

國立交通大學  
機械工程學系  
博士論文

彈性支撐複合材料板結構系統參數之識別

Parameters Identification of Flexibly Supported  
Composite Plate Structures



研究生：李清榮

指導教授：金大仁教授

中華民國九十五年三月

# 彈性支撐複合材料板結構系統參數之識別

## Parameters Identification of Flexibly Supported Composite Plate Structures

研究生：李清榮

Student : Ching-Rong Lee

指導教授：金大仁 教授

Advisor : Tai-Yan Kam



A Dissertation

Submitted to Department Mechanical Engineering  
College of engineering  
National Chiao Tung University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Doctor of Philosophy  
in

Mechanical Engineering

March 2006

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十五年三月

# 彈性支撐複合材料板結構系統參數之識別

研究生：李清榮

指導教授：金大仁教授

國立交通大學機械工程學系

## 摘 要



由於複合材料在相同重量條件下，具有很高之強度和剛性。已廣泛使用於航空和太空工業與其他尖端科技產業上，製造出各種高性能之結構物。對於不同的製造或成型方式都會對其構件之材料性質造成影響；而且結構物通常是由許多部分所組成，複合材料平板可能只是其中一個構件，通常可藉由不同型式的接點和其他結構件結合在一起，而在力學上可以用等效之彈性支撐方式來模擬其接點處之性質。且若要精確預知此結構物之力學行為，則先要有真實的材料常數與邊界支撐之性質。因此，如何有效且正確的反算出其結構系統參數是非常重要的。

本文首先建立彈性支撐複合材料平板的振動分析，利用里茲法將板之變形以級數方式表示，而變形特徵函數則採用雷建德正交多項式函數組成。建立彈性支撐平板之總勢位能，並對其變形函數未定係數

變分，可以建立振動特徵方程式，再求解此方程式，即可得到板之自然頻率、模態。文中主要探討兩大類複材板：一是複合材料積層板；另一則是複合材料三明治板。在複合材料積層板部分，考慮積層薄板和積層厚板兩種，而其所使用之理論分別為古典積層板理論與一階剪變形理論；而複合材料三明治板部分則是使用分層理論，亦即多層一階剪變形理論。複材板的邊界是以長條狀墊片彈性支撐，積層薄板部分是考慮四個邊界全部彈性支撐，或同時板中央還有彈簧支撐，還是部分彈性支撐等情形；積層厚板時，則考慮單邊彈性支撐；而複合材料三明治板，則考慮四邊全部彈性支撐。

接著利用限制性總域極小化程序，以廣義拉格蘭吉乘子方法，將原先有限制條件之最小化問題，轉變成無限制條件之最小化問題。配合振動實驗測量與里茲方法理論分析，建立實驗與理論之自然頻率差值最小平方為目標函數，並採隨機多起始點搜尋、設計變數單位化及貝氏分析法，以非破壞性方式識別彈性支撐複合材料板結構之系統參數。並藉由識別各種彈性支撐複合材料積層板與三明治板試片為範例，說明本方法之可行性與精確性。本文之研究方法，將可輕易應用於其他不同型式彈性支撐結構之系統參數識別。

# Parameters Identification of Flexibly Supported Composite Plate Structures

Student : Ching-Rong Lee

Advisor : Dr. Tai-Yan Kam

Department of Mechanical Engineering  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

Due to their high strength/stiffness to weight ratios, the fiber reinforced composite materials have become important in weight-sensitive applications like aeronautical and aerospace industry as well as many other fields of modern technology to fabricate high performance structures. As well known, there are many methods for manufacturing laminated composite components and different manufacturing or curing processes may produce different mechanical properties for the components. And the composite plates in these structures are connected to other members using different joining methods. One popular way to analyze the mechanical behaviors of the composite plates is to consider the plates being supported at the boundary by equivalent elastic restraints. The attainment of the actual behavioral predictions of the flexibly supported composite plates, however, depends on the correctness of the system parameters such as the elastic constants of the plates and the spring constants of the elastic restraints at the plate boundaries. Therefore, the determination of realistic material and spring constants of laminated composite components has become an

important topic of research.

In this paper several methods are proposed for vibration analysis of elastically restrained rectangular symmetrically laminated composite thin or thick plates and the laminated composite sandwich plates. The methods are constructed based on the Rayleigh-Ritz method in which the deformation characteristic functions are expressed as the Legendre's orthogonal polynomials. The displacement models of the thin or thick laminated composite plates and laminated sandwich plate are constructed on the basis of the classical laminate plate theory (CLPT) or the first-order shear deformation theory (FSDT) and the layer-wise linear displacement theory, respectively. Extremization of the functional, the total potential energy, with respect to the displacement coefficients leads to the eigenvalue problem. The solution of above equation gives the theoretical natural frequencies of flexibly supported composite plates. The Rayleigh-Ritz method is then used to study the free vibration of different kinds of plates with various supporting conditions such as thin laminated composite plates supported by strip-type elastic pads around the peripheries of the plates with or without center elastic supports, thin plates partially supported by edge elastic restraints, thick laminated composite plates partially supported by edge elastic restraints, and laminated sandwich composite plates supported by strip-type elastic pads around the peripheries of the plates.

In this paper, a constrained minimization method is presented for the nondestructive parameters identification of flexibly supported composite plate structures. A frequency discrepancy function is established to measure the sum of the differences between the experimental and theoretical predictions of natural frequencies of the elastically restrained laminated composite plates. The use of a multi-start global minimization method to identify the

elastic constants by making the frequency discrepancy function a global minimum, and a design variables normalization technique for expediting the convergence of the search of the global minimum. The accuracy and applications of the proposed method are demonstrated by means of several examples. The present method can be extended without difficulty to the material and spring constants identification of other types of structures.



## 誌謝

承蒙吾師金大仁博士的耐心指導與教誨，使本文得以順利完成，並且學習到為人處世及求學之正確態度，在此致上無限的感激與敬意。同時要感謝蕭國模、蔡佳霖、林世章、張瑞榮、佘海豐、賴峰民和吳家宏等博士的細心審閱全文，並提供寶貴意見。

感謝爸爸、媽媽、愛妻雪玉及女兒欣芸、映儒，對我求學的全力支持、體諒包容，讓我可以全力以赴、無後顧之憂地完成學業。另外，要感謝空軍官校教學部航機系堯年主任、健康學長、海明學長、唐傑和其他師長們的關懷與鼓勵，以及航太系梁燕祝老師在實驗方面的熱心協助。此外，要感謝實驗室偉芬學姐、志明學長、士璋、曉強、永剛、俊行、財維、東恩、正義、坤森、鎮隆、志鴻、國晉、巧鈴、昌毅、于昇、崧任、建郎、維成，在學業上的切磋與照顧，使我能克服學業和研究上的困難；建勳、慶博、欣翰、哲偉、加融、耀文、國真、聖傑、永立和魁原，在生活上的協助；更感謝張馨櫻小姐在實驗室期間的關懷和協助，讓我感受到實驗室的溫暖。僅以此文獻給所有關心我的家人、師長和朋友們。

李清榮 謹誌

2006.4 于交大

# 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	iii
誌謝.....	vi
目錄.....	vii
表目錄.....	x
圖目錄.....	xii
符號說明.....	xiv
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究方法.....	4
第二章 彈性支撐複合材料平板的振動分析.....	6
2.1 複合材料古典平板理論.....	6
2.1.1 位移場與應變.....	6
2.1.2 應力與應變關係.....	8
2.1.3 平板的應變能與動能.....	11
2.1.4 平板邊界彈性支撐的應變能.....	11
2.1.5 瑞雷－里茲法與特徵值、特徵向量.....	13
2.2 複合材料一階剪變形平板理論.....	15
2.2.1 位移場與應變.....	15
2.2.2 應力與應變關係.....	16
2.2.3 平板的應變能與動能.....	19
2.2.4 平板邊界彈性支撐的應變能.....	20
2.2.5 瑞雷－里茲法與特徵值、特徵向量.....	21
2.3 複合材料多層一階剪變形平板理論.....	24
2.3.1 位移場與應變.....	24
2.3.2 應力與應變關係.....	28

2.3.3	平板的應變能與動能.....	28
2.3.4	平板邊界彈性支撐的應變能.....	29
2.3.5	瑞雷—里茲法與特徵值、特徵向量.....	30
第三章	最佳化總域極小值理論.....	32
3.1	最佳化設計.....	35
3.2	多起始點方法.....	36
3.3	區域最小化程序.....	37
3.4	總域最小化程序.....	39
3.5	廣義拉格蘭吉乘子方法.....	40
第四章	實驗之安裝與試驗.....	41
4.1	複合材料積層板標準試片之製作與拉伸試驗.....	41
4.2	彈性支撐複合材料平板振動實驗之安裝與自然頻率量測....	43
4.3	邊界彈性墊片支撐之模擬.....	44
4.3.1	等效單位長度之平移彈簧常數.....	45
4.3.2	等效單位長度之扭轉彈簧常數.....	45
4.4	自然頻率實驗量測與理論分析之驗證.....	46
4.5	三明治板於不同長寬比、心層材料與邊界彈簧剛性對自然頻 率之影響.....	48
第五章	反算識別彈性支撐複合材料平板之材料常數.....	50
5.1	反算方法之簡介.....	50
5.2	反算方法之建立.....	50
5.3	反算方法之測試.....	57
第六章	結果與討論.....	60
6.1	彈性支撐複合材料積層板之材料常數反算.....	60
6.1.1	複合材料積層薄板四個邊界為連續且形成封閉之彈性 支撐或同時具有中心彈簧支撐.....	61
6.1.2	複合材料積層薄板四個邊界為部分彈性支撐 .....	65
6.1.3	複合材料積層厚板單邊彈性支撐 .....	67
6.2	彈性支撐複合材料三明治板之材料常數反算.....	69

第七章 結論與未來展望.....	73
參考文獻.....	75
附錄一.....	83
附錄二.....	85



## 表 目 錄

表 4-1	複合材料積層板與邊界支撐之材料常數.....	88
表 4-2	彈性支撐複合材料積層板之自然頻率計算.....	88
表 4-3	(a) 簡單支撐正方形複合材料積層厚板 $[0^0/90^0]_s$ 之第一個自然頻率 (b) 彈性支撐正方形複合材料積層厚板 ( $h/b=0.03$ ) 之自然頻率....	89
表 4-4	複合材料三明治板具有不同邊界條件之自然頻率.....	90
表 4-5	彈性支撐 $[(0^0/90^0)_s/\overline{core}]_s$ 板於不同長寬比和心層材料之正規化自然頻率.....	91
表 4-6	彈性支撐 $[(45^0/-45^0)_s/\overline{core}]_s$ 板於不同長寬比和心層材料之正規化自然頻率.....	92
表 6-1	複合材料積層板結構試片編號、疊層角度、幾何尺寸與密度...	93
表 6-2	複合材料積層板結構試片之編號及實驗量測所得自然頻率值.....	93
表 6-3	彈性支撐積層板層數為六層，使用不同數目頻率之反算結果..	94
表 6-4	彈性支撐積層板層數為八層，使用不同數目頻率之反算結果...	95
表 6-5	彈性支撐積層板層數為十二層，使用不同數目頻率之反算結果...	96
表 6-6	複合材料積層板試片 $[0^0]_6$ 其反求之局部與總域極小值.....	96
表 6-7	彈性支撐積層板層數為六層之反算.....	97
表 6-8	彈性支撐積層板層數為八層之反算.....	97
表 6-9	彈性支撐積層板層數為十二層之反算.....	98
表 6-10	複合材料積層板具有中間彈簧支撐之自然頻率實驗值.....	98
表 6-11	具有中心彈簧支撐之 $[0^0]_8$ 積層板，使用不同數目實驗頻率之反算...	99
表 6-12	具有中心彈簧支撐之積層板，使用實驗頻率之反算結果.....	100
表 6-13	複合材料積層板邊界部分支撐之自然頻率實驗值.....	100
表 6-14	$Gr/ep[0^0/90^0/0^0]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐之自然頻率理論值...	101
表 6-15	$Gr/ep[0^0/90^0/0^0]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐 $E_c=1$ Mpa 之理論頻率反算.....	101

表 6-16	$\text{Gr/ep}[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐 $E_c=15 \text{ Mpa}$ 之理論 頻率反算.....	102
表 6-17	$\text{Gl/ep}[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐之自然頻率理論值...	102
表 6-18	$\text{Gr/ep}[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐以理論頻率之反算....	103
表 6-19	$\text{Gr/ep}[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$ A 型式部份彈性支撐以實驗頻率之反算...	103
表 6-20	$\text{Gr/ep}$ 複材板不同型式部份彈性支撐以實驗頻率之反算....	104
表 6-21	複材積層板單邊彈性支撐之自然頻率實驗值 .....	104
表 6-22	$\text{Gr/ep}$ 或 $\text{Gl/ep}$ 複材板單邊彈性支撐之自然頻率理論值.....	105
表 6-23	$\text{Gr/ep}[0^\circ]_{60}$ 複材板單邊彈性支撐以理論頻率之反算.....	105
表 6-24	$\text{Gl/ep}[0^\circ/90^\circ]_{15S}$ 複材板單邊彈性支撐以理論頻率之反算..	106
表 6-25	複材積層板單邊彈性支撐以實驗頻率之反算.....	106
表 6-26	彈性支撐 $\text{Gr/ep}$ 三明治板之自然頻率值.....	107
表 6-27	彈性支撐 $\text{Gr/ep}[0_3^\circ/\text{core}(I)/0_3^\circ]$ 三明治板以理論頻率之反算...	108
表 6-28	彈性支撐 $\text{Gl/ep}$ 複合材料三明治板之自然頻率理論值.....	109
表 6-29	彈性支撐 $\text{Gl/ep}$ 三明治板以理論頻率之反算.....	109
表 6-30	彈性支撐 $\text{Gr/ep}[0_3^0/\text{core}(I)/0_3^0]$ 三明治板以實驗頻率之反算.....	110
表 6-31	彈性支撐 $\text{Gr/ep}$ 三明治板以實驗頻率之反算.....	110

## 圖 目 錄

圖 2-1	複合材料古典板理論位移場示意圖.....	111
圖 2-2	層板座標與材料主軸座標的關係.....	111
圖 2-3	複合材料層板沿厚度方向單位長度之合力與合力矩.....	112
圖 2-4	四邊彈性支撐矩形層板幾何尺寸示意圖 (A)結構系統模型 (B)理論分析數學模型.....	113
圖 2-5	一階剪變形位移場示意圖.....	113
圖 2-6	多層一階剪變形位移場示意圖.....	114
圖 3-1	以能量守恆觀點，若起始點落於 $R^* = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$ 內，皆可成功搜尋到目標函數之總域最小值 $X^*$ 。.....	114
圖 3-2	區域極小化流程圖 (BLOCK 1).....	115
圖 3-3	總域極小化流程圖.....	116
圖 3-4	A.L.M. 區極小化流程圖 (BLOCK A).....	117
圖 4-1	熱壓機.....	118
圖 4-2	複合材料積層板成型溫度及壓力條件.....	118
圖 4-3	鑽石切割機.....	119
圖 4-4	拉伸試驗之複合材料積層板試片外形.....	119
圖 4-5	MTS 拉伸試驗機.....	120
圖 4-6	自然振動頻率量測實驗之儀器配置圖.....	120
圖 4-7A	彈性墊片受垂直力圖.....	121
圖 4-7B	彈性墊片受彎矩圖.....	121
圖 4-8	鋁板四邊為自由邊界之頻譜圖.....	122
圖 4-9	複材積層板 $[0^0]_8$ 四邊以彈性支撐之頻譜圖.....	122
圖 6-1	複合材料積層薄板彈性支撐示意圖(a)四個邊界為連續且形成封閉之彈性支撐(b)同時具有中心彈簧支撐.....	123
圖 6-2	不同型式之複材積層薄板部分彈性支撐示意圖.....	123
圖 6-3	複材積層板 $[0^0/90^0/0^0]_{2S}$ 以 A 型式部分彈性支撐之頻譜圖.....	124
圖 6-4	複合材料積層厚板單邊彈性支撐之示意圖.....	124
圖 6-5	複材積層板 Gr/ep $[0^0]_{60}$ 單邊彈性支撐之頻譜圖.....	125

圖 6-6 彈性支撐複合材料三明治板之示意圖..... 125

圖 6-7 彈性支撐  $Gr/ep[0_3^0/core(I)/0_3^0]$  三明治板之頻譜圖..... 126



## 符號說明

$u$ 、 $v$ 、 $w$	：積層板在平板參考座標系 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向的位移量
$u_0$ 、 $v_0$ 、 $w_0$	：積層板中間面在平板參考座標系 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向的位移量
$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}$	：積層板垂直於 $x$ 、 $y$ 軸之截面的旋轉量
$\varepsilon_x^0$ 、 $\varepsilon_y^0$ 、 $\gamma_{xy}^0$	：積層板中間面的應變
$\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 、 $\kappa_{xy}$	：中間面上於 $xz$ 、 $yz$ 平面的彎曲曲率與 $xy$ 平面的面外扭轉曲率
$\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_{23}$ 、 $\sigma_{13}$ 、 $\sigma_{12}$	：單層纖維的方向的應力
$\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 、 $\gamma_{23}$ 、 $\gamma_{13}$ 、 $\gamma_{12}$	：單層纖維的方向的應變
$\theta$	：積層板參考座標系 $x$ 軸與材料主軸方向之逆時針方向夾角
$[Q]$	：材料主軸座標系上的勁度矩陣
$[\bar{Q}]$	：積層板參考座標系 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 上的轉換勁度矩陣
$\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_{yz}$ 、 $\sigma_{xz}$ 、 $\sigma_{xy}$	：各層於參考座標軸方向的應力
$\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 、 $\gamma_{23}$ 、 $\gamma_{13}$ 、 $\gamma_{12}$	：各層於參考座標軸方向的應變
$k_\alpha$ 、 $k_\beta$	：剪力修正係數
$N_i$ 、 $M_i$	：積層板的合力、合力矩
$Z_n$	：第 $n$ 層板之下表面至中間面的距離
$A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 、 $D_{ij}$	：拉伸勁度矩陣、偶合勁度矩陣、彎曲勁度矩陣
$U_P$ 、 $T$ 、 $U_B$	：積層板彎曲的最大應變能、橫向位移之最大動能、邊界彈性支撐的最大應變能
$\Pi$	：積層板的總勢位能
$U_t$ 、 $U_r$	：平移彈簧之應變能、旋轉彈簧之應變能

$V_n$ 、 $M_n$	: 邊界彈性支撐所受之剪力、彎曲力矩
$K_{Li}$ 、 $K_{Ri}$	: 邊界單位長度的平移與旋轉彈簧常數
$K_p$ 、 $K_B$ 、 $M$	: 平板本身的勁度矩陣、邊界彈性支撐的勁度矩陣、質量矩陣
$\lambda$ 、 $\omega$ 、 $C$	: 單位化之特徵值、未單位化之特徵值、特徵向量
$\theta_x$ 、 $\theta_y$	: 垂直 $x$ 、 $y$ 軸之截面的旋轉量
$W$ 、 $\Theta_x$ 、 $\Theta_y$	: 撓度特徵函數、橫切面轉角特徵函數
$\hat{F}(x)$ 、 $F^*(x)$ 、 $\bar{F}(x)$	: 區域極小值、臨時總域極小值、總域極小值
$P_r$ 、 $q(n,r)$	: 機率
$x$ 、 $x_i^L$ 、 $x_i^U$	: 設計變數、設計變數下限值、上限值
$h_j$ 、 $g_k$	: 等式限制條件及不等式限制條件
$E_i$ 、 $\nu_{ij}$ 、 $G_{ij}$	: ( $i=1,2,3$ ) 楊氏係數、波松比、剪力模數
$E_c$ 、 $\nu_c$	: 三明治板心層之楊氏係數、波松比
$E_e$	: 邊界支撐彈簧之彈性常數
$e(x)$	: 目標 (或誤差) 函數
$\omega_i^P$ 、 $\omega_i^m$ 、 $\underline{\omega}^*$	: 理論預測、實驗量測之自然頻率值、兩者差值之單位化矩陣
$\underline{\psi}(x, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \underline{\gamma}_p)$	: 無限制條件的廣義拉格蘭吉乘子之新目標函數
$\mu_j, \eta_j, \gamma_p$	: 拉格蘭吉乘子
$\alpha_i$	: 設計變數之修正係數
$\xi^{(k)}$	: 於第 $k$ 分層區域座標 $z$ 方向之位置
$t_i$	: 第 $i$ 層之層板厚度

# 第一章 緒論

## 1.1 前言

纖維強化複合材料可藉由不同角度的疊層、編織、纏繞方式或製程變化來達成材料結構所需的高強度、高勁度、質量輕、耐衝擊、耐腐蝕與耐疲勞性，且易於隨著使用的目的而調整其組織結構，這是傳統金屬材料所做不到的。因此廣泛的應用於航太工業、造船、汽車、電子產業及運動器材等等，尤其是對重量有特別要求的結構。

然而複合材料結構不同於傳統均質結構，其易受不同的製程影響，而使得材料性質有很大的差異。即使是相同的材料，因為不同的製程規劃、儀器設備與環境因素影響下，其生產的複合材料成品結構性質(彈性常數)將可能不同。若以標準拉伸試驗方式進行材料常數測試，並無法很簡單、有效率的完成，而且標準拉伸試驗只能探討複合材料結構的局部行為，因為拉伸試片體積小且外形非常簡單，工業產品其實際尺寸較大、外形相對複雜，因此很難製造出可以正確模擬工業產品之拉伸試片。所以，應用拉伸試驗並無法得到工業產品其材料真實之彈性常數，而且複合材料結構使用一段時間後，其內部原有缺陷會使結構剛性下降或是因疲勞因素促使結構強度降低，此時結構材料彈性常數將與原先拉伸試驗之結果相差更大。在實際應用上，對於具有彈性支撐結構物，若以一般方式進行其彈性常數測試，勢必會對其結構件本身及其邊界造成破壞。因此，本文擬提出一簡單、省時的方法且結構使用一段時間後仍能精確、可靠與非破壞的方式識別複合

