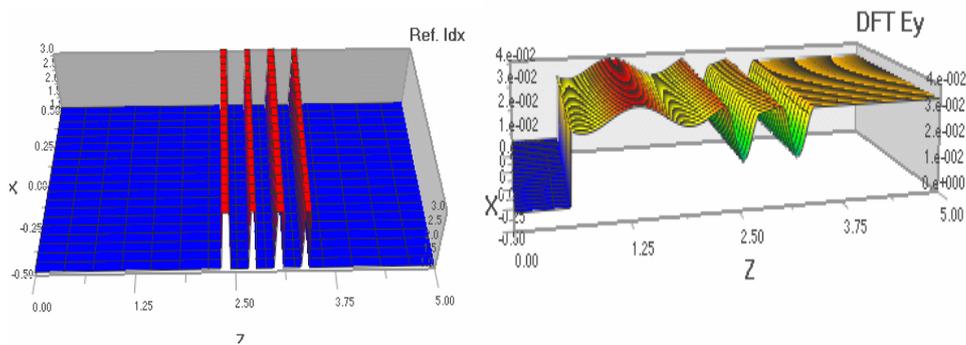
現在用模擬軟體 FDTD 來驗證一下穿透特性，在輸入波源為 TE 波， $n_H=3$ ， $n_L=1$ ，

帶隙中心頻率(f_0)為 30GHz，此時對應到的 $f_1^{(1)} = 0.42f_0 = 12.6\text{GHz}$ ，分別通過四

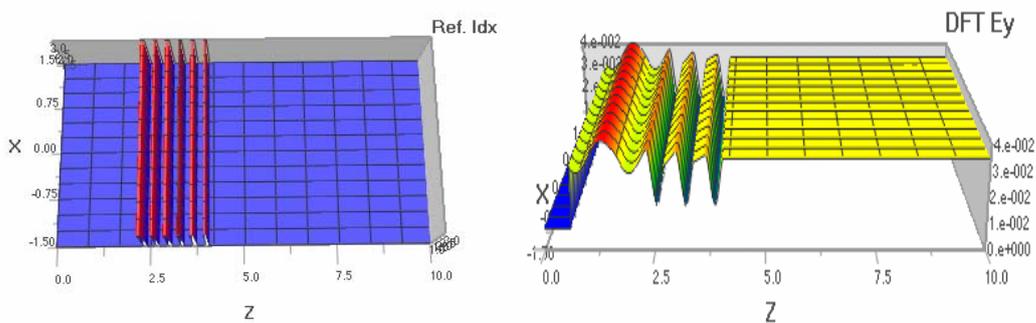
個週期和六個週期的光子晶體，模擬中所跑的格子點是 $0.01\mu\text{m} \times 0.01\mu\text{m}$ ，跑 60000

次。圖(3.7)是四個週期光子晶體的結構以及電場的場強圖，圖(3.8)是六個週期的

光子晶體結構以及電場的場圖。



圖(3.7)左:四層光子晶體圖 右:通過光子晶體之穩定態電場場強分佈圖

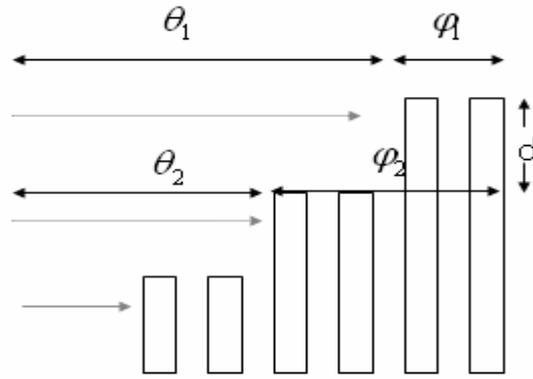


圖(3.8)左:六層光子晶體圖 右:通過光子晶體之穩定態電場場強分佈圖

由圖(3.7)和圖(3.8)可以看出平面波通過四個週期和六個週期的結構時電場的振幅皆相等，可以驗證上述的理論。

(3.1.1)和(3.1.2)兩式的頻率皆為穿透峰值不隨層數增加而改變的頻率點，已符合我們設計波束掃描的第一個充要條件，也就是波通過此結構時振幅可維持相同，接下來分析這些頻率點通過不同層數下的相位特性。

圖(3.9)是光通過結構的相位表示圖，其中 θ 是代表光在空氣中所走路徑造成的相位，而 φ 是代表光在光子晶體內的相位，所以 θ_1 代表的意思就是光在通過兩個週期光子晶體前在空氣中所走的路徑造成的相位， $\varphi_1 \pm 2n\pi$ 就是指光在兩個週期光子晶體內的相位。



圖(3.9)光通過結構相位表示圖

總相位差 ζ 以下式表示:

$$\zeta = -(\varphi_2 - \varphi_1) + (\theta_1 - \theta_2) \quad (3.1.3)$$

現在先看 $\theta_1 - \theta_2$ 這部份的相位差，因為是空氣中的路徑差造成的，所以可以寫成

下式:

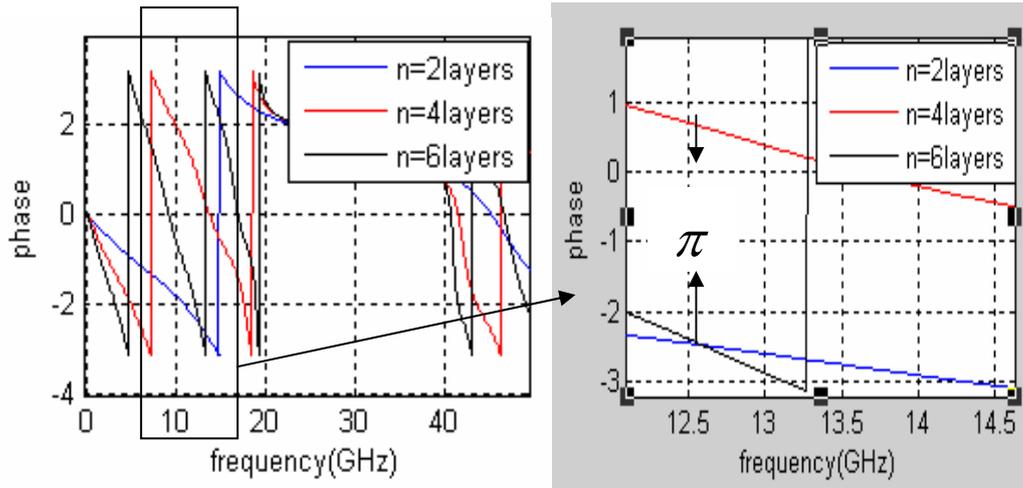
$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 &= k\Delta s \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda_0}{4n_H} + \frac{\lambda_0}{4n_L} \right) * 2 \\ &= \left(\frac{f}{f_0} \right) \left(\frac{1}{4n_H} + \frac{1}{4n_L} \right) * 4\pi \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

其中 λ_0 為帶隙中心頻率對應之波長， λ 為對 $f_1^{(1)}$ 、 $f_2^{(1)}$ 穿透極值頻率對應之波長。

由之前的研究可以知道，在固定折射率的情況下，穿透極值的頻率和帶隙中心頻率的比值是固定的。所以基本上(3.1.4)是只跟折射率的變化有關，只要折射率固定則 $\theta_1 - \theta_2$ 就固定，接下來看光在光子晶體內的相位差。

用 TMM 法在 $n_H=3$ 、 $n_L=1$ ， $f_0=30\text{GHz}$ 計算出平面波通過在高折射率層分別是兩層、四層、六層的情況下的相位圖形，如圖(3.10)。此時 $f_1^{(1)}=0.42f_0=12.6\text{GHz}$ ，

我們將 12.6GHz 附近的相位圖放大，可以發現不同層數下的相位差為 π 。

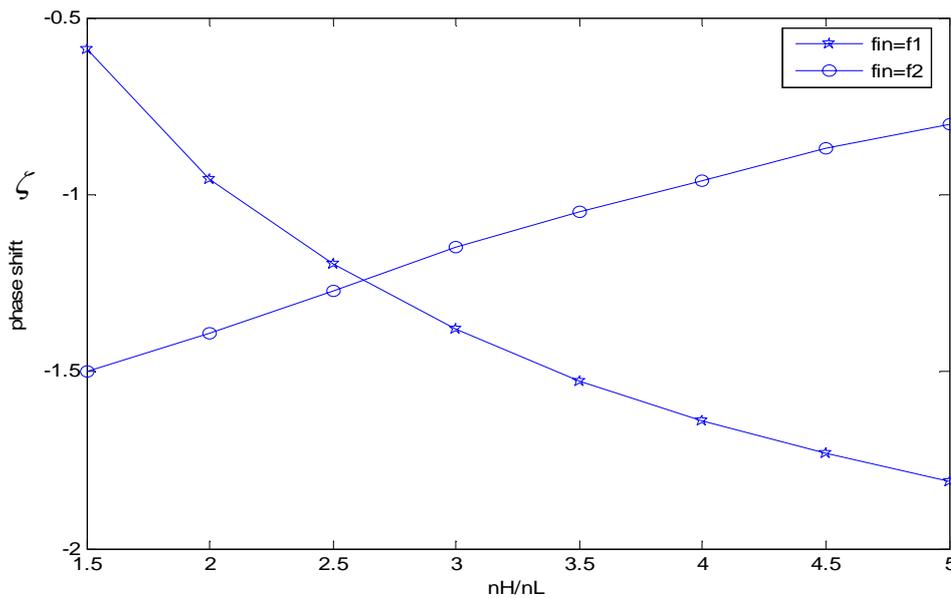


圖(3.10) $n_H=3$, $n_L=1$, $f_0=30\text{GHz}$ 的相位圖(右圖為左圖在 $f=10\text{GHz}$ 附近的放大圖)

所以可以將(3.1.3)式寫成:

$$\zeta = -\pi + \left(\frac{f}{f_0}\right)\left(\frac{1}{4n_H} + \frac{1}{4n_L}\right)*4\pi \quad (3.1.5)$$

所以總相位差可由(3.1.5)來計算推得。因為相位差跟折射率的選擇有關，當輸入頻率(fin)為 $f_1^{(1)}$ 、 $f_2^{(1)}$ 的時候，相位差和折射率的關係以圖(3.11)來顯示。

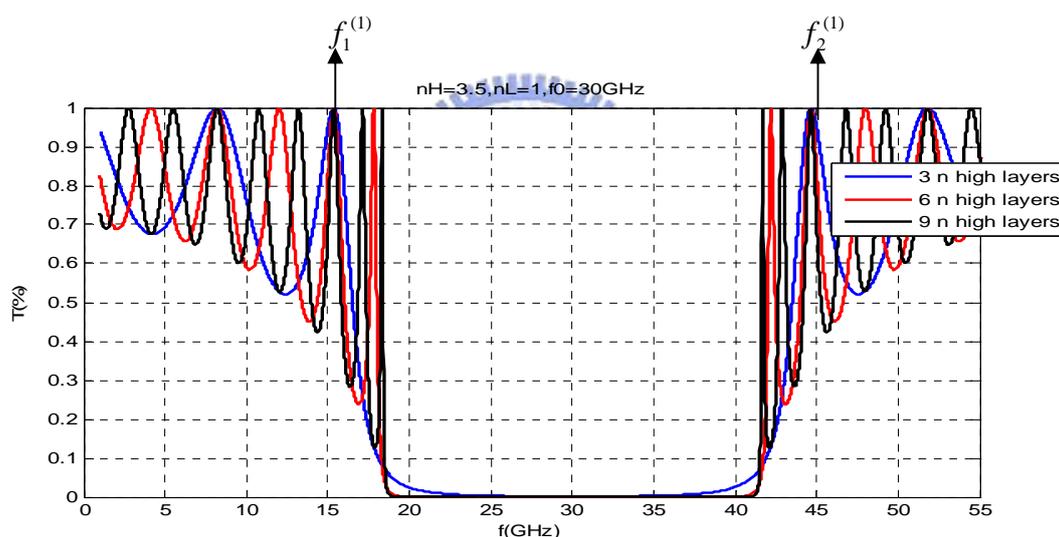


圖(3.11)輸入頻率為 $f_1^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}$ 時的總相位差和折射率比的關係(n_L 皆為 1)

經由上述的討論可以知道禁帶外的穿透峰值所對應的頻率，有穿透率固定及相位差固定的特性，滿足我們設計波束掃描的前提。除此結構之外，當高低折射率層週期變化為三的倍數或是四的倍數是不是也有以上的特性，或是有什麼相異的地方，這就是我們接下來要探討的部份。

3-1.2 高低折射率層週期為 3 的倍數的穿透峰值與相位特性

結構如圖(3.2)所示，假設 $n_H=3.5$ ， $n_L=1$ ， $f_0=30\text{GHz}$ ，用 TMM 法計算平面波通過光子晶體後穿透率的頻譜圖，如圖(3.12)所示。



