

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

用核密度估計建構階段 I 管制圖之研究

Constructing Phase I Control Charts
with Kernel Density Estimation

研究生：盧美惠

指導教授：洪志真 博士

中華民國九十六年六月

用核密度估計建構階段 I 管制圖之研究

Constructing Phase I Control Charts

with Kernel Density Estimation

研 究 生：盧美惠

Student：Mei-Huei Lu

指導教授：洪志真

Advisor：Jyh-Jen Horng Shiau

國 立 交 通 大 學

統計學研究所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Institute of Statistics

College of Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of

Master

In

Statistics

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

用核密度估計建構階段 I 管制圖之研究

研究生：盧美惠

指導教授：洪志真 博士

國立交通大學統計學研究所 碩士班



摘要

大多數階段 II 監控表現的評估與比較，都是假設管制狀態下的參數已知；但實際上，是由階段 I 蒐集的資料來估計參數再提供給階段 II 使用。當階段 I 的資料不完全來自管制狀態下，可能會導致參數估計得不準確，造成階段 II 無法正確判斷製程是否失控。所以，本文的研究目的是針對階段 I 樣本中有部分樣本來自製程發生平均數偏移的情況，提供一個新方法來估計管制狀態下的分配之平均數，稱之為核密度估計法。從模擬結果可發現，使用核密度估計法所建構的管制圖之表現比傳統方法來得好，尤其當平均數偏移程度較大時，有更佳的表現。

Constructing Phase I Control Charts with Kernel Density Estimation

Student : Mei-Huei Lu

Advisor : Jyh-Jen Horng Shiau

Institute of Statistics

National Chiao Tung University



ABSTRACT

When evaluating and/or comparing control chart, usually it is assumed that the in-control values of the parameters are known. In practice, control limits in Phase II process monitoring are often constructed using the parameter estimates obtained from Phase I analysis. When the Phase I data are not all from the in-control state, the estimated parameters is systematically biased. Consequently, the effectiveness of the control chart constructed based on these estimates is doubtful in Phase II process monitoring. The purpose of this paper is to propose a new method to estimate the in-control process mean based on kernel density estimator (KDE). Simulation studies show that the performance of the control chart constructed with kernel density estimator is better than that of conventional two methods, especially when the mean shift is large.

誌 謝

於交大的研究所生活即將告一段落，在這兩年日子中，我深刻的體悟到做學問只靠自己苦讀，進步是有限的，必須不斷地和別人討論才能精益求精。我要感謝這兩年來教導過我的老師、幫助過我的學長姊、鼓勵我的同學們，因為有你們，我才能成長。

更感謝我的指導教授—洪志真博士的諄諄教誨，老師給我和育辰很大的研究空間，常常鼓勵我們嘗試不同的方法來解決問題。老師認真教學的態度以及對學生之耐心，讓即將實習的我獲得相當大的啟發。另外要謝謝我的夥伴：育辰，與你討論的過程中總是特別歡樂，相信你也會和我一樣贊同老師說的話：「收割結果變得不那麼重要了，中間揮汗的過程才是令人值得細細品嚐」。

再者，感謝所上陳鄰安老師、陳志榮老師及清華大學的曾勝滄老師、黃榮臣老師在百忙之中抽空來幫我預口試或口試，並給予相當寶貴的意見。也感謝家鈴學姊、泰賓學長對我的許多幫忙及照顧。

最後，給我最愛的家人及好朋友們，謝謝你們的體諒與支持，讓我能全心全意朝目標邁進。

美惠 於交大統計研究所

中華民國九十六年六月

目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
附表目錄.....	vi
附圖目錄.....	vii
第一章 緒論.....	1
1.1 前言.....	1
1.2 研究動機與目的.....	2
1.3 研究架構.....	3
第二章 文獻探討.....	4
2.1 管制圖的基本判讀.....	4
2.2 \bar{X} 管制圖的運用.....	4
2.3 製程偵測力的評估.....	6
2.4 使用估計的參數所產生之問題.....	8
2.5 子群數 m 和子群內樣本數 n 的選取.....	9
第三章 傳統方法與新方法之探討.....	11
3.1 混合樣本.....	11
3.1.1 混合樣本之介紹.....	11
3.1.2 \bar{X} 混合樣本與 \bar{X} 管制圖.....	12
3.2 傳統方法.....	13
3.2.1 直接估計法.....	13
3.2.2 重複篩選法.....	14
3.2.3 使用直接估計法與重複篩選法之缺失與討論.....	15
3.3 新方法.....	17
3.3.1 新方法之起源.....	17
3.3.2 核密度估計量之介紹.....	18
3.3.3 核密度估計法.....	19
3.3.4 使用核密度估計法之缺失.....	20
3.4 階段II平均連串長度的計算.....	21
第四章 數值比較與其他相關討論.....	24
4.1 階段I的比較.....	24
4.2 階段II的比較.....	25
4.3 將核密度估計法套用於其他分配.....	26
4.4 其他相關探討之帶寬的選擇.....	28
4.5 其他相關探討之 L 的建議.....	29

第五章	結論及未來研究方向.....	33
參考文獻.....		34
附表.....		35
附圖.....		58



附表目錄

表一：資料為混合樣本，用 $E(\bar{X}) \pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 當管制上下限之 α 和 $1-\beta$ 的理論值	35
表二：資料為混合樣本，使用直接估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差	36
表三：資料為混合樣本，使用重複篩選法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差	38
表四：資料為混合樣本，使用核密度估計法估計參數，代入不同的帶寬 H ，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差	40
表五：資料為混合樣本，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差	42
表六：階段I為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 時的情況，階段II的ARL和SDRL之平均估計量	44
表七：階段I為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 時的情況，階段II的ARL和SDRL之平均估計量	47
表八：階段I為 $(\delta, p) = (2, 0.1)$ 時的情況，階段II的ARL和SDRL之平均估計量	50
表九：對 σ 已知和未知的情況，分別建議的 L 逼近值	53
表十：樣本來自T分配，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差	54
表十一：樣本來自LOGISTIC分配，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差	56

附圖目錄

圖一：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 平均值之折線圖.....	58
圖二：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 標準差之折線圖.....	59
圖三：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 α 平均值之折線圖.....	60
圖四：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 α 標準差之折線圖.....	61
圖五：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $1-\beta$ 平均值之折線圖	62
圖六：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $1-\beta$ 標準差之折線圖	63
圖七：階段I為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 時的情況，階段II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖.....	64
圖八：階段I為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 時的情況，階段II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖	65
圖九：階段I為 $(\delta, p) = (2, 0.1)$ 時的情況，階段II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖	66



第一章 緒論

1.1 前言

統計製程管制(Statistical Process Control；簡稱 SPC)乃指使用統計方法降低變異以改善製程能力和達到製程穩定。管制圖(control chart)為統計製程管制的工具之一，主要用途為：減少製程變異、觀察和監控製程、估計產品或製程的參數。管制圖有很多種，如 Shewhart 管制圖、累積和管制圖(Cumulative Sum；CUSUM)、指數加權移動平均管制圖(Exponentially Weighted Moving Average；EWMA)等。

在產品製程中，會有許多因素導致製程變異，類括為兩種主要原因：機遇原因(chance causes)和可歸屬原因(assignable causes)。機遇原因是由大自然或其他背景干擾等不可避免因素累積而成；可歸屬原因主要由製程中不當操作、使用不良的原料、機器老舊或其他人為因素所產生，通常只要找到原因後便可移除。當製程中只存在機遇原因，則判定製程在管制狀態下(in control)；相反的，製程在操作中若產生可歸屬原因，則判定製程在失控狀態下(out of control)。

製程監控一般分成兩大階段：階段 I (phase I)和階段 II (phase II)。階段 I 先蒐集資料，建立試驗的管制界限(trial control limits)，經由偵測和修正可歸屬原因，把不穩定的製程調整到穩定的狀態，然後再根據管制狀態下的資料，重新估計參數和計算新的管制界限提供階

段 II 使用。在階段 II 中則強調製程的監控(process monitoring)，以往的研究都比較著重此階段的成效。

1.2 研究動機與目的

大多數階段 II 監控方法的表現之評估與比較，都是假設管制狀態下的參數已知；但實際上，參數通常是未知的，必須由階段 I 所得到的資料來估計。當階段 I 的資料不完全來自管制狀態下，可能會導致參數估計得不準確，造成階段 II 無法正確判斷製程是否發生失控。此時在階段 I 選取一個合適的方法來估計參數是很重要的。

製程發生變異時，可能會造成產品特性分配的改變，如平均數偏移(mean shift)或變異數改變。假設階段 I 蒐集的樣本分為兩部分，有一部分來自管制狀態下，平均數為 μ_0 、變異數為 σ_0^2 之分配；另一部分來自失控狀態下，平均數為 μ_1 、變異數為 σ_1^2 之分配，有平均數偏移或變異數改變的現象。此時因為樣本不完全來自管制狀態下，導致混合樣本之分配會被來自失控狀態下的樣本所牽動，尤其平均數偏移或變異數改變較大時更為嚴重，因此產生許多參數估計上的困難。在本文中，針對階段 I 樣本中有部分樣本來自製程發生「平均數偏移」的情況，提供一個無母數方法，稱之為「核密度估計法」，來估計管制狀態下分配之平均數 μ_0 ，並和傳統方法做比較。使用無母數方法的好處為不受限於某種固定分配，所以本文除了常態分配外還會將核密

度估計法套用於其他分配，並觀察其估計的成效。

1.3 研究架構

本文主要分為五個部分，首先在第一章先確立研究主題及動機。在訂定研究目的之後，接下來第二章為相關文獻的探討，包括管制圖的基本判讀、 \bar{X} 管制圖的使用、製程偵測力的評估、使用估計的參數所產生之問題與子群數 m 和子群內樣本數 n 之選取的相關研究。在第三章的第一部分，主要介紹 \bar{X} 混合樣本；第二部分介紹傳統兩種估計參數的方法：直接估計法和重複篩選法，並探討其模擬步驟與估計上的缺失；第三部分介紹新方法之起源、使用核密度估計法的模擬步驟與估計上的缺失；第四部分則為階段 II 平均連串長度的計算。第四章為數值比較與其他相關討論。在數值比較的部分，分為階段 I 和階段 II 進行討論：階段 I 的比較準則為 $\hat{\mu}_0$ 估計得好不好、假警報率和偵測力的大小，階段 II 則是比較管制狀態下和失控狀態下平均連串長度的表現。在其他相關討論的部分，包括將核密度估計法套用於其他分配、帶寬的選擇與 L 的建議。第六章為本研究的結論，除了對傳統方法和新方法做一總結，並於文末提出未來研究的方向。

第二章 文獻探討

2.1 管制圖的基本判讀

Walter Shewhart 在 1924 年提出 Shewhart 管制圖(Shewhart 1931)，其概念為給定製程在管制狀態下產品特性的分配，再依照選取的信賴水準計算出對應的管制上限(upper control limit；UCL)、中心線(center line；CL)和管制下限(lower control limit；LCL)，當樣本落在管制界限(control limit)外時，我們判定製程失控，此時需要採取調整和修正的措施來發現並消除可歸屬原因。

在 Montgomery (2005)一書提到：一般正常情況下，管制圖上的樣本點是呈現隨機性散佈於管制界限內；若超出管制界限外，可能為製程平均水準偏移或製程變異數改變，這時候可以著手找出造成此偏移的因素來改善製程。但另一種情況是管制圖上的樣本點都落在管制界限內，但呈現有順序性或非隨機性的情況，則應找出其原因並加以處理。因此管制圖的目的是預防製程異常的發生，運用簡單的圖表方式，讓操作者能方便以目視管理，使得管制圖被廣泛運用在各式生產線上，作為製程管制的主要工具。

2.2 \bar{X} 管制圖的運用

假設某一產品特性服從常態分配(normal distribution)，平均數

μ 、變異數 σ^2 均為已知，若有 n 個樣本 X_1, X_2, \dots, X_n ，其樣本平均數為

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

我們知道 \bar{X} 也是服從常態分配，其平均數為 μ 、變異數為 σ^2/n 。給定

信賴水準 $1-\alpha$ ， \bar{X} 的管制界限和中心線為

$$UCL = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

其中 $Z_{\alpha/2}$ 為標準常態分配下右尾機率為 $\alpha/2$ 之臨界點(critical value)。

通常 μ 、 σ 都是未知的，所以先從階段 I 隨機抽取 $\{X_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$ 的 m 組樣本，而每組樣本為包含 n 個觀察值的一合理子群(rational subgroup)資料，再對 μ 和 σ 做估計，才能算出 \bar{X} 的管制界限和中心線。 μ 最常用的估計方法為總樣本平均數(grand sample mean)：

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i, \text{ 其中 } \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}。$$

σ 的估計方法有很多，最常用的有以下三種：

(1) 平均全距 $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ (average range)：

$$\hat{\sigma}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)},$$

其中 $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$ ， R_i 為第 i 組樣本的全距，而 $d_2(n) = E(R)$ 為子群全距 R 之期望值，會隨著 n 不同而異，可參考 Montgomery (2005) 附表六。

(2) 平均標準差 $\hat{\sigma}_{\bar{s}}$ (average standard deviation)：

$$\hat{\sigma}_{\bar{S}} = \frac{\bar{S}}{c_4(n)} ,$$

其中 $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$, $S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$, 而 $c_4(n) = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$,

$c_4(n)$ 也可參考 Montgomery (2005) 附表六。

(3) 綜合樣本標準差 $\hat{\sigma}_{S_p}$ (pooled sample standard deviation) :

$$\hat{\sigma}_{S_p} = \frac{S_p}{c_4(m(n-1)+1)} ,$$

其中 $S_p = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \right\}^{1/2}$ 。

Champ and Chou (2003) 指出： $E(\hat{\sigma}_{S_p}) = E(\hat{\sigma}_{\bar{S}}) = E(\hat{\sigma}_R) = \sigma$,

$Var(\hat{\sigma}_{S_p}) \leq Var(\hat{\sigma}_{\bar{S}}) \leq Var(\hat{\sigma}_R)$, 所以本文選擇使用綜合樣本標準差 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 來估

計 σ 。在此必須注意 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 內之 S_p^2 的算法是

$$S_{p,correct}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 ,$$

而不是

$$S_{p,incorrect}^2 = \frac{1}{(mn-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 ,$$

因為 $S_{p,correct}^2$ 是分別計算每個子群內(within subgroup)的變異數，然後再

做平均；而 $S_{p,incorrect}^2$ 是把全部樣本混合在一起計算而得的變異數，同時

包含子群內和子群間(between subgroup)的變異，因而導致高估 σ 。

2.3 製程偵測力的評估

管制圖的基本理論與假設檢定有密切之關係，也就是說管制圖是

對『製程在管制狀態下』這項假設做檢定。如果製程在管制狀態下，

但樣本點落在管制界限外時，即拒絕製程在管制狀態下之假設，此為型 I 錯誤；犯型 I 錯誤的機率，為假警報率(false alarm rate)，一般記為 α 。相對的，若製程在失控狀態下，但樣本點卻落在管制界限內，此為型 II 錯誤；犯型 II 錯誤的機率一般記為 β ，而 $1-\beta$ 是檢定力(power)，為偵測出製程發生變異的機率。在管制圖之比較上，通常會固定型 I 錯誤的機率，作為比較基準點，選取具最大檢定力之管制圖。

有很多準則可以用來評估階段 II 的成效，其中平均連串長度(Average Run Length; ARL)由於其具有方便解釋的特性最常被使用。首先介紹連串長度(Run Length; RL)，其可區分為管制狀態下的連串長度和失控狀態下的連串長度兩種。管制狀態下的連串長度，記為 R_0 ，是指從開始監控製程到管制圖誤判而產生的第一個錯誤警訊時的觀察樣本數；而失控狀態下的連串長度，記為 R_1 ，是指當真實製程平均值發生變動後，從開始監控製程到管制圖偵測到變異的第一個警訊時的觀察樣本數。 R_0 服從參數為 α 的幾何分配(geometric distribution)，而 R_1 服從參數為 $1-\beta$ 的幾何分配。