材料板結構含邊界彈性支撐之所有彈性常數，並進而評估其可靠度。

## 1.2 文獻回顧

有關複合材料積層板的變形理論分析方面，是由古典板理論（Classical Plate Theory，簡稱 CPT）[1、2] 所對應發展出來的古典積層板理論（Classical Laminated Plate Theory）[3、4]，其忽略了側向剪應變效應，即平板之截面在變形前垂直中間面（Mid-plane），在變形後仍然保持平面，且垂直於中間面，對於薄板的分析而言可以得到很不錯的結果。但是當複合材料積層板為厚板時，由於此理論忽略了側向剪力的影響，而且複合材料側向的剪力模數比纖維方向的楊氏係數低很多，很容易產生側向剪變形，因此古典積層板理論並不適合用來分析複合材料厚板，可以改用 Mindlin 提出的一階剪變形理論（The First-order Shear Deformation Theory，簡稱 FSDT）[5] 來分析，將側向剪力的影響加以考慮；但因其側向剪力分佈為常數，不同於實際的分佈狀況，於是 Mindlin、Whitney 和 Reddy [6~9] 提出了剪力修正因子來修正。後來又有一些學者 [10~16] 陸續提出了高階剪變形理論，其目的都是為了改進古典平板理論的缺點，以提高複合材料厚板或三明治板分析結果的準確性。複合材料三明治板結構是由多層不同纖維方向的複合材料層板，及不同性質的夾心層材料膠合而成，因此每一層勁度會有很大的差異。因此其受力後，沿著厚度方向的剪變形比均質材料平板複雜許多。Mau [17] 提出多層一階平板理論，把板沿厚度方向分成許多層，每一層用一個一階剪變形理論來模擬，並且要滿足層間位移連續的限制條件，類似理論有許多學者陸續提出 [18~21]。

結構動態特性 [11~16、22~26] 之考慮，對於結構設計是相當重要的，所謂的動態特性指的就是自然頻率（Natural Frequencies）及其相應的振型（Mode Shape）。這是因為結構可能因共振而產生過大之變位或應力，超過材料之容許極限而產生破壞；或是振動中所產生之反復應力，雖然其應力值並未超過材料之容許極限，但卻可能因為反復次數過多而造成材料疲勞破壞；另外振動亦會伴隨產生噪音、結構的顫動，使得使用者產生不舒服的感覺。對於結構量測低階自然頻率遠比量測其位移與應變容易，通常低階自然頻率在工程設計較受重視，因低階自然頻率容易受外界激發而引起結構共振。文獻 [27~31] 是介紹一般工程最佳化概念，隨著複合材料的廣泛使用與結構可靠度評估而逐漸受到重視與矚目，許多知名學者將工程最佳化運用在複合材料力學領域之相關研究，Deobald 及 Gibson、Frederiksen [32、33] 以里茲（Rayleigh-Ritz）模態分析方法及數值迭代方式、最佳化方式決定複合材料之彈性常數。Castagnede et al. [34] 利用超音波方法量測複合材料之彈性常數。Fallstrom 及 Jonsson [35] 以雷射光全像攝影攝影技術(量測振動頻率和模態)及最佳化的方法決定複合材料之彈性常數。Nielsenand 及 Toftegaard [36] 應用反算方法決定纖維複合材料在溼度影響下之的彈性常數。Berman 及 Nagy [37] 利用實驗量測模態與自然頻率，並結合解析方式求解結構質量與勁度矩陣，當實驗、預測兩者之模態與自然頻率差值達到最小時，即可決定材料性質。Kam 及 Lee、Liu [38~41] 研發利用自然頻率和模態或位移方式識別樑結構彎曲勁度之方法。Kam 及 Wang [42、43] 利用最佳化方法及複合材料積層板之位移及(或)應變的關係識別其彈性常數。

隨著複合材料的廣泛使用與對結構高可靠度的需求，以非破壞性方式識別複合材料彈性常數逐漸受到重視與矚目。相關文獻一般是以超音波檢測或是動態自然頻率測量；配合模態展開以最佳化理論作為識別複合材料彈性常數，但是這些研究大都面臨以下的困難：

1. 無法完全精確識別所有的彈性常數。
2. 最佳化方法無法有效搜尋出總域極小值，初始猜測值需在總域極小值附近。
3. 彈性常數之識別結果誤差過大。
4. 無法識別複合材料三明治板結構。
5. 未能同時考慮結構含邊界彈性支撐時之所有彈性常數。

故本文將針對這些問題提出改進，以精確、可靠與非破壞的方法識別邊界彈性支撐之複合材料結構其所有彈性常數，以確保產品在生產或使用時能給予更真實之材料彈性常數與邊界條件，進而更有效評估其可靠度及壽命。

### 1.3 研究方法

本文研究方法，將以受限制條件之總域極小化程序，配合實驗與里茲方法，以隨機多起始點搜尋、設計變數單位化，識別複合材料積層板與三明治板結構之彈性常數。研究方向包含兩部份：第一為邊界彈性支撐複合材料積層板的材料彈性常數識別，第二為邊界彈性支撐複合材料三明治板的材料彈性常數識別。第一部份乃利用古典板位移場理論、一階剪變形位移場理論來模擬，配合隨機多起始點搜尋之總

域極小化理論，再對一未知彈性係數與邊界彈性支撐性質之複合材料積層板結構之自然頻率（考慮最低前六、七或八個自然頻率值），同時利用頻譜分析儀量取實驗值與里茲方法分析理論猜測值，並取兩者之最小平方差方式，作為最佳化理論之目標函數；經最佳化程序後，反求此邊界彈性支撐複合材料積層板的所有彈性常數，並與標準試片拉伸試驗值作比較。

第二部份則以分層位移場理論，將三明治層板整個厚度視為三層，上、下面層與夾心層分別以不同的一階剪變形位移場模擬，並將一個撓度及六個橫切面旋轉角之特徵函數應用里茲方法以級數方式來表示，配合隨機多起始點搜尋之總域極小化理論。對一未知彈性常數含邊界彈性支撐之複合材料三明治層板結構之自然頻率（考慮最低前八個自然頻率值），同時利用頻譜分析儀量取實驗值與里茲方法分析理論猜測值，並取兩者之最小平方差方式，作為最佳化理論之目標函數；經最佳化程序後，反求此邊界彈性支撐複合材料三明治板的所有彈性常數，並與標準試片拉伸試驗值作比較。

本文研究將提供一可靠、有效率且精確度高的方法，以非破壞性方式識別一未知材料彈性常數與邊界彈性支撐之複合材料結構參數，且即使是正在使用中的結構，也可以不需要將其拆下來，可直接進行其實驗頻率量測反求識別結構彈性常數與邊界彈性支撐之性質。如此可以確保產品在生產或使用時能給予更真實之材料彈性常數與邊界條件，進而對結構安全與系統可靠度提供更有效、精確評估。

## 第 二 章 彈 性 支 撐 複 合 材 料 平 板 的 振 動 分 析

有關複合材料積層板變形理論的選用，若是考慮薄的平板時，只需要應用古典平板理論來分析即可。但對於較厚的平板時，古典平板理論將不再適用，必須將側向剪應變的影響考慮進來，可將複合材料層板的變形沿厚度方向以一階剪變形平板理論或高階剪變形平板理論來分析。

### 2.1 複合材料古典平板理論

複合材料積層板古典平板變形理論，其忽略了側向剪應變 $\gamma_{yz}$ 與 $\gamma_{xz}$ 的影響，即平板之截面在變形前垂直中間面，在變形後仍然保持平面，且垂直於中間面，並將其厚度方向變位視為常數。此一假設應用於薄的平板時可以得到不錯的結果。

#### 2.1.1 位移場與應變

根據上述假設，其位移場可表示如下

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{2-1}$$

其中  $u, v, w$  分別在平板參考座標系中  $x, y, z$  方向上之位移分量，而  $u_0, v_0, w_0$  分別代表層板中間面在方向  $x, y, z$  上之位移量， $\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}$  則分別代表垂直於  $x, y$  軸之截面的旋轉量（如圖 2-1 所示）。

利用上述的位移場，可得其應變—位移的關係

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}\end{aligned}\quad (2-2)$$

其中  $\varepsilon_x^0$ 、 $\varepsilon_y^0$  與  $\gamma_{xy}^0$  代表中間面於  $x, y, z$  方向的應變，分別為

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\quad (2-3)$$

而  $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$  代表中間面上於  $xz$ 、 $yz$  平面的彎曲曲率（Bending curvature）， $\kappa_{xy}$  代表中間面上於  $xy$  平面的面外扭轉曲率（Twisting curvature），分別為

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\quad (2-4)$$

### 2.1.2 應力與應變關係

考慮一個單層複合材料平板，在材料主軸方向的應力與應變關係可以表示如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

其中下標1表示各層纖維的方向(材料主軸方向)，而下標2表示垂直各層纖維的方向， $[Q]$ 為勁度矩陣 (Reduced stiffness matrix)，定義如下：

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{21} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2-6)$$

因複合材料是由不同角度的層板疊合而成，所以必須將材料主軸方向的性質，轉換至層板的參考座標系x軸方向，考慮參考座標系x軸與材料主軸方向之逆時針方向夾角為 $\theta$  (如圖 2-2 所示)。則在層板參考座標系的構成方程式 (Constitutive equation) 為

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \{\varepsilon\} \quad (2-7)$$

其中 $[\bar{Q}]$ 為轉換勁度矩陣 (Transformed reduced stiffness matrix) , 將

(2-7) 式展開寫成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-8)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}S^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}(C^4 + S^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})C^3S + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})CS^3 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}C^4 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})C^3S \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{66}(C^4 + S^4) \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21}, \bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{61}, \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{62} \\ C &= \cos\theta_i, S = \sin\theta_i \end{aligned} \quad (2-9)$$

從整個複合材料積層板而言，考慮各單層板之應力沿厚度方向積分，可得複合材料積層板的合力 (Force resultant) 與合力矩 (Moment resultant) (如圖 2-3 所示)，其結果如下

$$N_i = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sigma_i^n dz = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (\varepsilon_i^0 + z\kappa_i) dz = A_{ij}\varepsilon_i^0 + B_{ij}\kappa_i$$

$$M_i = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sigma_i^n z dz = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (z \varepsilon_i^0 + z^2 \kappa_i) dz = B_{ij} \varepsilon_i^0 + D_{ij} \kappa_i \quad (2-10)$$

其中  $i, j=1, 2, 6$ 。  $Z_n$  則為第  $n$  層板之下表面至中間面的距離，  $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 、 $D_{ij}$  分別代表拉伸勁度矩陣（Inplane stiffness matrix）、偶合勁度矩陣（Bending-stretching coupling stiffness matrix）、彎曲勁度矩陣（Bending stiffness matrix）。

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (1, z, z^2) dz ; i, j = 1, 2, 6 \quad (2-11)$$

現將沿厚度方向之合力與合力矩寫成矩陣（2-12）式

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{21} & B_{61} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{62} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2-12a)$$

對於層板的橫向振動(Transverse vibration)問題，可假設  $u_0(x,y)=0$  及  $v_0(x,y)=0$ 。且層板又是對稱疊層時，則（2-12a）式可簡化成（2-12b）式

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2-12b)$$

### 2.1.3 平板的應變能與動能

考慮對稱疊層複合材料積層板之長度、寬度和厚度分別為a、b和h（如圖 2-4B 所示）之自由振動，假設位移  $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$ ，積層板彎曲的最大應變能(Strain energy)可表示為

$$\begin{aligned}
 U_p &= \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{2-13}$$

振動產生橫向位移之最大動能為

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{w}^2 dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \rho h \dot{w}^2 dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^b \int_0^a W^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

### 2.1.4 平板邊界彈性支撐的應變能

邊界彈性支撐之最大應變能為包含平移彈簧之應變能  $U_t$  和旋轉彈簧之應變能  $U_r$ ，

$$U_t = \frac{1}{2} \int_S V_n W dS \tag{2-15}$$

$$U_r = -\frac{1}{2} \int_S M_n \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right) dS \tag{2-16}$$

其中  $S$  代表承受彈性支撐之邊界， $V_n$ 、 $M_n$  分別代表所受之剪力與彎曲力矩，且可以  $W$  表示成

$$V_n = K_{Ln} W \quad (2-17)$$

$$M_n = -K_{Rn} \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right) \quad (2-18)$$

若考慮平板四個邊界皆具有  $n$  段之部分彈性支撐時，若同時考慮於平板中心受一個平移彈簧支撐，將 (2-17)、(2-18) 式代入 (2-15)、(2-16) 式中，則可以得到，則  $U_B$  可表示成

$$\begin{aligned}
 U_B = & \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{K_{L1}}{2} \left[ \int_{y_{j-1}}^{y_j} W^2 dy \right]_{x=0} + \frac{K_{L2}}{2} \left[ \int_{y_{j-1}}^{y_j} W^2 dy \right]_{x=a} \right. \\
 & + \frac{K_{L3}}{2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} W^2 dy \right]_{y=0} + \frac{K_{L4}}{2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} W^2 dy \right]_{y=b} \\
 & + \frac{K_{R1}}{2} \left[ \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dy \right]_{x=0} + \frac{K_{R2}}{2} \left[ \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dy \right]_{x=a} \\
 & \left. + \frac{K_{R3}}{2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dy \right]_{y=0} + \frac{K_{R4}}{2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dy \right]_{y=b} \right\} \\
 & + \frac{k_c}{2} [W^2]_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}
 \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中  $K_{Li}$  和  $K_{Ri}$  ( $i=1, \dots, 4$ ) 分別是第  $i$  個邊界之單位長度的平移和旋轉彈簧常數； $k_c$  則是平板中心處之平移彈簧常數； $x_j, y_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) 則是第  $j$  段邊界彈性支撐結束位置之區域座標；括號中之積分是計算  $4n$  個邊界支撐。若平板四個邊界皆是承受一完整之彈性支撐時，則 (2-19) 式中之  $n=1$ ，且  $x_0 = 0, x_1 = a, y_0 = 0, y_1 = b$ 。具撓性支撐平板之總勢位能為

$$\begin{aligned}\Pi &= U - T \\ &= U_P + U_B - T\end{aligned}\quad (2-20)$$

### 2.1.5 瑞雷－里茲法(Rayleigh-Rize method)與特徵值、特徵向量

將撓度函數(Deflection function)  $W(\xi, \eta)$ ，應用 Rayleigh-Ritz 方法以級數方式表示為

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij} \phi_i(\xi) \varphi_j(\eta) \quad (2-21)$$

其中  $C_{ij}$  為未定係數， $\phi_i(\xi)$ 、 $\varphi_j(\eta)$  是以 Legendre's 正交多項式函數所組成， $\xi = 2x/a - 1$ 、 $\eta = 2y/b - 1$ 。而 Legendre's 正交多項式函數  $\phi_i(\xi)$  表示如下

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= 1, \\ \phi_2(\xi) &= \xi,\end{aligned}\quad -1 \leq \xi \leq 1$$

當  $n \geq 3$  時

$$\phi_n(\xi) = [(2n - 3)\xi \times \phi_{n-1}(\xi) - (n - 2) \times \phi_{n-2}(\xi)] / (n - 1) \quad (2-22)$$

其滿足正交特性，具有如下之關係

$$\int_{-1}^1 \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & , \text{若 } n \neq m \\ 2/2n - 1 & , \text{若 } n = m \end{cases} \quad (2-23)$$

將 (2-21) 式代入 (2-20) 式，並且由  $\delta\Pi = 0$ ，即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial (U - T)}{\partial C_{ij}} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \dots I, J \quad (2-24)$$

可得到複合材料積層板古典平板理論，其自然振動之控制特徵方程式  
(Governing eigenvalue equation)

$$([\mathbf{K}]-\omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{C}\}=0 \quad (2-25)$$

其中  $\mathbf{K}=\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_B$ ； $\mathbf{K}$  是結構之勁度矩陣； $\mathbf{K}_p$  是由平板所提供之勁度矩陣； $\mathbf{K}_B$  則是由邊界支撐所貢獻之勁度矩陣。詳細之  $\mathbf{K}_p$ 、 $\mathbf{K}_B$  和  $\mathbf{M}$  表示如下

$$[K_p]_{mnij}=16\left\{D_{11}E_{mi}^{22}F_{nj}^{00}/a^4+D_{12}(E_{mi}^{02}F_{nj}^{20}+E_{mi}^{20}F_{nj}^{02})/(a^2b^2)+D_{22}E_{mi}^{00}F_{nj}^{22}/b^4\right. \\ \left.+2D_{16}(E_{mi}^{21}F_{nj}^{01}+E_{mi}^{12}F_{nj}^{10})/(a^3b)+2D_{26}(E_{mi}^{01}F_{nj}^{21}+E_{mi}^{10}F_{nj}^{12})/(ab^3)\right. \\ \left.+4D_{66}E_{mi}^{11}F_{nj}^{11}/(a^2b^2)\right\} \quad (2-26)$$

$$[K_B]_{mnij}=2\sum_{p=1}^P\left\{\left[K_{L1}J_{nj}^p\phi_m(-1)\phi_i(-1)+K_{L2}J_{nj}^p\phi_m(1)\phi_i(1)\right]/a\right. \\ \left.+ \left[K_{L3}I_{mi}^p\varphi_n(-1)\varphi_j(-1)+K_{L4}I_{mi}^p\varphi_n(1)\varphi_j(1)\right]/b\right\} \\ +8\sum_{p=1}^P\left\{\left[K_{R1}J_{nj}^p\phi_m'(-1)\phi_i'(-1)+K_{R2}J_{nj}^p\phi_m'(1)\phi_i'(1)\right]/a^3\right. \\ \left.+ \left[K_{R3}I_{mi}^p\varphi_n'(-1)\varphi_j'(-1)+K_{R4}I_{mi}^p\varphi_n'(1)\varphi_j'(1)\right]/b^3\right\} \\ +4k_c\phi_m(0)\phi_i(0)\varphi_n(0)\varphi_j(0)/(ab) \quad (2-27)$$

$$[M]_{mnij}=\rho hE_{mi}^{00}F_{nj}^{00} \quad (2-28)$$

$$m, i=1, 2, 3, \dots, M, I; \quad n, j=1, 2, 3, \dots, N, J; \quad p=1, 2, 3, \dots, P$$

而

$$E_{mi}^{rs}=\int_{-1}^1\left[\frac{d^r\phi_m(\xi)}{d\xi^r}\frac{d^s\phi_i(\xi)}{d\xi^s}\right]d\xi; \quad F_{nj}^{rs}=\int_{-1}^1\left[\frac{d^r\varphi_n(\eta)}{d\eta^r}\frac{d^s\varphi_j(\eta)}{d\eta^s}\right]d\eta; \quad r, s=0, 1, 2 \quad (2-29a)$$

$$I_{mi}^p=\int_{\xi_{p-1}}^{\xi_p}[\phi_m(\xi)\phi_i(\xi)]d\xi; \quad J_{nj}^p=\int_{\eta_{p-1}}^{\eta_p}[\varphi_j(\eta)\varphi_n(\eta)]d\eta \quad (2-29b)$$

其中  $\xi_p$  和  $\eta_p$  是第  $p$  段支撐之起始與終點自然座標。

## 2.2 複合材料一階剪變形平板理論

當複合材料平板不再是薄板時，應用一階剪變形平板理論，將側向剪應變 $\gamma_{yz}$ 與 $\gamma_{xz}$ 的效應考慮進來，可以改善古典平板理論的缺點而與實際情形較接近。假設平板之剖面在變形前垂直中間面，在變形後仍然保持平面，惟未必仍垂直於中間面。

### 2.2.1 位移場與應變

根據上述假設，其位移場可表示如下

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{2-30}$$

其中 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 分別在平板參考座標中 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 上之位移分量，而 $u_0$ 、 $v_0$ 、 $w_0$ 分別代表積層板中間面在方向 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 上之位移量， $\theta_x(x, y)$ 、 $\theta_y(x, y)$ 則分別代表垂直於 $x$ 、 $y$ 軸之截面的旋轉量（如圖2-5所示）。

利用上述的位移場，可得其應變—位移的關係

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \varepsilon_y^0 + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-31)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}^0 + z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)$$

由以上的應變場可以看出， $\gamma_{yz}$  和  $\gamma_{xz}$  沿厚度方向為一常數分佈，與實際之拋物線分佈有所不同。



## 2.2.2 應力與應變關係

考慮一個單層複合材料平板，在材料主軸方向的應力與應變關係可以表示如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

其中下標1表示各層纖維的方向(材料主軸方向)，而下標2表示垂直各層纖維的方向， $[Q]$ 為勁度矩陣，定義如下：

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2-33)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad , \quad Q_{55} = G_{13} = G_{12} \quad , \quad Q_{66} = G_{12}$$

因複合材料是由不同角度的層板疊合而成，所以必須將材料主軸方向的性質，轉換至層板的參考座標系x軸方向，考慮參考座標系x軸與材料主軸方向之逆時針方向夾角為 $\theta$ （如圖 2-2 所示）。則在層板參考座標系的構成方程式為

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}] \{\varepsilon\} \quad (2-34)$$

其中 $[\bar{Q}]$ 為轉換勁度矩陣，將（2-34）式展開寫成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-35)$$

其中

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}S^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}(C^4 + S^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}C^4$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})C^3S + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})CS^3$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})C^3S \quad (2-36)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{66}(C^4 + S^4)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}C^2 + Q_{55}S^2$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}C^2 + Q_{44}S^2$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})CS$$

$$C = \cos \theta_i, \quad S = \sin \theta_i$$

從整個複合材料積層板而言，考慮各單層板之應力沿厚度方向積分，可得複合材料積層板的合力與合力矩（如圖 2-3 所示），其結果如下

$$N_i = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sigma_i^n dz = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (\varepsilon_i^0 + z\theta_{i,i}) dz = A_{ij}\varepsilon_i^0 + B_{ij}\theta_{i,i}$$

$$(Q_x, Q_y) = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} (\sigma_{xz}^n, \sigma_{yz}^n) dz \quad (2-37)$$

$$M_i = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \sigma_i^n z dz = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (z\varepsilon_i^0 + z^2\theta_{i,i}) dz = B_{ij}\varepsilon_i^0 + D_{ij}\theta_{i,i}$$

其中  $i, j = 1, 2, 6$ ,  $Z_n$  則為第  $n$  層板之下表面至中間面的距離， $A_{ij}$ 、 $B_{ij}$ 、 $D_{ij}$  分別代表拉伸勁度矩陣、偶合勁度矩陣、彎曲勁度矩陣。