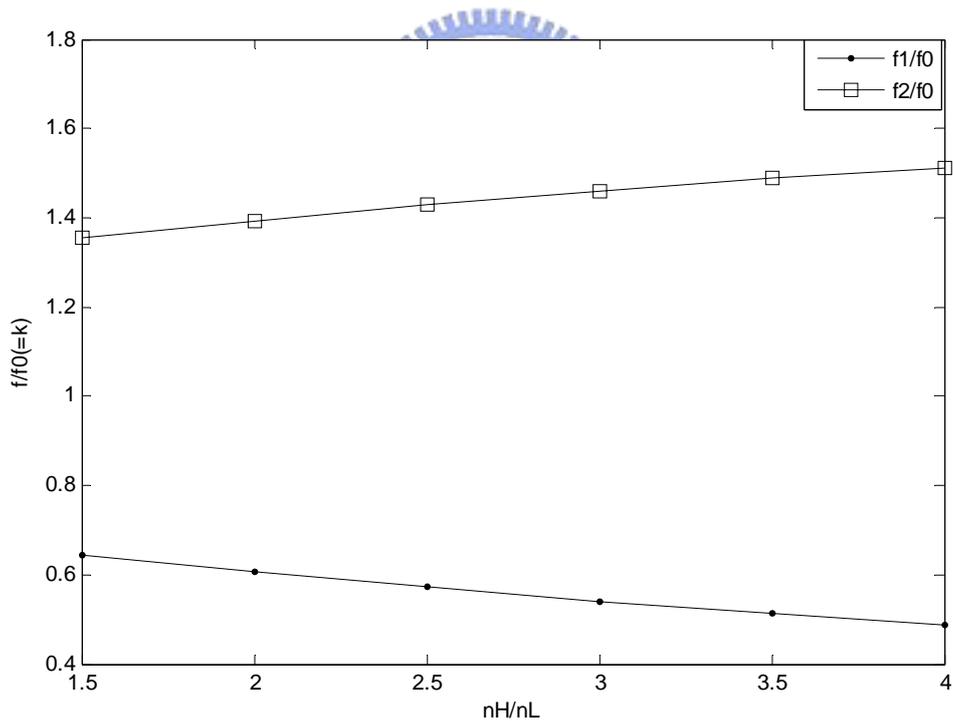
圖(3.12) $n_H=3.5$ ， $n_L=1$ ， $f_0=30\text{GHz}$ 的穿透率圖

按照 3-1.1 的研究我們先看 $f_1^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}$ 與帶隙中心頻率 f_0 的關係，以表(3.4)表示。

$f_0(\text{GHz})$	13.33	25	30	40
$f_1^{(1)}/f_0$	0.51	0.5	0.51	0.51
$f_2^{(1)}/f_0$	1.49	1.49	1.49	1.49

表(3.4) 帶隙中心頻率 f_0 與 $f_1^{(1)}$ & $f_2^{(1)}$ 之關係列表

從表(3.3)我們可知在折射率比固定的情況下， $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)} / f_0^{(1)}$ 的比值維持固定且相加等於 2，這是因為對稱性的關係。跟 3-1.1 高低折射率週期為 2 的倍數的性質一樣，同理我們可以猜測在高低折射率比改變的時候此兩比值也會改變，以圖(3.13)表示之。從圖(3.13)可以發現 $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 隨著折射率比增加而減少，而 $f_2^{(1)} / f_0^{(1)}$ 相反，因為相加恆為 2。原因是因為當折射率比越大的時候禁帶越寬，會往兩邊擴張。與結構週期為 2 的倍數相比，在相同折射率比的情況下， $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 的比值以週期為 3 的倍數的結構較大，相對來說 $f_2^{(1)} / f_0^{(1)}$ 的比值就會較小。



圖(3.13)週期為 3 的倍數的光子晶體 $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)} / f_0^{(1)}$ 與 n_H / n_L 的關係

接下來看在其他高禁帶穿透峰值所對應到的頻率點，可以整理出同(3.1.1)的式子：

$$f_1^{(n)} = 2(n-1)f_0^{(1)} + kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_1^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} - \Delta f \quad n=1,2,3\dots \quad (3.1.6)$$

其中 k 是在不同折射率比下的 $f_1^{(1)} / f_0^{(1)}$ 的比值，而 $f_2^{(n)}$ 可以寫成(3.1.7)式：

$$f_2^{(n)} = 2nf_0^{(1)} - kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_2^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} + \Delta f \quad n=1, 2, 3\dots \quad (3.1.7)$$

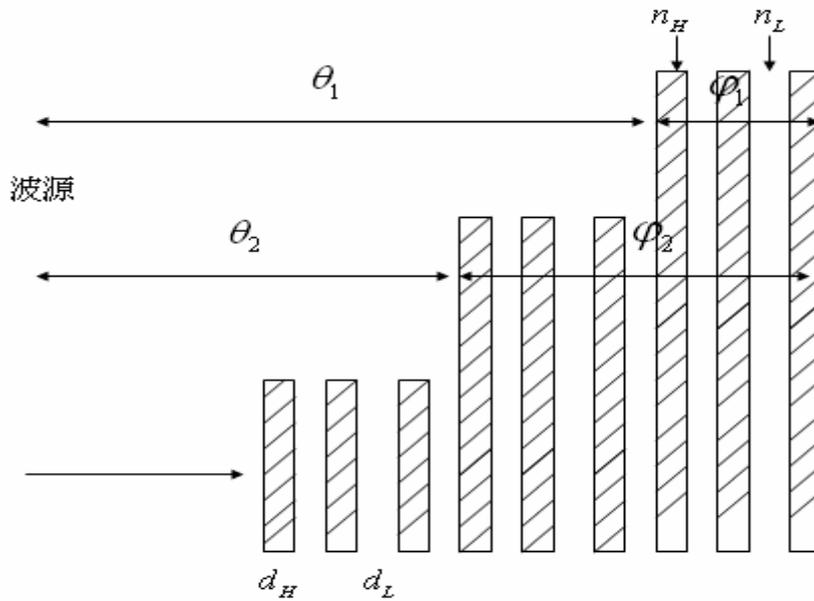
在禁帶旁穿透率極值的頻率點已經可以預測了，但這些頻率點的穿透相位會與

3-1.1 的相位有一樣的性質嗎？現在我們來觀察在此結構下的相位特性。以圖

(3.14)做說明。相位差等於空氣中的相位和光子晶體中的相位相減得來，以式

(3.1.8)表示。

$$\zeta = -(\varphi_2 - \varphi_1) + (\theta_1 - \theta_2) \quad (3.1.8)$$



圖(3.14)相位表示說明圖

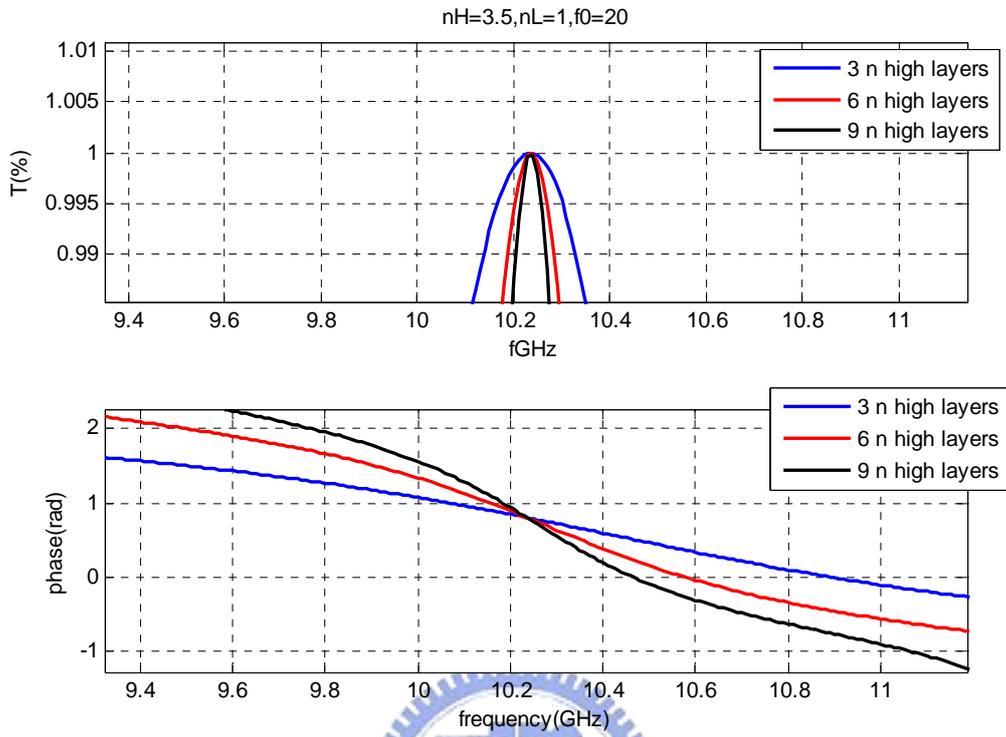
我們先看光通過光子晶體內的相位差($\varphi_2 - \varphi_1$)，以 $n_H=3.5$ ， $n_L=1$ ， $f_0=20\text{GHz}$ 為

例，此時 $f_1^{(1)}=0.512f_0=10.24\text{GHz}$ ， $f_2^{(1)}=1.488f_0=29.76\text{GHz}$ ，以圖(3.15)和圖(3.16)

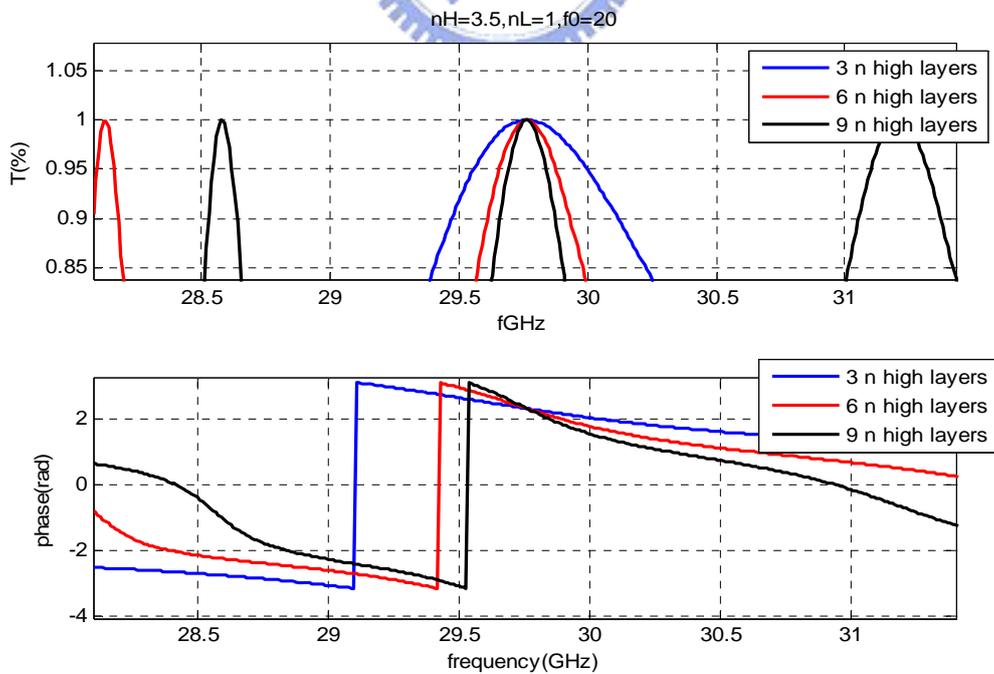
來表示這兩個頻率的相位，從圖我們可以發現波以此兩頻率通過結構時所造成的

相差為 0，或是 2π 的整數倍，如此一來在考慮相位差時就可以不用考慮 $\varphi_2 - \varphi_1$ 的

影響，只要把光通過空氣中的相位差計算出來即可。



圖(3.15) $f_1^{(1)}=12.24\text{GHz}$ 的相位圖



圖(3.16) $f_2^{(1)}=29.76\text{GHz}$ 的相位圖

所以(3.1.8)式就可以寫成：

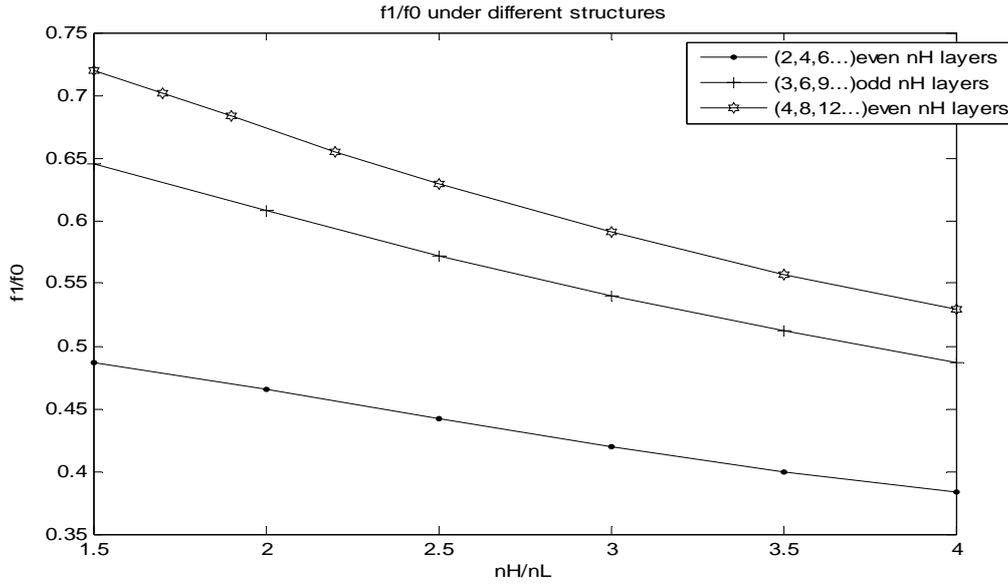
$$\begin{aligned}\zeta &= \theta_1 - \theta_2 \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda_0}{4n_H} + \frac{\lambda_0}{4n_L} \right) * 3 \\ &= \left(\frac{f}{f_0} \right) \left(\frac{1}{4n_H} + \frac{1}{4n_L} \right) * 6\pi\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

透過以上的分析我們知道與週期為 2 的倍數相比，低頻部份(f_1/f_0)週期為 3 的倍數的比值較大，而高頻部分(f_2/f_0)則較小，以相位差來說，在週期為 2 的倍數的結構光通過光子晶體的相位差為 π ，而通過週期為 3 的倍數的結構相位差則為零，這是差別最大的地方。利用不同結構上所產生的相位差改變可以讓波束方向做大角度的變化，由(2.1.17)式和圖(2.3)可以知道在相同入射頻率和高低折射率層長短一樣的情況下，相位差 ζ 越大波束會偏轉的越明顯，所以可以利用結構來造成不同的相位差，這在後面章節會詳細說明。現在我們來看高低折射率層週期變化為 4 的倍數的特性並將之與前兩種結構做統整。