平均連串長度則為連串長度分配之期望值，一般將管制狀態下的平均連串長度記為 ARL_0 ，失控狀態下的平均連串長度記為 ARL_1 ，因此

$$ARL_0 = E(R_0) = \frac{1}{\alpha} ,$$

$$ARL_1 = E(R_1) = \frac{1}{1-\beta}。$$

根據以上敘述，希望 ARL_0 越大越好，減少誤判率；希望 ARL_1 越小越好，加快偵測速度。可惜兩者無法兼得，所以常採「固定 ARL_0 ，選取有最小 ARL_1 者」作為選擇管制圖的準則。

如果每個樣本相互獨立且來自相同分配(independent and identically distributed ; i.i.d.)，且參數已知、管制界限固定，在管制狀態下每個樣本點落在管制界限外為一伯努利試驗(Bernoulli trial)，其機率為 p ，而連串長度就是參數為 p 之幾何分配，幾何分配的平均數也是管制狀態下的平均連串長度為 $1/p$ ，標準差(SDRL)為 $\sqrt{1-p}/p$ 。

假設某一產品特性服從常態分配，當製程在管制狀態下，參數已知，一般會使用三倍標準差(3σ)當作管制界限，則樣本點落在管制界限外的機率為 $1-\Phi(3)+\Phi(-3)=0.0027$ ，則連串長度為參數是 0.0027 的幾何分配， $ARL_0=1/0.0027 \approx 370.4$ ， $SDRL_0=\sqrt{1-0.0027}/0.0027 \approx 369.9$ 。

2.4 使用估計的參數所產生之問題

使用估計的參數在管制圖上所帶來之影響的這類問題直到 Woodall and Montgomery (1999)提出此議題之後才有更多的文獻討論。在這之前，只有 Ghosh, Reynolds, and Hui (1981)、Quesenberry (1993)和 Chen (1997)等少數幾篇文章有進一步探討。

Ghosh, Reynolds, and Hui (1981)提到把估計的參數當成參數已知

時來討論會誤導的可能結果，例如作者用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 當作 σ 的估計量，發現不管在管制狀態下或是失控狀態下，ARL 在用估計量時都會比參數已知時大，且 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 的自由度越小時 ARL 越大。Quesenberry (1993) 使用 $\hat{\sigma}_{\bar{S}}$ 、Chen (1997) 分別使用 $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ 、 $\hat{\sigma}_{\bar{S}}$ 、 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 當作 σ 的估計量，兩篇論文同樣指出 ARL 和 SDRL 都會比參數已知時大，尤其 SDRL 會大很多；而且當子群內樣本數 n 固定，子群數 m 越小時，ARL 和 SDRL 會越大。Chen (1997) 這篇還提到：當子群數 m 固定，子群內樣本數 n 越小時，ARL 和 SDRL 也會越大；一般較建議使用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ ，因為用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 算出來的 ARL 和 SDRL 會比較接近 σ 已知之情況，但就簡單性而言則建議用 $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ ；在偏移較小的失控狀態下用估計的參數比偏移較大時，對 ARL 和 SDRL 的影響更嚴重。

Jensen, Jones-Farmer, Champ, and Woodall (2006) 指出階段 I 使用估計的參數所產生之估計誤差會嚴重影響階段 II 管制圖的表現，與參數已知時有所差別。

2.5 子群數 m 和子群內樣本數 n 的選取

使用 Shewhart 管制圖時，必須先蒐集足夠的樣本，以確保估計準確，通常我們會使用合理子群。使用合理子群的觀念是希望資料蒐集的方式會使得可歸屬原因發生的時間會介於兩組子群之間，而非某一子群之內；如此，子群之間的差異大，而子群之內的差異小，管制

圖才能快速偵測到變異。而子群數 m 和子群內樣本數 n 要多大才是“足夠”呢？當階段 I 的樣本全部來自管制狀態下，根據 Montgomery (2005)，通常都選定 $m = 20 \sim 30$ 且 $n = 3 \sim 5$ 。

但 Quesenberry (1993) 提到不同的看法，作者認為 $m = 20 \sim 30$ 而 $n = 4$ 或 5 這數目是不足以讓估計的參數和參數已知時所做的管制界限接近，也就是低估獲得準確管制界限所需要的樣本數。作者指出當階段 I 的樣本全部來自管制狀態下，在 $n = 5$ 時， m 至少要 100，估計的參數之管制界限才能夠近似參數已知時之管制界限。

Chen (1997) 認為 μ 和 σ 必須估計的時候，在 $n = 5$ ， m 至少要 100； $n = 10$ ， m 至少要 50， \bar{X} 管制圖的表現才會接近參數已知之情況。Jensen, Jones-Farmer, Champ, and Woodall (2006) 也指出當子群數 m 越大時，使用估計的參數在管制狀態下所得的平均連串長度，會收斂到參數已知時所得的平均連串長度。

子群數 m 太小會估計不準，太大則不符合經濟效益，所以必須選取適當的子群數 m 和子群內樣本數 n 。

第三章 傳統方法與新方法之探討

3.1 混合樣本

3.1.1 混合樣本之介紹

蒐集 m 個樣本： Y_1, Y_2, \dots, Y_m ，若之中有 $(m-k)$ 個樣本來自管制狀態下，平均數為 μ_0 、變異數為 σ^2 、累積分配函數(cumulative distribution function；c.d.f.)為 $F_0(y)$ 之常態分配；有 k 個樣本來自失控狀態下，平均數為 μ_1 、變異數為 σ^2 、累積分配函數為 $F_1(y)$ 之常態分配。

定義平均數偏移程度， $\delta = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma$ ，代表平均數偏移了 δ 倍的標準差。在不失一般性下，可假設 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma = 1$ 。因為樣本只來自兩個不同的常態分配，所以本文只觀察平均數變大的情況。令來自失控狀態下的樣本比例為 $p = k/m$ ，管制狀態下的樣本比例為

$1 - p = (m - k)/m$ 。則樣本平均數 $\bar{Y} = \sum_{i=1}^m Y_i / m$ 之期望值為

$$\begin{aligned} E(\bar{Y}) &= E\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{m-k} + Y_{m-k+1} + \dots + Y_m}{m}\right) \\ &= \frac{(m-k)\mu_0 + k\mu_1}{m} \\ &= (1-p)\mu_0 + p\mu_1。 \end{aligned}$$

$E(\bar{Y})$ 可以有兩種表示方法：

$$\begin{aligned} E(\bar{Y}) &= \mu_0 + p(\mu_1 - \mu_0) = \mu_0 + p\delta\sigma \\ &= \mu_1 - (1-p)(\mu_1 - \mu_0) = \mu_1 - (1-p)\delta\sigma。 \end{aligned}$$

\bar{Y} 之變異數為

$$\begin{aligned} Var(\bar{Y}) &= Var\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{m-k} + Y_{m-k+1} + \dots + Y_m}{m}\right) \\ &= \frac{m\sigma^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m}。 \end{aligned}$$

3.1.2 \bar{X} 混合樣本與 \bar{X} 管制圖

蒐集 m 組獨立樣本，每組樣本為包含 n 個觀察值之一合理子群，其樣本平均數 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ 。在 m 個 \bar{X} 中，有 $(m-k)$ 個 \bar{X} 來自管制狀態下，平均數為 μ_0 、變異數為 σ^2/n 之常態分配；有 k 個 \bar{X} 來自失控狀態下，平均數為 μ_1 、變異數為 σ^2/n 之常態分配。令 $Y = \bar{X}$ 。若我們如一般情形用 \bar{X} 當作中心線，因 $E(\bar{X}) = E(\bar{Y}) = (1-p)\mu_0 + p\mu_1$ ，則中心線其實是 $E(\bar{Y})$ 。假設管制中心線到上下限的距離為 L 倍的子群平均 \bar{X} 之標準差，且每個 \bar{X} 之變異數均為 σ^2/n ，則 \bar{X} 管制圖之管制界限為

$$\left(E(\bar{Y}) - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, E(\bar{Y}) + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)。$$

此管制圖之假警報率為

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} > E(\bar{Y}) + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | F_0) + P(\bar{X} < E(\bar{Y}) - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | F_0) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 + p\delta\sigma + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 + p\delta\sigma - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \sqrt{n}p\delta + L | F_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \sqrt{n}p\delta - L | F_0\right) \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{n}p\delta + L) + \Phi(\sqrt{n}p\delta - L)， \end{aligned}$$

其中 Φ 為標準常態分配之累積分配函數。而檢定力為

$$\begin{aligned}
1-\beta &= P(\bar{X} > E(\bar{Y}) + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | F_1) + P(\bar{X} < E(\bar{Y}) - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | F_1) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_1 - (1-p)\delta\sigma + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_1 - (1-p)\delta\sigma - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > -\sqrt{n}(1-p)\delta + L | F_1\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < -\sqrt{n}(1-p)\delta - L | F_1\right) \\
&= 1 - \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta + L) + \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta - L) \quad .
\end{aligned}$$

給定 $L = 3$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ ，

表一為不同 δ, p 值組合下， α 與 $1-\beta$ 的理論值。此種計算方法就是在階段 I 蒐集樣本，誤以為樣本全部來自管制狀態下，所以用全部的樣本計算 \bar{X} 和 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來分別估計 μ_0 和 σ ，不做任何篩選或刪除樣本的動作，稱之為直接估計法。但在階段 I 最常用來估計參數的方法本文稱之為重複篩選法，這兩種傳統估計方法會於下一節中詳細介紹。

3.2 傳統方法

3.2.1 直接估計法

直接估計法的實際模擬步驟如下：

步驟一. 給定子群數 m 、子群內樣本數 n 、平均數偏移程度 δ 和失控狀態下的樣本比例 p 。生成 $m \times (1-p) \times n$ 個樣本，其來自管制狀態下，平均數為 μ_0 、變異數為 σ^2 之常態分配； $m \times p \times n$ 個樣本，其來自失控狀態下，平均數為 μ_1 、變異數為 σ^2 之常態分配。

步驟二. 使用總樣本平均數 \bar{X} 估計 μ_0 及綜合樣本標準差 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 估計 σ 。

步驟三. 計算 \bar{X} 混合樣本之管制界限 ($\bar{\bar{X}} - L\hat{\sigma}_{s_p} / \sqrt{n}$, $\bar{\bar{X}} + L\hat{\sigma}_{s_p} / \sqrt{n}$)。

步驟四. 計算管制狀態下的樣本中 \bar{X} 會落在管制界限外之個數，記為

a ；計算失控狀態下的樣本中 \bar{X} 會落在管制界限外之個數，記

為 b 。當資料全部來自管制狀態下，則 $\alpha = a/m$ ， $1 - \beta = NA$ 。

當資料有 $(1-p)$ 的比例來自管制狀態下，而 p 比例來自失控狀

態下，則計算 $\alpha = a/[m(1-p)]$ ， $1 - \beta = b/(m \times p)$ 。

步驟五. 重複步驟一到步驟四共 N 次，然後求此 N 個 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1 - \beta$

的平均值及標準差。

給定 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma = 1$ 、 $L = 3$ 、 $m = 100$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ ，表二為不同 δ, p 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次所得之 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 、 $1 - \beta$ 的平均值及標準差。

3.2.2 重複篩選法

Montgomery (2005)指出，當最初的樣本被用來建構 \bar{X} 管制圖時，我們會先得到試驗的管制界限，以決定這些樣本是否為在管制狀態下得到的資料。為了檢定在管制狀態下的假設，我們在 \bar{X} 管制圖繪出每組樣本的值來分析它的表現：假如每一個樣本點都落在管制界限內且沒有順序性或非隨機性的圖形出現，我們說此製程在管制狀態下；若在使用試驗管制界限時，有一個或多個點超出管制界限，製程在管制狀態下的假設就被推翻，則這筆資料將被刪除且用剩下來的資料重新

計算新的試驗管制界限，這過程將一直被重複，直到所有點都在試驗管制界限內，此時則認定篩選過後的樣本點均為製程在管制狀態下所得的資料，可以用來建構管制圖，給階段 II 進行監控動作。

實務上，一般會藉此重複篩選法，來處理階段 I 混合樣本的情況，希望將失控狀態下的樣本全部刪除後，只剩管制狀態下的樣本來估計參數。實際模擬步驟如下：

步驟一. 同 3.2.1 小節的步驟一，生成樣本。

步驟二. 同 3.2.1 小節的步驟二，估計參數。

步驟三. 同 3.2.1 小節的步驟三，計算管制界限。

步驟四. 當有 \bar{X} 落在管制界限外，我們刪除對應這些 \bar{X} 的子群，使用剩下來的樣本當作新資料。

步驟五. 重複步驟二到四，直到沒有 \bar{X} 落在管制界限外為止。

步驟六. 同 3.2.1 小節的步驟四，計算假警報率 α 、檢定力 $1-\beta$ 。

步驟七. 同 3.2.1 小節的步驟五，重複步驟一到步驟六共 N 次。

給定 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma = 1$ 、 $L = 3$ 、 $m = 100$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ ，表三為不同 δ, p 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次所得之 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 、 $1-\beta$ 的平均值及標準差。

3.2.3 使用直接估計法與重複篩選法之缺失與討論

在階段 I 中，如果管制狀態下的參數未知，必須使用估計的參數

時，兩者差距必定越小越好。當資料為混合樣本，我們希望估計的參數 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 和管制狀態下的參數 μ_0 、 σ 很接近。

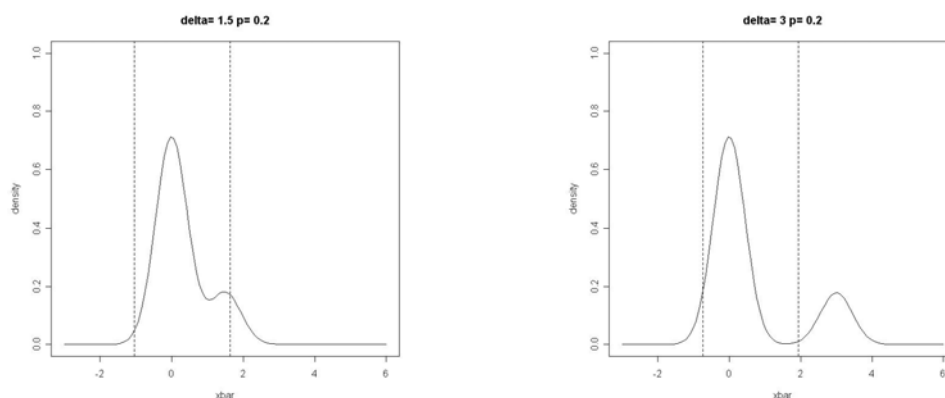
首先觀察表二，使用直接估計法， $\hat{\mu}_0$ 平均值會隨 δ 和 p 增加而變大(除了 $\delta=0$ 之外)，這裡的 $\hat{\mu}_0$ 其實是估計混合樣本的樣本平均數之期望值 $E(\bar{X})$ ，所以拿來估計 μ_0 是很不恰當的。再觀察表三，使用重複篩選法，仍有些 $\hat{\mu}_0$ 平均值和 μ_0 很不接近，雖然有經過篩選的動作，但有可能在篩選的過程中把來自管制狀態下的樣本給刪除，或無法把來自失控狀態下的樣本全部刪除，因此影響到 $\hat{\mu}_0$ 的準確性。