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^n (1, z, z^2) dz; \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2-38)$$

$$A_{ij} = k_\alpha k_\beta \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^n t_n; \quad (i, j = 4, 5) \quad (2-39)$$

(2-39) 式中， $k_\alpha$ 、 $k_\beta$  為剪力修正係數，是參考 Whitney [8] 所建議之方式決定修正係數，如附錄一所示。

現將沿厚度方向之合力與合力矩寫成矩陣 (2-40) 式

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ Q_y \\ Q_x \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ w_{,y} + \theta_y \\ w_{,x} + \theta_x \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (2-40)$$

考慮疊層角度對稱之複合材料積層板，且橫向振動問題，可假設其  $u_0$ 、 $v_0$  為零，(2-40) 式可簡化成 (2-41) 式

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \\ \theta_y + w_{,y} \\ \theta_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2-41)$$

### 2.2.3 平板的應變能與動能

考慮複合材料平板之長度、寬度和厚度分別為  $a$ 、 $b$  和  $h$  (如圖 2-4B 所示)，平板彎曲的最大應變能可表示為

$$\begin{aligned}
U_P &= \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \\
&= \frac{1}{2} \int_A [D_{11} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\
&\quad + 2D_{16} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + 2D_{26} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 \\
&\quad + A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right)^2 + 2A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) + A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right)^2] dA
\end{aligned} \tag{2-42}$$

振動產生橫向位移之最大動能為

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_A \rho h \omega^2 (\theta_x^2 + \theta_y^2 + w^2) dA
\end{aligned} \tag{2-43}$$

## 2.2.4 平板邊界彈性支撐的應變能

邊界彈性支撐之最大應變能為包含平移彈簧之應變能  $U_t$  和旋轉彈簧之應變能  $U_r$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_S V_n W dS \tag{2-44}$$

$$U_r = \frac{1}{2} \int_S M_n \Theta_i dS \quad ; \quad i = x, y \tag{2-45}$$

其中  $S$  代表承受彈性支撐之邊界， $V_n$ 、 $M_n$  分別代表所受之剪力與彎曲力矩，且可以  $W$  與  $\Theta_i$  表示成

$$V_n = K_{Ln} W \tag{2-46}$$

$$M_n = -K_{Rn} \Theta_i \tag{2-47}$$

將 (2-46) 、 (2-47) 式代入 (2-44) 、 (2-45) 式中，可以得到

$$\begin{aligned}
 U_B = & \frac{K_{L1}}{2} \left[ \int_0^b W^2 dy \right]_{x=0} + \frac{K_{L2}}{2} \left[ \int_0^b W^2 dy \right]_{x=a} \\
 & + \frac{K_{L3}}{2} \left[ \int_0^a W^2 dy \right]_{y=0} + \frac{K_{L4}}{2} \left[ \int_0^a W^2 dy \right]_{y=b} \\
 & + \frac{K_{R1}}{2} \left[ \int_0^b \Theta_x^2 dy \right]_{x=0} + \frac{K_{R2}}{2} \left[ \int_0^b \Theta_x^2 dy \right]_{x=a} \\
 & + \frac{K_{R3}}{2} \left[ \int_0^a \Theta_y^2 dy \right]_{y=0} + \frac{K_{R4}}{2} \left[ \int_0^a \Theta_y^2 dy \right]_{y=b}
 \end{aligned} \tag{2-48}$$

其中  $K_{L1}$  、 ... 、  $K_{L4}$  與  $K_{R1}$  、 ... 、  $K_{R4}$  分別表示於邊界  $x=0$  ,  $a$  和  $y=0$  ,  $b$  之單位長度的平移與旋轉彈簧常數 (如圖 2-4B 所示) 。具撓性支撐平板之總勢位能為

$$\begin{aligned}
 \Pi = & U - T \\
 = & U_P + U_B - T
 \end{aligned} \tag{2-49}$$



### 2.2.5 瑞雷－里茲法與特徵值、特徵向量

將撓度函數  $W$  及橫切面轉角函數 (Cross-sectional rotation function)  $\Theta_x$  、  $\Theta_y$  ，應用 Rayleigh-Ritz 方法以級數方式分別表示為

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \eta) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij} \Phi_i(\xi) \Psi_j(\eta) \\
 \Theta_x(\xi, \eta) = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \Phi_m(\xi) \Psi_n(\eta) \\
 \Theta_y(\xi, \eta) = & \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q C_{pq} \Phi_p(\xi) \Psi_q(\eta)
 \end{aligned} \tag{2-50}$$

其中  $C_{ij}, C_{mn}, C_{pq}$  為未定係數， $\Phi$ 、 $\Psi$  是以 Legendre's 正交多項式函數所組成， $\xi = 2x/a - 1$ 、 $\eta = 2y/b - 1$ 。而 Legendre's 正交多項式函數  $\Phi(\xi)$  表示如 (2-22) 式所示，其滿足正交特性，如 (2-23) 式所示。將 (2-50) 式代入 (2-49) 式，並且由  $\delta\Pi = 0$ ，即

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Pi}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial(U-T)}{\partial C_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots I, J \\ \frac{\partial\Pi}{\partial C_{mn}} &= \frac{\partial(U-T)}{\partial C_{mn}} = 0, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots M, N \\ \frac{\partial\Pi}{\partial C_{pq}} &= \frac{\partial(U-T)}{\partial C_{pq}} = 0, \quad p, q = 1, 2, 3 \dots P, Q \end{aligned} \quad (2-51)$$

可得到複合材料平板應用一階剪變形理論，其自然振動控制特徵方程式

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{C}\} = 0 \quad (2-52)$$

其中  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_B$ ； $\mathbf{K}$  是結構之勁度矩陣； $\mathbf{K}_p$  是由平板所提供之勁度矩陣； $\mathbf{K}_B$  則是由邊界支撐所貢獻之勁度矩陣； $\omega$  為平板結構振動的自然頻率。(2-52) 式可以表示成

$$\left( \begin{bmatrix} K^{aa} & K^{ab} & K^{ac} \\ & K^{bb} & K^{bc} \\ symmetric & & K^{cc} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{aa} & 0 & 0 \\ 0 & M^{bb} & 0 \\ 0 & 0 & M^{cc} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ C_{mn} \\ C_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-53)$$

其中

$$\begin{aligned}
\left[ K^{aa} \right]_{ij\bar{j}} &= 4 \times \left[ A_{44} E_{i\bar{i}}^{00} F_{j\bar{j}}^{11} / b^2 + A_{45} \left( E_{i\bar{i}}^{01} F_{j\bar{j}}^{10} + E_{i\bar{i}}^{10} F_{j\bar{j}}^{01} \right) / ab \right. \\
&\quad \left. + A_{55} E_{i\bar{i}}^{11} F_{j\bar{j}}^{00} / a^2 \right] + 2 \times \left\{ F_{j\bar{j}}^{00} \left[ K_{L1} \phi_i(-1) \phi_{\bar{i}}(-1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_{L2} \phi_i(1) \phi_{\bar{i}}(1) \right] / a + E_{i\bar{i}}^{00} \left[ K_{L3} \phi_j(-1) \phi_{\bar{j}}(-1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_{L4} \phi_j(1) \phi_{\bar{j}}(1) \right] / b \right\} \\
\left[ K^{ab} \right]_{ijmn} &= 2 \times \left( A_{45} E_{mi}^{00} F_{nj}^{10} / b + A_{55} E_{mi}^{10} F_{nj}^{00} / a \right) \\
\left[ K^{ac} \right]_{ijpq} &= 2 \times \left( A_{44} E_{ip}^{00} F_{jq}^{10} / b + A_{45} E_{ip}^{10} F_{jq}^{00} / a \right) \\
\left[ K^{bb} \right]_{mn\bar{m}\bar{n}} &= 4 \times \left[ D_{11} E_{m\bar{m}}^{11} F_{n\bar{n}}^{00} / a^2 + D_{13} \left( E_{m\bar{m}}^{01} F_{n\bar{n}}^{10} + E_{m\bar{m}}^{10} F_{n\bar{n}}^{01} \right) / ab \right. \\
&\quad \left. + D_{33} E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{11} / b^2 \right] + A_{55} E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{00} + 2 \times F_{\phi n \phi \bar{n}}^{00} \times \\
&\quad \left[ K_{R1} \phi_m(-1) \phi_{\bar{m}}(-1) + K_{R2} \phi_m(1) \phi_{\bar{m}}(1) \right] / a \\
\left[ K^{bc} \right]_{mnpq} &= 4 \times \left\{ D_{13} E_{mp}^{11} F_{nq}^{00} / a^2 + \left[ D_{12} E_{mp}^{10} F_{nq}^{01} + D_{33} E_{mp}^{01} F_{nq}^{10} \right] / ab \right. \\
&\quad \left. + D_{23} E_{mp}^{00} F_{nq}^{11} / b^2 \right\} + A_{45} E_{mp}^{00} F_{nq}^{00} \\
\left[ K^{cc} \right]_{pq\bar{p}\bar{q}} &= 4 \times \left[ D_{33} E_{p\bar{p}}^{11} F_{q\bar{q}}^{00} / a^2 + D_{23} \left( E_{p\bar{p}}^{10} F_{q\bar{q}}^{01} + E_{p\bar{p}}^{01} F_{q\bar{q}}^{10} \right) / ab \right. \\
&\quad \left. + D_{22} E_{p\bar{p}}^{00} F_{q\bar{q}}^{11} / b^2 \right] + A_{44} E_{p\bar{p}}^{00} F_{q\bar{q}}^{00} + 2 \times E_{p\bar{p}}^{00} \left[ K_{R3} \phi_q(-1) \phi_{\bar{q}}(-1) \right. \\
&\quad \left. + K_{R4} \phi_q(1) \phi_{\bar{q}}(1) \right] / b
\end{aligned} \tag{2-54}$$

$$\left[ M^{aa} \right]_{ij\bar{j}} = \rho h E_{i\bar{i}}^{00} F_{j\bar{j}}^{00} ; \quad \left[ M^{bb} \right]_{mn\bar{m}\bar{n}} = \rho h^3 E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{00} / 12$$

$$\left[ M^{cc} \right]_{pq\bar{p}\bar{q}} = \rho h^3 E_{p\bar{p}}^{00} F_{q\bar{q}}^{00} / 12$$

$$i, j, \bar{i}, \bar{j} = 1, 2, 3, \dots, I, J; \quad m, n, \bar{m}, \bar{n} = 1, 2, 3, \dots, M, N$$

$$p, q, \bar{p}, \bar{q} = 1, 2, 3, \dots, P, Q$$

而其中

$$E_{mi}^{rs} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^r \phi_m(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s \phi_i(\xi)}{d\xi^s} \right] d\xi; \quad F_{ij}^{rs} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^r \phi_n(\eta)}{d\eta^r} \frac{d^s \phi_j(\eta)}{d\eta^s} \right] d\eta; \quad r, s = 0, 1 \tag{2-55}$$

## 2.3 複合材料多層一階剪變形平板理論

由於複合材料厚板是由很多不同纖維角度的層板所組成，其每一層間在同一方向上的勁度差異很大；或是三明治平板結構，其面層和心層在同一方向上的勁度亦是差異懸殊。上述原因將造成其位移場於厚度方向的變化很劇烈，若仍只用一個一階剪變形位移場理論，沿整個厚度方向的位移斜率為相同的一直線，將會與實際情形有很大的差異。因此考慮將每一層當成一個一階剪變形位移場，且其層間位移連續性也考慮在內，如此沿平板整個厚度方向的位移會由許多不同斜率的直線所組成（如圖 2-6 所示）。

### 2.3.1 位移場與應變

本理論將各層皆視為一個一階剪變形的平板來分析，隨著層數的增加其位移場自由度將增加。以  $X$  軸方向為例，由圖 2-6 可知，第一層的位移是由中間面位移  $u_0$  和一旋轉角  $\theta_x^{(1)}$  所組成，而基於層間位移必須滿足連續的條件，第二層的位移是以第一層與第二層交界面的位移為基礎，再旋轉一個的  $\theta_x^{(2)}$  來模擬第二層的變位。同理，第三層是以第一層與第三層交界面的位移為基礎，再旋轉一個的  $\theta_x^{(3)}$  來模擬第三層的變位。根據上述假設，其位移場可表示如下

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u_0(x, y) + \xi^{(1)} \theta_x^{(1)}(x, y) \\ u^{(2)} &= u_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) + (z - \frac{t_1}{2}) \theta_x^{(2)}(x, y) \\ &= u_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) + \xi^{(2)} \theta_x^{(2)}(x, y) \end{aligned} \quad (2-56)$$

$$\begin{aligned}
u^{(3)} &= u_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) + (z + \frac{t_1}{2}) \theta_x^{(3)}(x, y) \\
&= u_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) + \xi^{(3)} \theta_x^{(3)}(x, y)
\end{aligned}$$

其中為各單層的局部座標，定義如圖 2-6 所示。

同理可得

$$\begin{aligned}
v^{(1)} &= v_0(x, y) + \xi^{(1)} \theta_y^{(1)}(x, y) \\
v^{(2)} &= v_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) + (z - \frac{t_1}{2}) \theta_y^{(2)}(x, y) \\
&= v_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) + \xi^{(2)} \theta_y^{(2)}(x, y)
\end{aligned} \tag{2-57}$$

$$\begin{aligned}
v^{(3)} &= v_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) + (z + \frac{t_1}{2}) \theta_y^{(3)}(x, y) \\
&= v_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) + \xi^{(3)} \theta_y^{(3)}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^{(1)} &= w_0(x, y) = w(x, y) \\
w^{(2)} &= w_0(x, y) = w(x, y) \\
w^{(3)} &= w_0(x, y) = w(x, y)
\end{aligned} \tag{2-58}$$

其中  $u^{(k)}$ ， $v^{(k)}$ ， $w^{(k)}$  分別在第  $k$  個分層平板參考座標中  $x$ 、 $y$ 、 $z$  上之位移分量，而  $u_0$ ， $v_0$ ， $w_0$  分別代表第一個分層中間面在方向  $x$ 、 $y$ 、 $z$  上之位移量， $\theta_x^{(k)}(x, y)$ 、 $\theta_y^{(k)}(x, y)$  則分別代表第  $k$  個分層於垂直  $x$ 、 $y$  軸之截面上的旋轉量（如圖 2-6 所示）。

當層數增加時，可以得到以下通式：

$$u^{(1)} = u_0(x, y) + \xi^{(1)} \theta_x^{(1)}(x, y)$$

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0(x, y) + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_x^{(i)}(x, y) + (z - \frac{t_1}{2} - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} t_i) \theta_x^{(i)}(x, y) \\ &= u_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_x^{(i)}(x, y) + \xi^{(i)} \theta_x^{(i)}(x, y) \quad (k=2,4,6,\dots) \end{aligned} \quad (2-59)$$

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0(x, y) - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_x^{(i)}(x, y) + (z + \frac{t_1}{2} + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} t_i) \theta_x^{(i)}(x, y) \\ &= u_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_x^{(1)}(x, y) - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_x^{(i)}(x, y) + \xi^{(i)} \theta_x^{(i)}(x, y) \quad (k=3,5,7,\dots) \end{aligned}$$

同理

$$v^{(1)} = v_0(x, y) + \xi^{(1)} \theta_y^{(1)}(x, y)$$

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= v_0(x, y) + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_y^{(i)}(x, y) + (z - \frac{t_1}{2} - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} t_i) \theta_y^{(i)}(x, y) \\ &= v_0(x, y) + \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_y^{(i)}(x, y) + \xi^{(i)} \theta_y^{(i)}(x, y) \quad (k=2,4,6,\dots) \end{aligned} \quad (2-60)$$

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= v_0(x, y) - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_y^{(i)}(x, y) + (z + \frac{t_1}{2} + \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} t_i) \theta_y^{(i)}(x, y) \\ &= v_0(x, y) - \frac{t_1}{2} \theta_y^{(1)}(x, y) - \sum_{i=2,4,\dots}^{k-2} \frac{t_i}{2} \theta_y^{(i)}(x, y) + \xi^{(i)} \theta_y^{(i)}(x, y) \quad (k=3,5,7,\dots) \end{aligned}$$

$$w^{(k)} = w_0(x, y) = w(x, y) \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2-61)$$

上述方程式中之 $k$ ，表示第 $k$ 個分層。考慮分成三層時，利用上述的位移場，對於層板的橫向振動問題，可假設 $u_0(x, y) = 0$ 及 $v_0(x, y) = 0$ ，其應變一位移的關係

$$\left[ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \right] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi^{(1)} \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} \\ \xi^{(1)} \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} \\ \theta_y^{(1)} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_x^{(1)} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \xi^{(1)} \left( \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2-62)$$

$$\left[ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \right] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} \\ \frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} + \xi_2 \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} \\ \theta_y^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_x^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{t_1}{2} \left( \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} \right) + \xi_2 \left( \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2-63)$$

$$\left[ \varepsilon^{(3)} \right] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{yz}^{(3)} \\ \gamma_{xz}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} + \xi_3 \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial x} \\ -\frac{t_1}{2} \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial y} \\ \theta_y^{(3)} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_x^{(3)} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\frac{t_1}{2} \left( \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} \right) + \xi_3^{(3)} \left( \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2-64)$$

### 2.3.2 應力與應變關係

複合材料多層一階剪變形平板理論，其單層之應力與應變關係與一階剪變形平板理論是相同的，所以與 2.2.2 節相同。只是要注意的是，因為本文的多層一階剪變形平板理論其座標軸只有第一層是置於其中間面，於其他層處並非如此。因此，若將複合材料三明治板分成三個分層時，不管上、下面層其疊層角度對稱與否，(2-40) 式並不能直接簡化成 (2-41) 式，因為上、下面層處的  $B_{ij}$  矩陣並非為零。

### 2.3.3 平板的應變能與動能

考慮複合材料平板層數為三層時，其長度、寬度和厚度分別為  $a$ 、 $b$  和  $h$  (如圖 2-4B 所示)，而  $i$  表示第  $i$  層。平板彎曲的最大應變能可表示為

$$U_P = \sum_{k=1}^3 \int_{V^{(k)}} \frac{1}{2} \sigma^{(k)T} \varepsilon^{(k)} dV^{(k)} \quad (2-65)$$

振動產生橫向位移之最大動能為

$$T = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \int_{V^{(k)}} \rho^{(k)} \left( \dot{u}^{(k)^2} + \dot{v}^{(k)^2} + \dot{w}^{(k)^2} \right) dV^{(k)} \quad (2-66)$$

### 2.3.4 平板邊界彈性支撐的應變能

邊界彈性支撐之最大應變能為包含平移彈簧之應變能  $U_t$  和旋轉彈簧之應變能  $U_r$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_S V_n W dS \quad (2-67)$$

$$U_r = \frac{1}{2} \int_S M_n \Theta_i dS \quad ; \quad i = x, y \quad (2-68)$$

其中  $S$  代表承受彈性支撐之邊界， $V_n$ 、 $M_n$  分別代表所受之剪力與彎曲力矩，且可以  $W$  與  $\Theta_k$  表示成

$$V_n = K_{Ln} W \quad (2-69)$$

$$M_n = -K_{Rn} \Theta_i \quad ; \quad i = x, y \quad (2-70)$$

將 (2-69) 式、(2-70) 式代入 (2-67) 式、(2-68) 式中，可得到

$$\begin{aligned} U_B = & \frac{K_{L1}}{2} \left[ \int_0^b W^2 dy \right]_{x=0} + \frac{K_{L2}}{2} \left[ \int_0^b W^2 dy \right]_{x=a} \\ & + \frac{K_{L3}}{2} \left[ \int_0^a W^2 dx \right]_{y=0} + \frac{K_{L4}}{2} \left[ \int_0^a W^2 dx \right]_{y=b} \\ & + \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{K_{R1}^{(k)}}{2} \left[ \int_0^b \Theta_x^{(k)^2} dy \right]_{x=0} + \frac{K_{R2}^{(k)}}{2} \left[ \int_0^b \Theta_x^{(k)^2} dy \right]_{x=a} \right. \\ & \left. + \frac{K_{R3}^{(k)}}{2} \left[ \int_0^a \Theta_y^{(k)^2} dx \right]_{y=0} + \frac{K_{R4}^{(k)}}{2} \left[ \int_0^a \Theta_y^{(k)^2} dx \right]_{y=b} \right\} \quad ; \quad k=1,2,3 \end{aligned} \quad (2-71)$$

其中  $K_{Li}$  第  $i$  個邊之單位長度平移彈簧常數；  $K_{Ri}^{(k)}$  為第  $k$  分層的第  $i$  個邊上單位長度旋轉彈簧常數。

總勢位能為

$$\begin{aligned}\Pi &= U - T \\ &= U_P + U_B - T\end{aligned}\quad (2-72)$$

### 2.3.5 瑞雷－里茲法與特徵值、特徵向量

將撓度函數  $W$  及橫切面轉角函數  $\Theta_x^{(k)}, \Theta_y^{(k)}$  ( $k=1, 2, 3$ ) 等七個，應用 Rayleigh-Ritz 方法以級數方式分別表示為

$$\begin{aligned}W(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij}^{(1)} \phi_i^{(1)}(\xi) \phi_j^{(1)}(\eta) \\ \Theta_x^{(k)}(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}^{(2k)} \phi_m^{(2k)}(\xi) \phi_n^{(2k)}(\eta) \quad k=1 \sim 3 \\ \Theta_y^{(k)}(\xi, \eta) &= \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q C_{pq}^{(2k+1)} \phi_p^{(2k+1)}(\xi) \phi_q^{(2k+1)}(\eta)\end{aligned}\quad (2-73)$$

其中  $C_{ij}^{(1)}, C_{mn}^{(2k)}, C_{pq}^{(2k+1)}$  為未定係數， $\Phi$ 、 $\Psi$  是以 Legendre's 正交多項式函數所組成， $\xi = 2x/a - 1$ 、 $\eta = 2y/b - 1$ 。而 Legendre's 正交多項式函數  $\Phi(\xi)$  如 (2-22) 式所示，其滿足正交特性，如 (2-23) 式所示。將 (2-73) 式代入 (2-72) 式，並且由  $\delta\Pi = 0$ ，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial C_{ij}^{(1)}} &= \frac{\partial(U - T)}{\partial C_{ij}^{(1)}} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots I, J \\ \frac{\partial\Pi}{\partial C_{mn}^{(2k)}} &= \frac{\partial(U - T)}{\partial C_{mn}^{(2k)}} = 0, \quad m, n = 1, 2, 3 \dots M, N\end{aligned}\quad (2-74)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{pq}^{(2k+1)}} = \frac{\partial (U - T)}{\partial C_{pq}^{(2k+1)}} = 0, \quad p, q = 1, 2, 3 \dots P, Q$$