3-1.3 高低折射率層週期為 4 的倍數的穿透峰值與相位特性

我們已經知道在禁帶外的穿透峰值所對應的頻率是不會隨著規律層數的變化而改變，且在固定折射率時與帶隙中心頻率 f_0 的比值維持定值，所以直接觀察隨折射率變化的情況，首先要看 $f_1^{(1)}/f_0$ 在不同折射率比的變化並與前兩種結構做比較，以圖(3.17)表示。



圖(3.17)在不同結構下 $f_1^{(1)}/f_0$ 隨折射率 (n_H/n_L) 變化的關係圖

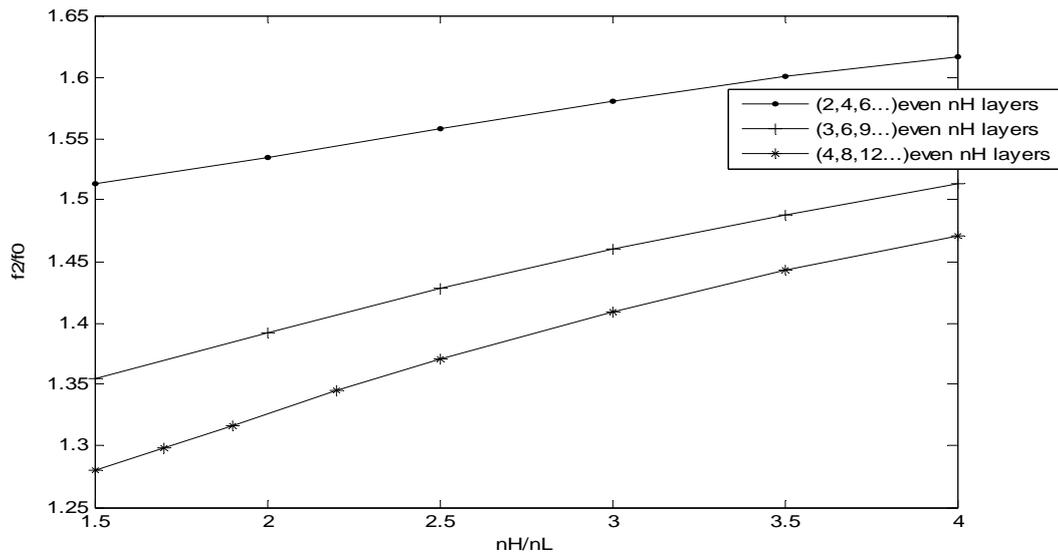
我們發現共通的現象就是隨著 n_H/n_L 的比值越大， $f_1^{(1)}/f_0$ 的比值越小，原因是因為折射率比越大禁帶越寬所以 $f_1^{(1)}$ 越往左移造成比值變小；另一方面，在固定折射率比的情況下，層數週期變化的越多比值會越大，原因是因為週期層數變化越多 $f_1^{(1)}/f_0$ 會越接近禁帶邊緣，按照這個特性可以猜測若是使用週期結構變化為五的倍數的情況下， $f_1^{(1)}/f_0$ 的比值會更高。同理可知 $f_2^{(1)}/f_0$ 也會接近禁帶邊緣，隨著週期層數變化增加而變小，以圖(3.18)表示。

在高禁帶的情形關係式與(3.1.6)和(3.1.7)一樣，只是比例常數不同：

$$f_1^{(n)} = 2(n-1)f_0^{(1)} + kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_1^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} - \Delta f \quad n=1,2,3\dots \quad (3.1.10)$$

$$f_2^{(n)} = 2nf_0^{(1)} - kf_0^{(1)} \quad \text{或} \quad f_2^{(n)} = (2n-1)f_0^{(1)} + \Delta f \quad n=1,2,3\dots \quad (3.1.11)$$

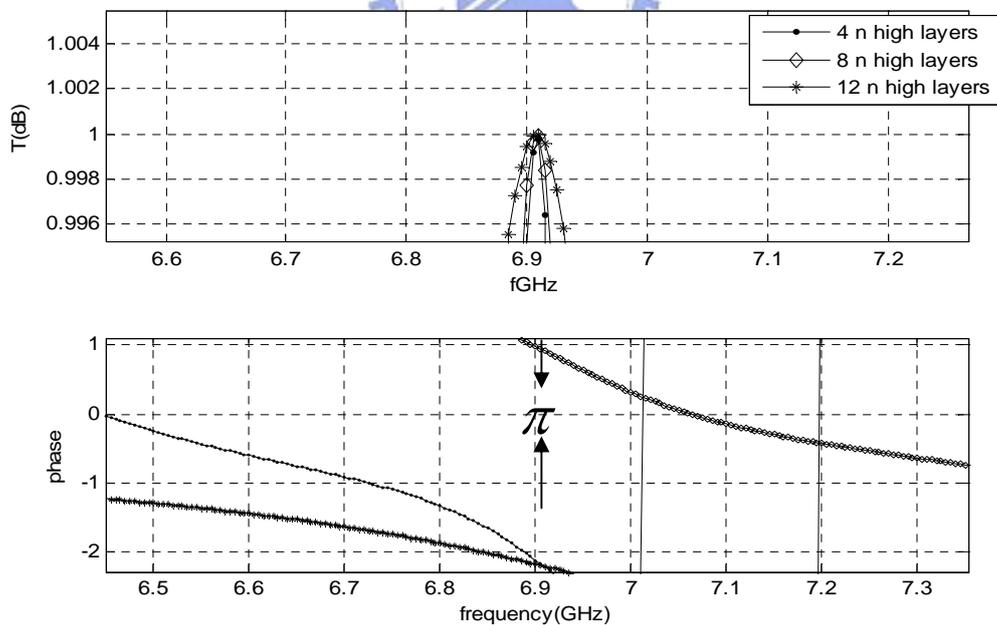
k 為在不同折射率比的情況下所對應到的常數。



圖(3.18) $f_2^{(1)}/f_0$ 在不同結構下與 n_H/n_L 的變化關係圖

接下來看相位的變化，以 $n_H=3$ 、 $n_L=1$ 、 $f_0=11.7\text{GHz}$ 為例， $f_1^{(1)} = 0.591f_0 = 6.91\text{GHz}$

用 TMM 觀察此頻率在通過不同週期的光子晶體相位圖，以圖(3.19)說明。



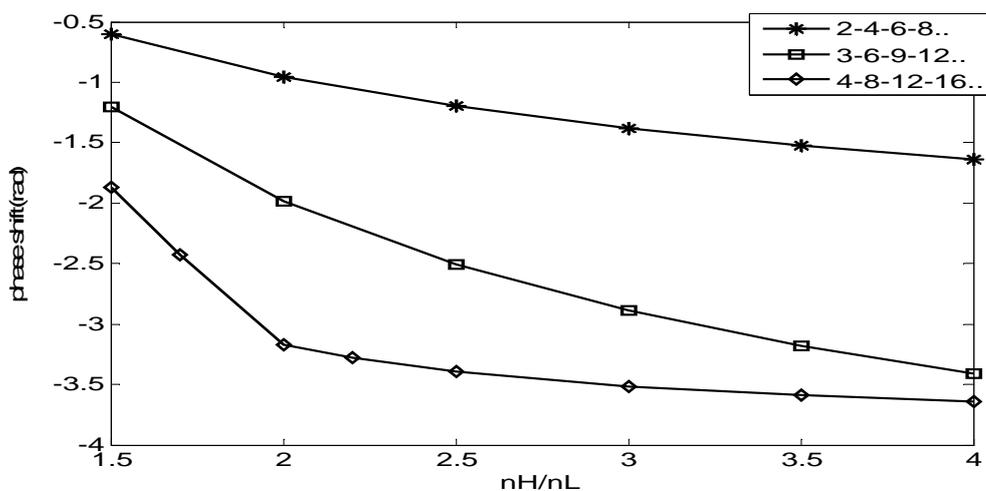
圖(3.19) $f_1^{(1)} = 0.591f_0 = 6.91\text{GHz}$ 在不同週期層數下的相位關係圖

波在光子晶體內的相位差為 π ，與週期變化為 2 的倍數特性一樣，所以總相位差

ζ 就要考慮空氣相差和光子晶體內的相位差：

$$\begin{aligned}\zeta &= -(\varphi_2 - \varphi_1) + (\theta_1 - \theta_2) \\ &= -\pi + \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda_0}{4n_H} + \frac{\lambda_0}{4n_L} \right) * 4 \\ &= -\pi + \left(\frac{f}{f_0} \right) \left(\frac{1}{4n_H} + \frac{1}{4n_L} \right) * 8\pi\end{aligned}\quad (3.1.12)$$

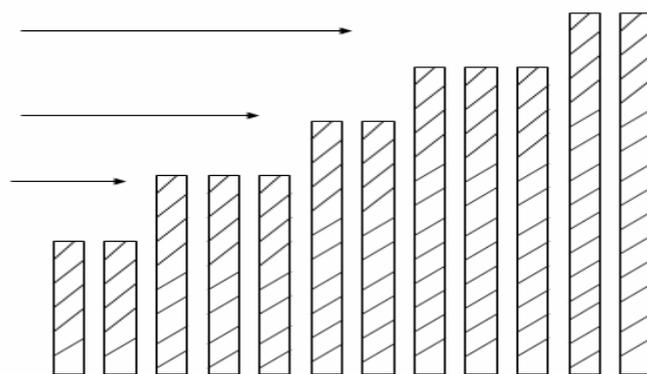
所以我們可以知道在週期變化為 2 的倍數的情況下， $f_1^{(1)}$ 和 $f_2^{(1)}$ 通過光子晶體內的相位差為 π ，在週期變化為 3 的倍數的情況沒有相位差，或是 2π 的整數倍。透過圖(3.20)來觀察波通過此三種結構的總相位差 ζ ，不管是哪種結構皆可以透過改變折射率來調變相位差，這可以用來做小角度調變，不過缺點是當改變 n_H/n_L 的比值時， f_1/f_0 的比值就會改變，那對於同一個入射頻率(f_1)的波而言， f_0 就要跟著改變，若仍要保持原有之 f_1 ，則結構厚度也會因此跟著變。所以想要透過改變折射率比來調變波束方向實用性就大大降低。在折射率固定的情況下，三種結構彼此之間的相位差差異性很大，所以可以利用不同結構來達到大角度的波束方向調變。



圖(3.20)不同週期結構下相位差對折射率的關係圖

以上是高低折射率週期變化分別為 2、3、4 的倍數的討論，經由這些討論我們可以歸納出一些通則，首先就是當變化週期越大， $f_1^{(1)}/f_0$ 和 $f_2^{(1)}/f_0$ 會越靠近帶隙中心頻率，所以 $f_1^{(1)}/f_0$ 會越大，而 $f_2^{(1)}/f_0$ 比值會越小。在波通過光子晶體所產生的相位差方面，層數週期為 2、4、6 的倍數時，相位差為 π ，而層數週期為 3、5、7 的倍數時，相位差為 2π 的整數倍。

現在我們來做一些延伸探討當高低折射率層數變化為 1-2-3... 的時候，同樣有穿透率峰值不隨層數增加而改變的現象出現，不過此穿透頻率是位於兩個禁帶帶隙的中間，以第一帶隙和第二帶隙中間的頻率來說，此頻率與 $f_0^{(1)}$ 的比值恆為 2，且不隨折射率變化而變化，在相位差方面，在固定的折射率下維持一個定值，會隨著折射率比改變而改變，以高低折射率比從 1.5 變化到 4 來說，相位差的變化介於周期層數變化為 2 的倍數和 3 的倍數之間，所以這樣的週期變化也是可以拿來做波束掃描的結構。接下來我們再對高低折射率層數變化為 2-5-7-10-12 的結構來研究，如圖(3.21)所示。



圖(3.21)高低折射率層數為 2-5-7-10-12 的結構圖

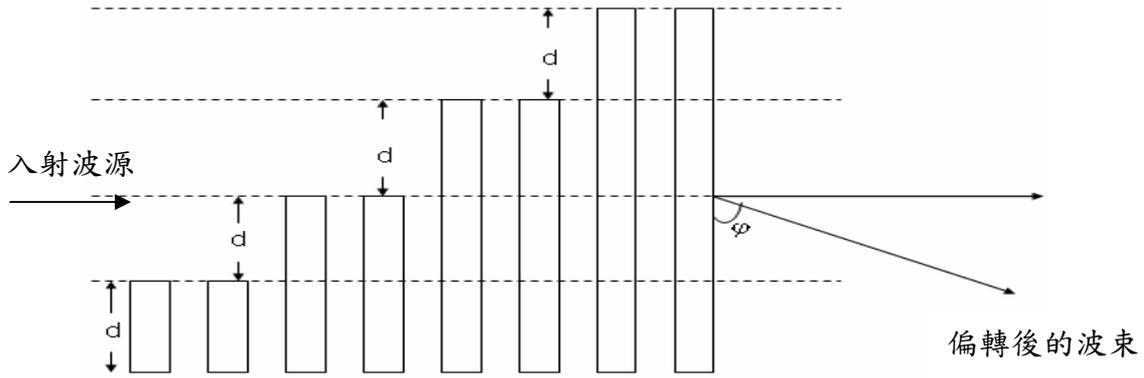
這樣的結構既不是偶數倍變化也不是奇數倍變化，而是以每次依序增加兩個週期和三個週期的規律性變化，這樣的結構在穿透率上仍然有不隨層數變化的極值出

現，不過在相位差方面卻無法滿足波通過不同層數的結構仍然可維持等相位差的特性，所以不能應用在我們的波束掃描結構上。

對於不同結構下的穿透頻率特性和相位關係有了了解以後，接下來要開始設計波束掃描結構，首先會先利用結構的不同達到角度的變動，再透過調整 d 值來達到小角度調變。

3-2 大角度變動主束方向

根據天線公式 $\cos \varphi = -\zeta / \beta d$ ，其中 φ 為出射角， ζ 為相位差， β 為波數， d 為波數(參照圖(2.1))，對同一頻率的波而言可以透過改變 d 值和 ζ 值來做調變，現在利用不同的結構分別是高低折射率週期變化分別為 2 的倍數層、3 的倍數層和 4 的倍數層來造成 ζ 值的不同(參照圖(3.20))藉以改變波束的出射方向達到大角度的變動。在進行大角度變動前，我們先來檢驗光子晶體結構與天線理論的吻合度，也就是對歸一化陣列因式(2.1.11)的比較。晶體以週期變化為 2 的倍數層為例，波通過兩、四、六個週期的結構時彷彿形成了三個彼此之間有相等相位差，但振幅相等的波源，選取不同週期層數之間的時間隔為 d ，相當於是波源間距，角度的調變以整體結構中心點為參考點，以圖(3.22)表示之。