再觀察表一中 α 和 $1-\beta$ 之理論值和表二、表三中傳統兩種方法之 α 和 $1-\beta$ 平均值歸類出以下結果：

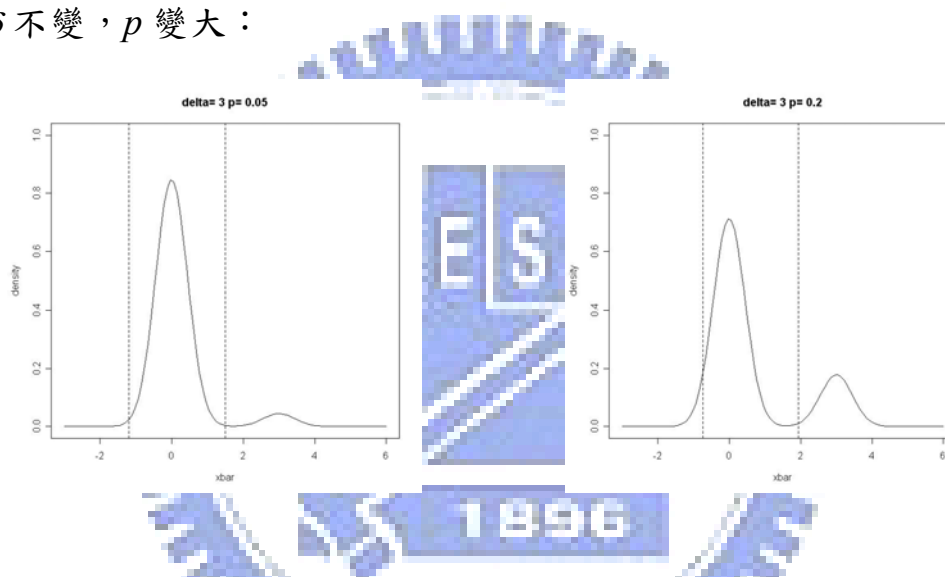
- (1)當 p 不變， δ 變大，則 α 變大， $1-\beta$ 變大。
- (2)當 $\delta (\neq 0)$ 不變， p 變大，則 α 變大， $1-\beta$ 變小。

我們可以由下面圖形解釋其原因：(1) p 不變， δ 變大，管制界限往右移，但受到管制狀態下的樣本之牽制，移動速度不及失控狀態下的常態分配往右移的速度，所以 α 變大， $1-\beta$ 變大；(2) δ 不變， p 變大，管制界限往右移，但失控狀態下的樣本固定不動，只向上增長，所以 α 變大， $1-\beta$ 變小。

(1) p 不變， δ 變大：



(2) δ 不變， p 變大：

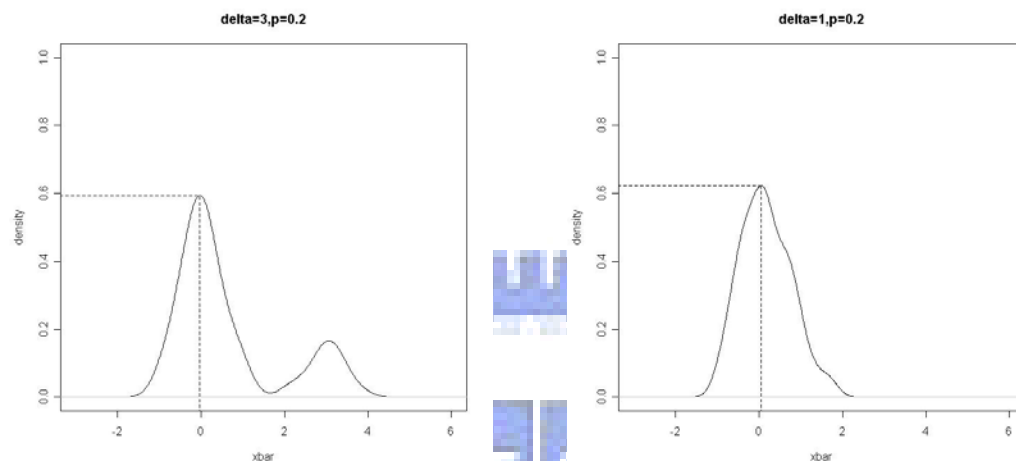


3.3 新方法

3.3.1 新方法之起源

在不同 δ, p 值組合下，當使用直接估計法， $\hat{\mu}_0$ 平均數表現最差的情況在 $(\delta, p) = (3, 0.2)$ ；而當使用重複篩選法， $\hat{\mu}_0$ 平均數表現最差的情況在 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 。所以我們先觀察這兩種組合的情況：(1)、給定八十個 \bar{X} 來自管制狀態下的常態分配 $N(0, 1/5)$ ，二十個 \bar{X} 來自失控狀態下的常態分配 $N(3, 1/5)$ ；(2)、給定八十個 \bar{X} 來自管制狀態下的常態分配 $N(0, 1/5)$ ，二十個 \bar{X} 來自失控狀態下的常態分配 $N(1, 1/5)$ 。使用核密

度估計量(Kernel Density Estimator ; KDE)來估計這一百個 \bar{X} 組成的混合樣本之機率密度函數(probability density function ; p.d.f.)，其圖形如下：



由上圖發現密度函數最高點對應的 \bar{X} 值，很接近管制狀態下的常態分配之平均數 $\mu_0 = 0$ ，因此觸發「使用核密度估計量來估計 \bar{X} 混合樣本之密度函數，並用對應最大密度函數值的 \bar{X} 值，來估計管制狀態下之平均數 μ_0 」此想法。

3.3.2 核密度估計量之介紹

直方圖(histogram)和次數多邊形(frequency polygon) 簡單易作、容易解釋，且不需要高階繪圖軟體，是最常被使用的密度函數估計量，但有兩個嚴重的缺點：(1)、圖形不夠平滑(smooth)；(2)、對密度函數的局部特性不夠敏感。

為解決上述兩個問題，一個更合理的方法是分別對每點 x 直接估計密度函數 $f(x)$ 。密度函數的定義為：

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} ,$$

其中 $F(x)$ 為累積分配函數。用經驗累積分配函數(empirical cumulative distribution function)取代 $F(x)$ ：

$$\hat{f}(x) = \frac{\#\{x_i \in (x-h, x+h]\}}{2nh} ,$$

其中 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 代表 n 個隨機樣本。上式可改寫成核密度估計量的形式：

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) ,$$

其中 h 為帶寬(bandwidth)；當 $-1 < u \leq 1$ ， $K(u) = 1/2$ ，否則為 0。

帶寬的選擇會影響估計量的表現，帶寬大，圖形變異(variance)小，但偏誤(bias)大；帶寬小，圖形變異大，但偏誤小。變異和偏誤間互為消長是無法避免的。

$K(u)$ 為核函數(kernel function)，常用的核函數有：

- (1)、Uniform 密度函數：當 $-1 < u \leq 1$ ， $K(u) = 0.5$ ，否則為 0，
- (2)、Quadratic 密度函數：當 $-1 < u \leq 1$ ， $K(u) = 0.75(1-u^2)$ ，否則為 0，
- (3)、Gaussian 密度函數： $K(u) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2)$ 。

由核密度估計量的形式可知， $\hat{f}(x)$ 的之連續性、可微性，跟 $K(u)$ 一致。本文提出的新方法，是選用 Gaussian 密度函數當作核函數。

3.3.3 核密度估計法

本文的方法是使用核密度估計量來估計密度函數，沒有假設任何參數，為一無母數方法。實際模擬步驟如下：

步驟一. 同 3.2.1 小節的步驟一，生成樣本。

步驟二. 使用核密度估計量來估計 \bar{X} 混合樣本之密度函數。

步驟三. 用對應最大密度函數值的 \bar{X} 值來估計 μ_0 ，用綜合樣本標準差

$\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計 σ 。

步驟四. 同 3.2.1 小節的步驟三，計算管制界限。

步驟五. 同 3.2.1 小節的步驟四，計算假警報率 α 、檢定力 $1-\beta$ 。

步驟六. 同 3.2.1 小節的步驟五，重複步驟一到步驟五共 N 次。

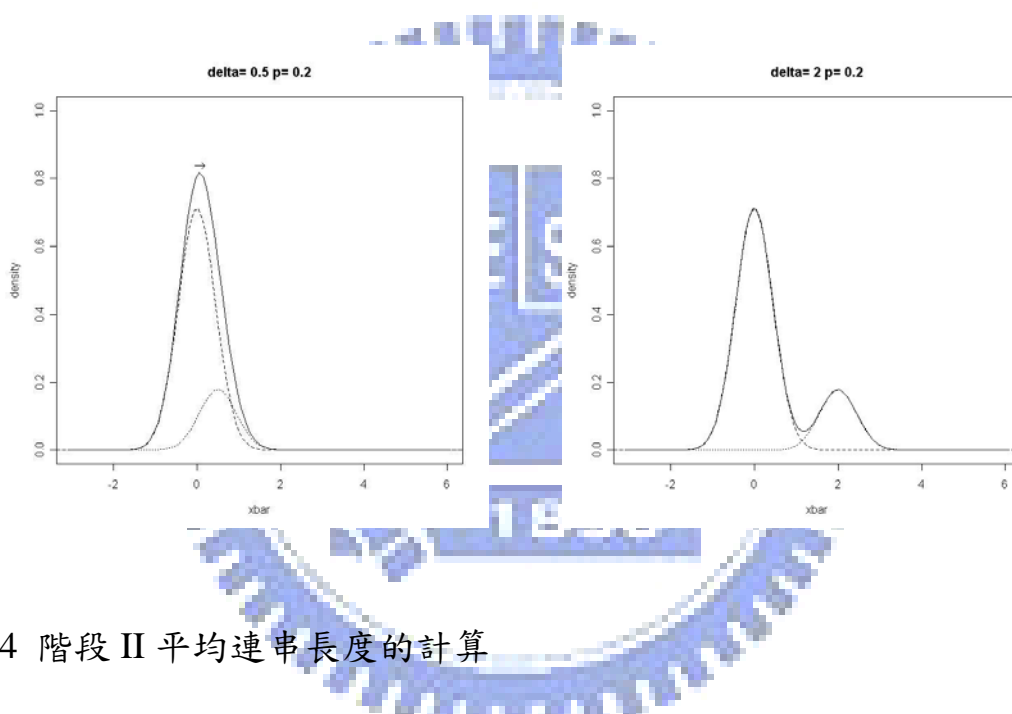
給定 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma = 1$ 、 $L = 3$ 、 $m = 100$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ 、 $h = 0.1(0.2)0.7$ ，表四為不同 δ, p, h 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次所得之 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差。

觀察表四，我們發現帶寬越大， $\hat{\mu}_0$ 標準差越小，但 $\hat{\mu}_0$ 平均值越不靠近 μ_0 ；帶寬越小， $\hat{\mu}_0$ 標準差越大，但 $\hat{\mu}_0$ 平均值越靠近 μ_0 。當 $h = 0.5$ ， $\hat{\mu}_0$ 平均值幾乎都小於 0.1，且 $\hat{\mu}_0$ 標準差和傳統兩種方法的 $\hat{\mu}_0$ 標準差差不多，所以本文中核密度估計法的帶寬 h 選定為 0.5。表五列出 $h = 0.5$ 時，不同 δ, p 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次， $\hat{\mu}_0$ 、 α 、 $1-\beta$ 的平均值及標準差。

3.3.4 使用核密度估計法之缺失

使用核密度估計法，當平均數偏移程度 δ 較小，如下面左圖中 $(\delta, p) = (0.5, 0.2)$ 的情況，來自管制狀態下的樣本之密度函數(左虛線部

分)和來自失控狀態下的樣本之密度函數(右虛線部分)經過堆疊後產生混合樣本之密度函數(實線部分)，其最大密度函數值對應的 \bar{X} 值會偏離 $\mu_0 = 0$ ，尤其失控狀態下的樣本比例 p 越大時，偏離的程度越嚴重；當平均數偏移程度 δ 夠大，如下方右圖中 $(\delta, p) = (2, 0.2)$ 的情況，最大密度函數值的位置不會由管制狀態下和失控狀態下之密度函數堆疊產生，所以 $\hat{\mu}_0$ 仍然很接近 μ_0 。



3.4 階段 II 平均連串長度的計算

從階段 I 得到固定的 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ ，在階段 II 建立 \bar{X} 的管制界限

$\hat{\mu}_0 \pm L\hat{\sigma}/\sqrt{n}$ 。當階段 II 的樣本來自管制狀態下：

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) ,$$

則被判定在失控狀態下之假警報率為

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} > \hat{\mu}_0 + L \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}) + P(\bar{X} < \hat{\mu}_0 - L \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}) \\ &= P(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\hat{\mu}_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) + P(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\hat{\mu}_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) ,$$

故可得

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} ,$$

$$SDRL_0 = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} = \sqrt{ARL_0(ARL_0 - 1)} .$$

當階段 II 的樣本來自失控狀態下，且偏移 $\tilde{\delta}$ 倍的標準差：

$$X \sim N(\mu_0 + \tilde{\delta}\sigma, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu_0 + \tilde{\delta}\sigma, \frac{\sigma^2}{n}) ,$$

則被判定在失控狀態下之檢定力為

$$1 - \beta = P(\bar{X} > \hat{\mu}_0 + L\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}) + P(\bar{X} < \hat{\mu}_0 - L\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\hat{\mu}_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\hat{\mu}_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) ,$$

故可得

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} ,$$

$$SDRL_1 = \frac{\sqrt{\beta}}{1 - \beta} = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta}\left(\frac{1}{1 - \beta} - 1\right)} = \sqrt{ARL_1(ARL_1 - 1)} .$$

給定 $\mu_0 = 0$ 、 $\sigma = 1$ 、 $L = 3$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ 、 $m = (20, 40, 100, 300, 500, 1000)$ ，從階段 I 每得到一組固定的 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ ，就計算 $\tilde{\delta} = 0(0.5)3.0$ 的 ARL 和 SDRL。

表六分別使用三種方法，在階段 I 為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 的情況，和不同 $m, \tilde{\delta}$ 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次，列出所得之 ARL 和 SDRL 的平均。表七和表八分別為在階段 I 為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 、 $(2, 0.1)$ 的情況。

對每個 m 和 $\tilde{\delta}$ 的組合，上排左邊表示 ARL 的平均估計量，記為 \overline{ARL} ，由 10000 個 ARL 的平均得來；上排右邊括號中是 \overline{ARL} 的標準差；下排表示 SDRL 的平均估計量，記為 \overline{SDRL} ，由 10000 個 SDRL 的平均得來。表格中最下面一排為參數已知時 ARL 和 SDRL 的理論值， m 以 ∞ 表示之。



第四章 數值比較與其他相關討論

4.1 階段 I 的比較

在階段 I 估計方法的比較有兩個準則：(1) μ_0 和 σ 估得好不好、(2) α 和 $1-\beta$ 的大小。由於本文三種估計方法都是使用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 估計 σ ，所以省略 $\hat{\sigma}$ 比較的部分。

將表二、表三、表五中，使用三種不同的估計方法，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 平均值、 $\hat{\mu}_0$ 標準差、 α 平均值、 α 標準差、 $1-\beta$ 平均值、 $1-\beta$ 標準差之折線圖，分別繪於圖一至圖六。圖中黑色實線表示使用直接估計法，藍色實線表示使用重複篩選法，紅色實線表示使用核密度估計法。

觀察圖一，我們發現在平均數偏移程度較小時 ($\delta = 0.5, 1, 1.5$)， p 越大的時候，三種方法之 $\hat{\mu}_0$ 平均值越不接近 μ_0 ，但使用核密度估計法之 $\hat{\mu}_0$ 平均值還是比傳統兩種方法來得接近。當樣本全部來自管制狀態下或平均數偏移程度較大時 ($\delta = 2, 2.5, 3$)，使用核密度估計法之 $\hat{\mu}_0$ 平均值很接近 μ_0 。再觀察圖二，我們發現三種方法之 $\hat{\mu}_0$ 標準差相差於 0.05 之內，大致看來，使用核密度估計法之 $\hat{\mu}_0$ 標準差略大，使用直接估計法之 $\hat{\mu}_0$ 標準差最小。

觀察圖三、圖四，我們發現當樣本全部來自管制狀態下或在平均數偏移程度較小時 ($\delta = 0.5, 1$)，使用核密度估計法之 α 平均值和標準差

和傳統兩種方法差不多。當平均數偏移程度較大時($\delta=1.5, 2, 2.5, 3$)， p 越大的時候，使用核密度估計法之 α 平均值和標準差比傳統兩種方法來得小。

觀察圖五，我們發現使用核密度估計法之 $1-\beta$ 平均值幾乎比傳統兩種方法來得大。觀察圖六，我們發現三種方法之 $1-\beta$ 標準差相差於 0.05 之內，大致看來，在平均數偏移程度較小時($\delta=0.5, 1$)，使用核密度估計法之 $1-\beta$ 標準差略大；在平均數偏移程度較大時($\delta=2, 2.5, 3$)，使用核密度估計法之 $1-\beta$ 標準差略小。