可得到複合材料平板三層一階剪變形平板理論，其自然振動之控制特徵方程式

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{C}\} = 0 \quad (2-75)$$

其中  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_B$ ； $\mathbf{K}$  是結構之勁度矩陣； $\mathbf{K}_p$ 、 $\mathbf{K}_B$  分別是由平板、邊界支撐所提供之勁度矩陣； $\mathbf{M}$  為質量矩陣，經由求解上式即可得到平板結構振動的自然頻率  $\omega$ 。(2-75) 式之詳細組成內容如附錄二所示。



### 第三章 最佳化總域極小化理論

「最佳化方法」是指找出問題其「最好的解決方案」的方法。此法已被廣泛運用在解決數學、應用科學、工程、生物科技、商業和管理等領域的最佳化問題上，例如在工程上，考量產品尺寸選用材料組合、成本、強度等因素；在商業和管理上，有關排班表、投資組合、人員與物流管理等，都是最佳化的問題。另外，尤其是有些領域上的問題是沒有解析解的，或是問題同時有太多的考量因素與條件時，都可以將這些棘手的問題轉換變成數學模式的最佳化問題，再藉由電腦的計算和模擬，而獲得解答。本文正是要應用最佳化方法，以非破壞方式識別複合材料板結構的材料常數與邊界支撐彈簧常數，在文中將簡明地敘述這個方法及最佳化演算法的基本概念。

傳統有關求解最佳化模型的數值方法 [27~31]，可以沒有限制條件和有限制條件來區分。首先考慮「沒有限制條件」：（一）單變數函數最小值搜尋，這是多變數目標函數最小值演算法的基礎，而其方法有解析解方法求函數一次微分為零的解；若一次微分很難求得、不存在或不連續時，應用數值迭代方式直接求解的零次方法，如二分法的「費邦那西搜尋」（Fibonacci Search）、「黃金分割搜尋」（Golden Section Search）和割線法（Secant Method）；或使用二次方法的多項式近似法之「牛頓法」等。（二）多變數函數最小值搜尋，其方法有「零次方法」的隨機搜尋法、前面提到的「費邦那西搜尋」、「黃金分割搜尋」；或使用一次、二次之直線搜尋（Line Search）法，如「準牛頓法」（Quasi-Newton Method）、「牛頓法」

(Netwoon Method)。接下來則是考慮「有限制條件」：(一) 單變數函數最小值搜尋，其方法有直接搜尋法（多項式近似法、費邦那西搜尋法與黃金分割搜尋法）；或懲罰函數 (Penalty Function) 法配合循序無限制 (Sequential Unconstrained) 條件最小化技巧，將問題轉換為無限制條件最佳化問題。(二) 多變數函數最小值搜尋，其方法有「直接搜尋法」的可行方向法、梯度投影法；應用「懲罰函數法配合循序無限制條件最小化技巧」將原先的有限制條件的非線性問題，轉換成一系列的無限制條件最佳化問題；線性規算法 (Linear Programing, LP)；或是循序線性規算法 (Sequential Linear Programing, SLP) 與循序非線性規算法 (SNLP) 等。

另外；相關的最佳化方法還有「模擬退火法」 (Simulated Annealing Algorithm) [44~47]、「基因演算法」 (Genetic Algorithm) [48~53] 與「類神經網路」 (Artificail Neural Networks) [54~57] 等。模擬退火法，是從「統計力學」觀念發展而來，通常物質必須經由高溫緩緩退火，才能使晶粒有足夠的時間移動到其最低能量的組成形態。一般的演算法搜尋過程中，不斷尋找降低目標函數的可行解，若像「快速淬火」的過程則容易困在區域極小值中，而模擬退火法則是要能使目標函數從區域極小值中跳脫，找到總域極小值，因此迭代過程必須容許「上坡」，即目標函數些微上升的解。模擬退火法需要不斷的評估非常多的設計點是其缺點。基因演算法的概念是從達爾文 (Charles Darwing) 的「物競天擇，適者生存，不適者淘汰」的進化理論發展而來，解釋了自然界的基本現象，物種在不斷變遷或惡劣的環境中為了生存及適應環境，而不斷進化，產生生存力及適應力更強

的下一代。遺傳演算法的運算，是將參數經過二進位編碼成一字串（就像是生物的基因 DNA），隨機重複 N 個字串的原始族群（Population）代表不同的設計點，然後這些設計點的基因可經由複製（Reproduction）、交配（Crossover）及突變（Mutation）等過程產生下一代。最適應的基因組合（可行且目標函數小者）將會被加強，而不合適的基因組合則會被淘汰。經由每一代間進行演化的過程，而生存者繼續藉由繁殖不僅將優良的基因延續，還有可能使下一代擁有更好的基因。而新產生的族群就作為搜尋的新出發點，對整個搜尋空間做逐次的搜尋，經過數代之後尋得問題的最佳解。基因遺傳法的特色如下：「多點的搜尋法則」，同時考慮搜尋空間上的多個點而多點搜尋；以編碼進行運算而不是參數本身，「跳脫搜尋空間的限制」（如連續、可微）；只需要適應函數的資訊（目標函數值），不需要導數或其它輔助資訊，「運算簡單」；搜尋的過程並非經由固定的路徑，而是經由「機率規則」方式來引導搜尋的方向。缺點為許多問題有編碼上的困難（編碼細節的好壞會影響結果的好壞）；不保證最適化（當結論太快出現時，結果可能會接近最佳方案卻不是最佳方案）、運算成本極高（需經由複製、交配及突變產生下一代，且當計算代數越多可降低誤差，但花費的時間越多）、可以運用的商業套裝軟體不多。

類神經網路，是一種以電腦來模擬人類腦神經細胞網路的科學。在人們逐漸了解腦細胞的思考與學習模式後，希望電腦也能用類似人的方式來解決問題。而對於類神經網路而言，許多的節點就像是一個個的處理器，可以同時地接受輸入訊號並產生輸出。在類神經網路模

型中，許多同一層的節點彼此是不相關的，要找到這些節點各自的最佳連接權值，常常需要學習很長的一段時間。即使找到了最佳解，往往也只是區域最佳解（Local optimal）。因此基因演算法可以幫助類神經網路跳出區域最佳解，藉著不同的連接權值範圍之間的交配與突變，學習可以在一個新的地域開始。這一點對於需要全域最佳解（Global optimal）的類神經網路而言是很重要的。

### 3.1 最佳化設計（Optimal Design）

在工程設計上，整個設計的流程其實很自然的包含了迴圈形式的迭代過程。設計者經由不斷地深入了解問題，思考解決方法、而產生了各種新的方案，再藉由不斷的試驗評估其可行性，最後在有限的時間和資源條件限制下，找出一個最好的解決方案，而這其實就正是最佳化設計的流程。最佳化設計乃是尋找一組變數  $x$ ，而  $x \in X \subset R^n$ ，使得在受某些限制條件下或在不受限制條件的系統模式（目標函數） $F(x)$  能夠達到最佳性能（目標函數之最大值或最小值）。最佳化設計的程序，是先經由有系統的整理相關領域知識後，再將實際問題建立成正確的最佳化數學模型，再以數值方法求解最佳的解，數值方法概以沿著搜尋軌跡做反覆迭代來改變設計變數的值以達到目標函數之最佳解。而最佳化設計其數學標準形式描述如下：

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, p \\ & g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 ; \quad k = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$x_{il} \leq x_i \leq x_{iu} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

其中  $n$ 、 $p$  和  $m$  分別為設計變數、等式限制條件及不等式限制條件之數目， $x_{il}$  和  $x_{iu}$  則為設計變數之合理上、下限制容許值（Lower Bound and Upper Bound）。

而本文研究之「彈性支撐複合材料結構系統參數之識別」，牽涉到相當多的變數，且目標函數為非線性，都增加了總域極小值收斂的困難及不可靠度。因此，文中將應用廣義拉格蘭吉乘子法（Augmented Lagrange Multiplier Method）將原始受限制條件問題先轉變成無限制條件的問題，再配合隨機多起始點的方法（Multi - Start Method）及貝氏分析法（Bayesian Approach）所發展的總域極小值演算法 [27、28] 進行最佳化反算。此演算法是基於運動質點在保守力場中能量守恆觀點，在無限制條件下的目標函數  $F(x)$ （即位能值），應用多起始點搜尋最小位能（如圖 3-1 所示）。

### 3.2 多起始點方法

一般最佳化方法，是採用單起始點方式來搜尋極小值，而其所獲得之極小值亦僅是區域局小值，並無法確認是否獲得總域之極小值。而本文之方法正是要改善此一困境，利用隨機多起此點搜尋方式，可以增加搜尋獲得上、下限範圍內之各個區域極小值的機會。且以能量守恆的觀念來計算出目標函數值（亦即為質點位能），其迭代過程容許目標函數些微上升的解，使目標函數可從區域極小值中跳脫，找到總域極小值，詳如 3.3 節之區域極小化程序所述。

在最佳化設計中取多起始點的方法，乃是針對設計變數  $x_i$  的合理區間（上、下限）內，利用隨機取樣的方式取出一系列的起始點，並且以此為開始做搜尋軌跡方式，找出其區域極小值。而在文中取多起始點的方式，乃應用 IMSL 軟體的 RNUN 副程式，對設計變數  $x_i$  於上、下限區間範圍內，以隨機取樣的方式選取初始猜測值。如此我們可以找出一些區域極小值  $F_j$  以及對應的區域極小點  $x_j$ 。接著我們要找尋總域極小值  $F^*$ ，其須滿足下列的式子：

$$F^* = \min\{F_j\} \quad (3-2)$$

### 3.3 區域極小化程序 (Local Minimization Procedure)

由多起始點之方式，隨機找出初始值  $x$ ，而  $x \in X \subset R^n$ ，使用搜尋軌跡方式是基於單位質量的質點在  $n$  維保守力場中的運動方程式及初始條件而來，如下所示：

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\nabla F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 ; \quad \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

然後以能量守恆的觀念來計算出目標函數值，其中  $F(x(t))$  為質點位能，也是計算中的目標函數（如圖 3-1 所示）， $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$  分別表示質點在  $n$  維空間上的速度與加速度。

將 (3-3) 式乘以  $\dot{x}(t)$ ，可以得到

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 \right) = -\nabla F^T(x(t)) \dot{x}(t) \quad (3-4)$$

再將 (3-4) 式對時間  $t$  做積分，範圍從 0 到  $t$ ，便可得到能量守恆關係式。如下列式子所示：

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + F(x(t)) = \frac{1}{2}\|\dot{x}(0)\|^2 + F(x(0)) = F(x_0) \quad (3-5)$$

下列以三個條件來判別質點行進方向或停止搜尋：

(1) 當條件式  $-\nabla F^T \dot{x} > 0$  成立時：

當質點的加速度與速度分量乘積合為正時，可視為加速度與速度是同方向，表示質點將沿著搜尋軌跡下降最快的方向移動。此時位能減少，則動能持續增加，而目標函數值將會降低，質點行進方向以迭代法來改變，所以  $x$  值經過  $k$  次迭代後的改變值如下：

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \dot{x}_k \Delta t \\ \dot{x}_{k+1} &= \dot{x}_k - \nabla F(x_{k+1}) \Delta t \end{aligned} \quad (3-6)$$

其中； $x_0$ ， $\dot{x}_0$  及時間步階  $\Delta t$  皆已給定。所以由上式亦可滿足近似之能量守恆關係：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\dot{x}_{k+1}\|^2 + F(x_{k+1}) &= \frac{1}{2}\|\dot{x}_k\|^2 + F(x_k) + \frac{1}{2}\|\nabla F(x_{k+1})\|^2 (\Delta t)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\Delta x_k)^T H(\tilde{x}) \Delta x_k \end{aligned} \quad (3-7)$$

其中； $H(\tilde{x})$  為黑森矩陣 (Hessian Matrix)。

$$\tilde{x} = x_{k+1} - \Delta x_k r \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (3-8)$$

(2) 若條件式  $-\nabla F^T \dot{x} < 0$  成立時：

表示質點的加速度與速度是反方向，此時表示質點位能增加，則

動能減少，所以質點軌跡移動的方向應往相反方向搜尋。

(3) 臨界點的判斷：

若以  $F_t$  當做在此搜尋軌跡中所找到的最低位能，且目標函數滿足下列兩個條件之一時，就得終止搜尋軌跡，並將此軌跡當做區域最小值的變數值。其目標函數滿足的兩個條件之一如下：

$$F(x(t)) - F_t > \alpha(F(x_0) - F_t)$$
$$T = \frac{1}{2} |\dot{x}_{k+1}|^2 < (1 - \alpha)(F(x_0) - F_t) \quad (3-9)$$

其中  $\alpha$  為給定之參數值，而在本文中  $\alpha$  值為 0.95，區域極小化流程如圖 3-2 所示。



### 3.4 總域極小化程序 (Global Minimization Procedure)

藉由多起始點方法及區域極小值的計算，可得到一系列的區域極小值。再利用貝氏分析方法(即為(3-10)不等式)做為判斷的標準，來決定總域極小值，總域極小化流程如圖 3-3 所示。其方法為先找出第一個區域極小值  $F(x)$ ，然後再依照尋找區域極小值的方法找出區域最小值  $\hat{F}(x)$ 。將  $\hat{F}(x)$  值與  $F(x)$  值做比較取較小值，再從比較之中找出一個臨時總域最小值  $F^*(x)$ 。在尋找過程中，區域極小值  $\hat{F}(x)$  落在臨時的總域極小值  $F^*(x)$  的收斂範圍內則算成功一次。所以在  $n$  次的隨機取樣次數中，若有  $r$  次均落在  $F^*(x)$  值的收斂範圍內時，且機率大小必需滿足(3-10)不等式，則可將  $F^*(x)$  視為總域極小值  $\bar{F}(x)$ 。

$$P_r[\bar{F}(x) = F^*(x)] \geq q(n, r) = 1 - \frac{[(n+1)!(2n-r)!]}{[(2n+1)!(n-r)!]} \quad (3-10)$$

其中本文取  $q^*$  之值為 0.99。當時  $q(n, r) \geq q^*$  則視為收斂，則可得到總域極小值  $\bar{F}(x)$  及其對應之最佳設計變數值  $x$ 。

### 3.5 廣義拉格蘭吉乘子方法 (Augmented Lagrange Multiplier Method) : (簡稱 A. L. M.)

A.L.M. [29] 方法其主要的目的是要將原始問題中的等式及不等式的限制條件先加上放鬆變數，再與等式限制條件，各別乘上一個拉格蘭吉乘子，加入原始的目標函數中，如此原始具限制條件的目標函數  $F(x)$ ，將變成無限制條件的新目標函數  $\bar{\Psi}(x, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \gamma_p)$ ，A.L.M. 區域極小化流程如圖 3-4 所示。本文研究是以 A.L.M.、多起始點、總域極小化理論程序，並配合實驗測量方法，將其運用在識別彈性支撐複合材料積層板或三明治層板之材料常數。有關 A.L.M. 方法及材料常數識別過程於第五章中會有詳細介紹。且對測試之複合材料結構不會有任何破壞性，尤其是正在使用中之機具其材料結構常處於動態負荷中，若要進行安全評估與可靠度計算，本文研究方法是非常適用的。因此，本文研究方法在工業上結構系統之檢測極具發展潛力。

## 第四章 實驗之安裝與試驗

### 4.1 複合材料積層板標準試片之製作與拉伸試驗

本文所使用的複合材料積層板，是碳纖維/環氧樹脂 (graphite/epoxy (Gr/ep)) 其單位米平方總重 (PAW) 及 碳纖維重 (FAW) 分別為  $221\pm 0.5 \text{ g/m}^2$ 、 $150 \text{ g/m}^2$ ，含膠量 (RC) 為 32% 之預浸布，首先將預浸布從冷凍庫取出經解凍約 4 小時，再將預浸布依基準邊與纖維方向成 0 度與 45 度方向分別裁下 30x30cm 的方形纖維預浸布各數片，依據 ASTM 標準規範 [58]，取 0 度纖維預浸布依相同方向相互疊壓合成  $[0^\circ]_8$  之試片；取 90 度纖維預浸布依相同方向相互疊壓合成  $[90^\circ]_{16}$  之試片；再取纖維角度 45 度之纖維預浸布以 +45 度與 -45 度角交叉疊成  $[\pm 45^\circ]_{28}$  之試片。將疊好及壓平之方形碳纖維預浸布與各種輔助材料，依列整齊放在鐵模中，等待熱壓機（如圖 4-1 所示）上、下平臺溫度達到  $80^\circ\text{C}$  時，再將其放入熱壓機之平臺，起動熱壓機油壓開關慢慢壓合，並且依圖 4-2 設定時間-溫度關係與溫度-壓力關係來控制複合材料積層板成型條件。待試片成型硬化，關掉熱壓機之溫度開關，但壓力暫不可洩掉，待試片溫度降至室溫後，再取出積層板。

將上述已成型纖維 0 度角之複合材料積層板，根據 ASTM 標準規範 [58]，以切割機（如圖 4-3 所示）切下  $228\text{mm} \times 12.7\text{mm}$  之長條形數條，試片兩端上、下表面以 AW106 之 AB 膠貼上長 40mm、寬 12.7mm 已導角邊之護片（如圖 4-4 所示）。同理沿纖維橫向 90 度切

割 228mm × 25.4mm 之試片數條與纖維正、負 45 度角試片切割 228mm × 25.4mm 數條也貼上長 40mm、寬 25.4mm 已導角邊之護片，並利用長尾夾將其壓緊促使空氣流出，等待一天使膠完全硬化黏合後，再將切割好的試片，以丙酮溶劑清潔試片表面。然後在試片的中央位置，以快乾膠貼上雙軸向應變規（Strain Gage）。

上述已製作完成標準拉伸試片，經 MTS 萬能拉伸試驗機（如圖 4-5 所示）施力拉伸，並經過電腦系統自動記錄其荷重與應變值，每一類試片均測量數片；記錄所有資料，將實驗值代入下列公式

$$E_1 = \frac{P_{0x}}{A_0 \varepsilon_{0x}} \quad (4-1)$$

$$E_2 = \frac{P_{90x}}{A_{90} \varepsilon_{90x}} \quad (4-2)$$

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{0y}}{\varepsilon_{0x}} \quad (4-3)$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{P_{45x}}{2A_{45}} \quad (4-4)$$

$$|\gamma_{12}| = |\varepsilon_{45x} - \varepsilon_{45y}| \quad (4-5)$$

$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{|\gamma_{12}|} \quad (4-6)$$

其中  $P_{\theta x}$  為「 $\theta$  角度試片」所受沿  $x$  軸方向之拉伸力， $A_{\theta}$  為「 $\theta$  角度試片」於拉伸方向之截面積， $\varepsilon_{\theta i}$  ( $i=x, y$ ) 分別表示沿  $x$ 、 $y$  軸之應變值； $|\tau_{12}|$  為「45 度試片」之主剪應力， $|\gamma_{12}|$  為主剪應變，兩者與  $x$  軸夾 45 度。由此可計算出  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$  和  $\nu_{12}$  之彈性常數，將數次實驗



結果取平均值並計算其變異數（如表 4-1 所示），表中 C.O.V. 即為變異數（Coefficient of Variation）。

#### 4.2 彈性支撐複合材料平板振動實驗之安裝與自然頻率量測

將不同尺寸之複合材料平板其邊界以彈性墊片緊密結合於框架上，並將加速規（Accelerometer）黏貼於複材平板幾個不同的位置上，並利用手持式衝擊鎚（Hammer）（Kistler 9722A500, Kistler Instrument, USA）敲擊試片上數個不同的位置激發試片，衝擊鎚上有力量轉換器（Kistler 9904A, Kistler Instrument, USA），而黏貼於試片上之加速規（AP19, APTechnology, Netherland）接收振動訊號。衝擊鎚與加速規兩者訊號再傳輸至頻譜分析儀 B&K 3560C，這些頻率響應函數應用 B&K PULSE LabShop Version 6.1 軟體進行頻譜分析，其配置如圖 4-6 所示。經由多點的敲擊激發產生振動訊號，再進行頻譜分析並將其結果作平均，最後可以得到自然振動頻率之實驗測量值。複合材料平板因非等向性材料且層與層之間以環氧樹脂膠合，對頻譜分析測量自然頻率較傳統金屬等向性材料的測量困難，起因於纖維排列與層間之環氧樹脂膠，容易引起雜訊與假像。要清晰確認自然頻率的位置，除了在類比數位訊號轉換器前，需要先加上精良的濾波器外，還需要經由多次不同頻寬與解析條數的測試；藉由放大信號、多點觸發信號平均等方式改善、去除量測時各種雜訊的干擾，通常雜訊產生是隨機型態（Random noise），因此雜訊所造成的頻率與相位也是任意的，此種雜訊可以經由取平均值方式來改進，信雜比愈差所需要的平均次數愈多。一般平均皆是對頻率域信號來處理，若要處理時間域

信號的平均最好配合觸發條件，以確保每次時間域之相位相同。

本文測量自然頻率，以每次測量之功率頻譜 (Autospectrum) 信號加以平均 (Linear average)。先估計測量試片前幾個(積層薄板為六個、三明治平板為八個)自然頻率所在的頻寬，設定好取樣頻寬後，接下來設定快速傅利葉轉換條數(建議從較少條數測量起，再逐步調高快速傅利葉轉換條數，這樣有助於判斷頻譜分析儀所顯示的所有頻率是否有遺漏之模態)。敲擊鎚其頭部之選用(每一種敲擊鎚之頭部硬度不同可激發不同頻寬之自然頻率，可查閱硬體使用手冊；建議可以將幾種接近分析頻寬之敲擊頭使用數次，觀察、比對所測結構件之自然頻率，再找出最適當的敲擊鎚之頭部)，視所需的頻率範圍而定，本實驗是選取最軟之塑膠敲擊頭，因為本文有興趣的頻率是在低頻範圍，如此將可增加此頻率範圍之準確度。另外；必須注意加速規的選用重量不要超過測試試片重量之十分之一(本實驗所用之加速規只有 0.14g)，才不致於產生平板外掛一集中質量的現象，導至所測量之自然頻率較低。且加速規貼在平板背後的位置最好不要在被測試片自然振形(Mode shape)的節線或節點上，為避免上述情形可將加速規貼的位置先行規劃並標示，測試幾個不同位置，並觀察自然頻率之變化情形。