圖(3.22)結構示意圖(此為週期變化為 2 的倍數的晶體結構圖，最高到八層)

假設折射率 $n_H=3$ ， $n_L=1$ ，我們以頻率 5.6GHz 為入射波源，高低折射率層為 5 週期，共有 10 層，設定 d 值為 3cm，根據前面的研究可知

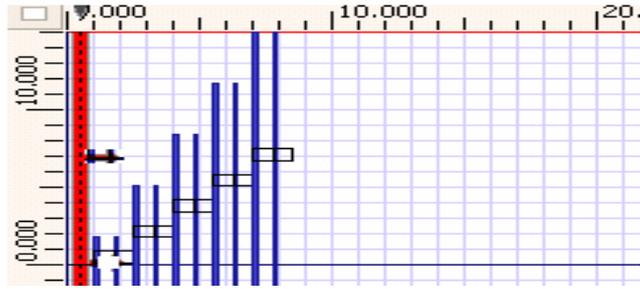
$f_1^{(1)} = 5.6GHz = 0.42f_0 \Rightarrow f_0 = 13.33GHz$ ，因此此結構的厚度就可決定出來，此時

$$d_H = \frac{\lambda_0}{4n_H} = \frac{c}{4n_H f_0} \quad (c \text{ 為光速}) = 0.19cm, \quad d_L = \frac{\lambda_0}{4n_L} = \frac{c}{4n_L f_0} = 0.56cm, \quad \text{我們}$$

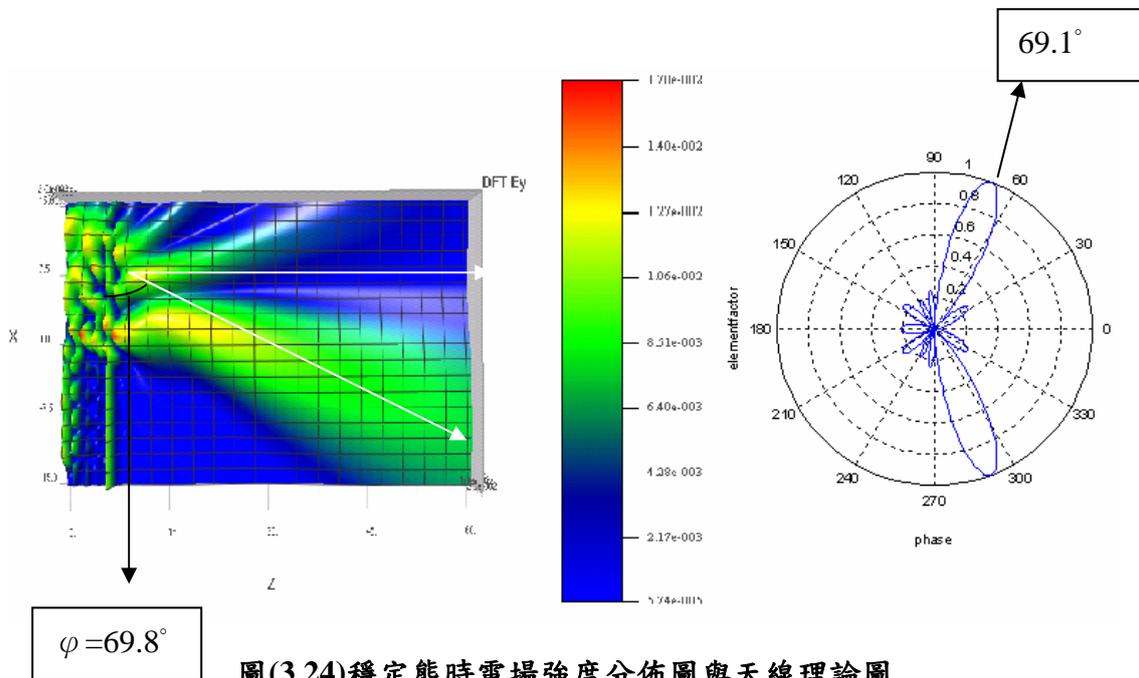
使用 FDTD 法來模擬結果跟天線理論做比較，模擬時輸入波源為 TE 波(電場垂直入射平面)，因為此軟體長度是以 μm 為單位，所以模擬時將比例縮小為 μm ，也就是 d_H 由 0.19cm 變為 0.19 μm ， d_L 由 0.56cm 變為 0.56 μm ，格子點設定為

0.01 μm *0.01 μm ，跑 60000 次，因為有 5 個週期，每一週期結構相當於一個波源，所以高折射率層最長為 5*d=15cm，最短為 1*d=1cm。圖(3.23)是結構圖，圖(3.24)

是模擬結果和天線理論的比較。理論出射角為 69.1°，而由 FDTD 圖判斷所得結果為 69.8°，此角度的判斷方法是取遠場幾個強度最大的點然後將這些點連線到光子晶體與原出射方向做比較得到的結果。符合理論預測結果。此後我們可以用天線理論圖來直接判斷波束的變化趨勢。而角度的誤差是來自於此結構並非點波源，而從遠場來看是近似點波源，所以會有些許誤差，此外邊緣繞射效應也會影響模擬結果。



圖(3.23)FDTD 結構示意圖(藍色部份為高折射率層，白色部份為空氣層，紅色為入射波)

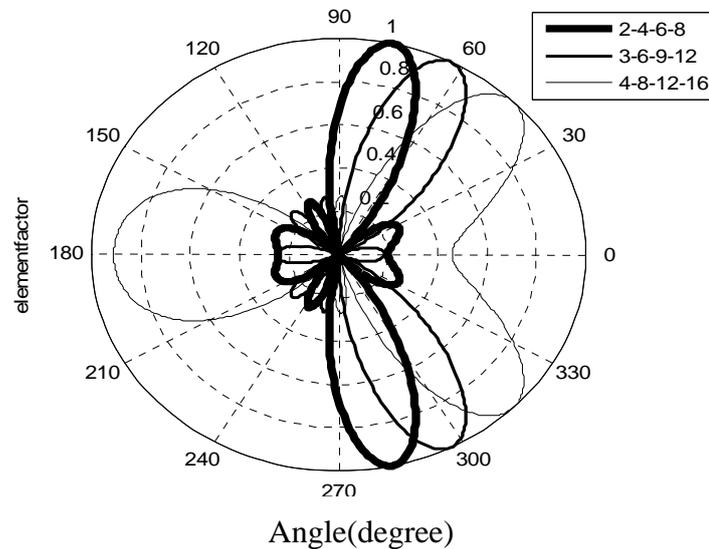


圖(3.24)穩定態時電場強度分佈圖與天線理論圖

現在我們使用第一禁帶左側的頻率點，也就是令 $f_1^{(1)} = 5.5\text{GHz}$ 的情況下，在 d 值等於 3cm 下於不同的結構所造成的波束出射角的比較，以表(3.5)說明之，並附上 FDTD 所對應到之波束角。表中的” 2-4-6-8” 表示高低折射率層共有 4 週期，第一週期有兩層，第二週期有四層，以此類推。將表(3.5)的條件代入天線理論程式中可得圖(3.25)。圖(3.25)為歸一化波束電場強度分佈圖(以第一象限 $0\sim 90^\circ$ 為主)。

$n_H=1.7, n_L=1, f=5.5\text{GHz}, d=3\text{cm}$			
高折射率層	2-4-6-8	3-6-9-12	4-8-12-16
$f_0(\text{GHz})$	11.5	8.73	7.83
相位差 ζ (徑度)	-0.76	-1.57	-2.44
波束角(φ)	77.3°	63°	45.1°
FDTD 對照	77.9°	63.8°	44.5°

表(3.5)不同結構下的波束角度表



圖(3.25)波束在不同結構下的電場強度歸一化分佈圖

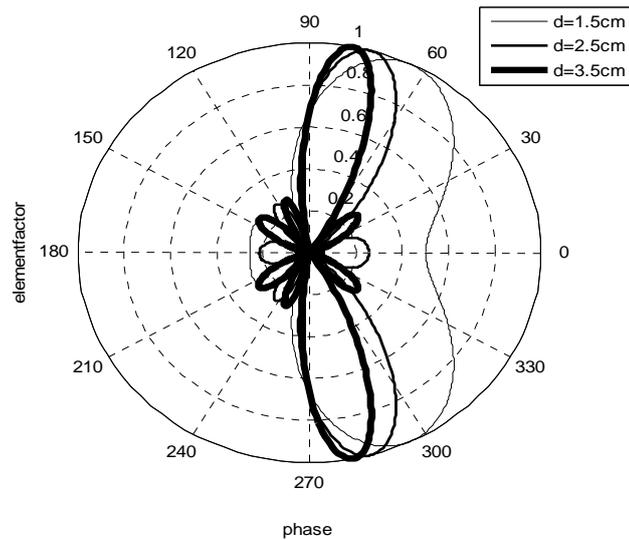
我們透過不同結構，造成不同的相位差讓頻率為 5.5GHz 的波束產生大角度的變化，從(2-4-6-8)的結構到(3-6-9-12)的結構，波束變化了 14 度左右，從(3-6-9-12)到(4-8-12-16)的結構，波束變化了 18 度左右。若將結構變化層數往上提升，比如說(5-10-15-20)，則角度可以繼續變化下去。此外，在不同的結構下 $f_1^{(1)}/f_0$ 的比值不一樣(參考圖(3.20))，因此對同一入射頻率 $f_1^{(1)}$ 的波而言，要使用到不同的帶隙中心頻率 f_0 致使結構厚度會不一樣。與[5]文獻做比較，他們是利用相同的概

念，只是以光子晶體當底板(ground plane)，鋪上微帶線(microstrip line)，透過將底板挖洞形成光子晶體結構使得微帶線上的訊號通過不同層數的光子晶體造成相位差，他們從沒挖洞，也就是沒有光子晶體結構，到形成週期為 4 的倍數的結構共 4 個週期(0-4-8-12)，波束調變了 24 度，而我們的設計從沒有光子晶體到週期為 4 的倍數也是 4 個週期(4-8-12-16)波束從 90 度變化到 45.1 度，總共產生了大約 45 度的變化，所以我們利用這樣的結構變化所產生的角度調變是比上述現象更明顯，如果我們將波通過週期層數變化為五的倍數的結構可讓波偏轉 59 度。所以透過層數的改變是可以達到大角度的調變波束方向。以上是針對在固定 d 值但是改變結構造成相位差進而調變波束方向的討論。接下來我們來探討在固定結構下調整 d 值對波束做小角度的調變。



3-3 小角度變動主束方向

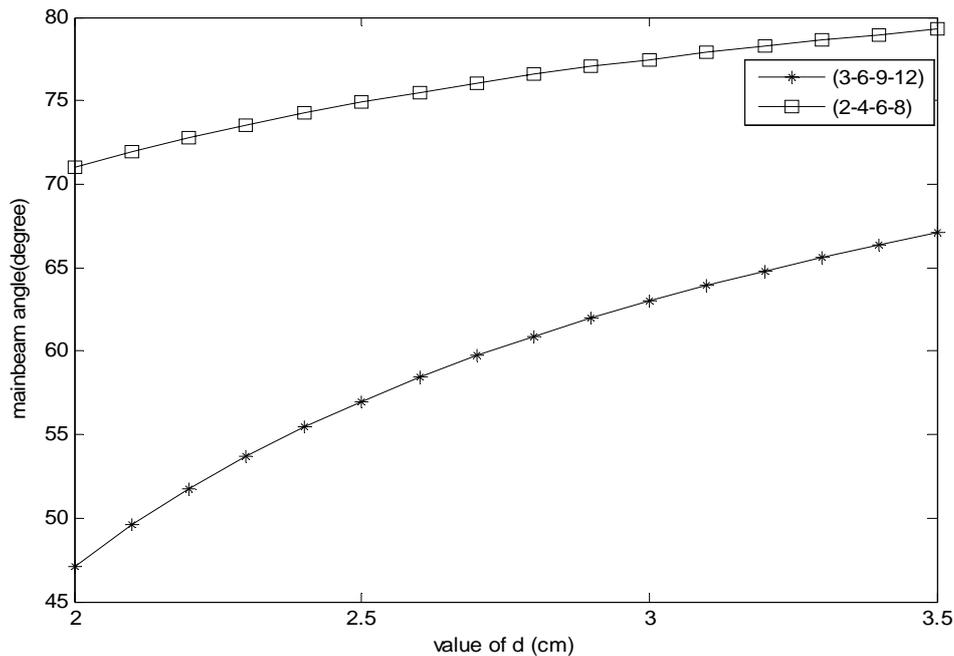
根據天線公式 $\cos \varphi = -\zeta / \beta d$ ，在固定的入射波前提下 $\cos \varphi \propto \frac{\zeta}{d}$ ，而從圖(2.2)可以看出 d 值與波長的比值越小，越容易調變波束方向，但是此時會產生另外一個問題，那就是波束寬的問題，因為從(2.1.15)式的討論可以知道波束寬會跟 $\frac{\lambda}{Nd}$ 的比值有關，當 d 值越小時波束會越寬，因為會產生繞射效應。在週期變化為 2 的倍數的情況下共 4 個週期，也就是結構為(2-4-6-8)，以 $n_H = 1.7$ ， $n_L = 1$ ，入射頻率 $f_1^{(1)} = 5.5\text{GHz} = 0.478 f_0^{(1)} \Rightarrow f_0^{(1)} = 11.5\text{GHz}$ 為例，把 d 值從 1.5cm 每隔 1cm 調變一次到 3.5cm，波束的變化以圖(3.26)表示。