4.2 階段 II 的比較

階段 II 的比較準則為管制狀態下和失控狀態下平均連串長度的表現。當 ARL_0 越大，表示誤判率越低；而 ARL_1 越小，表示偵測力越好。因為使用不同估計的參數會得到不同的 ARL 值，所以我們計算期望 ARL(亦即 \overline{ARL})，並觀察期望 ARL 是否和參數已知時之 ARL 值是否接近。

將表六、表七、表八中，階段 I 為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 、 $(1, 0.2)$ 、 $(2, 0.1)$ 時的情況，使用三種不同的估計方法，階段 II 為 $\tilde{\delta}=0$ 時的 \overline{ARL}_0 和 $\tilde{\delta}=0.5$ 、 2 時的 \overline{ARL}_1 之折線圖，分別繪於圖七至圖八。圖中黑色實線表示使用直接估計法，藍色實線表示使用重複篩選法，紅色實線表示使用核密度估計法，深綠色虛線表示參數已知的情況。

觀察圖七，當階段 I 為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 時的情況，因為階段 I 樣本全部來自管制狀態下， m 越大的時候， $\hat{\mu}_0$ 估計得越準確，所以三種估計方法之 \overline{ARL} 都很接近參數已知時之 ARL 值。在階段 II 為 $\tilde{\delta} = 0$ 時的情況，使用核密度估計法之 \overline{ARL}_0 比傳統兩種方法更接近參數已知時之 ARL_0 ，而其他情形二者表現差不多。

觀察圖八，當階段 I 為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 時的情況，因為 $\hat{\mu}_0$ 估計得不準確，不管 m 是多少，三種方法之 \overline{ARL} 都和參數已知時之 ARL 值差很遠。而且 \overline{ARL}_0 比參數已知時之 ARL_0 小很多、 \overline{ARL}_1 比參數已知時之 ARL_1 大很多。這代表當階段 II 樣本來自管制狀態下，誤判率增加；而當階段 II 樣本來自失控狀態下，偵測力變差。不過，比較之下，使用核密度估計法之 \overline{ARL} 還是比傳統兩種方法接近參數已知時之 ARL 值。

觀察圖九，當階段 I 為 $(\delta, p) = (2, 0.1)$ 時的情況，使用直接估計法，因為 $\hat{\mu}_0$ 估計得不準確，不管 m 是多少， \overline{ARL} 都很不接近參數已知時之 ARL 值； m 越大的時候，使用重複篩選法和核密度估計法之 \overline{ARL} 都越接近參數已知時之 ARL 值，不過，比較起來，使用核密度估計法之 \overline{ARL} 還是比重複篩選法之 \overline{ARL} 接近。

4.3 將核密度估計法套用於其他分配

在 1.2 節中提到使用無母數方法的好處為不受限於某種固定分

配，於是我們將核密度估計法套用於 t 分配和 logistic 分配，其特性為管制狀態下之分配會在平均值附近呈現高峰。實際模擬與估計步驟如下：

步驟一、同 3.2.1 小節的步驟一，生成樣本，將樣本來自常態分配

改成來自 t 分配或 logistic 分配。

步驟二、使用核密度估計量來估計 \bar{X} 混合樣本之密度函數。

步驟三、用對應最大密度函數值的 \bar{X} 值來估計 μ_0 。

步驟四、同 3.2.1 小節的步驟五，重複步驟一到步驟三共 N 次。

給定 $\mu_0 = 0$ 、 $m = 100$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ 、 $h = 0.5$ 、t 分配之自由度 $\nu = (5, 10, 20, 30)$ ，表十為不同 δ, p, ν 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次所得之 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差。t 分配(自由度為 ν)的變異數為 $\nu/(\nu-2)$ ，所以對應不同的自由度 ν ，t 分配之標準差為：

ν	5	10	20	30
σ	1.290994	1.118034	1.054093	1.035098

給定 $\mu_0 = 0$ 、 $m = 100$ 、 $n = 5$ 、 $\delta = 0(0.5)3$ 、 $p = (0.05, 0.1, 0.15, 0.2)$ 、 $h = 0.5$ 、logistic 分配之尺度參數(scale parameter) $\beta = (0.01, 0.1, 0.5, 1)$ ，表十一為不同 δ, p, β 值組合下各模擬 $N = 10000$ 次所得之 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差。logistic 分配(尺度參數為 β)的變異數為 $\pi^2 \beta^2 / 3$ ，所以對應不同的尺度參數，logistic 分配之標準差為：

β	0.01	0.1	0.5	1
σ	0.018138	0.181380	0.906900	1.813799

觀察表十、表十一，發現當 σ 越小，如 logistic 分配之尺度參數為 0.01 的情況，因為分配圖形越集中，不容易發生堆疊的現象，所以 $\hat{\mu}_0$ 平均值越接近 μ_0 、 $\hat{\mu}_0$ 標準差越小。但當 σ 越大，如 t 分配之自由度為 5 及 logistic 分配之尺度參數為 1 的情況，在平均數偏移程度較小時($\delta=0.5,1$)， p 越大的時候， $\hat{\mu}_0$ 平均值越不接近 μ_0 、 $\hat{\mu}_0$ 標準差越大。

4.4 其他相關探討之帶寬的選擇

在階段 I 中，並不知道樣本來自管制狀態下和失控狀態下的常態分配之參數分別是多少，雖然帶寬 $h=0.5$ 可以用於 $N(0,1)$ 偏移到 $N(3,1)$ 的情形，卻不適用於 $N(0,9)$ 偏移到 $N(9,9)$ 的情形，儘管平均數偏移程度 δ 一樣等於三。

先前提到帶寬 h 選擇上，無法避免變異和偏誤之間的一消一長，通常這時候會使用平方誤差(squared error；SE)的期望值，均方誤差(mean squared error；MSE)來評定一個估計量的優劣，

$$SE = [\hat{f}(x) - f(x)]^2,$$

$$MSE = E[\hat{f}(x) - f(x)]^2$$

$$= bias^2 + variance。$$

一般為求總體的(global)最好成效，不侷限於單點的表現，常改採用積分平方誤差(integrated squared error；ISE)的期望值，積分均方誤差

(mean integrated squared error ; MISE) ,

$$ISE = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx ,$$

$$MISE = E \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx .$$

而漸近積分均方誤差(Asymptotic mean integrated squared error ;

AMISE)較容易計算，讓漸近積分均方誤差達到最小的 h_0 為本文提供的另一種 h 之選擇。

Simonoff (1996)指出，用 m 個樣本做密度函數 f 之核密度函數估計，

$$h_0 = \left[\frac{R(K)}{\sigma_K^4 R(f'')} \right]^{1/5} m^{-1/5} ,$$

其中， $R(K) = \int K(u)^2 du$ ， $\sigma_K^2 = \int u^2 K(u) du$ 。因欲估計之密度函數 f 是未知的，最直接的做法是代入一個特定分配，如 Gaussian；當核函數也使用 Gaussian 密度函數時，

$$h_0 = 1.059 \sigma' m^{-1/5} ,$$

其中 σ' 為 m 個樣本的標準差。

4.5 其他相關探討之 L 的建議

2.3 節提到，在階段 I 中，通常會固定型 I 錯誤的機率，作為比較基準點，然後選取具有最大檢定力之管制圖。當製程在管制狀態下，設定 $L=3$ 時，犯型 I 錯誤的機率之理論值為 0.0027；當樣本全部來自管制狀態下，使用核密度估計法估計參數， $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ 為隨機變

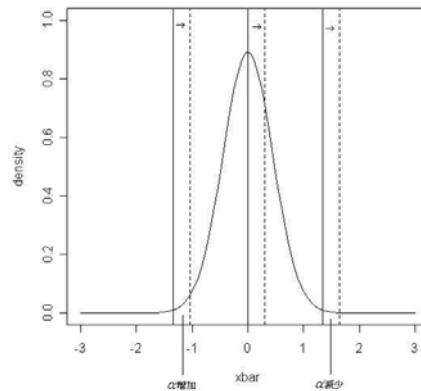
數，則管制界限 $(\hat{\mu}_0 - L\hat{\sigma}/\sqrt{n}, \hat{\mu}_0 + L\hat{\sigma}/\sqrt{n})$ 為隨機區間，若希望 \bar{X} 落在管制界限外的機率期望值是 0.0027，可以調整 L 以達到此目的。

換句話說，我們想找到一個 L ，使得 \bar{X} 落在 $(\hat{\mu}_0 - L\hat{\sigma}/\sqrt{n}, \hat{\mu}_0 + L\hat{\sigma}/\sqrt{n})$

管制界限內的機率期望值為 0.9973。先假設 σ 已知的情況：

$$\begin{aligned} & E_{\hat{\mu}_0} [P(\hat{\mu}_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \hat{\mu}_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}})] \\ &= E_{\hat{\mu}_0} [P(\frac{\hat{\mu}_0 - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\hat{\mu}_0 + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})] \\ &= E_{\hat{\mu}_0} [P(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L \leq Z \leq \sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L)] \\ &= E_{\hat{\mu}_0} [\Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L) - \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L)] , \end{aligned}$$

在不失一般性下，可假設 $\mu_0 = 0, \sigma = 1$ ，上述式子中， Z 代表標準常態隨機變數。令 $g(\hat{\mu}_0) = \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L) - \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L)$ ，當模擬次數 r 夠大時， $E_{\hat{\mu}_0} [g(\hat{\mu}_0)]$ 可用 r 個 $g(\hat{\mu}_0)$ 值之平均值來逼近，給定重複次數 $r = 100,000$ ， $m = (30, 50, 100, 300, 500, 1000)$ ，我們對兩種不同 h 的選擇方法 ($h = 0.5$ 和 $h_0 = 1.059\sigma'm^{-1/5}$)，分別提供 L 的逼近值，見表九(a)。



如上圖，假設其為管制狀態下常態分配， $\hat{\mu}_0$ 只要偏離平均數 μ_0 ，

管制界限也會跟著偏移， α 增加的比例一定比 α 減少的比例多，所以 α 一定會變大；另外，當 m 越小，估計得越不準確， $\hat{\mu}_0$ 偏移得越多， α 會變更大，此時就需要較大的 L 讓 α 維持不變。

此外，我們可利用變數變換來證明 $E[\Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L) - \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L)]$ 和 n 無關，如下：

令 $y = \sqrt{n}\hat{\mu}_0$ ，則

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{n}} f_{\hat{\mu}_0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}y\right)。$$

所以，

$$\begin{aligned} & E_{\hat{\mu}_0} [\Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L) - \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L)] \\ &= \int [\Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 + L) - \Phi(\sqrt{n}\hat{\mu}_0 - L)] f_{\hat{\mu}_0}(\hat{\mu}_0) d\hat{\mu}_0 \\ &= \int [\Phi(y + L) - \Phi(y - L)] f_{\hat{\mu}_0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}y\right) \frac{1}{\sqrt{n}} dy \\ &= \int [\Phi(y + L) - \Phi(y - L)] f_Y(y) dy \\ &= E_Y [\Phi(y + L) - \Phi(y - L)]。 \end{aligned}$$

因 $\hat{\mu}_0$ 乃由 m 個 \bar{X} 之值經由密度函數估計求得，而這些 \bar{X} 之標準差為 σ/\sqrt{n} ，因此 Y 可以說是由 m 個標準差為 σ 之隨機變數得來，因此與 n 無關。故 \bar{X} 落在管制界限內之期望機率和 n 無關。當 σ 未知的情況：

$$\begin{aligned} & E_{\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}} [P(\hat{\mu}_0 - L \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \hat{\mu}_0 + L \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}})] \\ &= E_{\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}} [P(\frac{\hat{\mu}_0 - L \hat{\sigma} / \sqrt{n} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}} \leq \frac{\hat{\mu}_0 + L \hat{\sigma} / \sqrt{n} - \mu_0}{\hat{\sigma} / \sqrt{n}})] \\ &= E_{\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}} [P(\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\hat{\sigma}} - L \leq T \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\hat{\sigma}} + L)] \\ &= E_{\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}} [\Phi(\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\hat{\sigma}} + L) - \Phi(\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_0 - \mu_0)}{\hat{\sigma}} - L)]， \end{aligned}$$

在不失一般性下，可假設 $\mu_0 = 0$ ，上述式子中， T 為自由度為 $(n-1)$ 的 t 分配， $\tilde{\Phi}$ 為自由度為 $(n-1)$ 的 t 分配之累積分配函數。因為 t 分配和 n 有關，所以 L 和 n 也有關，因此我們只列出 $m = 100$ ， $n = 2(1)19$ ， $20(10)100$ 之 L 的逼近值，見表九(b)。



第五章 結論及未來研究方向

針對階段 I 樣本皆來自常態分配，部分樣本來自製程發生平均數偏移的情況，我們提出核密度估計法來估計管制狀態下的常態分配之平均數 μ_0 ，並發現當平均數偏移程度 δ 較大時，估計表現尤佳。

事實上，核密度估計法並不受限於來自常態分配之樣本；而且，失控狀態下的樣本不一定要和管制狀態下的樣本一樣來自同一分配。另外，核密度估計法也可用於製程同時發生平均數偏移或變異數改變之情況，只要混合樣本的分布情形在管制狀態下之分配平均值附近呈現高峰皆適用。

我們曾經嘗試將核密度估計法套用於估計變異數的時候，但因為樣本變異數服從 Gamma 分配，其密度函數最高點不會對應到平均數，所以估計效果很差。未來可以繼續研究新的估計方法，希望其對樣本不只來自兩個不同的分配之情況皆適用。

參考文獻

1. Champ, C. W. and Chou, S. P. (2003). "Comparison of Standard and Individual Limits Phase I Shewhart \bar{X} , R , and S Charts". *Quality and Reliability Engineering International* **19**, pp. 161-170.
2. Chen, G. (1997). "The Mean and Standard Deviation of the Run Length Distribution of \bar{X} Charts When Control Limits Are Estimated". *Statistica Sinica* **7**, pp. 789-798.
3. Ghosh, B. K., Reynolds, M. R., and Hui, Y. V. (1981). "Shewhart \bar{X} -Charts with Estimated Process Variance". *Communications in Statistics- Theory and Methods* **18**, pp. 1797-1822.
4. Jensen, W. A., Jones-Farmer, L. A., Champ, C. W., and Woodall, W. H. (2006). "Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review". *Journal of Quality Technology* **38**, pp. 349-364.
5. Montgomery, D. C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th ed. John Wiley, New York.
6. Quesenberry, C. P. (1993). "The Effect of Sample Size on Estimated Limits for \bar{X} and X Control Charts". *Journal of Quality Technology* **25**, pp. 237-247.
7. Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. D. Van Nostrand, New York.
8. Simonoff, J. S. (1996). *Smoothing Methods in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
9. Woodall, W. H. and Montgomery, D. C. (1999). "Research Issues and Ideas in Statistical Process Control". *Journal of Quality Technology* **31**, pp. 376-386.