#### 4.3 邊界彈性墊片支撐之模擬

考慮複合材料平板長寬為 $a_0 \times b_0$ ，首先將其四個邊界以長條狀之彈性墊片支撐固定於框架上(如圖 2-4A所示)，考慮彈性墊片寬度為 $b_e$ 的影響，於理論分析時複合材料平板是以長寬為 $a \times b$ ，且以等效

力作用於彈性墊片的寬度中心來進行模擬（如圖 2-4B所示）。尺寸  $a$ 、 $b$ 與 $a_0$ 、 $b_0$ 之關係為

$$\begin{aligned} a &= a_0 - b_e \\ b &= b_0 - b_e \end{aligned} \quad (4-7)$$

#### 4.3.1 等效單位長度之平移彈簧常數 ( the longitudinal spring constant )

由圖 4-7A，等效單位長度之平移彈簧常數  $K$  的推導如下：

單位長度彈性墊片所受之應力  $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{b_e \times 1}$ ，又應力

$\sigma = \varepsilon E_e = \frac{\delta}{h_e} E_e$ ，所以其等效單位長度之平移彈簧常數為

$$K_L = \frac{P}{\delta} = \frac{E_e b_e}{h_e} \quad (4-8)$$

其中  $P$  為彈性墊片所受的正向力， $A$  為彈性墊片之受力的面積， $E_e$  為其楊氏係數， $\varepsilon$  為受應力所產生的應變， $\delta$  為受力後所產生的變形， $b_e$ 、 $h_e$  分別為彈性墊片之寬度、厚度。

#### 4.3.2 等效單位長度之扭轉彈簧常數 ( the torsional spring constant )

同樣由圖 4-7B，等效單位長度之扭轉彈簧常數  $R$  的推導如下：

假設彈性墊片其邊界處的應變為  $\varepsilon_0 = \frac{\Delta}{h_e}$ ，則任一位置  $x$  處之應變  $\varepsilon_x$

$$\varepsilon_x = \frac{x}{b_e/2} \times \varepsilon_o = \frac{2x}{b_e} \times \frac{\Delta}{h_e} = \frac{2x}{b_e} \times \frac{(b_e/2) \times \theta}{h_e} = \frac{x\theta}{h_e} \quad (4-9)$$

考慮單位長度彈性墊片所承受彎矩  $M$ ，並將 (4-9) 式之  $\varepsilon_x$  代入：

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma_x x dA = \int_{-\frac{b_e}{2}}^{\frac{b_e}{2}} \sigma_x x dx = \int_{-\frac{b_e}{2}}^{\frac{b_e}{2}} E_e \varepsilon_x x dx \\ &= \int_{-\frac{b_e}{2}}^{\frac{b_e}{2}} E_e \frac{x^2 \theta}{h_e} dx = \frac{E_e \theta}{h_e} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b_e}{2}}^{\frac{b_e}{2}} = \frac{E_e \theta b_e^3}{12 h_e} \end{aligned} \quad (4-10)$$

所以其等效單位長度之扭轉彈簧常數為

$$K_R = \frac{M}{\theta} = \frac{E_e b_e^3}{12 h_e} \quad (4-11)$$

其中  $\Delta$  為受一彎矩  $M$  後，彈性墊片邊界的位移， $\varepsilon_x$  為距離中央  $x$  處的應變。



#### 4.4 自然頻率實驗量測與理論分析之驗證

為了確認本文所建立之里茲方法於自然頻率分析之正確性，考慮複合材料積層板或三明治板，於不同厚度、疊層方式和邊界支撐等情形下之自然頻率與相關文獻的比較。由表 4-2 可以看出積層板於不同疊層角度、邊界支撐或有無中心彈簧支撐下，與文獻[60、61]或商業軟體 ANSYS [59] (使用 shell 99 元素) 之比較，由結果可以看出本方法是非常精確的；表 4-3(a) 為邊界簡單支撐之積層厚板  $[0^0/90^0]_s$  於不同厚寬比下，與文獻[26、62]之自然頻率比較；表 4-3(b) 為彈性支撐積層厚板於不同疊層角度下，與商業軟體 ANSYS (使用 shell 99 元素) 之比較，由結果可以看出本方法同樣是非常精確的；而表 4-4 則

是探討複合材料三明治板於不同疊層角度、邊界支撐下，與文獻 [63~66] 或商業軟體 ANSYS (使用 shell 91 元素) 之比較，由結果可以看出本文方法較文獻或 ANSYS 更為精確。因此可以確認本文里茲方法於自然頻率分析之正確性。

接著再以實驗測量方式，確認本文理論分析與實驗量測之正確性，以下將應用兩個實例來驗證。首先探討等向性、均質材料鋁合金 6061-T6，11cm × 11cm × 1.99mm 方形平板，經由頻譜分析儀多次測量其最低前三階自然振動頻率之平均值為：

$$F1 = 526\text{Hz} ; F2 = 772\text{Hz} ; F3 = 983\text{Hz} \quad (4-9)$$

圖 4-8 為其頻譜 (Autospectrum) 圖，由圖中之數個尖峰 (Peak) 頻率，即為其自然振動頻率。而由廠商所提供之材料性質表查得鋁合金 6061-T6 材質其彈性常數：

$$E = 68.6\text{ GPa} ; G = 25.79\text{ GPa} ; \rho = 2710\text{ kg/m}^3 \quad (4-10)$$

將此彈性常數以里茲方法進行自然頻率分析，則可得

$$\begin{aligned} F1 &= 531.45\text{ Hz} (-1.03\%) ; F2 = 775.59\text{ Hz} (-0.46\%) ; \\ F3 &= 983.04\text{ Hz} (0\%) \end{aligned} \quad (4-11)$$

括號中之數值代表與 (4-9) 式實驗值之相對誤差。

再來是探討彈性支撐之複合材料積層板疊層角度為  $[0^\circ]$  來驗證，其材料性質已先由 ASTM 拉伸試驗獲得(如表 4-1 所示)，平板原始幾何尺寸為 21cm × 21cm × 1mm，其邊界由寬度  $b_e$  為 5mm 和厚度  $h_e$  為 2.1mm 之彈性墊片所支撐，而墊片之彈性常數  $E_e$  為 2.028Mpa。在理論分析時，首先如 4.3 節所敘述之方法，將平板之尺寸以 20.5cm ×

20.5cm × 1mm 來模擬，而邊界支撐之等效單位長度平移  $K_L$ 、扭轉彈簧常數  $K_R$ ，則分別為(4-8)式的  $K_L = E_e b_e / h_e = 4.82857 \times 10^6 N/m^2$ 、(4-11)式的  $K_R = E_e b_e^3 / (12h_e) = 10.0595 N$ 。經由頻譜分析儀多次測量其最低前六個自然振動頻率之平均值為：

$$\begin{aligned} F1 &= 120 \text{ Hz} ; F2 = 187 \text{ Hz} ; F3 = 311 \text{ Hz} ; \\ F4 &= 417 \text{ Hz} ; F5 = 467 \text{ Hz} ; F6 = 490 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (4-12)$$

圖 4-9 為其頻譜圖，由圖中之數個尖峰 (Peak) 頻率，即為其自然振動頻率。將平板彈性常數及邊界支撐之等效彈簧常數，代入里茲方法分析，則可得到

$$\begin{aligned} F1 &= 124.45 \text{ Hz} (-3.58\%) ; F2 = 187.22 \text{ Hz} (-0.12\%) ; F3 = 308.61 \text{ Hz} (0.77\%) ; \\ F4 &= 428.06 \text{ Hz} (-2.58\%) ; F5 = 471.38 \text{ Hz} (-0.93\%) ; F6 = 486.73 \text{ Hz} (0.67\%) \end{aligned} \quad (4-13)$$

括號中之數值代表實驗值 (4-12) 式與理論值 (4-13) 式之誤差百分比。

經由上述兩個實例的驗證，可以確認本文自然振動頻率實驗量測與里茲方法理論分析之正確性。

#### 4.5 三明治板於不同長寬比、心層材料與邊界彈簧剛性對自然頻率之影響

探討邊界彈性支撐彈簧剛性與心層性質對自然頻率之影響。三明治板其材料性質如下：

$$\text{面層} : E_1 / E_2 = 15, G_{12} / E_2 = 0.6, G_{23} / E_2 = 0.1, \nu_{12} = 0.3, E_2 = 10 \text{ GPa}, \rho_f = 1500 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{心層} : E_c = 10 \text{ MPa or } 1 \text{ GPa}, G_c = E_c / (2 + 2\nu_c), \nu_c = 0.3, \rho_c = 50 \text{ kg/m}^3 \quad (4-14)$$

其幾何尺寸為  $b=0.3m$ ,  $h_f=0.5mm$ ,  $h_c=9mm$ ，考慮疊層角度為  $[(0^\circ/90^\circ)_s/\overline{core}]_s$  和  $[(45^\circ/-45^\circ)_s/\overline{core}]_s$  兩種三明治板。其前五個自然頻率正規化值於不同心層、邊界彈簧剛性和長寬比之結果如表 4-5 和表 4-6 所示。由結果可以看出平移彈簧剛性、心層性質、疊層角度和長寬比對自然頻率之影響比其旋轉彈簧剛性來得大。例如，考慮表 4 中  $[(0^\circ/90^\circ)_s/\overline{core}]_s$  板其  $E_c=10\text{ Mpa}$  之下之不同情形，首先平移彈簧正規化值  $K=1$  且長寬比  $a/b=0.5$ ，其當  $R$  從 1 增為  $10^6$ ，其第一個自然頻率正規化值是從 14.19 變化為 14.22，僅增加 0.21%；若是  $K=R=1$ ，但是長寬比  $a/b$  由 0.5 增為 2 時，其第一個自然頻率正規化值是從 14.19 變化為 3.85，減少了 72.87%；當長寬比  $a/b=0.5$  且  $R=1$  時， $K$  從 1 增為  $10^{10}$ ，其第一個自然頻率正規化值是從 14.19 變化為 27.5，增加了 93.8%。接著探討心層性質之影響，考慮  $K=10^{10}$ 、 $R=10^6$  且長寬比  $a/b=0.5$  時，當其心層  $E_c$  由 10 MPa 改為 1 GPa，其第一個自然頻率正規化值是從 27.81 變為 174.14，增加了 526.18%。上述的例子，若隨著自然頻率數目之增加，其效應亦會增加，例如當考慮第五個頻率時，將由原先的 526.18% 增為 585.6%。表 4-6 和表 4-5 只有疊層角度的差異，同樣可以看出角度一樣是有很大大之影響，例如當  $K=10$ 、 $R=1$ 、 $a/b=0.5$  和  $E_c=10\text{ Mpa}$  時，其第一個自然頻率正規化值由  $[(45^\circ/-45^\circ)_s/\overline{core}]_s$  的 9.79 變為  $[(0^\circ/90^\circ)_s/\overline{core}]_s$  的 24.48，增加了 150.05%。

## 第五章 反算識別彈性支撐複合材料平板之材料常數

### 5.1 反算方法之簡介

一般量測材料常數的方法，首先是要將材料製成符合 ASTM 之標準試片，再經由各種相關之材料標準試驗測出其材料常數。但是由於複合材料是由樹脂和纖維所組成，儘管是相同的一批材料，卻很容易因不同的製程條件、儀器設備和環境因素，如成形溫度、壓力、時間、樹脂含量等，將對結構件成品之材料常數造成影響。另外，標準試驗所測得的材料常數是對結構件局部的量測結果，與整體材料結構件實際的性質是有很大的差異。而本文所應用之方法，是要建立一種混合實驗與理論分析之方法，在不破壞結構及其邊界條件的情形下，利用振動實驗量測其自然頻率，再配合最佳化方法反算結構及其邊界條件之全部材料性質。

### 5.2 反算方法之建立

本文利用非破壞的方式即混合實驗及數值方法來反求複合材料構件的材料性質與邊界支撐之勁度。首先建立以實驗量測與理論預測之自然頻率差值的平方為原始目標函數的最小化問題，本節將目標函數的建立分成兩個部分來說明，第一部份是彈性支撐複合材料積層板之材料常數識別、第二部份是彈性支撐三明治板之材料常數識別。

## 第一部份：彈性支撐複合材料積層板之材料常數識別

$$\text{Minimize } e(\underline{x}) = (\underline{\omega}^*)^t (\underline{\omega}^*)$$

$$\text{subject to } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, \dots, 5, 6 \text{ or } 7 \quad (5-1)$$

其中  $\underline{x}$  為最佳化程序之設計變數。當積層板為薄板時，考慮平板中間有彈簧支撐時， $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_e, k_c]$  為六個變數，若平板中間沒有彈簧支撐時，則變成  $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_e]$  為五個變數；若為厚板時， $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, \nu_{12}, K_L, K_R]$  為七個變數。設計變數亦即是複合材料層板材料常數與邊界支撐之楊氏係數或等效彈簧常數。 $E_1, E_2$  分別為沿著複合材料纖維之 1 方向與垂直纖維之 2 方向的楊氏係數； $\nu_{12}$  為蒲松比，也就是材料纖維 1 方向受應力作用時，在垂直纖維之 2 方向上所產生的應變與 1 方向上的應變之比值取負號； $G_{12}, G_{23}$  則分別為在 12 和 23 平面之剪力模數， $E_e$  則為邊界支撐之彈性常數， $k_c$  則為平板中間彈簧支撐之彈簧常數， $K_L, K_R$  則分別為邊界單位長度之平移、扭轉彈簧常數； $x_i^L, x_i^U$  為材料常數的下限及上限； $e(\underline{x})$  即為目標函數，是利用振動頻譜分析儀量取複合材料積層板結構最低前六個自然頻率實驗值與使用里茲方法所獲得之理論預測值，取兩者間之最小平方差。 $\underline{\omega}^*$  為一  $NF \times 1$  的矩陣其元素由(5-2)所構成，表示理論預測與實驗量測頻率差值之單位化，而  $NF$  表示使用自然頻率之數目。

$$\omega_i^* = \frac{\omega_i^p - \omega_i^m}{\omega_i^m}, \quad i = 1, \dots, NF \quad (5-2)$$

$\omega_i^p$ ：應用里茲方法預測未知之複合材料積層板結構系統，所得到之自然頻率理論值。

$\omega_i^m$ ：以頻譜分析儀量得未知之複合材料積層板結構系統，所得到之自然頻率實驗值。

## 第二部份：彈性支撐複合材料三明治板之材料常數識別

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } e(\underline{x}) = (\underline{\omega}^*)^t (\underline{\omega}^*) \\ & \text{subject to } x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i=1, \dots, 7 \end{aligned} \quad (5-3)$$

其中  $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_c, \nu_c, E_e]$  為最佳化程序之設計變數，亦即是複合材料三明治板材料常數與邊界支撐之楊氏係數， $E_1, E_2$  分別為沿著複合材料纖維之 1 方向與垂直纖維之 2 方向的楊氏係數； $\nu_{12}$  為蒲松比，也就是材料纖維 1 方向受應力作用時，在垂直纖維之 2 方向上所產生的應變與 1 方向上的應變之比值取負號； $G_{12}$  為 12 平面之剪力模數，因為本文所探討之三明治板面層均為積層薄板（寬厚比  $a/h > 545$ ），所以  $G_{23}$  之影響相當小，亦即簡化為  $G_{23} = G_{12}$ ，如此可以減少一個設計變數。） $E_c, \nu_c$  分別為三明治夾心層的楊氏係數與蒲松比， $E_e$  則為邊界支撐之彈性常數； $x_i^L, x_i^U$  為材料常數的下限及上限； $e(\underline{x})$  即為目標函數，是利用振動頻譜分析儀量取複合材料積層板結構前八個自然頻率實驗值與使用里茲方法所獲得之理論預測值，取兩者間之最小平方差。而  $\underline{\omega}^*$  為一  $8 \times 1$  的矩陣其元素由(5-4)所構成，表示理論預測與實驗量測頻率差值之單位化。

$$\omega_i^* = \frac{\omega_i^p - \omega_i^m}{\omega_i^m}, \quad i=1, \dots, 8 \quad (5-4)$$

完成目標函數之建立後，接下來是利用 A.L.M. 的方法，將上述限制性問題轉化為新的目標函數  $\bar{\Psi}(\tilde{x}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \gamma_p)$  無限制條件之多起始點總域極小值問題；可以寫成

$$\bar{\Psi}(\tilde{x}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p) = e(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^n [\mu_j z_j + r_p z_j^2 + \eta_j \phi_j + r_p \phi_j^2] \quad (5-5)$$

其中  $z_j = \max [g_j(\tilde{x}_j), \frac{-\mu_j}{2r_p}]$

$$g_j(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_j - \tilde{x}_j^U \leq 0$$

$$\phi_j = \max [H_j(\tilde{x}_j), \frac{-\eta_j}{2r_p}]$$

$$H_j(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_j^L - \tilde{x}_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5-6)$$

其中  $\mu_j, \eta_j, \gamma_p$  為拉格蘭吉乘子； $\max[*,*]$  表示取括號中之最大值，設計變數修正寫成如下三種情形

當複合材料積層板為薄板時，

$$\tilde{x} = \left[ \frac{E_1}{\alpha_1}, \frac{E_2}{\alpha_2}, \frac{G_{12}}{\alpha_3}, \frac{\nu_{12}}{\alpha_4}, \frac{E_e}{\alpha_5}, \frac{k_C}{\alpha_6} \right] \quad (5-7a)$$

若為複合材料積層厚板時，

$$\tilde{x} = \left[ \frac{E_1}{\alpha_1}, \frac{E_2}{\alpha_2}, \frac{G_{12}}{\alpha_3}, \frac{G_{23}}{\alpha_4}, \frac{\nu_{12}}{\alpha_5}, \frac{K_L}{\alpha_6}, \frac{K_R}{\alpha_7} \right] \quad (5-7b)$$

或是複合材料三明治板時，

$$\tilde{\underline{x}} = \left[ \frac{E_1}{\alpha_1}, \frac{E_2}{\alpha_2}, \frac{G_{12}}{\alpha_3}, \frac{\nu_{12}}{\alpha_5}, \frac{E_c}{\alpha_6}, \frac{\nu_c}{\alpha_7}, \frac{E_e}{\alpha_8} \right] \quad (5-7c)$$

其中  $\alpha_i (i=1, \dots, 8)$  為修正係數。而拉格蘭吉乘子疊代方程式如下：

$$\begin{aligned} \mu_j^{k+1} &= \mu_j^k + 2r_p^k z_j^k \\ \eta_j^{k+1} &= \eta_j^k + 2r_p^k \phi_j^k \quad j = 1, \dots, n \\ r_p^{k+1} &= \begin{cases} \gamma_0 r_p^k & \text{if } r_p^{k+1} < r_p^{\max} \\ r_p^{\max} & \text{if } r_p^{k+1} \geq r_p^{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (5-8)$$

k 表示疊代次數，而各個疊代起始值，經由多次理論模擬分析得到最佳的設定值如下：

$$\begin{aligned} \mu_j^0 &= 1.0 & \eta_j^0 &= 1.0 & j &= 1, \dots, n \\ r_p^0 &= 0.4 & \gamma_0 &= 2.5 & r_p^{\max} &= 100 \end{aligned} \quad (5-9)$$

而 (5-5) 式之無限制條件總域極小值可寫成

$$\text{Minimize } \underline{\bar{\psi}}(\underline{\tilde{x}}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, \gamma_p) \quad (5-10)$$

由上述的敘述，配合多起始點方法及貝氏分析法(3-10)式所發展的總域極小值演算法，即可獲得機率高於 0.99 之總域極小值。此時里茲方法的複合材料平板結構件之自然頻率理論預測值與實驗測量值最接近，故極小化程序之設計變數值即可視為被測複合材料平板之彈性常數與邊界支撐之楊氏係數或彈簧常數。

在反求過程中，依據經驗將材料彈性常數合理的下限值、上限值  
( $x_i^L$ 、 $x_i^U$ ) 分別設定為

若為複合材料積層薄板時

$$\begin{aligned} 0 \leq E_1 \leq 400 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq E_2 \leq 40 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq G_{12} \leq 20 \text{ GPa} \\ 0 \leq \nu_{12} \leq 0.5 \text{、} 0 \leq E_e \leq 20 \text{ MPa} \text{、} 0 \leq k_c \leq 20 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (5-11a)$$

其中 $k_c$ 為平板中心處之彈簧常數。若為複合材料積層厚板時則為

$$\begin{aligned} 0 \leq E_1 \leq 400 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq E_2 \leq 40 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq G_{12} \leq 20 \text{ GPa} \\ 0 \leq G_{23} \leq 10 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq \nu_{12} \leq 0.5 \text{、} 0 \leq K_L \leq 1 \text{ GN/m}^2 \text{、} 0 \leq K_R \leq 10 \text{ KN} \end{aligned} \quad (5-11b)$$

複合材料三明治層板時，因為夾心層使用等向性材料，且考慮軟、硬兩種材質，其彈性常數的下、上限值設定如下

$$\begin{aligned} 0 \leq E_1 \leq 400 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq E_2 \leq 40 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq G_{12} \leq 20 \text{ GPa} \\ 0 \leq \nu_{12} \leq 0.5 \text{、} 0 \leq E_e \leq 20 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5-11c)$$

較軟之心層時，

$$0 \leq E_c \leq 100 \text{ MPa} \text{、} 0 \leq \nu_c \leq 0.5 \quad (5-11d)$$

或較硬之心層時，

$$0 \leq E_c \leq 10 \text{ GPa} \text{、} 0 \leq \nu_c \leq 0.5 \quad (5-11e)$$

值得一提是本文研究的設計變數為複合材料積層板之彈性常數， $E_1$ 與其他彈性常數大小有很大差異，故質點在搜尋目標函數下降最快的方向時，其質點跨步大小有差異，將造成次要材料性質，如 $G_{23}$ 、

$v_{12}$  在最佳化演算程序中較不靈敏，可能會有較大的誤差，並將 (5-7) 式中設計變數修正係數設定如下，使其值介於 0~10 之間。

若為複合材料積層薄板時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = (100, 10, 10, 1, 10, 10) \quad (5-12a)$$