圖(3.26)週期變化為2的倍數共4個週期(2-4-6-8)的光子晶體在 $d=1.5\sim 3.5\text{cm}$ 波束的電場強度歸一化分布圖($n_H=1.7$, $n_L=1$, $f_1=5.5\text{GHz}$)

在 d 值為 1.5cm 時波束散開比較嚴重，若以半功率寬為標準，也就是取 -3dB 間的角度寬為標準，在電場強度中取強度等於最大強度的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (0.707)倍之間的角度寬。則此時的半高寬角度為 58 度，但是在 d 值等於 3.5cm 時的半高寬角度僅為 21 度左右，所以 d 值對於束寬影響很大。如果要在不使波散開的太嚴重的情況下達到調變的目的可以透過兩個方法，第一是增加週期數目，相當於增加波源數量(N)的意思，第二個方法是將 ζ 值增大，由圖(2.3)可知。不過以上都是以點波源來對波束寬做說明，實際上我們的結構是有限長度的波源，所以波束寬會比較窄，但是變化的趨勢還是可以透過天線點波源的理論來做判斷。

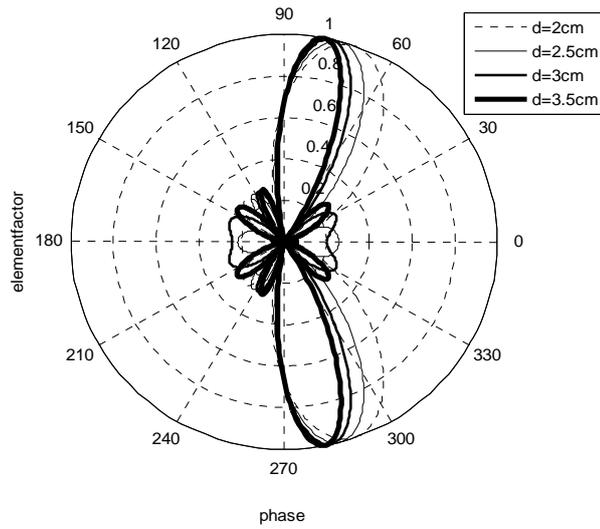
我們以上節前兩個結構為例，參數設定不變($n_H=1.7, n_L=1, f_1=5.5\text{GHz}$)，但是將 d 值從 2cm 調動到 3.5cm ，觀察波束的變化情形，以圖(3.27)做說明。



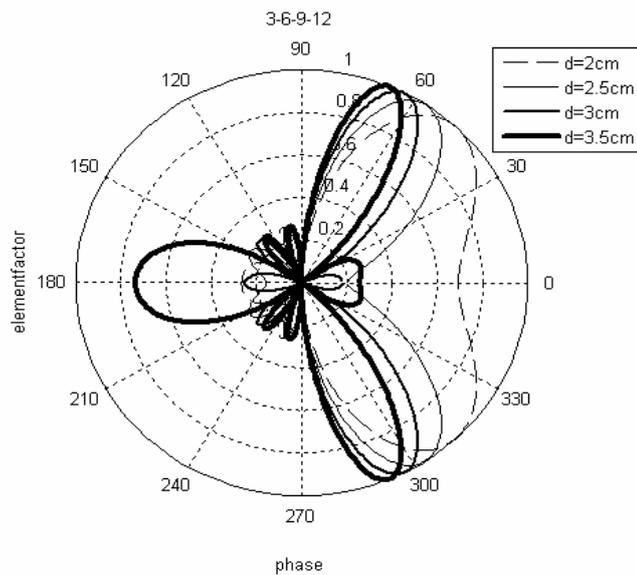
圖(3.27) 在週期變化為 2 的倍數和 3 的倍數共 4 個週期下於不同 d 值所對應的波

束方向角關係圖

觀察圖(3.27)可以發現在 d 值變越大時可調變角度會越小，但是此兩種結構在一樣的 d 值變化下(3-6-9-12)的結構可以調變的範圍較大，原因是因為此結構的相位差透過(3.1.9)式可得 $\zeta = -1.57(\text{徑度}) = -90^\circ$ 而(2-4-6-8)的結構的相差透過(3.1.5)式可得 $\zeta = -0.76(\text{徑度}) = -43.5^\circ$ ，所以前者可產生較大的相位差讓波束變化較明顯，另一方面，在調整 d 值的時候波束寬會隨著 d 值減少而增加，以前者變化較為明顯，以圖(3.28)做比較。在[5]文獻中是透過改變層數週期變化來做小角度變化，本論文是利用在不改變結構週期的前提下，經由改變高低折射率層的大小來對波束做微調，可視所須要的精準度選擇結構進行微調，若要使調變的範圍變大，就要增加結構的週期變化。此種設計的優點是可以達到連續性微調，只要調整高低折射率層大小即可進行調變。

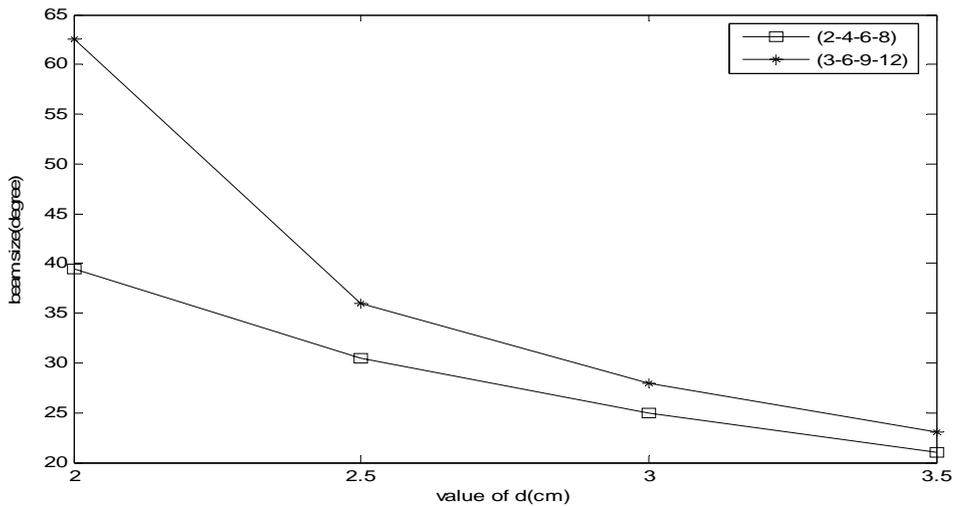


圖(3.28 上)週期變化為 2-4-6-8 的波束電場強度歸一化變化圖



圖(3.28 下) 週期變化為 3-6-9-12 的波束電場強度歸一化變化圖

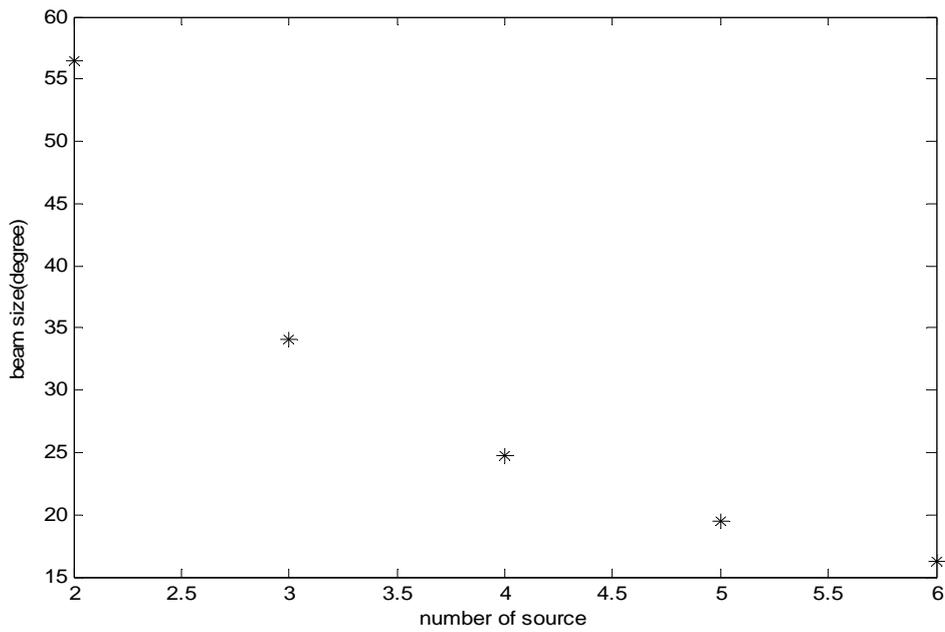
從圖(3.28)可看出週期變化為 3-6-9-12 的結構波束寬增加的現象比週期變化為 2-4-6-8 明顯，因為相位差也是會影響波束的寬度。將此兩個結構的波束半高寬與 d 值的變化以圖(3.29)做整理，相位差越大波束將會越寬，所以可以預測在 4-8-12-16 的結構雖然用一樣的 d 值可以獲得更大的調變角度，但是當 d 值變小時波束的寬度會變化的更明顯。



圖(3.29)光子晶體結構週期變化分別為 2、3 的倍數共 4 個週期的波束半高寬角與 d 值的關係圖

在變化 d 值的探討中，我們知道 d 值的改變會影響波束方向，但是 d 值變越大時波束的變化會越小(參照圖(3.27))，但是波束會越集中(參照圖(3.29))，反之 d 值變小波束變化會越大，但是伴隨著波束寬也會越大。

若要減少束寬，可以透過增加結構週期層數，比如說在高低折射率變化週期為 2 的倍數的情況下，3 個週期(結構為 2-4-6)會比 4 個週期(結構為 2-4-6-8)來的寬，以天線理論來看當週期數變多時相當於是增加波源數量，以 $n_H = 1.7, n_L = 1$ 為例，相位差 $\zeta = -0.76$ (徑度)，高低折射率層長短間隔為 3cm(d 值)，將 d 值與相位差代入天線理論公式去計算波束半高寬和波源數量的關係可得圖(3.30)，所以我們可以知道增加層數可以將波束集中，但是隨著波源數量增加的越多，半高寬減少的越不明顯。



圖(3.30)在變化週期為 2 的倍數下($n_H = 1.7, n_L = 1, d = 3\text{cm}$)，週期數量和波束半高

寬的關係

以上我們討論了當高低折射率週期變化為 2、3、4 的倍數時光子晶體禁帶外的穿透現象和相位特性，利用結構的不同造成大的相位差達到大角度調變波束方向。

對於同一結構而言，透過調整間距(d 值)可做到小角度調變。為了驗證我們的理論，將於下章節以微波實驗與理論結果做比較。

第四章 實驗量測與結果討論

前言：

我們借助學長提供的儀器來做量測的工作，所使用的方法叫做拱橋測量法(arch test)，將會於 4.1 節作詳細的說明。因為我們在計算光子晶體的禁帶時都是假設為平面波入射至一無限大的光子晶體上，所以在實際量測時必須要滿足遠場條件(即樣品中心與邊緣相位差 $< \lambda/16$ ，即 $R > 2D^2/\lambda$ ，D 為待測物最大的尺寸，R 為電磁波發射源到待測物的距離)，這樣就可視為近似平面波入射；此外為避免量測時有多餘的反射波，所以在發射與接收系統中間放置吸波材料，於中心挖出適當的孔洞讓波通過，使得量測更為精準。現在將儀器架設與量測方法分述如下：

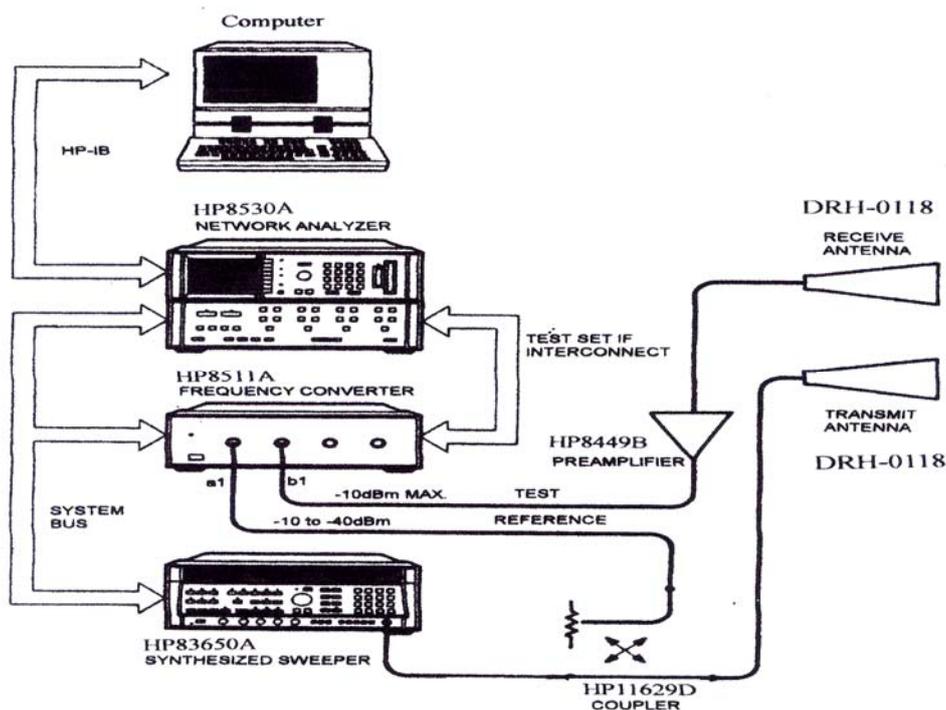
4-1 儀器設置及架設

量測系統之儀器架設相關方塊示意圖如圖 4.1 所示，所需儀器及其各項功能分述如下：



- a. 微波源 (Synthesized Sweeper)：其主要功能為提供微波發射來源。
(HP83650A)
- b. 微波頻率轉換器 (Frequency Converter)：其主要功能為提供微波參考信號及降至中頻 (IF) 以利信號分析。(HP8511A)
- c. 微波接收控制儀 (Microwave Receiver)：其主要功能為控制微波發射與接收情形，並使之成為同步信號狀態，並提高系統的靈敏度。
(HP8530A)
- d. 微波前置放大器 (Microwave Preamplifier)：其主要功能為降低雜訊，並放大 S/N 比，並提高系統的靈敏度。(HP8449B)