表一：資料為混合樣本，用 $E(\bar{X}) \pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 當管制上下限之 α 和 $1-\beta$ 的理論值

α 理論值

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0028
0.05	0.0027	0.0027	0.0029	0.0031	0.0034	0.0038	0.0043
0.1	0.0027	0.0029	0.0034	0.0043	0.0056	0.0075	0.0100
0.15	0.0027	0.0031	0.0043	0.0065	0.0100	0.0154	0.0231
0.2	0.0027	0.0034	0.0056	0.0100	0.0177	0.0299	0.0486

$1-\beta$ 理論值

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0027	0.0292	0.2158	0.6257	0.9233	0.9944	0.9999
0.05	0.0027	0.0263	0.1906	0.5739	0.8941	0.9896	0.9996
0.1	0.0027	0.0231	0.1617	0.5075	0.8473	0.9789	0.9988
0.15	0.0027	0.0202	0.1358	0.4408	0.7885	0.9601	0.9966
0.2	0.0027	0.0177	0.1129	0.3757	0.7183	0.9295	0.9910

表二：資料為混合樣本，使用直接估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差

$\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0001 (0.0448)	0.0052 (0.0443)	0.0103 (0.0450)	0.0154 (0.0448)	0.0201 (0.0448)	0.0247 (0.0444)	0.0293 (0.0452)
0.05	-0.0004 (0.0443)	0.0243 (0.0447)	0.0499 (0.0449)	0.0752 (0.0446)	0.1002 (0.0449)	0.1250 (0.0452)	0.1505 (0.0451)
0.1	0.0000 (0.0444)	0.0498 (0.0446)	0.0997 (0.0443)	0.1499 (0.0446)	0.1990 (0.0445)	0.2494 (0.0446)	0.2999 (0.0452)
0.15	0.0006 (0.0448)	0.0749 (0.0448)	0.1498 (0.0446)	0.2248 (0.0444)	0.2995 (0.0442)	0.3746 (0.0447)	0.4499 (0.0447)
0.2	0.0001 (0.0446)	0.0995 (0.0445)	0.1997 (0.0446)	0.3004 (0.0443)	0.3998 (0.0450)	0.5005 (0.0449)	0.6001 (0.0449)

$\hat{\sigma}$ 平均值 ($\hat{\sigma}$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.9993 (0.0351)	1.0002 (0.0355)	0.9997 (0.0357)	1.0005 (0.0356)	0.9999 (0.0350)	1.0003 (0.0353)	1.0001 (0.0359)
0.05	0.9994 (0.0355)	0.9997 (0.0355)	1.0001 (0.0353)	0.9997 (0.0353)	0.9999 (0.0352)	1.0000 (0.0350)	0.9989 (0.0353)
0.1	0.9998 (0.0356)	1.0000 (0.0357)	0.9991 (0.0350)	0.9997 (0.0354)	1.0000 (0.0357)	0.9997 (0.0356)	1.0002 (0.0357)
0.15	1.0003 (0.0351)	0.9995 (0.0350)	0.9998 (0.0354)	1.0002 (0.0352)	1.0000 (0.0353)	0.9993 (0.0350)	0.9999 (0.0354)
0.2	0.9995 (0.0353)	1.0001 (0.0354)	1.0003 (0.0352)	1.0002 (0.0354)	0.9997 (0.0354)	1.0002 (0.0353)	0.9996 (0.0356)

α 平均值(α 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0028 (0.0054)	0.0028 (0.0054)	0.0027 (0.0053)	0.0027 (0.0053)	0.0027 (0.0053)	0.0028 (0.0054)	0.0027 (0.0052)
0.05	0.0027 (0.0053)	0.0028 (0.0055)	0.0029 (0.0057)	0.0031 (0.0058)	0.0034 (0.0060)	0.0038 (0.0064)	0.0043 (0.0068)
0.1	0.0028 (0.0053)	0.0029 (0.0058)	0.0034 (0.0062)	0.0044 (0.0070)	0.0057 (0.0080)	0.0074 (0.0091)	0.0100 (0.0107)
0.15	0.0027 (0.0053)	0.0031 (0.0061)	0.0043 (0.0071)	0.0065 (0.0087)	0.0101 (0.0109)	0.0157 (0.0135)	0.0234 (0.0165)
0.2	0.0027 (0.0053)	0.0033 (0.0064)	0.0056 (0.0085)	0.0101 (0.0113)	0.0177 (0.0151)	0.0302 (0.0191)	0.0489 (0.0245)

$1-\beta$ 平均值($1-\beta$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	NA (NA)	0.0291 (0.1681)	0.2121 (0.4088)	0.6256 (0.4840)	0.9198 (0.2716)	0.9935 (0.0804)	0.9999 (0.0100)
0.05	NA (NA)	0.0279 (0.0738)	0.1925 (0.1776)	0.5764 (0.2220)	0.8936 (0.1396)	0.9893 (0.0456)	0.9997 (0.0080)
0.1	NA (NA)	0.0237 (0.0479)	0.1643 (0.1184)	0.5104 (0.1590)	0.8504 (0.1127)	0.9804 (0.0439)	0.9985 (0.0121)
0.15	NA (NA)	0.0198 (0.0357)	0.1360 (0.0894)	0.4392 (0.1288)	0.7890 (0.1051)	0.9598 (0.0504)	0.9965 (0.0152)
0.2	NA (NA)	0.0174 (0.0292)	0.1136 (0.0714)	0.3771 (0.1086)	0.7177 (0.1024)	0.9304 (0.0574)	0.9912 (0.0210)

表三：資料為混合樣本，使用重複篩選法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差

$\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	-0.0006 (0.0454)	0.0045 (0.0449)	0.0071 (0.0457)	0.0039 (0.0456)	0.0018 (0.0455)	0.0004 (0.0464)	0.0004 (0.0461)
0.05	-0.0006 (0.0452)	0.0241 (0.0460)	0.0355 (0.0478)	0.0238 (0.0503)	0.0068 (0.0482)	0.0030 (0.0476)	0.0026 (0.0470)
0.1	0.0000 (0.0453)	0.0482 (0.0460)	0.0749 (0.0496)	0.0511 (0.0567)	0.0149 (0.0513)	0.0081 (0.0485)	0.0103 (0.0487)
0.15	-0.0004 (0.0450)	0.0726 (0.0462)	0.1186 (0.0520)	0.0873 (0.0636)	0.0285 (0.0559)	0.0170 (0.0510)	0.0243 (0.0505)
0.2	-0.0001 (0.0459)	0.0974 (0.0463)	0.1654 (0.0528)	0.1340 (0.0731)	0.0464 (0.0619)	0.0326 (0.0539)	0.0464 (0.0542)

$\hat{\sigma}$ 平均值 ($\hat{\sigma}$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.9997 (0.0356)	1.0007 (0.0354)	0.9996 (0.0360)	1.0004 (0.0358)	0.9998 (0.0356)	0.9999 (0.0353)	0.9998 (0.0355)
0.05	1.0002 (0.0353)	1.0003 (0.0358)	0.9996 (0.0359)	0.9996 (0.0365)	0.9998 (0.0367)	0.9997 (0.0363)	0.9999 (0.0365)
0.1	0.9994 (0.0353)	0.9997 (0.0360)	1.0000 (0.0358)	1.0007 (0.0368)	1.0009 (0.0373)	1.0001 (0.0369)	1.0002 (0.0380)
0.15	0.9997 (0.0357)	1.0003 (0.0357)	1.0007 (0.0355)	1.0003 (0.0377)	1.0001 (0.0383)	1.0002 (0.0384)	0.9997 (0.0393)
0.2	1.0002 (0.0352)	1.0000 (0.0356)	1.0002 (0.0364)	0.9997 (0.0372)	0.9997 (0.0399)	0.9997 (0.0393)	1.0003 (0.0401)

α 平均值(α 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0028 (0.0054)	0.0027 (0.0055)	0.0029 (0.0056)	0.0029 (0.0056)	0.0029 (0.0056)	0.0029 (0.0056)	0.0031 (0.0056)
0.05	0.0028 (0.0054)	0.0028 (0.0056)	0.0031 (0.0058)	0.0034 (0.0061)	0.0040 (0.0065)	0.0046 (0.0070)	0.0052 (0.0074)
0.1	0.0027 (0.0053)	0.0030 (0.0058)	0.0035 (0.0063)	0.0048 (0.0074)	0.0066 (0.0086)	0.0085 (0.0098)	0.0112 (0.0112)
0.15	0.0027 (0.0054)	0.0031 (0.0061)	0.0044 (0.0074)	0.0071 (0.0093)	0.0110 (0.0115)	0.0165 (0.0140)	0.0242 (0.0171)
0.2	0.0028 (0.0053)	0.0034 (0.0067)	0.0058 (0.0086)	0.0105 (0.0116)	0.0186 (0.0152)	0.0313 (0.0198)	0.0494 (0.0245)

$1-\beta$ 平均值($1-\beta$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	NA (NA)	0.0313 (0.1741)	0.2207 (0.4147)	0.6245 (0.4843)	0.9244 (0.2644)	0.9951 (0.0698)	1.0000 (0.0000)
0.05	NA (NA)	0.0265 (0.0735)	0.1977 (0.1874)	0.6061 (0.2309)	0.9214 (0.1250)	0.9939 (0.0353)	0.9998 (0.0057)
0.1	NA (NA)	0.0233 (0.0483)	0.1744 (0.1317)	0.5832 (0.1811)	0.9184 (0.0925)	0.9938 (0.0253)	0.9998 (0.0047)
0.15	NA (NA)	0.0210 (0.0377)	0.1482 (0.1040)	0.5526 (0.1635)	0.9131 (0.0824)	0.9934 (0.0213)	0.9998 (0.0033)
0.2	NA (NA)	0.0179 (0.0304)	0.1283 (0.0871)	0.5112 (0.1580)	0.9041 (0.0795)	0.9926 (0.0199)	0.9998 (0.0032)

表四：資料為混合樣本，使用核密度估計法估計參數，代入不同的帶寬 h ，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差

(a) $h = 0.1$ ， $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0011(0.1573)	0.0051 (0.1568)	0.0001 (0.1610)	-0.0009(0.1586)	-0.0012(0.1564)	0.0041(0.1575)	0.0024(0.1592)
0.05	-0.0003(0.1567)	0.0194 (0.1621)	0.0040 (0.1624)	0.0008(0.1617)	0.0007(0.1617)	0.0005(0.1597)	-0.0025(0.1599)
0.1	0.0011(0.1616)	0.0354 (0.1660)	0.0148 (0.1682)	-0.0009(0.1625)	0.0008(0.1642)	-0.0039(0.1625)	0.0013(0.1629)
0.15	0.0008(0.1586)	0.0523 (0.1696)	0.0249 (0.1759)	0.0042(0.1652)	-0.0021(0.1643)	0.0002(0.1648)	0.0014(0.1644)
0.2	0.0026(0.1579)	0.0740 (0.1750)	0.0385 (0.1837)	0.0053(0.1736)	0.0008(0.1689)	-0.0023(0.1678)	0.0012(0.1688)

(b) $h = 0.3$ ， $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	-0.0013(0.0732)	0.0034 (0.0739)	0.0027 (0.0739)	-0.0002(0.0742)	0.0000(0.0736)	-0.0003(0.0724)	0.0003(0.0738)
0.05	0.0011(0.0737)	0.0191 (0.0761)	0.0104 (0.0772)	0.0006(0.0759)	-0.0004(0.0751)	0.0012(0.0746)	0.0003(0.0749)
0.1	-0.0004(0.0737)	0.0351 (0.0781)	0.0208 (0.0817)	0.0046(0.0791)	0.0003(0.0774)	-0.0002(0.0775)	0.0008(0.0773)
0.15	0.0001(0.0732)	0.0553 (0.0814)	0.0356 (0.0895)	0.0056(0.0828)	0.0006(0.0792)	0.0000(0.0800)	0.0002(0.0801)
0.2	-0.0003(0.0735)	0.0779 (0.0847)	0.0521 (0.0978)	0.0088(0.0869)	-0.0002(0.0828)	0.0008(0.082)	-0.0002(0.0827)

(c) $h = 0.5$, $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	-0.0006(0.0530)	0.0040 (0.0532)	0.0041 (0.0535)	0.0012 (0.0537)	0.0001 (0.0533)	0.0000(0.0529)	0.0004(0.0534)
0.05	0.0003(0.0534)	0.0211 (0.0543)	0.0183 (0.0562)	0.0062 (0.0557)	0.0010 (0.0546)	-0.0008(0.0542)	0.0001(0.0541)
0.1	-0.0001(0.0532)	0.0407 (0.0543)	0.0378 (0.0589)	0.0148 (0.0585)	0.0029 (0.0562)	-0.0004(0.0558)	0.0012(0.0554)
0.15	-0.0003(0.0527)	0.0620 (0.0560)	0.0624 (0.0637)	0.0229 (0.0625)	0.0044 (0.0580)	-0.0006(0.0581)	0.0002(0.0578)
0.2	-0.0003(0.0532)	0.0862 (0.0572)	0.0917 (0.0683)	0.0347 (0.0667)	0.0056 (0.0617)	0.0010(0.0592)	-0.0007(0.0593)

(d) $h = 0.7$, $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0013(0.0479)	0.0042 (0.0483)	0.0056 (0.0491)	0.0029 (0.0489)	0.0006 (0.0480)	0.0006 (0.0482)	0.0004(0.0483)
0.05	-0.0002(0.0475)	0.0212 (0.0489)	0.0263 (0.0501)	0.0166 (0.0510)	0.0057 (0.0504)	0.0022 (0.0494)	-0.0001(0.0497)
0.1	0.0002(0.0486)	0.0436 (0.0491)	0.0549 (0.0519)	0.0344 (0.0539)	0.0134 (0.0523)	0.0020 (0.0508)	0.0009(0.0512)
0.15	-0.0001(0.0485)	0.0665 (0.0492)	0.0892 (0.0550)	0.0569 (0.0580)	0.0202 (0.0553)	0.0055 (0.0533)	0.0011(0.0526)
0.2	0.0001(0.0481)	0.0912 (0.0496)	0.1260 (0.0569)	0.0852 (0.0627)	0.0310 (0.0585)	0.0075 (0.0555)	0.0009(0.0543)

表五：資料為混合樣本，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均值及標準差

$\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

	δ						
p	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	-0.0006(0.0530)	0.0040 (0.0532)	0.0041 (0.0535)	0.0012 (0.0537)	0.0001 (0.0533)	0.0000 (0.0529)	0.0004(0.0534)
0.05	0.0003(0.0534)	0.0211 (0.0543)	0.0183 (0.0562)	0.0062 (0.0557)	0.0010 (0.0546)	0.0008 (0.0542)	0.0001(0.0541)
0.1	-0.0001(0.0532)	0.0407 (0.0543)	0.0378 (0.0589)	0.0148 (0.0585)	0.0029 (0.0562)	0.0004 (0.0558)	0.0012(0.0554)
0.15	-0.0003(0.0527)	0.0620 (0.0560)	0.0624 (0.0637)	0.0229 (0.0625)	0.0044 (0.0580)	0.0006 (0.0581)	0.0002(0.0578)
0.2	-0.0003(0.0532)	0.0862 (0.0572)	0.0917 (0.0683)	0.0347 (0.0667)	0.0056 (0.0617)	0.0010 (0.0592)	-0.0007(0.0593)

$\hat{\sigma}$ 平均值 ($\hat{\sigma}$ 標準差)：

	δ						
p	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	1.0000 (0.0353)	0.9999 (0.0349)	0.9999 (0.0356)	0.9994 (0.0359)	0.9996 (0.0351)	0.9998 (0.0351)	1.0003 (0.0355)
0.05	0.9999 (0.0355)	1.0002 (0.0352)	0.9996 (0.0358)	1.0005 (0.0353)	0.9996 (0.0349)	0.9995 (0.0358)	1.0000 (0.0354)
0.1	1.0001 (0.0355)	0.9995 (0.0354)	0.9995 (0.0356)	0.9999 (0.0353)	1.0002 (0.0351)	0.9999 (0.0357)	1.0001 (0.0351)
0.15	1.0008 (0.0354)	1.0005 (0.0355)	1.0003 (0.0351)	0.9994 (0.0349)	1.0001 (0.0351)	1.0001 (0.0350)	0.9997 (0.0353)
0.2	0.9996 (0.0353)	1.0002 (0.0355)	0.9999 (0.0354)	0.9999 (0.0352)	0.9997 (0.0355)	0.9996 (0.0355)	1.0003 (0.0353)

α 平均值(α 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	0.0030 (0.0056)	0.0030 (0.0056)	0.0030 (0.0055)	0.0031 (0.0057)	0.0030 (0.0057)	0.0031 (0.0057)	0.0031 (0.0057)
0.05	0.0030 (0.0056)	0.0030 (0.0057)	0.0031 (0.0058)	0.0030 (0.0057)	0.0031 (0.0059)	0.0030 (0.0058)	0.0031 (0.0057)
0.1	0.0029 (0.0055)	0.0032 (0.0060)	0.0032 (0.0061)	0.0031 (0.0059)	0.0030 (0.0059)	0.0031 (0.0059)	0.0030 (0.0060)
0.15	0.0030 (0.0056)	0.0033 (0.0064)	0.0035 (0.0065)	0.0032 (0.0062)	0.0030 (0.0061)	0.0030 (0.0061)	0.0031 (0.0061)
0.2	0.0031 (0.0056)	0.0037 (0.0069)	0.0039 (0.0072)	0.0032 (0.0064)	0.0031 (0.0064)	0.0031 (0.0063)	0.0031 (0.0064)