複合材料積層厚板時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (100, 10, 10, 10, 1, 1, 10) \quad (5-12b)$$

複合材料三明治板時，考慮較軟之心層時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (100, 10, 10, 1, 100, 1, 10) \quad (5-12c)$$

或較硬之心層時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (100, 10, 10, 1, 10, 1, 10) \quad (5-12d)$$

上述 A.L.M. 程序經由設計變數修正單位化後，無論最佳化程序在搜尋目標函數下降最快方向與質點跨步，均在最適情況，其所有平板彈性常數的識別誤差將大幅下降。另外；需說明的是設計變數係數的修正單位化僅在極小化演算程序中進行，並不影響里茲方法計算複合材料層板的自然頻率理論值。

本文最佳化演算程序採多起始點，首先對所有設計變數其合理的上、下限區間 (5-11) 式內，且經設計變數修正係數 (5-7) 式後，隨機取樣選取起始點，經由前節敘述方法搜尋找到總域極小值時，亦即其貝氏分析之可靠度達  $P \geq 0.99$  時停止搜尋，完成複合材料板結構系統參數之反算程序。

### 5.3 反算方法之測試

為了確認本文方法之精確性及可行性，首先探討識別四邊為自由邊界鋁板之材料常數。考慮一已知彈性常數之等向性、均質材料鋁合金 6061-T6，11cm × 11cm × 1.99mm 方形板，經頻譜分析儀多次測量其最低前三個自然頻率之平均值為：

$$\omega_{m1} = 526\text{Hz} \quad \omega_{m2} = 772\text{Hz} \quad \omega_{m3} = 983\text{Hz} \quad (5-13)$$

並將此三個自然頻率作為誤差函數中之自然頻率實驗值，經由反算程序進行複合材料積層板材料常數之反求

$$\begin{aligned} \text{Minimize } e(\underline{x}) &= (\underline{\omega}^*)^t (\underline{\omega}^*) \\ \text{subject to } x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U, \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (5-14)$$

其中設計變數 $x_1$ 表示鋁板之楊氏係數、 $x_2$ 則是剪力模數；我們假設每一個設計變數可能的上、下限制(若無此限制，則總域極小化演算程序將無限制的搜尋，導至獲得不符工程概念之極小值，甚至可能無法收斂，浪費電腦資源)。依據經驗將材料材料常數的下限值、上限值 ( $x_i^L$ 、 $x_i^U$ ) 分別設定為

$$0 \leq E_1 \leq 400 \text{ GPa} \quad 0 \leq G_{12} \leq 200 \text{ GPa} \quad (5-15)$$

最後，應用 5.2 節所建立之非破壞反算方法，經最小化程序識別得其彈性常數

$$E_1 = 67.91\text{GPa} (-1.01\%)、G_{12} = 25.35\text{GPa} (-1.71\%) \quad (5-16)$$

括號內之值為本方法所識別之彈性常數與廠商提供之材料常數之誤差

百分比，結果相當準確。這個測試證明本方法是可行且相當準確，將再進一步測試識別邊界彈性支撐之複合材料積層板結構系統參數。

最後是以識別彈性支撐複合材料積層薄板結構之材料常數來驗證。考慮彈性支撐複合材料積層板其疊層角度為  $[0^\circ]$ 。（長寬厚為  $21\text{mm} \times 21\text{mm} \times 1\text{mm}$ ），四個邊界使用彈性墊片（寬厚為  $5\text{mm} \times 2.1\text{mm}$ ）做為彈性支撐(如圖 2-4A 所示)；在里茲方法理論分析方面，應用 4.3 節所敘述之方法，是將此結構以  $20.5\text{mm} \times 20.5\text{mm} \times 1\text{mm}$  來模擬(如圖 2-4B 所示)，而彈性墊片之楊氏係數  $E_e$  與其邊界支撐的單位長度之平移 ( $K_L$ )、扭轉 ( $K_R$ ) 彈簧常數之關係，可以表示成  $K_L = E_e b_e / h_e$ 、 $K_R = E_e b_e^3 / (12h_e)$ ，經頻譜分析儀多次測量其最低前六階自然頻率之平均值為：

$$\begin{aligned} \omega_{m1} &= 120\text{Hz} & \omega_{m2} &= 187\text{Hz} & \omega_{m3} &= 311\text{Hz} \\ \omega_{m4} &= 417\text{Hz} & \omega_{m5} &= 467\text{Hz} & \omega_{m6} &= 490\text{Hz} \end{aligned} \quad (5-17)$$

並將此六個自然頻率作為誤差函數中之自然頻率實驗值，經由反算程序進行複合材料積層板材料常數之反求。利用 (5-1) 式建立目標函數，其中設計變數  $x$  為  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$  和  $x_5$ ，分別代表  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$  和  $E_e$ 。並假設每一個設計變數可能的上、下限制，依據經驗將材料材料常數的下限值、上限值 ( $x_i^L$ 、 $x_i^U$ ) 分別設定如 (5-11) 式所示。

最後，應用 5.2 節所建立之非破壞反算方法，經最小化程序識別得其彈性常數

$$\begin{aligned} E_1 &= 137.108\text{GPa}(-7.05\%)、E_2 = 9.436\text{GPa}(2.31\%)、G_{12} = 7.064\text{GPa}(3.34\%) \\ \nu_{12} &= 0.30029(-1.87\%)、E_b = 1.997\text{MPa}(-1.53\%) \end{aligned} \quad (5-18)$$

括號內之值為本方法所識別之彈性常數與標準拉伸試驗之彈性常數(表 4-1)的誤差百分比，結果仍是相當準確，再次證明本方法是可行且相當準確。因此，在下一章將應用此方法識別不同疊層角度之彈性支撐複合材料積層板及三明治板結構的系統參數。



## 第六章 結果與討論

本文提出一非破壞彈性常數評估方法來識別複合材料平板的系統常數，此法是以受限制條件之總域極小化方法，配合振動實驗頻譜分析量測結構自然頻率，與應用Rayleigh-Ritz方法之理論分析結構自然頻率，並以隨機多起始點搜尋、設計變數修正單位化，同時識別複合材料積層板與邊界支撐之所有彈性常數。並利用不同試片進行反算來證實本方法之可行性及精確性。

### 6.1 彈性支撐複合材料積層板之材料常數反算

本文所使用之複合材料（graphite/epoxy）積層板與邊界支撐之材料常數性質，根據 ASTM 規範 [58] 進行實驗其結果如表 4-1 所示。本節有關彈性支撐複合材料積層板之材料常數反算，將分成三個部分來進行。

#### 6.1.1 複合材料積層薄板四個邊界為連續且形成封閉之彈性支撐或同時具有中心彈簧支撐

考慮複合材料積層板長寬為 $a_0 \times b_0$ ，首先將其四個邊界以彈性墊片支撐固定於框架上（如圖 6-1A所示），彈性墊片的寬度為 $b_e$ ，於理論分析時複合材料積層板是以長寬為 $a \times b$ （詳細過程如 4.3 節所示）。本節中所選定之複合材料積層板寬厚比分別為 260、205 與 143.3 的九種薄平板試片，試片其編號、疊層角度、幾何尺寸與密

度，如表 6-1 所示。

實驗方面，是以衝擊錘敲擊方式進行振動頻譜分析，量測結構自然頻率之實驗值前六個低階自然頻率，其結果如表 6-2 所示。

反求過程，首先建立以實驗與理論分析之自然頻率之平方差值為目標函數，如(5-1) 式所示。其中  $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_e]$  為設計變數，亦就是複合材料層板與邊界支撐之彈簧常數。而其中之  $\underline{\omega}^*$  為一  $NF \times 1$  的矩陣其元素由 (5-2) 式所構成。

在反求過程中，依據經驗將材料彈性常數的下限值、上限值 ( $x_i^L$ 、 $x_i^U$ )，設定如 (5-11) 式所示，再將 (5-7) 式中之設計變數修正係數  $\alpha_i$  設為 (5-12) 式，且隨機選取上、下限範圍內之點做為起始點。

為了清楚了解使用自然頻率數目對反求結果之影響，對此九組試片分別考慮目標函數分別使用自然頻率數目為最低之前 4、5 或 6 個時，此三種情形之反求情形，如表 6-3 至 6-5 所示。由其材料常數反求之結果顯示，使用較多的頻率數目要比使用較少的頻率來得好。所以我們考慮彈性支撐複材積層板的反算是採用最低之前六個自然頻率來建立誤差函數。其實這結果是可以理解的，因為實驗量測頻率誤差一般是隨機分佈的，而使用較多的自然頻率時，將可對誤差提供較好的平均，所以結果會比較好。但使用太多較高階頻率時，有可能會造成量測的困難與更大的量測誤差產生，所以並無法將自然頻率數目無限制的增加。

現將針對六層之複合材料積層板結構試片 A1，疊層角度為  $[0^\circ]_6$ ，

其尺寸為  $0.195\text{m} \times 0.195\text{m} \times 7.5\text{e-}4\text{m}$ 、寬厚比為 260，其製作及識別過程詳細說明。由第四章介紹方式準備一複合材料積層板 $[0^\circ]_6$ ，首先溫度  $80^\circ\text{C}$ 、壓力 300 Psi 熱壓三十分，再升溫至  $120^\circ\text{C}$ 、壓力 300 Psi 熱壓一小時三十分，再自然降溫至室溫，加壓硬化成型之積層板其疊層角度 $[0^\circ]_6$ 共 6 層厚度為 0.75mm，並將其長寬尺寸切割為  $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ ，四邊以 5mm 寬之彈性墊片固定於框架上，理論分析時之長寬尺寸以  $19.5\text{cm} \times 19.5\text{cm}$  模擬，而其邊界支撐的單位長度之平移、扭轉彈簧常數  $K_L$ 、 $K_R$  之關係分別如 (4-8) 式、(4-11) 式所示。由頻譜分析儀測得多次平均之前六個自然頻率為

$$\begin{aligned} \omega_{m1} &= 108\text{Hz} & \omega_{m2} &= 164\text{Hz} & \omega_{m3} &= 270\text{Hz} \\ \omega_{m4} &= 360\text{Hz} & \omega_{m5} &= 400\text{Hz} & \omega_{m6} &= 418\text{Hz} \end{aligned} \quad (6-1)$$

設定設計變數之有效限制範圍如 (5-11) 式，再將 (5-7) 式中之設計變數修正係數  $\alpha_i$  設為 (5-12a) 式，且隨機選取上、下限範圍內之點做為起始點。進行 A.L.M. 總域極小化演算程序，求解新轉換為無限制條件下的目標函數  $\bar{\Psi}(\tilde{x}, \underline{\mu}, \underline{\eta}, r_p)$ ，亦即是 (5-5) 式之最小值，其中

$$e(\underline{x}) = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\omega_i^p - \omega_i^m}{\omega_i^m} \right)^2 \quad (6-2)$$

$\omega_i^m$  為由頻譜分析儀測得自然振頻 (6-1) 式， $\omega_i^p$  為里茲方法理論預測值，且其中  $\mu_j, \eta_j, \gamma_p$  為拉格蘭吉乘子，其疊代方程式如 (5-8) 式， $k$  表示疊代次數，而各個疊代起始的參數設定值為 (5-9) 式。

經 A.L.M. 總域極小化演算程序，由 IMSL 套裝軟體副程式 RNUN 以隨機方式產生不同的 4 組起始點，每組約需要 9 ~ 10 次的迭代，當機率達  $P > 0.99$  時即視為搜尋到總域極小值，並終止演算程序。下列為第一個由隨機選取之起始點

$$\begin{aligned} E_1 &= 32.606 \text{ GPa} & E_2 &= 1.273 \text{ GPa} & G_{12} &= 0.145 \text{ GPa} \\ \nu_{12} &= 0.070 & E_e &= 0.743 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (6-3)$$

經由最佳化方法搜尋獲得第一組區域極小值，並計算其機率值  $P$ ；最後經歷四次前述程序，搜尋獲得第四組區域極小值(如表 6-6 所示)。此時，其機率值為 0.9921，已經達到  $P > 0.99$ ，記錄設計變數之總域極小值

$$\begin{aligned} E_1 &= 140.807 \text{ GPa}(-4.54\%) & E_2 &= 9.157 \text{ GPa}(-0.72\%) \\ G_{12} &= 7.419 \text{ GPa}(8.53\%) & \nu_{12} &= 0.304(-0.74\%) \\ E_e &= 2.076 \text{ MPa}(2.37\%) \end{aligned} \quad (6-4)$$

括弧內表示與拉伸試驗所得之彈性常數比較之誤差值，由此可知本方法識別複合材料積層板與邊界支撐之所有系統參數非常精確、有效。

另外，藉由表 6-6 可以明顯看出，本文之總域極小化演算法對於總域極小值解之搜尋能力。複合材料積層板結構試片 A1 疊層方式為  $[0^\circ]_6$ ，雖然經由隨機方式產生不同的 4 組起始點，每組各經歷 9 ~ 10 次的迭代，但最後他們反求所得之區域極小值皆是同一點，因此在完成第四組搜尋時，即滿足了貝氏分析法機率大於 0.99 的條件，因而將此極值視為總域之極小值。由此反算過程，可以很清楚了解此總域極小化演算法之能力，並不像一般的最佳化方法需要有很好的初始值，或是很小的上、下限值範圍才能達成。

接著是探討不同疊層數目之反算結果，首先考慮六層之複合材料積層板結構試片（A1、A2、A3），其尺寸為  $0.195\text{m} \times 0.195\text{m} \times 0.75\text{mm}$ 、寬厚比為 260，疊層角度分別為  $[0^\circ]_6$ 、 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_S$  和  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_S$ ，其反求之結果如表 6-7 所示。三種試片尺寸相同只是疊層角度不同，都經由隨機方式各自產生不同的 4 組起始點，平均分別需要 9、6 和 13 次的迭代，即可使貝氏分析法的機率達到大於 0.99 之條件，而獲得最後之總域極小值。由識別結果可以看出三種試片其結果並沒有明顯的差異，所以疊層角度對其反求結果影響並不大。其反求所得材料常數與靜態拉伸試驗值之誤差百分比， $E_1$ 、 $E_2$  小於 7.70%， $G_{12}$  小於 8.53%， $\nu_{12}$  小於 1.95%， $E_c$  小於 2.56%。

表 6-8 則是考慮八層之複合材料積層板結構試片（B1、B2、B3），其尺寸為  $0.205\text{m} \times 0.205\text{m} \times 1\text{mm}$ 、寬厚比為 205，疊層角度分別為  $[0^\circ]_8$ 、 $[0^\circ/90^\circ]_{2S}$  和  $[45^\circ/-45^\circ]_{2S}$ 。三種試片尺寸相同只是疊層角度不同，都經由隨機方式各自產生不同的 6、4 和 6 組起始點，平均分別需要 6、12 和 7 次的迭代，此時貝氏分析法的機率分別為 0.9959、0.9921 和 0.9959 皆達到大於 0.99，獲得最後之總域極小值。由識別結果可以看出三種試片其結果並沒有明顯的差異，所以疊層角度對其反求結果同樣是影響並不大。其反求之誤差  $E_1$ 、 $E_2$  小於 7.05%， $G_{12}$  小於 5.43%， $\nu_{12}$  小於 1.95%， $E_c$  小於 1.53%。

表 6-9 則是考慮十二層之複合材料積層板之試片（C1、C2、C3），其尺寸為  $0.215\text{m} \times 0.215\text{m} \times 1.5\text{mm}$ 、寬厚比為 143.3，疊層角度分別為  $[0^\circ]_{12}$ 、 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  和  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ]_{2S}$ 。三種試片尺寸相同只

是疊層角度不同，經由隨機方式各自產生不同的 4、12 和 4 組起始點，平均分別需要 6、10 和 9 次的迭代，即可使貝氏分析法的機率達到大於 0.99，獲得最後之總域極小值。由識別結果可以看出三種試片其結果並沒有明顯的差異，所以疊層角度對其反求結果一樣是影響並不大。其反求之誤差  $E_1$ 、 $E_2$  小於 5.22%， $G_{12}$  小於 8.53%， $\nu_{12}$  小於 3.27%， $E_c$  小於 3.35%。

另外，考慮積層板中心處增加彈簧支撐時（如圖 6-1B 所示），其疊層角度、中心彈簧常數及對應之自然頻率實驗量測值，如表 6-10 所示。此時其設計變數  $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_c, K_c]$  增加為六個，設定合理之上、下限範圍為 (5-11) 式，再將 (5-7) 式中設計變數修正係數設定如 (5-12a) 式，使其值介於 0~10 之間。

探討  $\text{Gr/ep}[0^\circ]_8$  四個邊界為封閉彈性支撐且平板中央有彈簧支撐時之系統參數反算。表 6-11 中同時考慮使用 6 或 7 個不同數目頻率實驗值之情形，由結果可以看出使用較多的自然頻率數目，可以獲得較佳之反算結果。其最大誤差值由原先使用 6 個自然頻率實驗值的 18.18%，降低至使用 7 個自然頻率時的 6.48%。表 6-12 為其他具有相同彈性支撐，但是不同疊層角度積層板結構，使用七個自然頻率實驗值之反算結果，最大誤差量不超過 7.63%。經由上述之所有反算結果，再次確認本文反算方法之正確、有效率。

### 6.1.2 複合材料積層薄板四個邊界為部分彈性支撐

考慮複合材料積層薄板四個邊界為部分彈性支撐，其支撐型式

共有分為A、B和C三種，如圖 6-2 所示。其尺寸( $a_0 \times b_0 \times h$ )分別為  $22 \times 22 \times 0.15 \text{ cm}^3$  或  $32 \times 22 \times 0.15 \text{ cm}^3$ ，平均密度為  $1548 \text{ Kg/m}^3$ ，變異係數為 1.22%。其對應之疊層角度、幾何形狀、邊界支撐條件與自然頻率實驗量測值如表 6-13 所示。如圖 6-3 所示，為  $\text{Gr/ep} [0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  複材積層板具有A型式彈性支撐，經由振動實驗得到之頻譜圖。

為了確認本文對於邊界部份彈性支撐複合材料薄板結構系統參數識別方法之正確性與可行性，有關自然頻率實驗測量值，先將以理論分析值來模擬。考慮  $\text{Gr/ep} [0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  複材板邊界為 A 型式部份彈性支撐時，其邊界使用不同楊氏係數之彈性支撐，表 6-14 為其前六個自然頻率理論值，將被視為「實驗值」來進行反算。設定合理之上、下限範圍為(5-11a)式，接著再將(5-7)式中設計變數修正係數設定如下(5-12)式，使其值介於 0~10 之間。

考慮  $\text{Gr/ep} [0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  邊界彈性墊  $E_e = 1.0 \text{ MPa}$  時之反算過程，歷經 9 個隨機產生不同之起始點，且每個起始點約 7~12 次之迭代可得到區域極小值，即可搜尋獲得總域之極小值，每個起始點所對應之迭代次數與區域極小值，如表 6-15 所示。當邊界彈性墊  $E_e = 15 \text{ MPa}$  時之反算過程，其所需之隨機起始點為 4 個，及可搜尋獲得總域極小值，如表 6-16 所示。再更進一步探討複合材料改為 glass/epoxy (GI/ep)  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  時之情形。其理論之材料性質如下

$$E_1 = 43.5 \text{ GPa}, E_2 = 11.5 \text{ GPa}, G_{12} = 3.45 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.27, \rho = 2000 \text{ kg/m}^3 \quad (6-5)$$

不同楊氏係數彈性墊支撐之理論自然頻率值，如表 6-17 所示。反算所需之隨機起始點、平均迭代次數與反算結果，如表 6-18 所示。經由上述之結果可以確認本文方法，對於邊界部份彈性支撐 Gr/ep 或 Gl/ep $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  積層板之系統參數，可以非常精確、有效率的識別。

接著是以實驗之自然頻率值來建立誤差函數，再進行反算工作。同樣是探討 Gr/ep $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{2S}$  邊界彈性墊為 A 型式支撐時之反算過程。以隨機產生不同之起始點，且每個起始點之迭代次數不超過 11 次，可獲得區域極小值，最後經歷 6 個隨機產生不同之起始點，機率達到 0.9959 後，搜尋獲得總域之極小值；每個起始點所對應之迭代次數與區域極小值，如表 6-19 所示。其他不同型式部分彈性支撐複合材料積層薄板之算結果，如表 6-20 所示，系統參數之最大誤差值不超過 9.7%，而系統參數之百分比誤差  $E_1$  小於 3.64%、 $E_2$  小於 7.78%、 $G_{12}$  小於 9.70%、 $\nu_{12}$  小於 2.77% 和  $E_e$  小於 9.02%。

### 6.1.3 複合材料積層厚板單邊彈性支撐

考慮複合材料積層厚板 $[0^0]_{60}$ 、 $[0^0/90^0]_{15S}$ ，其為單邊為彈性支撐（如圖 6-4 所示）之系統參數反算。其尺寸 $(a_0 \times b_0 \times h)$ 為 $18\text{cm} \times 18\text{cm} \times 0.8\text{cm}$ ，平均密度為 $1537 \text{ Kg/m}^3$ 。邊界由直條式之彈性墊片所支撐，其 $b_e = 1\text{cm}$ 、 $h_e = 2\text{mm}$ 。經由振動實驗量測獲得其自然頻率之實驗測值，如表 6-21 所示。圖 6-5 為 Gr/ep $[0^0]_{60}$  單邊彈性支撐，經由振動實驗得到之頻譜圖。本節邊界彈性支撐是以單位長度之

平移彈簧常數  $K_L$ 、扭轉彈簧常數  $K_R$  來模擬。所以系統參數總共有 7 個，分別是  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $G_{23}$ 、 $\nu_{12}$ 、 $K_L$  和  $K_R$ 。為了確認本文對於單邊彈性支撐複合材料厚板結構系統參數識別方法之正確性與可行性，有關自然頻率實驗測量值，先將以理論分析值來模擬。分別考慮單邊彈性支撐  $Gr/ep \left[ 0^\circ \right]_{60}$ ，其理論之系統參數為

$$\begin{aligned} E_1 &= 146.503 \text{ GPa}, E_2 = 9.223 \text{ GPa}, G_{12} = 6.836 \text{ GPa}, G_{23} = 1.123 \text{ GPa} \\ \nu_{12} &= 0.306, K_L = 0.2 \text{ GN/m}^2, K_R = 1 \text{ kN}, \rho = 1500 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (6-6)$$