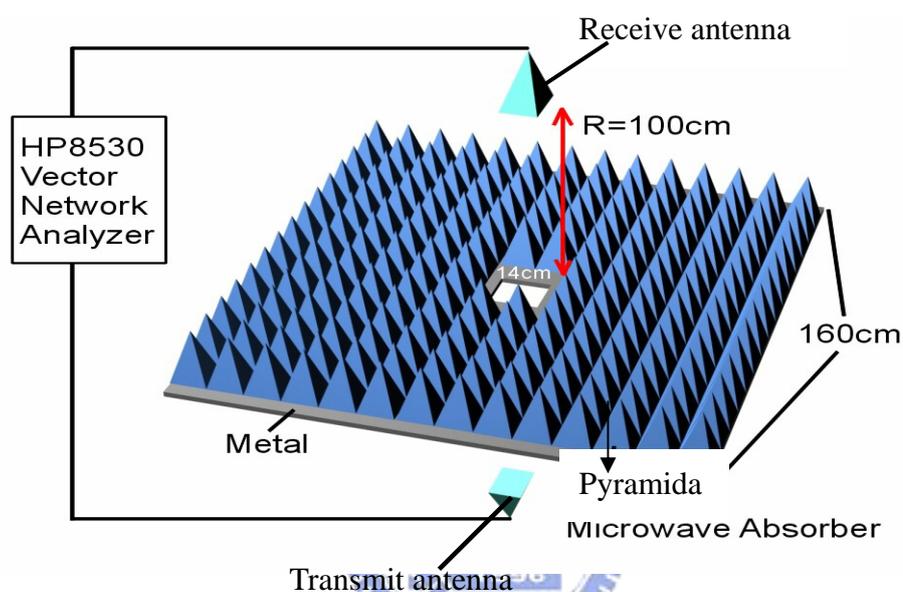
- e. 耦合器 (Coupler): 其主要目的為提供一參考信號 (可調變的), 以利於 S/N 比之改善, 並提高系統的靈敏度。(HP11629D)
- f. 喇叭型天線 (發射與接收): Spectrum Technologies 公司製作之 DRH-0118: 提供一適當之 Beam Width, 而能涵蓋整個待測物時, 其場型變化落差較小。本系統之發射/接收天線之 Beam Width 約為 ± 8 度 (3dB), 故本次待測物均涵蓋在微波場型之 3dB 範圍內。
- g. 測控電腦: 其主要功能為可載入一自動測試軟體、分析軟體及傳輸量測所獲得之數據等功能。



圖(4.1)量測系統之儀器架設相關方塊示意圖

此套系統為自由空間量測系統，是以 HP8530 微波向量網路分析儀為量測中心，可自由調整發射頻率。量測時將微波訊號經由發射源輸入號角型天線輻射至待測空間，再經由同型號之天線接收傳輸信號，再接上一分析儀，分析量測微波通過待測物的穿透強度及相位。為避免有限樣品邊緣繞射的影響，在發射與接收天線

之間放置一塊金屬板，尺寸為 160cm×160cm，在中間位置開一缺口，此開口大小在考慮樣品尺寸、發射/接收天線位置，以滿足平面波入射要求下，須大於 10cm×10cm(入射頻率在 2GHz~18GHz)，且在金屬板上覆蓋五吋角錐型吸波材料以降低金屬板反射效應如圖(4.2)所示。本量測系統的動態量測靈敏度於 2 至 18GHz 可達-50dB。



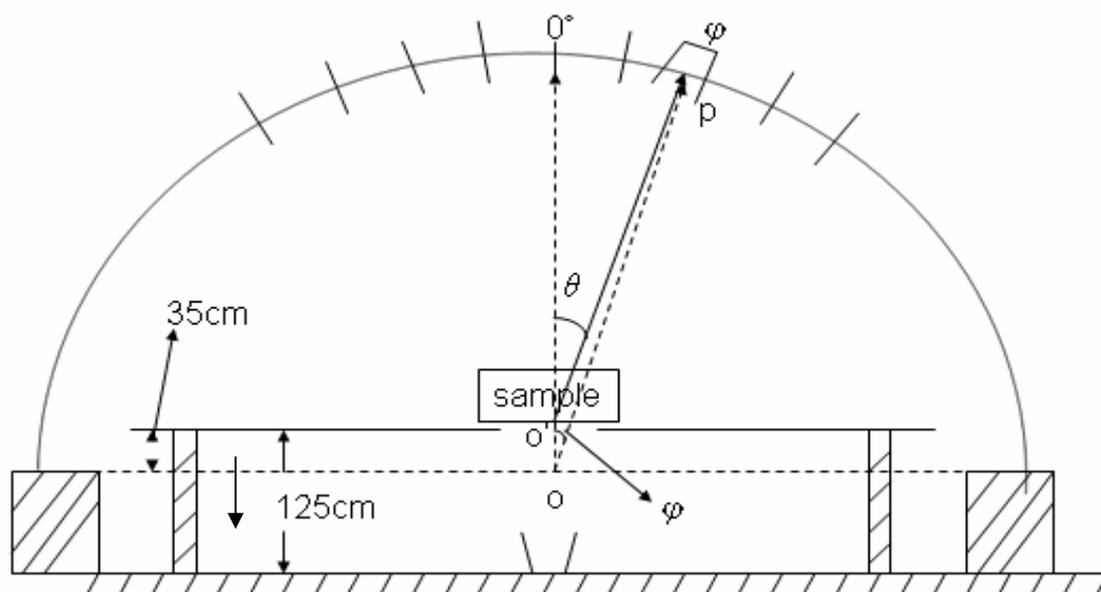
圖(4.2) 微波量測系統基本架設圖

4-2 量測方法

在進行量測工作時，我們是用拱橋量測法(Arch Test)，也就是將接收天線(Receive antenna)裝置在一拱形軌道上，把設計好的光子晶體放在金屬開口上方，為了近似平面波入射，我們將拱型軌道墊高，離發射天線 125cm，透過移動拱型軌道上的接收天線來量測各個角度上的能量強度，架設圖形以圖(4.3)所示。

以 0 點(距光子晶體下方 35cm 處)為零度角，量測所得角度為 φ ，但是我們理論所計算得到的角度是以光子晶體為原點，所以必須將量測角 φ 換算得到 θ ，而軌道半徑(\overline{OP})=200cm，樣品到測量原點($\overline{OO'}$)=35cm，經過簡單的幾何圖形可以得

到 φ 和 θ 的關係。 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{200 \sin \varphi}{200 \cos \varphi - 35}\right)$



圖(4.3)拱橋量測法示意圖

4-3 實驗結果與討論

以下會進行幾個實驗來驗證我們的理論結果，我們都是使用 TE 波為入射波源，量測平面為 E-Plane，用厚度 0.5cm 的壓克力板當作材料進行量測，在頻率介於 3~13.5GHz 壓克力板的折射率大約是 1.7 左右，以此當作是高折射率(n_H)的材料，而低折射率層就為空氣層($n_L=1$)，因為光子晶體是設計在四分之一波長的情況下，所以根據 $d_H = \frac{c}{4n_H f_0}$ ，得到帶隙中心頻率 $f_0=8.82\text{GHz}$ ，而

$d_L = \frac{c}{4n_L f_0} = 0.85\text{cm}$ 。我們從偶數層的結構(2-4-6-8-10)做起，取第一禁帶旁的頻

率點 $f_1^{(1)}$ 當做入射波源，將 $n=1$ 、 $f_0 = 8.82\text{GHz}$ 代入(3.1.1)式計算出

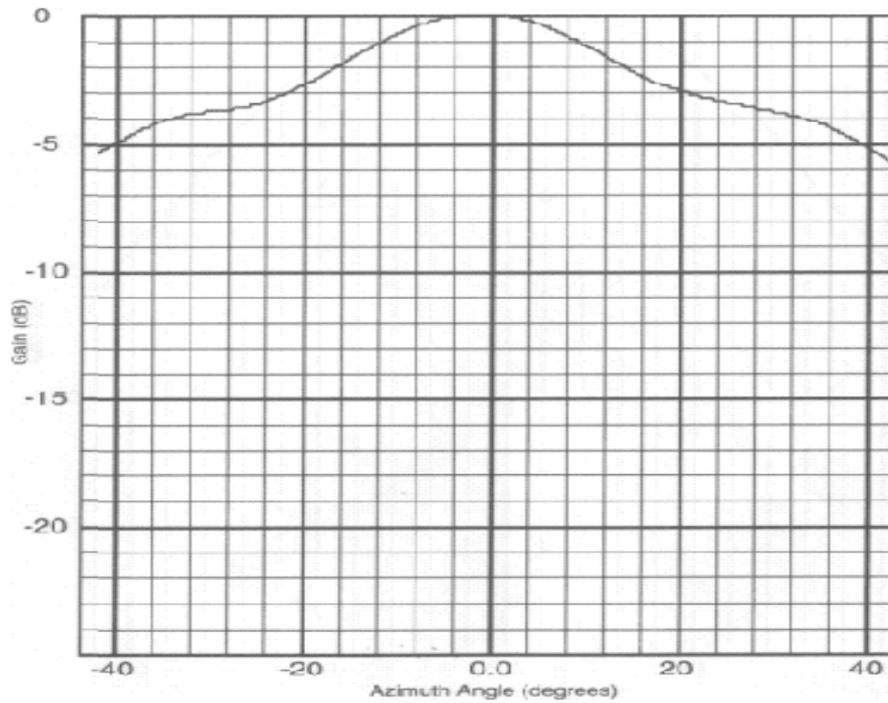
$f_1^{(1)} = 4.22\text{GHz}$ ，然後分別以 $d=2.5\text{cm}$ 、 3cm 、 3.5cm 進行波束量測。為了確保平

面波入射，我們查了此天線在自由空間下於 H-plane(量測平面垂直電場)、

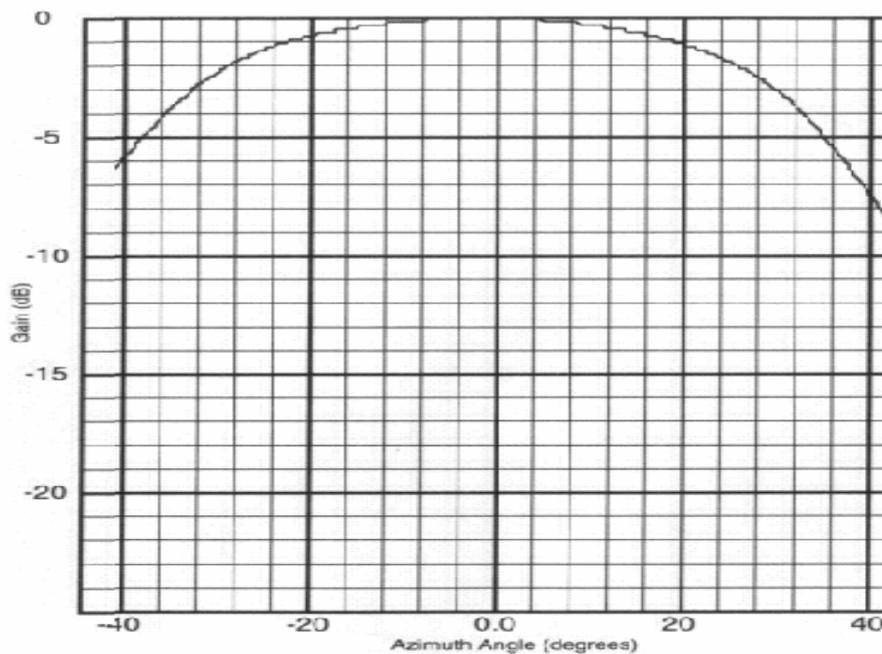
E-plane(量測平面平行電場)的強度與角度的分佈圖，如圖(4.4)、圖(4.5) [18]。我

們的結構板子最大尺寸為 17.5cm，使用頻率為 4.22GHz 波長為 7.1cm，代入

$2D^2/\lambda = 86\text{cm} < 125\text{cm}$ 滿足遠場條件。再來要確定進入光子晶體時為等振幅，所以計算發射源到光子晶體的張角 $\alpha = \tan^{-1}(\frac{17.5}{125}) = 8^\circ$ ，而從圖(4.4)、(4.5)可以得到在中心角(0度)左右各4度內，波源近乎等能量。所以，可以確定波進入光子晶體為等振幅的狀態下。經過以上檢查後就可以進行量測。