$1-\beta$ 平均值($1-\beta$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.01	NA (NA)	0.0322 (0.1765)	0.2241 (0.4170)	0.6464 (0.4781)	0.9257 (0.2623)	0.9932 (0.0822)	0.9999 (0.0100)
0.05	NA (NA)	0.0284 (0.0750)	0.2161 (0.1920)	0.6287 (0.2241)	0.9253 (0.1197)	0.9945 (0.0332)	0.9998 (0.0066)
0.1	NA (NA)	0.0269 (0.0517)	0.2016 (0.1379)	0.6256 (0.1678)	0.9260 (0.0858)	0.9947 (0.0229)	0.9999 (0.0026)
0.15	NA (NA)	0.0232 (0.0403)	0.1886 (0.1150)	0.6199 (0.1447)	0.9248 (0.0726)	0.9943 (0.0198)	0.9998 (0.0032)
0.2	NA (NA)	0.0208 (0.0331)	0.1716 (0.1007)	0.6070 (0.1353)	0.9246 (0.0648)	0.9948 (0.0162)	0.9999 (0.0025)

表六：階段 I 為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 時的情況，階段 II 的 ARL 和 SDRL 之平均估計量

直接估計法：

m	δ						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	437.4318 (5.02)	47.7263 (0.49)	5.2368 (0.03)	1.6511 (0.00)	1.0918 (0.00)	1.0071 (0.00)	1.0002 (0.00)
	436.9313	47.2216	4.7026	1.0235	0.303	0.0764	0.0122
40	399.0741 (2.52)	39.7920 (0.24)	4.8484 (0.02)	1.6086 (0.00)	1.0839 (0.00)	1.0059 (0.00)	1.0002 (0.00)
	398.5737	39.2878	4.3157	0.9828	0.2947	0.0731	0.0112
100	377.6774 (1.41)	35.5088 (0.13)	4.6108 (0.01)	1.5800 (0.00)	1.0785 (0.00)	1.0052 (0.00)	1.0001 (0.00)
	377.177	35.0048	4.0787	0.9546	0.2882	0.0707	0.0106
300	374.5815 (0.78)	34.2616 (0.07)	4.5473 (0.01)	1.5731 (0.00)	1.0771 (0.00)	1.0050 (0.00)	1.0001 (0.00)
	374.0812	33.7578	4.0157	0.9486	0.2872	0.0702	0.0104
500	371.2904 (0.59)	33.8035 (0.05)	4.5176 (0.00)	1.5691 (0.00)	1.0764 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	370.7901	33.2996	3.9861	0.9445	0.2861	0.0698	0.0103
1000	371.4106 (0.41)	33.6322 (0.03)	4.5091 (0.00)	1.5682 (0.00)	1.0762 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	370.9102	33.1283	3.9776	0.9437	0.286	0.0697	0.0103
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

重複篩選法：

m	δ						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	442.5107 (4.92)	48.7719 (0.52)	5.2899 (0.03)	1.6573 (0.00)	1.0929 (0.00)	1.0072 (0.00)	1.0002 (0.00)
	442.0101	48.2672	4.7558	1.03	0.3046	0.0769	0.0124
40	397.0788 (2.62)	39.9481 (0.26)	4.8530 (0.02)	1.6088 (0.00)	1.0839 (0.00)	1.0059 (0.00)	1.0002 (0.00)
	396.5783	39.4439	4.3202	0.9828	0.2945	0.0731	0.0112
100	379.1390 (1.43)	35.7250 (0.13)	4.6267 (0.01)	1.5823 (0.00)	1.0789 (0.00)	1.0052 (0.00)	1.0001 (0.00)
	378.6386	35.221	4.0947	0.9572	0.289	0.0709	0.0106
300	372.0144 (0.75)	34.0803 (0.07)	4.5334 (0.01)	1.5710 (0.00)	1.0767 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	371.514	33.5764	4.0018	0.9463	0.2865	0.07	0.0103
500	371.4313 (0.58)	33.8825 (0.05)	4.5240 (0.00)	1.5701 (0.00)	1.0765 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	370.9309	33.3786	3.9925	0.9456	0.2865	0.0699	0.0103
1000	371.2092 (0.41)	33.6323 (0.04)	4.5089 (0.00)	1.5682 (0.00)	1.0762 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	370.7088	33.1285	3.9774	0.9437	0.286	0.0697	0.0103
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

核密度估計法：

m	$\hat{\delta}$						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	415.1536 (4.65)	49.9419 (0.59)	5.3223 (0.03)	1.6574 (0.00)	1.0931 (0.00)	1.0073 (0.00)	1.0002 (0.00)
	414.653	49.437	4.7873	1.0281	0.3029	0.0765	0.0124
40	381.8413 (2.49)	41.1554 (0.30)	4.9134 (0.02)	1.6154 (0.00)	1.0852 (0.00)	1.0061 (0.00)	1.0002 (0.00)
	381.3408	40.651	4.3803	0.9889	0.2957	0.0736	0.0114
100	371.9531 (1.37)	36.1617 (0.14)	4.6530 (0.01)	1.5857 (0.00)	1.0795 (0.00)	1.0053 (0.00)	1.0001 (0.00)
	371.4527	35.6577	4.121	0.9606	0.2898	0.0712	0.0107
300	369.7127 (0.76)	34.3263 (0.07)	4.5492 (0.01)	1.5732 (0.00)	1.0771 (0.00)	1.0050 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.2124	33.8224	4.0176	0.9485	0.2871	0.0702	0.0104
500	369.4954 (0.58)	33.8325 (0.06)	4.5182 (0.00)	1.5691 (0.00)	1.0764 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	368.9951	33.3286	3.9866	0.9443	0.286	0.0698	0.0103
1000	370.1080 (0.41)	33.6813 (0.04)	4.5117 (0.00)	1.5685 (0.00)	1.0762 (0.00)	1.0049 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.6077	33.1775	3.9803	0.944	0.2861	0.0698	0.0103
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

表七：階段 I 為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 時的情況，階段 II 的 ARL 和 SDRL 之平均估計量

直接估計法：

m	$\tilde{\delta}$						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	263.1608 (3.93)	152.4961 (1.9)	11.0356 (0.08)	2.3430 (0.01)	1.2102 (0.00)	1.0217 (0.00)	1.0010 (0.00)
	262.6598	151.9943	10.5186	1.7624	0.4899	0.1382	0.027
40	215.1833 (1.58)	122.1872 (0.9)	9.7936 (0.04)	2.2416 (0.00)	1.1939 (0.00)	1.0188 (0.00)	1.0007 (0.00)
	214.6824	121.6857	9.2775	1.6624	0.4738	0.133	0.0252
100	191.6602 (0.8)	106.9659 (0.43)	9.1616 (0.02)	2.1864 (0.00)	1.1847 (0.00)	1.0172 (0.00)	1.0006 (0.00)
	191.1594	106.4645	8.6461	1.6083	0.4649	0.13	0.0241
300	182.0988 (0.43)	102.3454 (0.23)	8.9783 (0.01)	2.1716 (0.00)	1.1822 (0.00)	1.0167 (0.00)	1.0006 (0.00)
	181.5981	101.8441	8.4632	1.5944	0.4631	0.1295	0.0238
500	181.0128 (0.33)	101.2713 (0.18)	8.9311 (0.01)	2.1673 (0.00)	1.1814 (0.00)	1.0165 (0.00)	1.0006 (0.00)
	180.5121	100.77	8.416	1.5901	0.4624	0.1292	0.0237
1000	179.6288 (0.23)	100.4270 (0.12)	8.8945 (0.01)	2.1639 (0.00)	1.1809 (0.00)	1.0164 (0.00)	1.0006 (0.00)
	179.1281	99.9257	8.3795	1.5868	0.4618	0.129	0.0237
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

重複篩選法：

m	δ						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	284.8826 (3.17)	135.7128 (1.85)	10.0634 (0.08)	2.2224 (0.01)	1.1894 (0.00)	1.0192 (0.00)	1.0009 (0.00)
	284.3817	135.2105	9.543	1.6328	0.4562	0.127	0.0244
40	250.4702 (1.81)	105.6967 (0.85)	8.8390 (0.04)	2.1230 (0.00)	1.1732 (0.00)	1.0163 (0.00)	1.0006 (0.00)
	249.9695	105.1949	8.3204	1.5365	0.4416	0.1222	0.0226
100	231.1157 (0.98)	90.8754 (0.42)	8.2007 (0.02)	2.0654 (0.00)	1.1633 (0.00)	1.0146 (0.00)	1.0005 (0.00)
	230.6151	90.3737	7.683	1.4803	0.4321	0.1189	0.0214
300	220.4009 (0.53)	84.5327 (0.21)	7.9187 (0.01)	2.0384 (0.00)	1.1586 (0.00)	1.0138 (0.00)	1.0004 (0.00)
	219.9003	84.0311	7.4014	1.4539	0.4274	0.1172	0.0208
500	217.7829 (0.40)	83.6597 (0.17)	7.8827 (0.01)	2.0353 (0.00)	1.1580 (0.00)	1.0137 (0.00)	1.0004 (0.00)
	217.2823	83.1582	7.3654	1.451	0.427	0.1171	0.0208
1000	216.2028 (0.28)	82.7584 (0.11)	7.8429 (0.01)	2.0316 (0.00)	1.1574 (0.00)	1.0135 (0.00)	1.0004 (0.00)
	215.7022	82.2568	7.3257	1.4474	0.4264	0.1169	0.0207
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

核密度估計法：

m	$\hat{\delta}$						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	349.8392 (4.15)	96.1688 (1.55)	8.0391 (0.09)	1.9737 (0.01)	1.1466 (0.00)	1.0140 (0.00)	1.0006 (0.00)
	349.3384	95.6653	7.5123	1.3666	0.3881	0.1045	0.019
40	321.1608 (2.34)	73.1144 (0.66)	6.9154 (0.04)	1.8785 (0.00)	1.1307 (0.00)	1.0113 (0.00)	1.0004 (0.00)
	320.6603	72.6115	6.3905	1.2742	0.3728	0.0992	0.0172
100	312.1983 (1.33)	60.8974 (0.30)	6.3465 (0.02)	1.8230 (0.00)	1.1207 (0.00)	1.0096 (0.00)	1.0003 (0.00)
	311.6979	60.3949	5.823	1.2209	0.3633	0.0956	0.016
300	309.4428 (0.75)	56.3047 (0.15)	6.1246 (0.01)	1.8000 (0.00)	1.1165 (0.00)	1.0090 (0.00)	1.0002 (0.00)
	308.9424	55.8023	5.6016	1.1986	0.3591	0.094	0.0154
500	306.9473 (0.58)	55.4987 (0.12)	6.0857 (0.01)	1.7960 (0.00)	1.1157 (0.00)	1.0088 (0.00)	1.0002 (0.00)
	306.4469	54.9963	5.5628	1.1948	0.3584	0.0938	0.0153
1000	305.9376 (0.41)	54.8012 (0.08)	6.0509 (0.01)	1.7922 (0.00)	1.1150 (0.00)	1.0087 (0.00)	1.0002 (0.00)
	305.4372	54.2989	5.5281	1.1911	0.3577	0.0935	0.0153
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

表八：階段 I 為 $(\delta, p) = (2, 0.1)$ 時的情況，階段 II 的 ARL 和 SDRL 之平均估計量

直接估計法：

m	δ						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	259.0842 (3.21)	151.1937 (1.76)	11.0137 (0.08)	2.3431 (0.01)	1.2103 (0.00)	1.0217 (0.00)	1.001 (0.00)
	258.5832	150.692	10.4968	1.7628	0.4904	0.1383	0.0271
40	212.9041 (1.50)	120.7065 (0.87)	9.7308 (0.04)	2.2351 (0.00)	1.1928 (0.00)	1.0186 (0.00)	1.0007 (0.00)
	212.4032	120.205	9.2147	1.6558	0.4724	0.1325	0.025
100	192.0376 (0.83)	108.0714 (0.44)	9.2233 (0.02)	2.1938 (0.00)	1.1860 (0.00)	1.0173 (0.00)	1.0006 (0.00)
	191.5368	107.5701	8.7079	1.6161	0.4668	0.1307	0.0243
300	182.7799 (0.43)	102.2426 (0.23)	8.9714 (0.01)	2.1708 (0.00)	1.1820 (0.00)	1.0166 (0.00)	1.0006 (0.00)
	182.2792	101.7413	8.4563	1.5934	0.4629	0.1294	0.0238
500	180.9933 (0.33)	101.2463 (0.18)	8.9300 (0.01)	2.1672 (0.00)	1.1814 (0.00)	1.0165 (0.00)	1.0006 (0.00)
	180.4926	100.745	8.4149	1.59	0.4624	0.1292	0.0237
1000	179.1272 (0.23)	100.4570 (0.12)	8.8964 (0.01)	2.1641 (0.00)	1.1809 (0.00)	1.0164 (0.00)	1.0006 (0.00)
	178.6265	99.9557	8.3814	1.587	0.4619	0.129	0.0237
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

重複篩選法：

m	δ						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	428.2139 (4.82)	59.8503 (0.8)	5.8924 (0.04)	1.7287 (0.00)	1.1052 (0.00)	1.0087 (0.00)	1.0003 (0.00)
	427.7133	59.3458	5.3598	1.1057	0.3235	0.0832	0.0139
40	389.7870 (2.71)	45.8138 (0.38)	5.2174 (0.02)	1.6573 (0.00)	1.0924 (0.00)	1.0069 (0.00)	1.0002 (0.00)
	389.2865	45.3098	4.686	1.0351	0.3087	0.0779	0.0123
100	374.8046 (1.47)	39.5816 (0.16)	4.9049 (0.01)	1.6226 (0.00)	1.0859 (0.00)	1.0059 (0.00)	1.0001 (0.00)
	374.3042	39.0779	4.3746	1.0019	0.3019	0.0752	0.0115
300	369.8475 (0.79)	37.0851 (0.08)	4.7623 (0.01)	1.6052 (0.00)	1.0826 (0.00)	1.0055 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.3471	36.5815	4.2323	0.9845	0.2979	0.0737	0.0111
500	368.7747 (0.62)	36.6685 (0.06)	4.7383 (0.00)	1.6022 (0.00)	1.0820 (0.00)	1.0054 (0.00)	1.0001 (0.00)
	368.2744	36.1649	4.2083	0.9816	0.2972	0.0734	0.011
1000	368.5056 (0.43)	36.2806 (0.04)	4.7152 (0.00)	1.5993 (0.00)	1.0815 (0.00)	1.0054 (0.00)	1.0001 (0.00)
	368.0052	35.777	4.1853	0.9787	0.2965	0.0732	0.0109
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

核密度估計法：

m	$\hat{\delta}$						
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
20	416.1985 (4.66)	55.7820 (0.84)	5.6292 (0.04)	1.6928 (0.00)	1.0992 (0.00)	1.0081 (0.00)	1.0003 (0.00)
	415.6979	55.2771	5.0947	1.0654	0.3121	0.0796	0.0131
40	373.5297 (2.47)	41.9736 (0.31)	4.9572 (0.02)	1.6205 (0.00)	1.0862 (0.00)	1.0062 (0.00)	1.0002 (0.00)
	373.0292	41.4692	4.424	0.9939	0.2968	0.074	0.0115
100	369.9462 (1.39)	36.8038 (0.15)	4.6942 (0.01)	1.5912 (0.00)	1.0805 (0.00)	1.0054 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.4459	36.2998	4.1623	0.9665	0.2914	0.0718	0.0108
300	368.8357 (0.75)	34.8694 (0.08)	4.5906 (0.01)	1.5793 (0.00)	1.0782 (0.00)	1.0051 (0.00)	1.0001 (0.00)
	368.3353	34.3655	4.0592	0.9554	0.2892	0.0708	0.0105
500	369.5282 (0.59)	34.4325 (0.06)	4.5646 (0.00)	1.5760 (0.00)	1.0776 (0.00)	1.0050 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.0278	33.9287	4.0333	0.9521	0.2884	0.0705	0.0104
1000	370.0263 (0.41)	34.1212 (0.04)	4.5461 (0.00)	1.5737 (0.00)	1.0771 (0.00)	1.005 (0.00)	1.0001 (0.00)
	369.526	33.6174	4.0149	0.9499	0.2878	0.0703	0.0104
∞	370.3983	33.4008	4.4953	1.5665	1.0758	1.0048	1.0001
	369.8980	32.8970	3.9639	0.9420	0.2856	0.0696	0.0102