與單邊彈性支撐  $Gl/ep \left[ 0^\circ / 90^\circ \right]_{15S}$  時之情形，其理論之系統參數為

$$\begin{aligned} E_1 &= 43.5 \text{ GPa}, E_2 = 11.5 \text{ GPa}, G_{12} = 3.45 \text{ GPa}, G_{23} = 1.1 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.27 \\ K_L &= 0.2 \text{ GN/m}^2, K_R = 1 \text{ kN}, \rho = 2000 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (6-7)$$

表 6-22 為此兩種結構系統之自然頻率理論值。於理論自然頻率值反算時，將視此理論頻率值為「實驗量測」值，並設定合理之上、下限範圍為(5-11b)式，接著再將(5-7)式中設計變數修正係數設定如下(5-12)式，使其值介於 0~10 之間。此兩種結構系統，反算所需之隨機起始點、平均迭代次數與反算結果，分別如表 6-23 和表 6-24 所示。經由上述之結果確認本文方法，對於單邊彈性支撐  $Gr/ep \left[ 0^\circ \right]_{60}$  或  $Gl/ep \left[ 0^\circ / 90^\circ \right]_{15S}$  積層板之系統參數，均能非常精確、有效率的識別。

表 6-25 為單邊彈性支撐之積層厚板其實驗自然頻率值反算之結果。由表中值，反算得到平均之系統參數  $\bar{E}_1 = 140.314 \text{ Gpa}$  (-4.22%)， $\bar{E}_2 = 8.602 \text{ Gpa}$  (-6.74%)， $\bar{G}_{12} = 6.232 \text{ Gpa}$  (-8.84%)， $\bar{G}_{23} = 1.102 \text{ Gpa}$  (-1.91%)， $\bar{\nu}_{12} = 0.299$  (-2.29%)， $K_L = 84.081 \text{ MN/m}^2$  和  $K_R = 1037.6 \text{ N}$ ，括

號中之參數代表與拉伸試驗值之百分比差值。

## 6.2 彈性支撐複合材料三明治板之材料常數反算

複合材料三明治結構其面層材料性質與夾心層材料性質有很大差異，面層材料性質屬高強度、高剛性（例如碳纖維等材料），而夾心層則多屬低密度、較低強度、填充性質佳之材料（例如發泡材料）。面層與夾心層以樹脂黏合，由於兩者力學行為扮演角色不同且彈性常數差距很大，一般很難識別夾心層之彈性常數，更何況若結構在使用一段時間且經常處於動態載荷中，可能導至三明治板結構產生肉眼檢視不到的損傷；此時無法以拉伸試驗來評估其再使用年限，這對使用複合材料三明治板結構其系統可靠度帶來無法評估的困境。因此本文研究以實驗測量其系統之前八個自然頻率值，同時利用最佳化原理配合里茲法與分層理論識別其系統參數。

複合材料三明治平板的製作，其面層使用之碳纖維材料和前一節是相同材料，而夾心層部分則為發泡平板（core (I)）厚度為  $h_c = 3mm$  和塑膠平板（core (II)）厚度為  $h_c = 2.05mm$ ，經由拉伸與壓縮試驗獲得其材料常數如下

$$\begin{aligned} \text{Core(I): } E_c &= 27.65 \text{ MPa} (3.62\%), \nu_c = 0.3 (0.45\%) \\ \text{Core(II): } E_c &= 3.94 \text{ GPa} (2.58\%), \nu_c = 0.38 (0.31\%) \end{aligned} \quad (6-6)$$

其中括號內之數值代表其變異係數（c.o.v.s）。有關複材三明治平板  $[0_3/\text{core(I)}/0_3]$ 、 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{core(I)}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 、 $[0_3/\text{core(II)}/0_3]$  和  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/\text{core(II)}/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  之製作，面層部分是分別以纖維方向 0 度

三層或是 0 度/90 度/0 度交替方式三層熱壓成形，再利用樹脂將其與夾心層結合形成複合材料三明治平板，其面層每一單層 (Lamina) 厚度皆為 0.125mm。而長寬尺寸，心層 *core(I)* 複合材料三明治平板是 30cm × 30cm、心層 *core(II)* 複合材料三明治平板則是 21cm × 21cm；平均密度方面，心層 *core(I)* 複合材料三明治平板其心層與面層分別為 49.1 Kg/m<sup>3</sup> 和 1675.4 Kg/m<sup>3</sup>、心層 *core(II)* 複合材料三明治平板則分別為 1244.1 Kg/m<sup>3</sup> 和 1658.4 Kg/m<sup>3</sup>，圖 6-6 為複合材料三明治板四邊彈性支撐之示意圖。

表 6-26 為複合材料三明治板於彈性支撐時之自然頻率實驗值、理論分析值與誤差百分比。圖 6-7 為彈性支撐 Gr/ep [0<sub>3</sub><sup>0</sup>/core(I)/0<sub>3</sub><sup>0</sup>] 三明治板，經由振動實驗得到之頻譜圖。值得注意的是，在考慮邊界彈性支撐部分之模擬時，因為複合材料三明治板實際與彈性支撐接觸之部分只有最下面的面層部分，因此其邊界扭轉彈簧只有此分層有值，其他兩個分層是沒有受扭轉彈簧作用的。

複合材料三明治板，彈性支撐之反算情形。此時(5-3)式中設計變數為七個，亦即  $\underline{x} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, E_c, \nu_c, E_e]$ 。並將系統參數合理之上、下限範圍設定如(5-11)式，接著再將 (5-7) 式中設計變數修正係數設定如(5-12)式，使其值介於 0~10 之間。

為了確認本文有關彈性支撐複合材料三明治板結構系統參數識別方法之正確性與可行性，有關自然頻率實驗測量值，先將以理論分析值來模擬。考慮 Gr/ep [0<sub>3</sub><sup>0</sup>/core(I)/0<sub>3</sub><sup>0</sup>] 為彈性支撐時，將表 6-26 中之八個自然頻率理論值視為「實驗值」來進行反算。表 6-27 為其反算

之過程，只需六個隨機產生不同之起始點和 20~30 次之迭代，即可搜尋獲得總域之極小值，是非常精確、有效率的識別。另外，為了更進一步確認不同性質三明治材料之可行性，同時考慮正方形長寬為 21cm 之 Gl/ep  $[0_3^{\circ}/core/0_3^{\circ}]$  和  $[45^{\circ}/-45^{\circ}/45^{\circ}/core/45^{\circ}/-45^{\circ}/45^{\circ}]$  三明治複材板其邊界為彈性支撐之情形，其理論材料常數如下

$$\begin{aligned} E_1=38.6GPa, E_2=8.27GPa, G_{12}=4.14GPa, \nu_{12}=0.26, \rho_f=1800kg/m^3, h_f=0.375mm \\ E_c=10 \text{ or } 2000MPa; \nu_c=0.3; E_e=1, \text{ or } 50MPa, \rho_c=500kg/m^3, h_c=2mm \end{aligned} \quad (6-6)$$

表 6-28 為 Gl/ep 三明治複材板，對應不同心層與彈性邊界條件下之理論自然頻率值。此前八個自然頻率值，將同樣被視為「實驗值」應用於系統參數之反算。並將系統參數合理之上、下限範圍，設定為

$$\begin{aligned} 0 \leq E_1 \leq 400GPa; 0 \leq E_2 \leq 40GPa; 0 \leq G_{12} \leq 20GPa; 0 \leq \nu_{12} \leq 0.5 \\ 0 \leq E_c \leq 100MPa; 0 \leq \nu_c \leq 0.5; 0 \leq E_e \leq 10MPa \quad \text{for } E_c = 10MPa \quad (6-7) \\ 0 \leq E_c \leq 10000MPa; 0 \leq \nu_c \leq 0.5; 0 \leq E_e \leq 100MPa \quad \text{for } E_c = 2000MPa \end{aligned}$$

接著再將 (5-7) 式中設計變數修正係數設定如下，使其值介於 0~10 之間。當  $E_c = 10MPa$  時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (100, 10, 10, 1, 100, 1, 10) \quad (6-8a)$$

而  $E_c = 2000MPa$  時

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) = (100, 10, 10, 1, 10000, 1, 100) \quad (6-8b)$$

四種不同心層與彈性邊界組合條件下，搜尋得到系統參數之總域極小值，其詳細所需之隨機起始點數量和平均之迭代次數如表 6-29 所示。經由上述範例之所有測試結果，同樣可以確認本文對於 Gl/ep

三明治複材板之系統參數可以提供正確、有效率識別。

考慮以表 6-26 之自然頻率實驗值，進行彈性支撐複合材料三明治平板之系統參數識別。表 6-30 為彈性支撐複材三明治平板  $[0_3^{\circ}/core(I)/0_3^{\circ}]$  之反算過程，隨機產生四個起始點，每次經歷了 14~20 次之迭代，即可使貝氏分析法的機率達到大於 0.99，搜尋獲得總域極小值。由表中結果顯示，所有系統參數識別值與實驗量測值間之百分比誤差，最大不超過  $G_{12}$  的 8.69%。其他三個複材三明治平板的反算結果則是列於表 6-31 中，由結果顯示  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $G_{12}$ 、 $\nu_{12}$ 、 $E_c$ 、 $\nu_c$  和  $E_e$  的百分比誤差分別小於 5.04%、11.16%、8.06%、2.47%、13.12%、2.60% 和 7.71%。而且其最大誤差值不超過  $[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}/core(II)/0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$  中  $E_c$  的 13.12%。所以本文方法能以簡單的非壞方式決定系統參數，且誤差不超過 15%，在工程應用上是很有實用的價值。

## 第七章 結論與未來展望

本文已經完成，應用最佳化總域極小化反算彈性支撐複合材料板結構系統參數之方法。混合實驗與理論分析方式，在不破壞結構及其邊界條件的情形下，以非破壞性方式識別結構之所有系統參數。經由反算結果與討論，可以得到以下之結論：

1. 針對文中這些不同寬厚比、疊層角度彈性支撐複材積層板試片，反算結果顯示其材料性質並沒有明顯和寬厚比、疊層角度有關。
2. 彈性支撐複合材料積層厚板與三明治板，由於頻率實驗量測時已有較大之誤差，所以其反算結果會有較大之誤差產生。
3. 若是沒有對設計變數取單位化和有效上、下限技巧，將可能產生很差之結果甚至無法收斂。
4. 本文方法具可行性與精確性，並可將此研究方法應用於其他不同類型材料結構的系統參數識別。

由系統參數識別結果顯示，本文建立之 Ritz 方法對於自然頻率分析非常精確，且反算方法對於總域極小值之處理非常正確、有效率。所以，不論是彈性支撐複合材料積層板或是彈性支撐複合材料三明治板之系統參數識別，皆能應用振動實驗量測其自然頻率之方式來建立誤差函數，再進行反算程序，且所獲得的結果都是非常精確。

另外，探討複合材料三明治板彈性常數之識別時，因面層與中間夾心層分屬不同材料，且其勁度差異很大，必須使用分層理論將厚度方向分成三個（面層兩個與夾心層一個）一階剪變形位移場來分析自

然頻率，此時共有七個位移函數，再加上設計變數增為七個，所以 A.L.M. 總域極小化演算時間與計算機硬體需求將大增；而且複合材料三明治板，因為其本身面層、心層的材料性質差異很大，彼此間是用樹脂黏合而成，所以自然振動頻率量測時，會面臨較多的雜訊與困難參雜其中；另外，邊界彈性支撐是用等效彈簧方式模擬，且以簡單的材料力學方式推導得到，這樣亦會和實際之情形有所差別。而複合材料三明治板在自然頻率量測時即有較大的誤差，所以會造成其反算結果有較大之誤差產生。針對上述問題，是不是可以有（一）更精確、有效的邊界模擬；（二）更簡單、精確且有效率的自然頻率分析理論；（三）使用更精確的自然頻率量測儀器設備（如非接觸方式等）。如此將可有效提昇反算工作之精確及效率，並降低運算時間成本。這些是值得再研究改善的地方。



## 參 考 文 獻

1. Reismann, H. and Pawlik, P. S., “Elasticity – Theory and Applications,” (1969).
2. Reddy, J. N., “Energy and Variational Methods in Applied Mechanics,” Junuthula Narasimha (1945).
3. Jones, R. M., “Mechanics of Composite Materials,” McGraw-Hill Inc (1975).
4. Gibson, R. F., “Principles of Composite Material Mechanics,” McGraw-Hill Inc (1994).
5. Mindlin, R. D., “Influence of Rotatory Inertia and Shear Deformation on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31-38 (1951).
6. Mindlin, R. D., “Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motin of Isotropic, Elastic Plates,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 1031-1036 (1951).
7. Whitney, J. M. and Pagano, N. J., “Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 37(4), Trans. ASME, Vol. 92, pp. 1031-1036 (1970).
8. Whitney, J. M., “Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates,” Journal of Composite Materials, Vol. 6, pp. 426-440 (1972).

9. Reddy, J. N., "A Penalty Plate-Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1187-1206 (1980).
10. Reddy, J. N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *Journal of Applied Mechanics*, 51, pp. 745-752 (1984).
11. Hanna, N. F. and Leissa, A. W., "A Higher Order Shear Deformation Theory for the Vibration of Thick Plates," *Journal of Sound and Vibration*, 170(4), pp. 545-555 (1994).
12. Frederiksen, P. S., "Single-Layer Plate Theories Applied to the Flexural Vibration of Completely Free Thick Laminates," *Journal of Sound and Vibration*, 186(5), pp. 743-759 (1995).
13. Bardell, N. S., Dunsdon, J. M. and Langley, R. S., "Free Vibration Analysis of Coplanar Sandwich Panels," *Composite Structures*, 38, pp. 463-475 (1997).
14. Kant, T. and Swaminathan, K., "Free Vibration of Isotropic, Orthotropic, and Multilayer Plates Based on Higher Order Refined Theories," *Journal of Sound and Vibration*, 241(2), pp. 319-327 (2001).
15. Kant, T. and Swaminathan, K., "Analytical Solutions for Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-Order Refined Theory," *Composite Structures*, 53, pp. 73-85 (2001).
16. Nayak, A. K., Moy, S. S. J. and Shenoi, R. A., "Free Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates Based on Reddy's Higher-Order Theory," *Composites: Part B*, Vol. 33, pp. 505-519 (2002).
17. Mau, S. T., "A Refined Laminated Plate Theory," *Journal of Applied*

Mechanics, Vol. 40(2), pp. 606-607 (1973).

18. 周仲彥, “複合材料積層板之線性及非線性變形分析,” 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 (1993)。
19. 賴峰民, “複合材料積層板設計及製造,” 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 (1993)。
20. 趙大年, “含剪變形複合材料板之非線性行為研究,” 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 (1994)。
21. 廖紹助, “複合材料積層板之輕量設計,” 國立交通大學機械工程研究所碩士論文 (1994)。
22. Hung, K. C., Lim, M. K. and Liew, K. M., “Boundary Beam Characteristics Orthonormal Polynomials in Energy Approach for Vibration of Symmetric Laminates-II: Elastically Restrained Boundaries,” *Composite Structures*, Vol. 26, pp. 185-209 (1993).
23. Ding, Z., “Natural Frequencies of Rectangular Plates Using a Set of Static Beam Functions in Rayleigh-Ritz Method,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 189(1), pp.81-87 (1996).
24. Narita, Y. and Leissa, A. W., “Frequencies and Mode Shapes of Cantilever Laminated Composite Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154(1), pp.161-172 (1992).
25. Liew, K. M., Hung, K. C. and Lim, M. K., “Vibration of Mindlin Plates Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials,” Vol. 182(1), pp.77-90 (1995).

26. Liew, K. M., "Solving the Vibration of Thick Symmetric Laminates by Reissner/Mindlin Plate Theory and the *P*-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 198(3), pp.343-360 (1996).
27. Snyman, J. A. and Fatti, L. P., "A Multi-Start Global Minimization Algorithm with Dynamic Search Trajectories," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 54, pp. 121-141, (1987).
28. Kam, T. Y. and Snyman, J. A., "Optimal Design of Laminated Composite Structures Using a Global Optimization Technique," *Journal of Composite Structure*, Vol. 19, pp. 351-370 (1991).
29. Vandperplaats, G. N., "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design : with Application," McGraw-Hill Inc (1993).
30. Aora, J. S., " Introduction to Optimum Design," McGraw-Hill Inc., (1989).
31. 徐業良, "工程最佳化設計," 國立編譯館, (1995)。
32. Deobald, L. R. and Gibson, R. F., "Determination of Elastic Constants of Orthotropic Plates by a Modal Analysis/Rayleigh-Ritz Technique," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 124(2), pp. 269-283 (1988).
33. Frederiksen, P. S., "Estimation of Elastic Moduli Thick Composite Plates by Inversion of Vibrational Data," *Inverse Problem in Engineering Mechanucs*, Balkema, Rotterdam, pp. 111-118 (1994).
34. Castagnede, B., Jenkins, J. T., Sachse, W. and Baste, S., "Optimal Determination of the Elastics of Composite Materials from Ultrasonic Wavespeed Measurement," *Journal of Applied Physics*, Vol. 66, pp. 2753-2761 (1990).

35. Fallstrom, K. E. and Jonsson, M., "A Nondestructive Method to Determine Material Properties in Anisotropic Plate," *Polymer Composites*, Vol. 12(5), pp. 293-305 (1991).
36. Nielsen, S. A. and Toftegaard H., "Ultrasonic Measurement of Elastic Constants in Fiber-reinforced Polymer Composites Under Influence of Absorbed Moisture," *International Journal of Ultrasonic*, Vol. 38, pp. 242-246 (1998).
37. Berman, A. and Nagy, E. J., "Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data," *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1168-1173 (1983).
38. Kam, T. Y. and Lee, T. Y., "Crack Size Identification Using an Expanded Mode Method," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 31, pp. 925-940 (1994).
39. Kam, T. Y. and Lee, T. Y., "Detection of Cracks from Modal Test Data," *International Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 42, pp. 381-387 (1992).
40. Kam, T. Y. and Lee, T. Y., "Identification of Crack Size via an Energy Approach," *Journal of Nondestructive Evaluation*, Vol. 13, pp. 1-11 (1994).
41. Kam, T. Y. and Liu, C. K., "Stiffness Identification of Laminated Composite Shafts," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40(9), pp. 927-936 (1998).
42. Wang, W. T. and Kam, T. Y., "Material Characterization of Laminated Composite Plates via Static Testing," *International Journal of Composite Structures*, Vol. 50(4), pp. 347-352 (2000).

43. Wang, W. T. and Kam, T. Y., "Elastic Constants Identification of Shear Deformable Laminated Composite Plates," ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 127(11), pp.1117-1123 (2001).
44. Booker, L., "Improving Search in Genetic algorithms," in Davis, L.(Editor), Genetic Algorithms and Simulated Annealing (1987).
45. Kincaid, R. K. and Padula, S. L., "Minimizing Distortion and Internal Forces in Truss Structure by Simulated Annealing," Proceedings, 31st AIAA /ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Materials and Dynamics Conference, Held in Long Beach, California, Paper No. AIAA-90-1095-CP, pp. 327-333 (1990).
46. Balling, R. J., "Optimal Steel Frame Design by Simulated Annealing." Journal of Structural Engineering, Vol. 117, pp. 1780-1795 (1991).
47. May, S. A. and Balling, R. J., "A Filtered Simulated Annealing Strategy for Discrete Optimization of 3D Steel Frameworks," Structural Optimization, Vol. 4, pp. 142-148 (1992).
48. Haupt, R. L. and Haupt, S. E., "Practical Genetic Algorithms," (1988).
49. Goldberg, D. E., "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning," (1989).
50. Banzhaf, W., and Reeves, C., "Foundations of Genetic Algorithms," (1999).
51. Gen, M. and Cheng, R., "Genetic Algorithms and Engineering Design (Wiley Series in Engineering Design and Automation) ," (1999).
52. Goldberg, D. E. and Kuo, C. H., "Genetic Algorithms in Pipeline Optimization," Journal of Computing in Civil Engineering, Vol. 1, pp.

- 128-141 (1987).
53. Lin, C. Y. and Fleury, C., "Genetic Algorithms in Optimization Problems with Discrete and Integer Design Variables," *Engineering Optimization*, Vol. 19, pp. 309-327 (1992).
54. Huang, C. C. and Huang, Y. F., "Bounds on the Numbers of Hidden Neuron in Multiplayer Perceptrons," *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol. 2(1), pp.47-55 (1991).
55. Salchenberger, Cinar, E. M. and Lash, N. A., "Nueral Networks : A New Tool for Predicting Thrift Failures," *Decision Sciences*, Vol. 23, pp889-916 (1992).
56. Sexton, R. S., Dorsey, R. E. and Johnson, J. D., "Toward Global Optimization of Neural Networks : A Comparison of the Genetic Algorithm and Backproagation," *Decision Support System*, Vol. 22, pp171-186 (1998).
57. Sexton, R. S., Jatinder N. D. and Gupta, "Comparative Evaluation of Genetic Algorithm and Backpropagation for Training Neural Networks," *Information Sciences* 129, pp.45-59 (2000).
58. "ASTM Standards and Literature References for Composite Materials," 2<sup>nd</sup> ed., West Conshohocken, Pa (1990).
59. "The ANSYS Release 5.4 User's Manual," Analysis Inc, 1997.
60. Masoud, R. R. and Pierre, M., "Buckling and Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates with Elastic Rotational EEdge Restraints," *AIAA Journal*, Vol 37(5), pp. 579-587 (1999).
61. Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates Theory and

Analysis,” CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 332-333 (1997).

62. Reddy, J. N. and Phan, P. H., “Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher order shear deformation theory,” *Journal of sound and vibration*, Vol. 98, pp. 157-170 (1985).
63. Raville, M. E. and Ueng, C. E. S., “Determination of Natural Frequencies of Vibration of a Sandwich Plate.” *Exp. Mech.*, Vol. 7, pp. 490-493 (1967).
64. Zhou, H. B. and Li, G. Y., “Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with Laminated Faces Using Spline Finite Point Method,” *Computers and structures*, Vol. 59(2), pp. 257-263 (1996).
65. Khare, R. K., Kant, T. and Garg, A. K., “Free Vibration of Composite and Sandwich Laminates with a Higher-Order Facet Shell Element,” *Composite Structures*, Vol. 65, pp. 405-418 (2004).
66. Watanabe, N., Miyachi, K. and Daimon, M., “Stiffness and Vibration Characteristic of Sandwich Plates with Anisotropic Composite Laminates Face Sheets.” *Proc., Conf. on AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 34th Structures, Structural Dynamics, and Material Conference*, 236-244 (1993).