圖(4.4) f=4Ghz 在 H-Plane 的入射波強度分佈圖

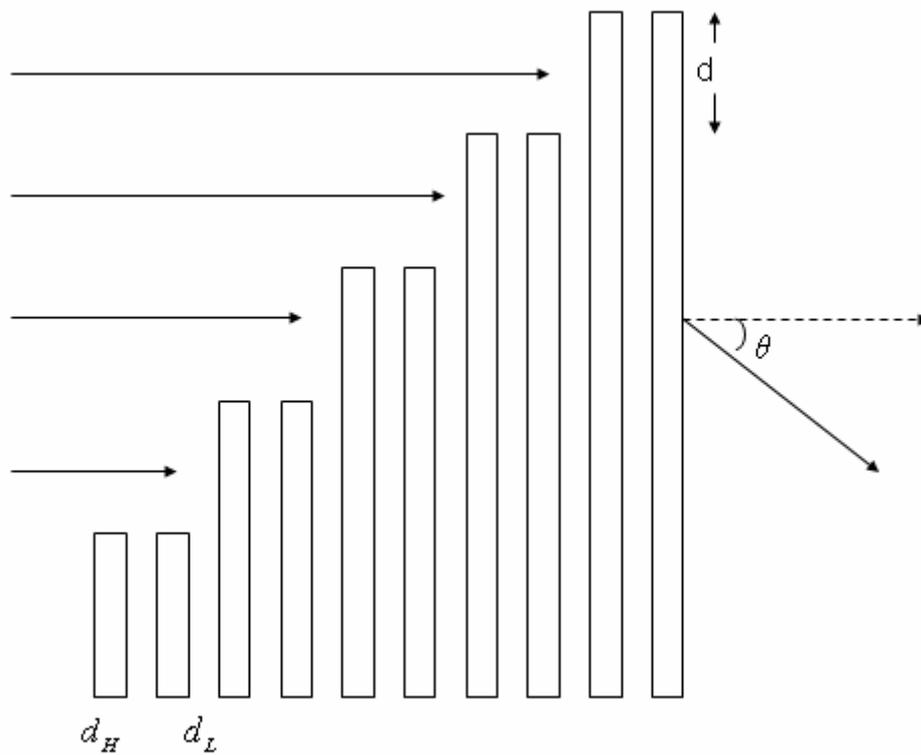


圖(4.5) f=4Ghz 在 E-Plane 量測的入射波強度分佈圖

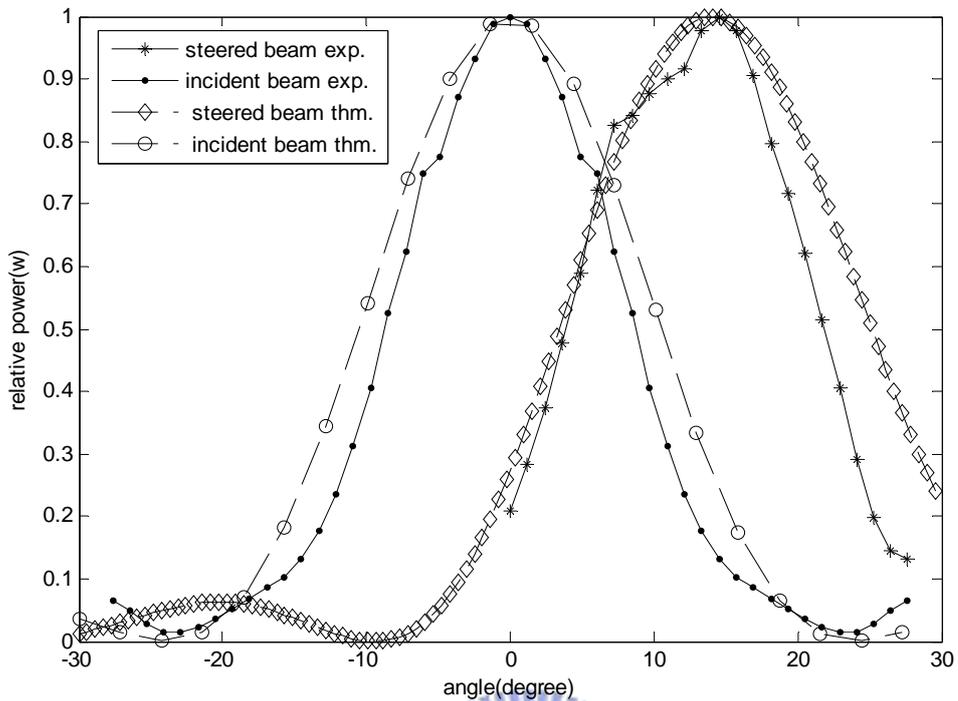
以下分別就三個 d 值來討論波束的場型分佈與理論值比較。

(1) $d=3.5\text{cm}$:

結構如圖(4.6)，因為 $d=3.5\text{cm}$ 所以壓克力板最大長度為 $5*d=17.5\text{cm}$ ，最小長度為 3.5cm ，先不放光子晶體對入射 TE 波做量測，再把光子晶體擺上去，量測第二次，得到偏角度後的波束能量分佈圖以圖(4.7)表示，並同時與理論預測圖形做比較。表(4.1)為調變前後的參數比較。



圖(4.6)($n_H = 1.7, n_L = 1, d_H = 0.5\text{cm}, d_L = 0.85\text{cm}$)週期變化為偶數層共十層的光子晶體結構圖



圖(4.7)未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖(d=3.5cm)

	調變前	調變後
波束角(實驗值)	0°	14.5°
波束角(理論值)	0°	14.1°

表(4.1) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 f=4.22GHz 時對波束調變前與調變後的比較表(d=3.5cm)

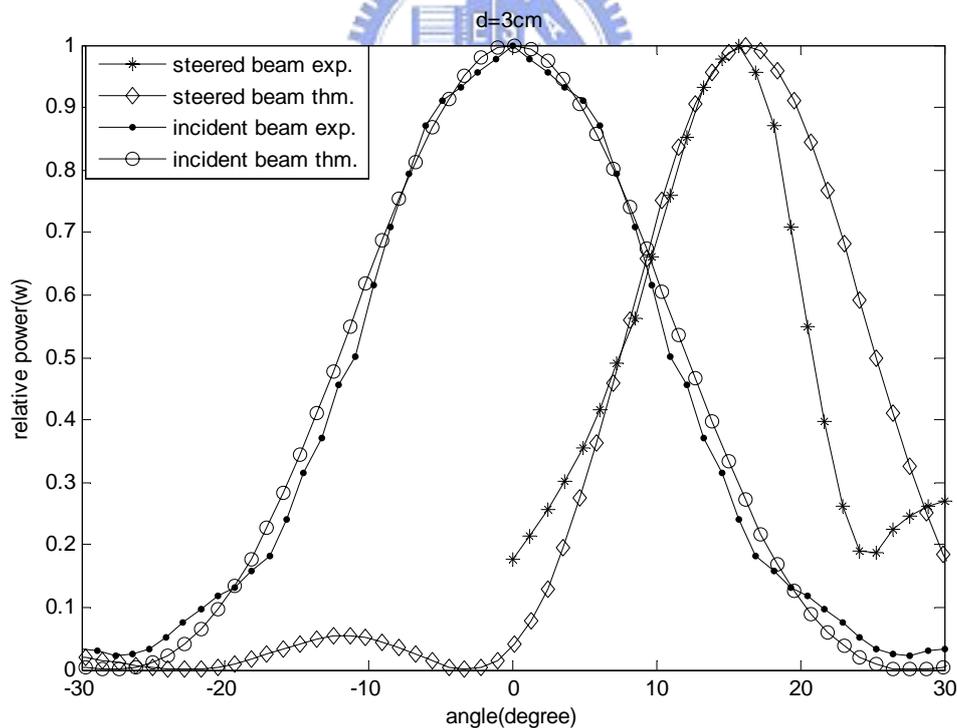
討論:

因為光子晶體長度最大的層為 $5*d=5*3.5\text{cm}=17.5\text{cm}$ ，所以我們將金屬板開口大小設計為 $17.5\text{cm}*17.5\text{cm}$ 與最大層尺寸相等，是為了避免有波未通過光子晶體影響量測結果。在未放置光子晶體前先打入波束，因為是有限空間的開口，所以通過開口後的波能量會被抑制，有繞射效應，使得測量得到的波能量分佈如圖(4.7)的”incident beam exp.”，我們透過天線理論假設波源無相位差(因為未放置光子晶體)所得到的遠場波能量分佈圖為圖(4.7)的”incident beam thm.”，理論與測量

到的波形是相近的，我們可以看到波的最低能量出現在 24 度的地方，與繞射理論波能量零值的角度會在 $\sin \theta = \frac{\lambda}{b}$ ， $\lambda = 7.1\text{cm}$ ， b 為孔徑大小等於 17.5cm ，代入得到 $\theta = 24$ 度，與理論符合。在放置光子晶體以後波束出現偏轉，理論值計算出來的角度為 14.1 度，量測值為 14.5 度，除了量測上可能出現的誤差(因為接收天線每隔 1 度測量一次)，再來就是因為實際上波通過此光子晶體可視為有 5 個有限大小的波源，而我們是利用點波源為模擬工具去預測，所以會出現誤差，不過這樣的實驗結果已經很符合我們的理論架構。而波束為何實驗值會比理論值來的窄，理由同上述原因，因為為有限大小的波源，比起點波源而言能量干涉的更多，所以束寬會比較集中。

(2)d=3cm:

實驗步驟同(1)，結果以圖(4.8)表示之。原入射波和調變後的比較如表(4.2)。



圖(4.8) 未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖(d=3cm)

	調變前	調變後
主束角(實驗值)	0°	15.7°
主束角(理論值)	0°	16.2°

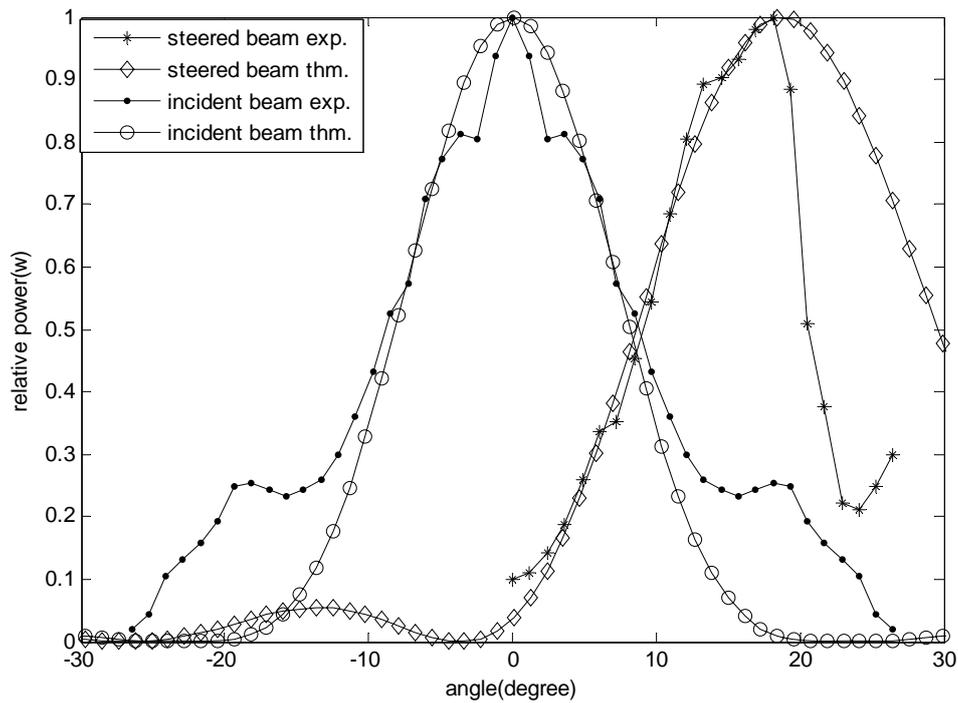
表(4.2) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=4.22\text{GHz}$ 時對波束調變前與調變後的比較表($d=3\text{cm}$)

討論:

此時光子晶體板子最大尺寸為 $5*3=15\text{cm}$ ，所以金屬開口為 $15\text{cm}*15\text{cm}$ ，我們觀察未放置光子晶體前的入射波理論與實驗值的比較，大致上也是吻合，波束能量最低值出現在 29 度附近，由 $\sin\theta = \frac{\lambda}{b}$ ，將 $\lambda = 7.1\text{cm}$, $b = 15\text{cm}$ 代入得到 $\theta = 28.9$ 度，再來是將光子晶體置入，得到偏轉角實驗值為 15.7 度，理論值為 16.2 度，大致上也是吻合，誤差如步驟(1)裡所說的，而波束寬實驗值(steered beam exp.) 比理論值(steered beam thm.) 窄，也是因為主要不是點波源的因素，還有就是受到孔徑繞射的因素造成當量測角度變大時能量會逸散使得實驗量到的波形在角度大的時候會往下掉。另外按照第三章所說的在 d 值逐漸變小的情況下波束會變寬在本實驗中無法看出的原因是因為金屬開口的大小影響了波束輸出的能量，所以圖(4.7)和圖(4.8)是在不同的標準下歸一化的，而第三章的天線理論是在輸出能量皆相等的情況下歸一化的，所以無法比較波束寬的變化。

(3) $d=2.5\text{cm}$

實驗結果如圖(4.9)，比較如表(4.3)。



圖(4.9)未調變和調變後的波束能量歸一化與理論預測圖(d=2.5cm)

	調變前	調變後
主束角(實驗值)	0°	18.1°
主束角(理論值)	0°	18.7°

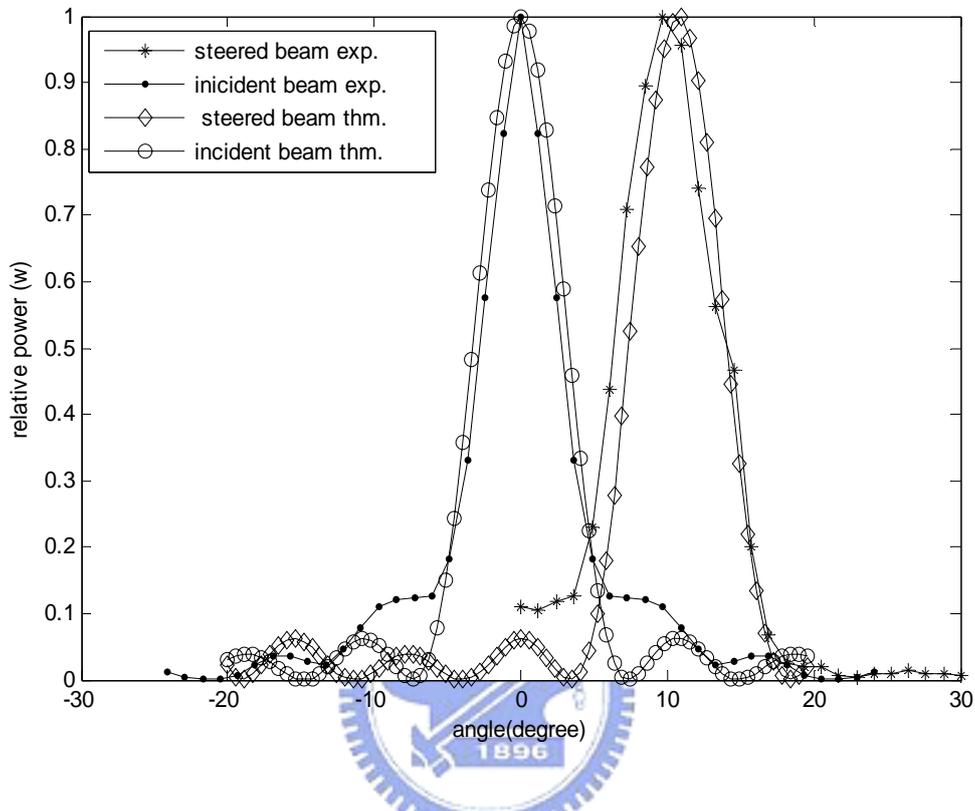
表(4.3) 週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 f=4.22GHz 時對波束調變前與調變後的比較表(d=2.5cm)

討論:

此時光子晶體最大板子尺寸為 $5 \times 2.5 = 12.5\text{cm}$ ，孔徑大小也為 $12.5 \times 12.5\text{cm}$ ，此時理論值與實驗值誤差 0.6 度，此誤差比較大的原因猜測應該是孔徑越小繞射越明顯，所以波束能量逸散的比較嚴重，導致波的干涉現象會不明顯。

我們驗證了在第一禁帶左側的頻率點 $f_1^{(1)}$ 對波束的可調動性，接下來對於 $f_2^{(1)}$ (也就是第一禁帶右側最大峰值的頻率點)也做了實驗，根據 $f_1^{(1)} + f_2^{(1)} = 2f_0$ 我們可以

算出 $f_2^{(1)}=13.42\text{GHz}$ ，以此頻率當作入射波源，在 $d=3.5\text{cm}$ 所得到的結果以圖(4.10)表示。



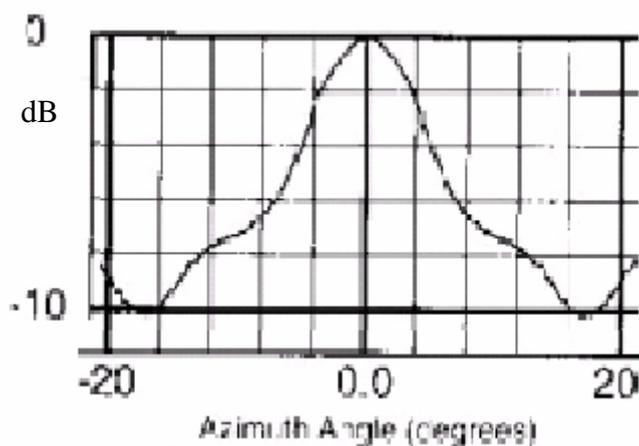
圖(4.10)未調變和調變後的波束能量在 $f=13.42\text{GHz}$ 下的歸一化與理論預測圖
($d=3.5\text{cm}$)

	調動前	調動後
主束角(實驗值)	0°	9.7°
主束角(理論值)	0°	10.8°

表(4.4)週期層數變化為(2-4-6-8-10)的光子晶體在 $f=13.42\text{GHz}$ 時對波束調變前與
調變後的比較表($d=3.5\text{cm}$)

從表(4.4)可知波束角度與實驗值差 1.1 度，原因是因為在頻率為 13.42GHz 時換算成波長為 2.23cm ，此時要滿足遠場條件必須要大於 274cm ，但是我們的發射源

距光子晶體為 125cm，所以已不滿足遠場條件，而礙於儀器高度的關係所以無法將高度升至 274cm，這是第一個原因，再來是波源本身的關係，因為發射源到光子晶體的張角為 8 度，但是從圖(4.11)[19]可以發現波源在自由空間下入射頻率高的時候，以中心角(0 度)為準，左右各 4 度的範圍內振幅下降很快，使得打到光子晶體時會不滿足等振幅的情況，因此造成誤差。

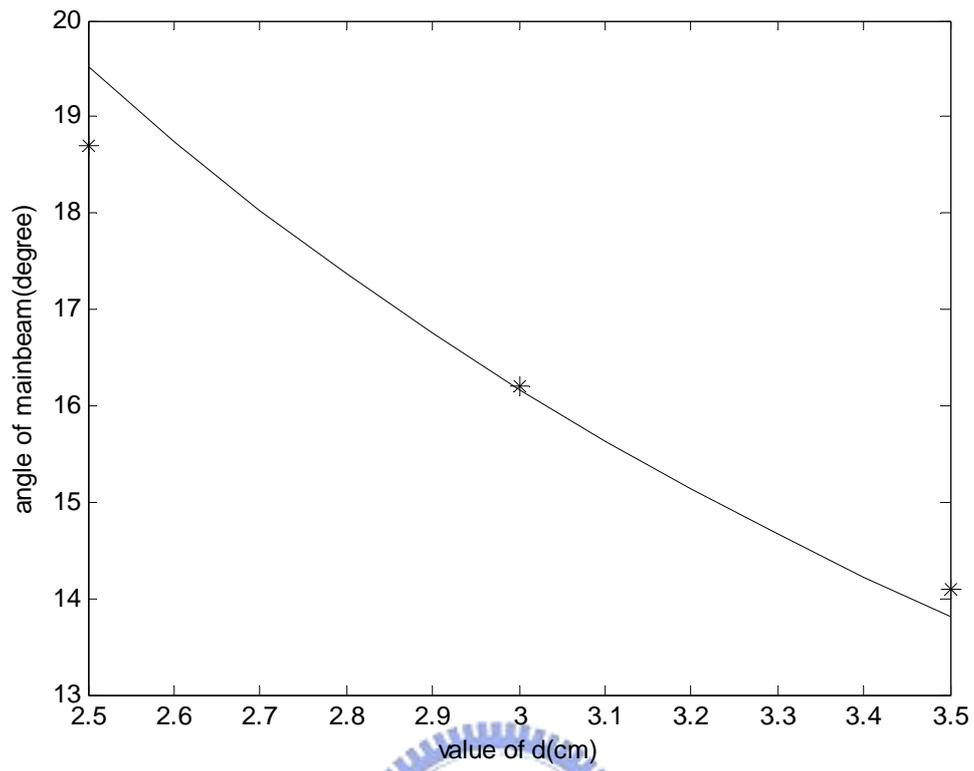


圖(4.11)f=18Ghz 的入射波強度分佈圖

我們將在頻率為 4.22Ghz 的數據整理成表(4.5)，如果是連續性調動，波束方向的變化以圖(4.12)表示，並加上實驗值做對照。

$n_H = 1.7 \quad n_L = 1 \quad f_1^{(1)} = 4.22Ghz$			
d 值(cm)	2.5	3	3.5
主束角(理論值)	18.7°	16.2°	14.1°
主束角(實驗值)	18.1°	15.7°	14.5°

表(4.5)d 值與波束方向在 f=4.22GHz 的理論與實驗數據表



圖(4.12) 在 $f=4.22\text{GHz}$, $n_H=1.7, n_L=1$, 通過(2-4-6-8-10)理論角度變化與實驗數據

據圖

第五章 結論與未來工作

5-1 結論

我們研究了光通過一維光子晶體的穿透特性和相位性質，發現在固定的層數變化下(即高低折射率層週期變化分別為 2、3、4 的倍數)在某些頻率會維持高穿透且等相位差，以禁帶兩側的頻率點來說，隨著層數的變化越大這些頻率點會越靠近禁帶邊緣(bandedge)，同時折射率的改變也會影響這些頻率點與帶隙中心頻率的比值。利用這些頻率可設計出波束掃描結構。在不同的結構下因為會產生很大的相位差所以可以做出大角度變換波束方向；在固定結構的情況下透過調變 d 值可以達到小角度變化波束方向，隨著 d 值的變大波束方向的可調動性會越小，而要讓波束方向在固定的 d 值變化下變化的越大則層數變化就要越多，比如說高低折射率層週期變化為 3 的倍數的調動效果會比 2 的倍數調動效果來的明顯。最後我們以微波實驗來驗證我們的理論，證實了波束調動的可能性，若能減少因繞射而造成的能量逸散的現象，讓出射能量都一樣，我們就可以觀察波束寬和 d 值的關係並使得實驗的結果會更精準；在高頻的實驗部份，若是可以滿足遠場條件，相信會獲得很好的結果。

5-2 未來工作

因為我們的研究目前是用 TE 波當入射波源，對於 TM 波而言性質上會不會產生其它的不同這是值得繼續探討的。再來就是因為這是在自由空間下所設計出來的，未來可結合波導管(waveguide)讓入射波源能夠能夠達到更好的控制。在[23]論文中利用結構上的變形來對波產生分波調變的作用，所以在一維的情況下也應該可以做到類似的變化，比如說我們的結構外觀上看起來像是三角形，可以改成是平行四邊形，透過適當的設計相信可以讓出射的波束聚焦的更好，也可以有分波的效果；此外也可將我們的結構從一維延伸到二維空間做更深入的探討。

參考文獻

- [1] Timothy D. Drysdale, Richard J. Blaikie, and David R. S. Cumminga” Calculated and measured transmittance of a tunable metallic photonic crystal filter for terahertz frequencies” APPLIED PHYSICS LETTERS, 83, (26), 5362 (2003)
- [2] Joshua N. Winn, Y.F., Shanhui Fan, and J. D. Joannopoulos, Omnidirectional reflection from a one-dimensional photonic crystal. OPTICS letters, 1998. 23(20): p.1573-1575
- [3] Woo Jun Kim, Wan Kuang and John D. O’Brien” Dispersion characteristics of photonic crystal coupled resonator optical waveguides” OPTICS EXPRESS, 11, (25), 3421 (2003)
- [4] Alexei A. Erchak, Daniel J. Ripin, Shanhui Fan, Peter Rakich, John D. Joannopoulos, Erich P. Ippen, Gale S. Petrich and Leslie A. Kolodziejski” Enhanced coupling to vertical radiation using a two-dimensional photonic crystal in a semiconductor light-emitting diode”, APPLIED PHYSICS LETTERS, VOLUME 78, (2001)
- [5] Balasundaram Elamaram, Iao-Mak Chio, Liang-Yu Chen and Jung-Chih Chiao” A Beam-Steerer Using Reconfigurable PBG Ground Plane” IEEE MIT-S Digest (2000)
- [6] T.-Y. Yun and K. Chang, “A phased-array antenna using a multilayer phase shifter controlled by a piezoelectric transducer,” in Proc. IEEE Int. Microwave. Symp. Dig., Boston, MA, June 2000, pp. 831–833.
- [7] L.C. Kretly, Member, IEEE, A. Tavora A. S., S. E. Barbin, Member, IEEE” Beam Steering Technique Through Multiple Vee-antenna

- Switching: Additional Reflector Element and Radiation Pattern Characterization” Proceedings SBMO/IEEE MTT-S IMOC(2003)
- [8]李元新、龍雲亮”Frequency-fixed Beam-scanning Multi-port Microstrip Leaky-wave Antenna” JOURNAL OF MICROWAVES Vol. 20 No. 4 Dec. (2004)
- [9] Balasundaram Elamaran, Iao-Mak Chio, Liang-Yu Chen and Jung-Chih Chiao” Using Reconfigurable PBG Structures for Phase Shifting in a Planar Phased Array” IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC/URSI National Radio Science Meeting Salt Lake City, Utah, July 16-21, (2000)
- [10]David K. Cheng” Field and Wave Electromagnetics 2/e ”(2002)
- [11]”具有共振腔結構的一維光子晶體結構”，光學儀器，26,16(2004)
- [12]Pochi Yeh , “Optical Waves in Layered Media”(1988)
- [13]王怡喬，”以有限差分時域法模擬一維金屬介電層光子晶體之電磁波傳輸”，國立清華大學，碩士論文(2005)
- [14] Yu-Rong Zhen and Lie-Ming Li” A novel application of two-dimensional photonic crystals: polarization beam splitter ” J. Phys. D: Appl. Phys. **38** (2005) 3391–3394
- [15] K. Araki, A. Tanaka and E. Matsumura” Wide scanning phased array antenna design in Ka band” IEE Pror-M~ruwA nfemr Propag., Vol. 150, No. 5, October (2003)
- [16] P. Kramper, M. Agio, C.M. Soukoulis, A. Birner, F. Müller, R. B.Wehrspohn, U. Gösele, and V. Sandoghdar, “Highly Directional Emission from Photonic Crystal Waveguides of Subwavelength Width”

The American Physical Society VOLUME 92, NUMBER 11 (2004)

[17] Steven K. Morrison and Yuri S. Kivshar” Engineering of directional emission from photonic-crystal waveguides” APPLIED PHYSICS LETTERS 86, 081110 (2005)

[18] Nemai Chandra Karmakar; Mohammad Nurunnabi Mollah” POTENTIAL APPLICATIONS OF PBG ENGINEERED STRUCTURES IN MICROWAVE ENGINEERING PART:II” Microwave Journal; Sep 2004; 47, 9; ProQuest Computing

[19] Peter de Maagt, Senior Member, IEEE, Ramón Gonzalo, Member, IEEE, Yiannis C. Vardaxoglou, Member, IEEE, and Jean-Marc Baracco” Electromagnetic Bandgap Antennas and Components for Microwave and (Sub)Millimeter Wave Applications” IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 51, NO. 10, OCTOBER (2003)

[20] Andrew R. Weily, Karu P. Esselle, Barry C. Sanders, and Trevor S. Bird “HIGH-GAIN 1D EBG RESONATOR ANTENNA” MICROWAVE AND OPTICAL TECHNOLOGY LETTERS / Vol. 47, No. 2, October 20 (2005)

[21] Tae-Yeoul Yun, Student Member, IEEE, Chunlei Wang, Senior Member, IEEE, Paola Zepeda, Student Member, IEEE, Christopher T. Rodenbeck, Student Member, IEEE, Matthew R. Coutant, Ming-yi Li, and Kai Chang, Fellow, IEEE ” A 10- to 21-GHz, Low-Cost, Multifrequency, and Full-Duplex Phased-Array Antenna System” IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 50, NO. 5, MAY (2002)

[23] Yu-Rong Zhen and Lie-Ming Li” A novel application of

two-dimensional photonic crystals: polarization beam splitter”, J. Phys. D:
Appl. Phys. 38 (2005) 3391–3394