## 附 錄 一

剪力修正係數  $k_\alpha$ 、 $k_\beta$  之決定：

由[7]可以得到下列之關係式

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\alpha^2 A_{55} & k_\alpha k_\beta A_{45} \\ k_\alpha k_\beta A_{45} & k_\beta^2 A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_x + w_{,x} \\ \varphi_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1})$$

其中  $Q_x$ 、 $Q_y$  為剪力合力， $w$ 、 $\varphi$  分別為板的撓度和旋轉角度，而

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^k dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (\text{A2})$$

而  $\bar{Q}_{ij}^k$  為第  $k$  層之轉換勁度矩陣， $k_\alpha$ 、 $k_\beta$  為剪力修正係數。

考慮複材平板承受靜態圓柱形彎曲外力作用，其變形如下

$$u^0 = u(x), v^0 = v^0(x), \varphi_x = \varphi_x(x), \varphi_y = \varphi_y(x), w = w(x) \quad (\text{A3})$$

其中  $u^0$ 、 $v^0$  是分別為中間面的  $x$  和  $y$  方向的位移。而將(2-12a)式濃縮成

$$\begin{aligned} N_i &= A_{ij} \varepsilon_j^0 + B_{ij} \Gamma_j \\ M_i &= B_{ij} \varepsilon_j^0 + D_{ij} \Gamma_j \end{aligned} \quad (i, j = 1, 6) \quad (\text{A4})$$

其中  $N_1 = N_x$ 、 $N_6 = N_{xy}$  和  $M_i$ 、 $\varepsilon_i^0$  和  $\Gamma_i$  也有相同的情形。將(A4)式轉換成

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^0 &= A_{ij}^* N_j + B_{ij}^* M_j \\ \Gamma_i^0 &= B_{ij}^* N_j + D_{ij}^* M_j \end{aligned} \quad (i, j = 1, 6) \quad (\text{A5})$$

再將(A5)式和(2-12a)式結合在一起，可以得到下列第  $k$  層之關係式

$$\sigma_i^k = Q_{ij}^k (B_{jm}^* + z D_{jm}^*) M_m \quad (i, j = 1, 6) \quad (\text{A6})$$

其中  $\sigma_1 = \sigma_x$ 、 $\sigma_6 = \tau_{xy}$ 。再將(A6)式和平衡方程式結合在一起，可以將第

$k$  層側向剪應力表示為

$$\tau_i^k = \left[ H_i^k - \frac{z}{2}(2B_{ij}^* + zD_{ij}^*)Q_{jm}^*Q_m \right] \quad (A7)$$

其中  $\tau_1 = \tau_{xy}$ 、 $\tau_6 = \tau_{yz}$ 、 $Q_1 = Q_x$  和  $Q_6 = Q_y$ 。  $H_i^k$  是常數，是由層間  $\tau_i$  的連續與  $\tau_i$  在下表面需要為 0 的條件決定。再將 (A7) 式、(2-12a) 式代入 (A1) 式中，並且對  $z$  作積分，產生  $Q_x$  和  $Q_y$  的二次多項式。而圓柱形彎曲外力作用時， $Q_x$  之值至少是  $Q_y$  的十倍大。因此  $k_\alpha^2$  將由  $Q_x^2$  來決定，而  $Q_y$  將被忽略， $k_\alpha^2$  可以表示為

$$k_\alpha^2 = A_{55}^* \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ S_{55}^k (g_1^k(z))^2 + 2S_{45}^k g_1^k(z) g_2^k(z) + S_{44}^k (g_2^k(z))^2 \right] dz \right\}^{-1} \quad (A8)$$

而

$$A_{55}^* = \frac{2A_{44}A_{55} - A_{45}^2}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2}$$

$$g_1^k(z) = \left[ H_1^k - \frac{z}{2}(2B_{ij}^* + D_{ij}^*)Q_{jl}^k \right]; g_2^k(z) = \left[ H_6^k - \frac{z}{2}(2B_{6j}^* + D_{6j}^*)Q_{jl}^k \right] \quad (A9)$$

其中  $S_{55}^k$  是側向剪力順從 (Shear compliance) 分量。

若是積層板為直交性疊層 (亦即  $A_{16} = B_{16} = D_{16} = A_{45} = 0$ )，可將 (A8) 式簡化成

$$k_\alpha^2 = \frac{1}{A_{55}^*} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} S_{55}^k (g^k(z))^2 dz \right]^{-1} \quad (A10)$$

而

$$g^k(z) = \left[ H_1^k + \frac{Q_{11}^k z}{2D} (2B_{11} - A_{11}z) \right]$$

$$D = (A_{11}D_{11} - B_{11}^2) \quad (A11)$$

## 附 錄 二

彈性支撐複合材料三明治板之剛度矩陣 $[K]$ 、質量矩陣 $[M]$ 組成內容

特徵值方程(2-75)式可以改寫成為

$$\begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} & K^{16} & K^{17} \\ & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} & K^{26} & K^{27} \\ & & K^{33} & K^{34} & K^{35} & K^{36} & K^{37} \\ & & & K^{44} & K^{45} & 0 & 0 \\ \text{symmetric} & & & & K^{55} & 0 & 0 \\ & & & & & K^{66} & K^{67} \\ & & & & & & K^{77} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M^{22} & 0 & M^{24} & 0 & M^{26} & 0 \\ & & M^{33} & 0 & M^{35} & 0 & M^{37} \\ & & & M^{44} & 0 & 0 & 0 \\ \text{symmetric} & & & & M^{55} & 0 & 0 \\ & & & & & M^{66} & 0 \\ & & & & & & M^{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{ij}^{(1)} \\ C_{mn}^{(2)} \\ C_{pq}^{(3)} \\ C_{m'n'}^{(4)} \\ C_{p'q'}^{(5)} \\ C_{m'n''}^{(6)} \\ C_{p'q''}^{(7)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A12})$$

其中

$$\begin{aligned} [K^{11}]_{ij\bar{j}} &= 4 \times \left[ (A_{44}^c + 2A_{44}^f) E_{i\bar{i}}^{00} F_{j\bar{j}}^{11} / b^2 + (A_{55}^c + 2A_{55}^f) E_{i\bar{i}}^{11} F_{j\bar{j}}^{00} / a^2 \right. \\ &\quad \left. + (A_{45}^c + 2A_{45}^f) (E_{i\bar{i}}^{01} F_{j\bar{j}}^{10} + E_{i\bar{i}}^{10} F_{j\bar{j}}^{01}) / (ab) \right] + 2 \times \left\{ F_{j\bar{j}}^{00} [K_{L1} \phi_i(-1) \phi_{\bar{i}}(-1) \right. \\ &\quad \left. + K_{L2} \phi_i(1) \phi_{\bar{i}}(1)] / a + E_{i\bar{i}}^{00} [K_{L3} \phi_j(-1) \phi_{\bar{j}}(-1) + K_{L4} \phi_j(1) \phi_{\bar{j}}(1)] / b \right\} \\ [K^{12}]_{ijmn} &= 2 \times (A_{45}^c E_{im}^{00} F_{jn}^{10} / b + A_{55}^c E_{im}^{10} F_{jn}^{00} / a) \\ [K^{13}]_{ijpq} &= 2 \times (A_{44}^c E_{ip}^{00} F_{jq}^{10} / b + A_{45}^c E_{ip}^{10} F_{jq}^{00} / a) \\ [K^{14}]_{ijm'n'} &= 2 \times (A_{45}^f E_{im'}^{00} F_{jn'}^{10} / b + A_{55}^f E_{im'}^{10} F_{jn'}^{00} / a) \\ [K^{15}]_{ijp'q'} &= 2 \times (A_{44}^f E_{ip'}^{00} F_{jq'}^{10} / b + A_{45}^f E_{ip'}^{10} F_{jq'}^{00} / a) \\ [K^{16}]_{ijm''n''} &= 2 \times (A_{45}^f E_{im''}^{00} F_{jn''}^{10} / b + A_{55}^f E_{im''}^{10} F_{jn''}^{00} / a) \\ [K^{17}]_{ijp''q''} &= 2 \times (A_{44}^f E_{ip''}^{00} F_{jq''}^{10} / b + A_{45}^f E_{ip''}^{10} F_{jq''}^{00} / a) \\ [K^{22}]_{mn\bar{m}\bar{n}} &= A_{55}^c E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{00} + (4D_{11}^c + 2A_{11}^f \times h_c^2) \times E_{m\bar{m}}^{11} F_{n\bar{n}}^{00} / a^2 \\ &\quad + (4D_{13}^c + 2A_{13}^f \times h_c^2) (E_{m\bar{m}}^{01} F_{n\bar{n}}^{10} + E_{m\bar{m}}^{10} F_{n\bar{n}}^{01}) / (ab) \\ &\quad + (4D_{33}^c + 2A_{33}^f \times h_c^2) \times E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{11} / b^2 + 2 \times F_{n\bar{n}}^{00} [K_{R1}^{(1)} \phi_m(-1) \phi_{\bar{m}}(-1) + K_{R2}^{(1)} \phi_m(1) \phi_{\bar{m}}(1)] / a \\ [K^{23}]_{mnpq} &= A_{45}^c E_{mp}^{00} F_{nq}^{00} + (4D_{13}^c + 2A_{13}^f \times h_c^2) E_{mp}^{11} F_{nq}^{00} / a^2 \\ &\quad + [(4D_{12}^c + 2A_{12}^f \times h_c^2) E_{mp}^{10} F_{nq}^{01} + (4D_{33}^c + 2A_{33}^f \times h_c^2) E_{mp}^{01} F_{nq}^{10}] / (ab) \\ &\quad + (4D_{23}^c + 2A_{23}^f \times h_c^2) E_{mp}^{00} F_{nq}^{11} / b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K^{24}]_{mn m' n'} &= 2h_c \times \left[ B_{11}^f E_{mm'}^{11} F_{nn'}^{00} / a^2 + B_{33}^f E_{mm'}^{00} F_{nn'}^{11} / b^2 + B_{13}^f (E_{mm'}^{10} F_{nn'}^{01} + E_{mm'}^{01} F_{nn'}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{25}]_{mn p' q'} &= 2h_c \times \left[ B_{13}^f E_{mp'}^{11} F_{nq'}^{00} / a^2 + B_{23}^f E_{mp'}^{00} F_{nq'}^{11} / b^2 + (B_{12}^f E_{mp'}^{10} F_{nq'}^{01} + B_{33}^f E_{mp'}^{01} F_{nq'}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{26}]_{mn m'' n''} &= 2h_c \times \left[ B_{11}^f E_{mm''}^{11} F_{n''}^{00} / a^2 + B_{33}^f E_{mm''}^{00} F_{n''}^{11} / b^2 + B_{13}^f (E_{mm''}^{10} F_{n''}^{01} + E_{mm''}^{01} F_{n''}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{27}]_{mn p'' q''} &= 2h_c \times \left[ B_{13}^f E_{mp''}^{11} F_{nq''}^{00} / a^2 + B_{23}^f E_{mp''}^{00} F_{nq''}^{11} / b^2 + (B_{12}^f E_{mp''}^{10} F_{nq''}^{01} + B_{33}^f E_{mp''}^{01} F_{nq''}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{33}]_{pq \bar{p} \bar{q}} &= A_{44}^c E_{\bar{p}\bar{q}}^{00} F_{q\bar{q}}^{00} + (4D_{33}^c + 2A_{33}^f \times h_c^2) E_{\bar{p}\bar{p}}^{11} F_{q\bar{q}}^{00} / a^2 + (4D_{22}^c + 2A_{22}^f \times h_c^2) E_{\bar{p}\bar{p}}^{00} F_{q\bar{q}}^{11} / b^2 \\
&\quad + (4D_{23}^c + 2A_{23}^f \times h_c^2) (E_{\bar{p}\bar{p}}^{10} F_{q\bar{q}}^{01} + E_{\bar{p}\bar{p}}^{01} F_{q\bar{q}}^{10}) / (ab) \\
&\quad + 2 \times E_{\bar{p}\bar{p}}^{00} [K_{R3}^{(1)} \varphi_q(-1) \varphi_{\bar{q}}(-1) + K_{R4}^{(1)} \varphi_q(1) \varphi_{\bar{q}}(1)] / b \\
[K^{34}]_{pq m' n'} &= 2h_c \times \left[ B_{13}^f E_{pm'}^{11} F_{qn'}^{00} / a^2 + B_{23}^f E_{pm'}^{00} F_{qn'}^{11} / b^2 + (B_{33}^f E_{pm'}^{10} F_{qn'}^{01} + B_{12}^f E_{pm'}^{01} F_{qn'}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{35}]_{pq p' q'} &= 2h_c \times \left[ B_{33}^f E_{pp'}^{11} F_{qq'}^{00} / a^2 + B_{22}^f E_{pp'}^{00} F_{qq'}^{11} / b^2 + B_{23}^f (E_{pp'}^{10} F_{qq'}^{01} + E_{pp'}^{01} F_{qq'}^{10}) / (ab) \right] \quad (A13) \\
[K^{36}]_{pq m'' n''} &= 2h_c \times \left[ B_{13}^f E_{pm''}^{11} F_{qn''}^{00} / a^2 + B_{23}^f E_{pm''}^{00} F_{qn''}^{11} / b^2 + (B_{33}^f E_{pm''}^{10} F_{qn''}^{01} + B_{12}^f E_{pm''}^{01} F_{qn''}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{37}]_{pq p'' q''} &= 2h_c \times \left[ B_{33}^f E_{pp''}^{11} F_{qq''}^{00} / a^2 + B_{22}^f E_{pp''}^{00} F_{qq''}^{11} / b^2 + B_{23}^f (E_{pp''}^{10} F_{qq''}^{01} + E_{pp''}^{01} F_{qq''}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{44}]_{m' n' \bar{m}' \bar{n}'} &= A_{55}^f E_{m' n'}^{00} F_{\bar{m}' \bar{n}'}^{00} + 4 \times \left[ D_{11}^f E_{m' n'}^{11} F_{\bar{m}' \bar{n}'}^{00} / a^2 + D_{33}^f E_{m' n'}^{00} F_{\bar{m}' \bar{n}'}^{11} / b^2 + D_{13}^f (E_{m' n'}^{10} F_{\bar{m}' \bar{n}'}^{01} + E_{m' n'}^{01} F_{\bar{m}' \bar{n}'}^{10}) / (ab) \right] \\
&\quad + 2 \times F_{m' n'}^{00} [K_{R1}^{(2)} \phi_{m'}(-1) \phi_{\bar{m}'}(-1) + K_{R2}^{(2)} \phi_{m'}(1) \phi_{\bar{m}'}(1)] / a \\
[K^{45}]_{m' n' p' q'} &= A_{45}^f E_{m' p'}^{00} F_{n' q'}^{00} + 4 \times \left[ D_{13}^f E_{m' p'}^{11} F_{n' q'}^{00} / a^2 + D_{23}^f E_{m' p'}^{00} F_{n' q'}^{11} / b^2 \right. \\
&\quad \left. + (D_{12}^f E_{m' p'}^{10} F_{n' q'}^{01} + D_{33}^f E_{m' p'}^{01} F_{n' q'}^{10}) / (ab) \right] \\
[K^{55}]_{p' q' \bar{p}' \bar{q}'} &= A_{44}^f E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{00} F_{q' \bar{q}'}^{00} + 4 \times \left[ D_{33}^f E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{11} F_{q' \bar{q}'}^{00} / a^2 + D_{22}^f E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{00} F_{q' \bar{q}'}^{11} / b^2 + D_{23}^f (E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{10} F_{q' \bar{q}'}^{01} + E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{01} F_{q' \bar{q}'}^{10}) / (ab) \right] \\
&\quad + 2 \times E_{\bar{p}' \bar{q}'}^{00} [K_{R3}^{(2)} \varphi_{q'}(-1) \varphi_{\bar{q}'}(-1) + K_{R4}^{(2)} \varphi_{q'}(1) \varphi_{\bar{q}'}(1)] / b \\
[K^{66}]_{m'' n'' \bar{m}'' \bar{n}''} &= A_{55}^f E_{m'' n''}^{00} F_{\bar{m}'' \bar{n}''}^{00} + 4 \times \left[ D_{11}^f E_{m'' n''}^{11} F_{\bar{m}'' \bar{n}''}^{00} / a^2 + D_{33}^f E_{m'' n''}^{00} F_{\bar{m}'' \bar{n}''}^{11} / b^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{13}^f (E_{m'' n''}^{10} F_{\bar{m}'' \bar{n}''}^{01} + E_{m'' n''}^{01} F_{\bar{m}'' \bar{n}''}^{10}) / (ab) \right] \\
&\quad + 2 \times F_{m'' n''}^{00} [K_{R1}^{(3)} \phi_{m''}(-1) \phi_{\bar{m}''}(-1) + K_{R2}^{(3)} \phi_{m''}(1) \phi_{\bar{m}''}(1)] / a \\
[K^{67}]_{m'' n'' p'' q''} &= A_{45}^f E_{m'' p''}^{00} F_{n'' q''}^{00} + 4 \times \left[ D_{13}^f E_{m'' p''}^{11} F_{n'' q''}^{00} / a^2 + D_{23}^f E_{m'' p''}^{00} F_{n'' q''}^{11} / b^2 \right. \\
&\quad \left. + (D_{12}^f E_{m'' p''}^{10} F_{n'' q''}^{01} + D_{33}^f E_{m'' p''}^{01} F_{n'' q''}^{10}) / (ab) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ K^{77} \right]_{p^*q^* \bar{p}^*q^*} &= A_{44}^f E_{p^*p^*}^{00} F_{q^*q^*}^{00} + 4 \times \left[ D_{33}^f E_{p^*p^*}^{11} F_{q^*q^*}^{00} / a^2 + D_{22}^f E_{p^*p^*}^{00} F_{q^*q^*}^{11} / b^2 \right. \\
&\quad \left. + D_{23}^f \left( E_{p^*p^*}^{10} F_{q^*q^*}^{01} + E_{p^*p^*}^{01} F_{q^*q^*}^{10} \right) / (ab) \right] \\
&\quad + 2 \times E_{p^*p^*}^{00} \left[ K_{R3}^{(3)} \varphi_{q^*}(-1) \varphi_{q^*}(-1) + K_{R4}^{(3)} \varphi_{q^*}(1) \varphi_{q^*}(1) \right] / b
\end{aligned}$$

$$\left[ M^{11} \right]_{ij\bar{j}} = (\rho_c h_c + 2\rho_f h_f) E_{i\bar{i}}^{00} F_{j\bar{j}}^{00} \qquad \left[ M^{22} \right]_{mn\bar{m}\bar{n}} = (\rho_c h_c^3 / 12 + \rho_f h_c^2 h_f / 2) E_{m\bar{m}}^{00} F_{n\bar{n}}^{00}$$

$$\left[ M^{24} \right]_{mn\bar{m}'n'} = \rho_f h_c h_f^2 \times E_{m\bar{m}'}^{00} F_{n\bar{n}'}^{00} / 4 \qquad \left[ M^{26} \right]_{mn\bar{m}''n''} = \rho_f h_c h_f^2 \times E_{m\bar{m}''}^{00} F_{n\bar{n}''}^{00} / 4$$

$$\left[ M^{33} \right]_{pq\bar{p}\bar{q}} = (\rho_c h_c^3 / 12 + \rho_f h_c^2 h_f / 2) E_{p\bar{p}}^{00} F_{q\bar{q}}^{00} \qquad \left[ M^{35} \right]_{pq\bar{p}'q'} = \rho_f h_c h_f^2 \times E_{p\bar{p}'}^{00} F_{q\bar{q}'}^{00} / 4$$

$$\left[ M^{37} \right]_{pq\bar{p}''q''} = \rho_f h_c h_f^2 \times E_{p\bar{p}''}^{00} F_{q\bar{q}''}^{00} / 4 \qquad \left[ M^{44} \right]_{m'n'\bar{m}''n''} = \rho_f h_f^3 \times E_{m'\bar{m}''}^{00} F_{n'\bar{n}''}^{00} / 3$$

$$\left[ M^{55} \right]_{p'q'\bar{p}''q''} = \rho_f h_f^3 \times E_{p'\bar{p}''}^{00} F_{q'\bar{q}''}^{00} / 3 \qquad \left[ M^{66} \right]_{m''n''\bar{m}'''n'''} = \rho_f h_f^3 \times E_{m''\bar{m}'''}^{00} F_{n''\bar{n}'''}^{00} / 3$$

$$\left[ M^{77} \right]_{p^*q^* \bar{p}^*q^*} = \rho_f h_f^3 \times E_{p^*p^*}^{00} F_{q^*q^*}^{00} / 3$$

$r, s = 0, 1; i, j, \bar{i}, \bar{j}, i', j', \bar{i}', \bar{j}' = 1, 2, 3, \dots, I, J$   
 $m, n, \bar{m}, \bar{n}, m', n', \bar{m}', \bar{n}', m'', n'', \bar{m}'', \bar{n}'' = 1, 2, 3, \dots, M, N$   
 $p, q, \bar{p}, \bar{q}, p', q', \bar{p}', \bar{q}', p'', q'', \bar{p}'', \bar{q}'' = 1, 2, 3, \dots, P, Q$

而

$$E_{im}^{rs} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^r \phi_i(\xi)}{d\xi^r} \frac{d^s \phi_m(\xi)}{d\xi^s} \right] d\xi; \dots F_{jn}^{rs} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^r \varphi_j(\eta)}{d\eta^r} \frac{d^s \varphi_n(\eta)}{d\eta^s} \right] d\eta \qquad (A14)$$

且面內之拉伸勁度矩陣  $A_{ij}^c = A_{ij}^{(1)}$ ,  $A_{ij}^f = A_{ij}^{(2)} = A_{ij}^{(3)}$ ; 耦合勁度矩陣  
 $B_{ij}^c = B_{ij}^{(1)} = 0$ ,  $B_{ij}^f = B_{ij}^{(2)} = -B_{ij}^{(3)}$ ; 彎曲勁度矩陣  $D_{ij}^c = D_{ij}^{(1)}$ ,  $D_{ij}^f = D_{ij}^{(2)} = D_{ij}^{(3)}$ 。