表九：對 σ 已知和未知的情况，分別建議的 L 逼近值

(a) 當 σ 已知， $h = 0.5$

m	30	50	100	300	500	1000
L	3.07	3.04	3.02	3.01	3	3

當 σ 已知， $h_0 = 1.059\sigma'n'^{-1/5}$

m	30	50	100	300	500	1000
L	3.22	3.17	3.12	3.07	3.06	3.04

(b) 當 $m = 100$ ， σ 未知， $h_0 = 1.059\sigma'n'^{-1/5}$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	231.5	19.04	9.18	6.62	5.53	4.94	4.58	4.33	4.15
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
L	4.02	3.92	3.84	3.77	3.72	3.67	3.63	3.59	3.57
n	20	30	40	50	60	70	80	90	100
L	3.54	3.38	3.31	3.27	3.24	3.23	3.21	3.2	3.19

表十：樣本來自 t 分配，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差

$\nu=5$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	0.0005 (0.0691)	0.0227 (0.0722)	0.0140 (0.0726)	0.0033 (0.0728)	0.0001 (0.0715)	-0.0008 (0.0716)	0.0006 (0.0714)
0.1	0.0003 (0.0696)	0.0471 (0.0744)	0.0325 (0.0775)	0.0069 (0.0742)	0.0008 (0.0737)	0.0002 (0.0738)	-0.0001 (0.0742)
0.15	0.0005 (0.0706)	0.0746 (0.0769)	0.0520 (0.0848)	0.0119 (0.0783)	0.0007 (0.0764)	-0.0006 (0.0760)	0.0003 (0.0756)
0.2	0.0012 (0.0702)	0.1022 (0.0794)	0.0762 (0.0899)	0.0177 (0.0823)	0.0014 (0.0789)	-0.0001 (0.0782)	-0.0011 (0.0776)

$\nu=10$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	-0.0002 (0.0608)	0.0203 (0.0615)	-0.0158 (0.0642)	0.0056 (0.0629)	0.0019 (0.0621)	0.0002 (0.0618)	-0.0003 (0.0622)
0.1	-0.0007 (0.0605)	0.0429 (0.0632)	0.0368 (0.0672)	0.0119 (0.0659)	0.0017 (0.0649)	-0.0007 (0.0634)	-0.0003 (0.0643)
0.15	-0.0010 (0.0607)	0.0678 (0.0643)	0.0592 (0.0730)	0.0183 (0.0694)	0.0026 (0.0669)	-0.0004 (0.0652)	0.0003 (0.0655)
0.2	-0.0002 (0.0606)	0.0941 (0.0665)	0.0875 (0.0787)	0.0265 (0.0730)	0.0046 (0.0688)	0.0008 (0.0679)	0.0000 (0.0674)

$\nu=20$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	-0.0005(0.0569)	0.0200 (0.0574)	0.0174 (0.0602)	0.0071 (0.0590)	0.0009 (0.0576)	0.0003 (0.0583)	0.0002 (0.0581)
0.1	-0.0001(0.0567)	0.0417 (0.0594)	0.0382 (0.0638)	0.0128 (0.0623)	0.0026 (0.0599)	0.0005 (0.0601)	0.0019 (0.0598)
0.15	-0.0003(0.0566)	0.0656 (0.0599)	0.0608 (0.0671)	0.0216 (0.0660)	0.0039 (0.0619)	0.0009 (0.0613)	0.0000 (0.0607)
0.2	-0.0010(0.0564)	0.0899 (0.0612)	0.0910 (0.0728)	0.0304 (0.0692)	0.0054 (0.0642)	0.0009 (0.0630)	-0.0002(0.0626)

$\nu=30$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	0.0004 (0.0554)	0.0200 (0.0557)	-0.0173 (0.0585)	0.0058 (0.0574)	0.0007 (0.0574)	-0.0008(0.0569)	-0.0008(0.0564)
0.1	0.0001 (0.0555)	0.0413 (0.0579)	0.0381 (0.0616)	0.0133 (0.0607)	0.0019 (0.0580)	0.0007 (0.0590)	-0.0002(0.0583)
0.15	-0.0002(0.0552)	0.0643 (0.0584)	0.0625 (0.0659)	0.0212 (0.0644)	0.0031 (0.0602)	0.0000 (0.0607)	-0.0009(0.0594)
0.2	-0.0006(0.0555)	0.0884 (0.0593)	0.0908 (0.0697)	0.0321 (0.0680)	0.0054 (0.0628)	0.0002 (0.0616)	-0.0004(0.0623)

表十一：樣本來自 logistic 分配，使用核密度估計法估計參數，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 的平均值及標準差

$\beta = 0.01$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	0.0000 (0.0020)	0.0003 (0.0020)	0.0003 (0.0020)	0.0006 (0.0022)	0.0019 (0.0029)	0.0012 (0.0037)	0.0013 (0.0030)
0.1	0.0000 (0.0020)	0.0007 (0.0020)	0.0011 (0.0020)	0.0020 (0.0022)	0.0039 (0.0028)	0.0038 (0.0037)	0.0035 (0.0030)
0.15	0.0000 (0.0020)	0.0012 (0.0020)	0.0020 (0.0020)	0.0032 (0.0022)	0.0055 (0.0025)	0.0069 (0.0035)	0.0063 (0.0035)
0.2	0.0000 (0.0020)	0.0016 (0.0020)	0.0030 (0.0020)	0.0045 (0.0021)	0.0069 (0.0023)	0.0095 (0.0029)	0.0103 (0.0037)

$\beta = 0.1$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差)：

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	0.0000 (0.0085)	0.0045 (0.0085)	0.0084 (0.0087)	0.0120 (0.0088)	0.0146 (0.0087)	0.0159 (0.0089)	0.0161 (0.0090)
0.1	-0.0001 (0.0085)	0.0091 (0.0085)	0.0173 (0.0087)	0.0244 (0.0089)	0.0300 (0.0089)	0.0332 (0.0091)	0.0343 (0.0094)
0.15	-0.0002 (0.0086)	0.0134 (0.0087)	0.0260 (0.0087)	0.0374 (0.0089)	0.0461 (0.0091)	0.0521 (0.0092)	0.0546 (0.0095)
0.2	0.0000 (0.0085)	0.0179 (0.0087)	0.0351 (0.0085)	0.0506 (0.0089)	0.0633 (0.0090)	0.0724 (0.0093)	0.0772 (0.0096)

$\beta = 0.5$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	-0.0007(0.0447)	0.0180 (0.0453)	0.0174 (0.0471)	0.0077 (0.0470)	0.0009 (0.0465)	-0.0005 (0.046)	0.0001 (0.0465)
0.1	-0.0003(0.0453)	0.0381 (0.0458)	0.0380 (0.0502)	0.0168 (0.0498)	0.0040 (0.0483)	0.0001 (0.0474)	0.0000 (0.0467)
0.15	-0.0002(0.0450)	0.0576 (0.0468)	0.0617 (0.0530)	0.0272 (0.0531)	0.0063 (0.0509)	-0.0001(0.0489)	0.0001 (0.0490)
0.2	0.0001 (0.0453)	0.0787 (0.0484)	0.0900 (0.0568)	0.0395 (0.0566)	0.0089 (0.0517)	0.0020 (0.0497)	0.0005 (0.0505)

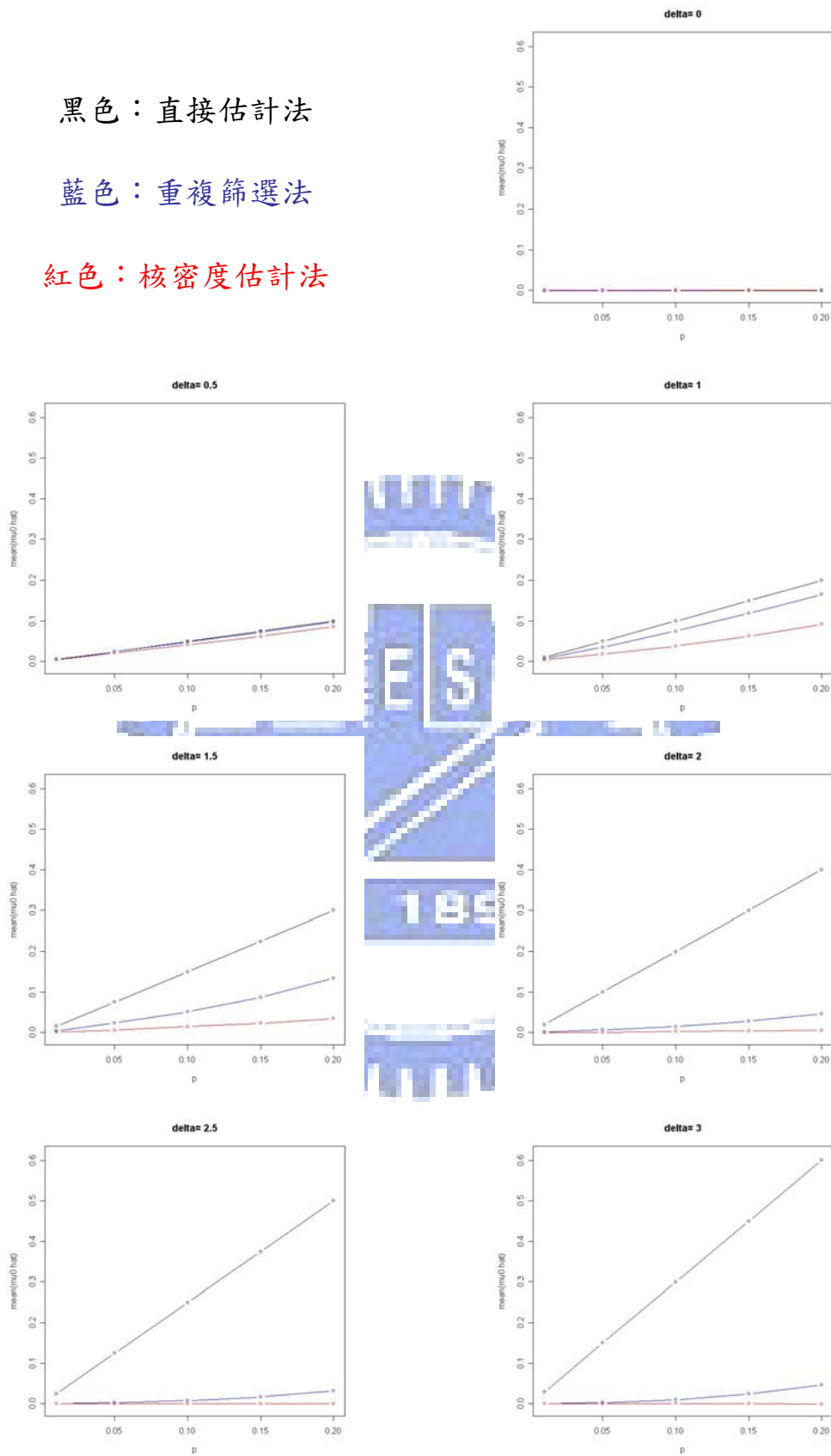
$\beta = 1$ 的 $\hat{\mu}_0$ 平均值 ($\hat{\mu}_0$ 標準差) :

p	δ						
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.05	0.0002 (0.1331)	0.0266 (0.1396)	0.0173 (0.1405)	0.0036 (0.1383)	0.0000 (0.1379)	-0.0024(0.1377)	0.0004 (0.1386)
0.1	0.0023 (0.1341)	0.0610 (0.1447)	0.0307 (0.1495)	0.0019 (0.1442)	0.0001 (0.1425)	0.0002 (0.1413)	0.0020 (0.1419)
0.15	-0.0001(0.1338)	0.0972 (0.1505)	0.0523 (0.1617)	0.0121 (0.1479)	0.0044 (0.1459)	-0.0016(0.1451)	0.0028 (0.1455)
0.2	-0.0020(0.1319)	0.1371 (0.1563)	0.0780 (0.1759)	0.0145 (0.1548)	0.0000 (0.1519)	0.0004 (0.1519)	0.0009 (0.1504)

黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

紅色：核密度估計法

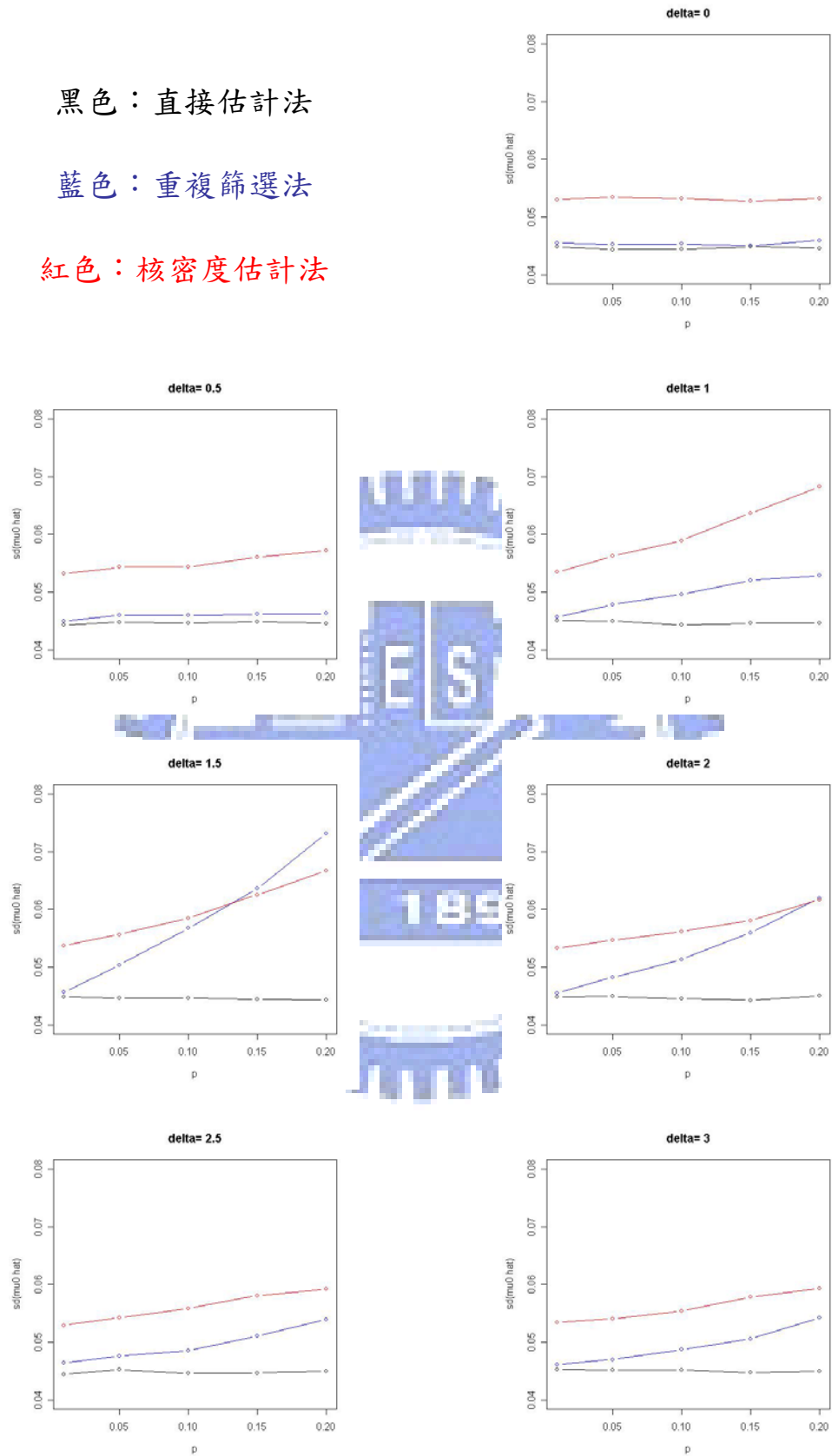


圖一：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 平均值之折線圖

黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

紅色：核密度估計法

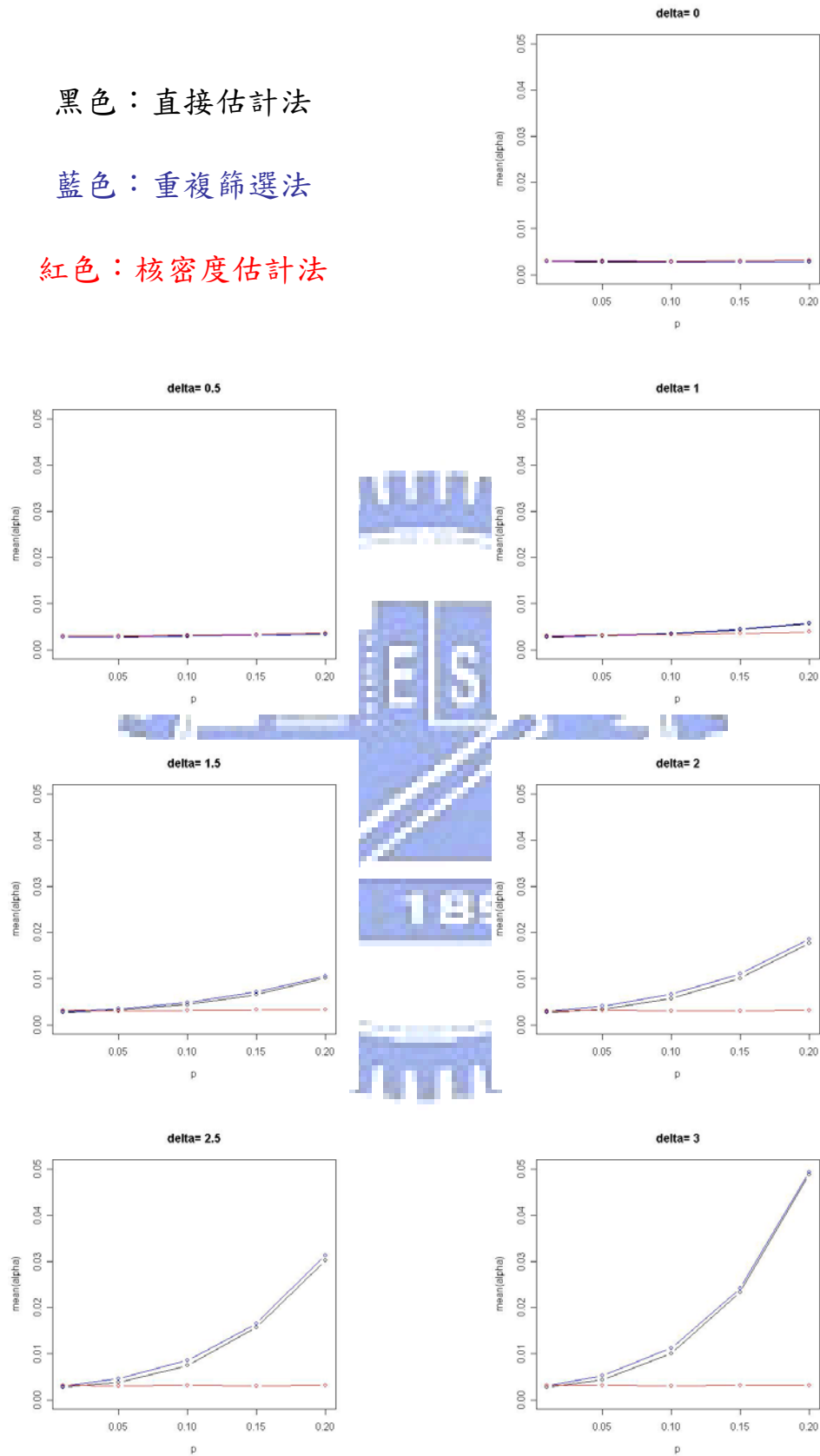


圖二：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $\hat{\mu}_0$ 標準差之折線圖

黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

紅色：核密度估計法

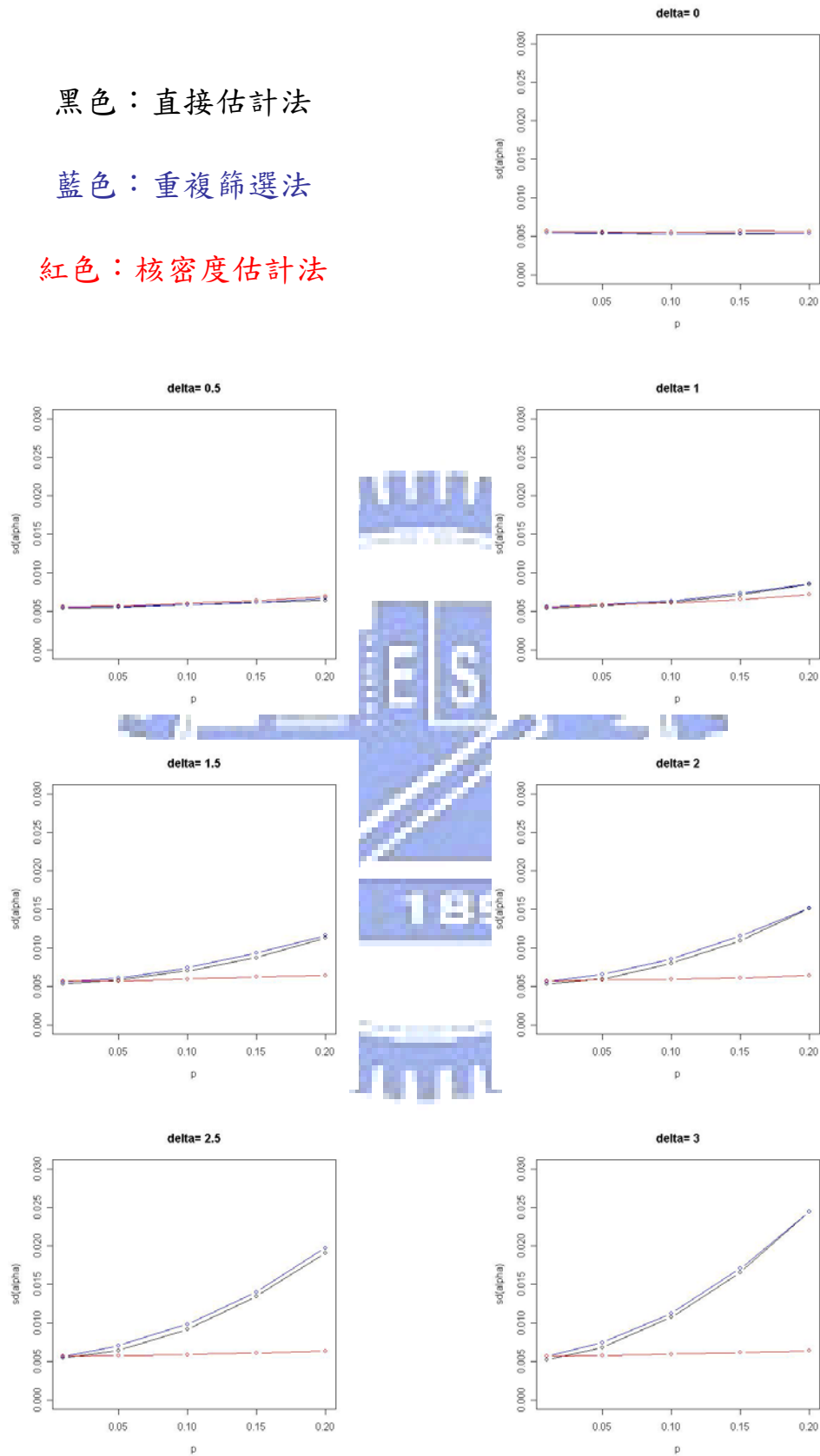


圖三：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 α 平均值之折線圖

黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

紅色：核密度估計法

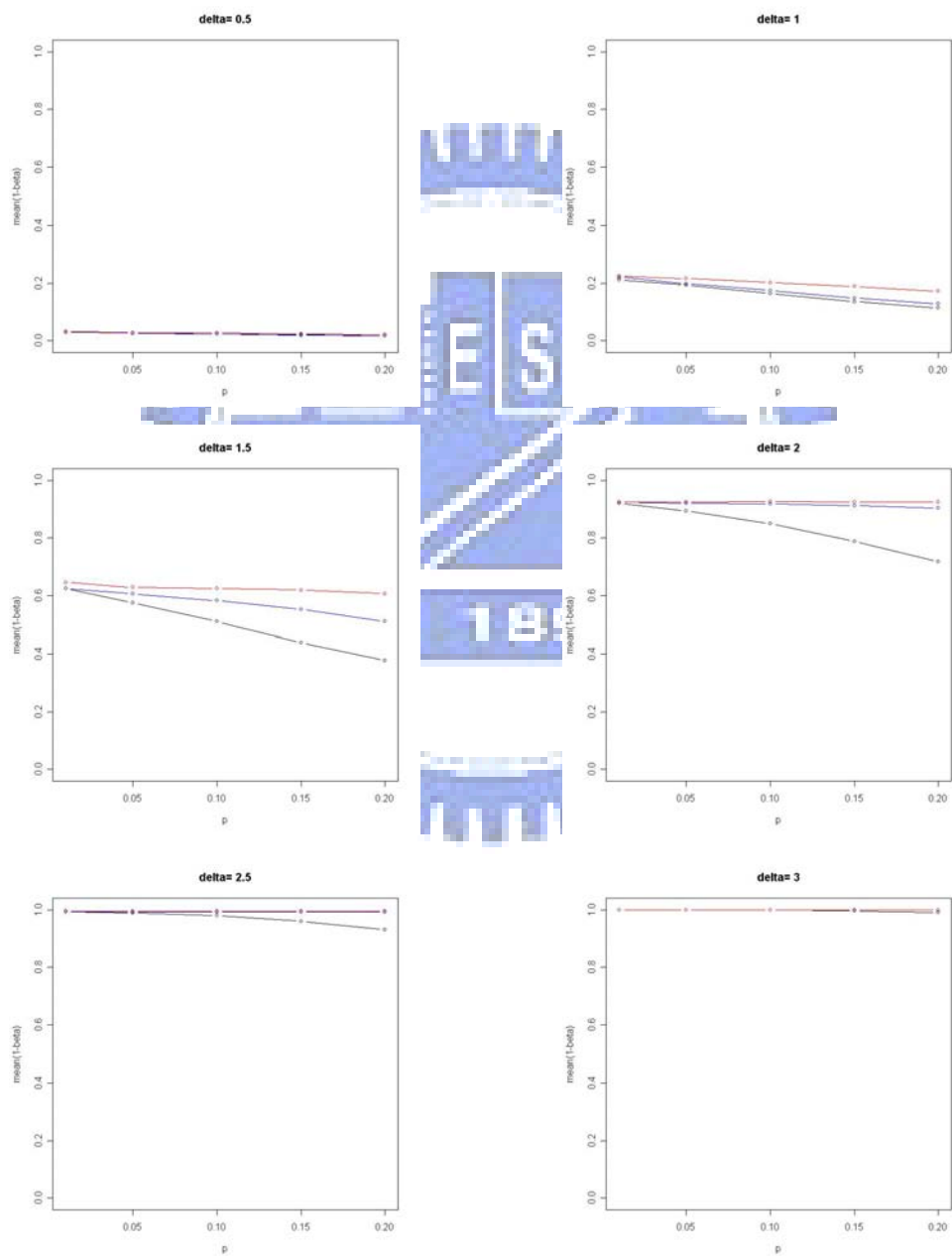


圖四：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 α 標準差之折線圖

黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

紅色：核密度估計法

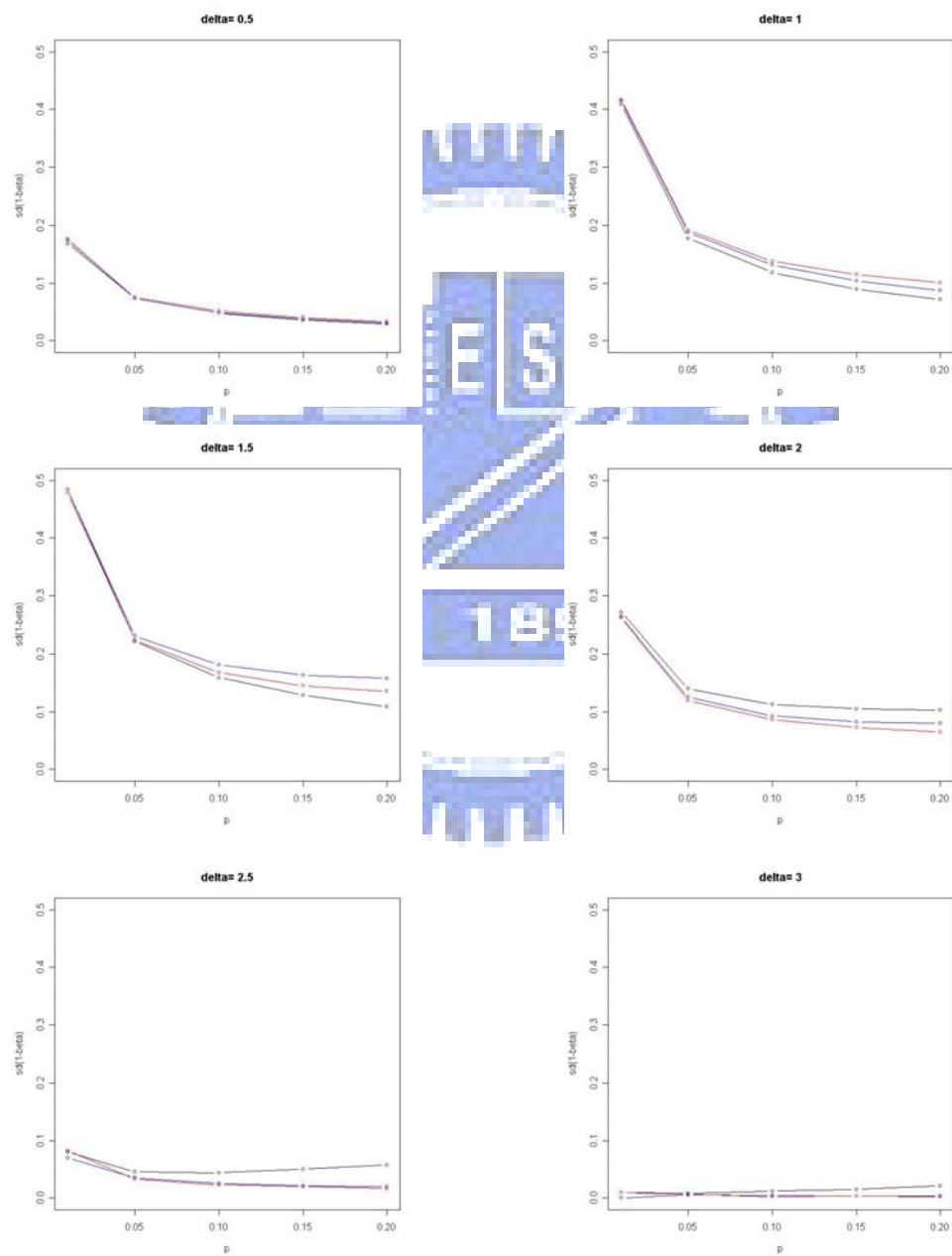


圖五：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $1-\beta$ 平均值之折線圖

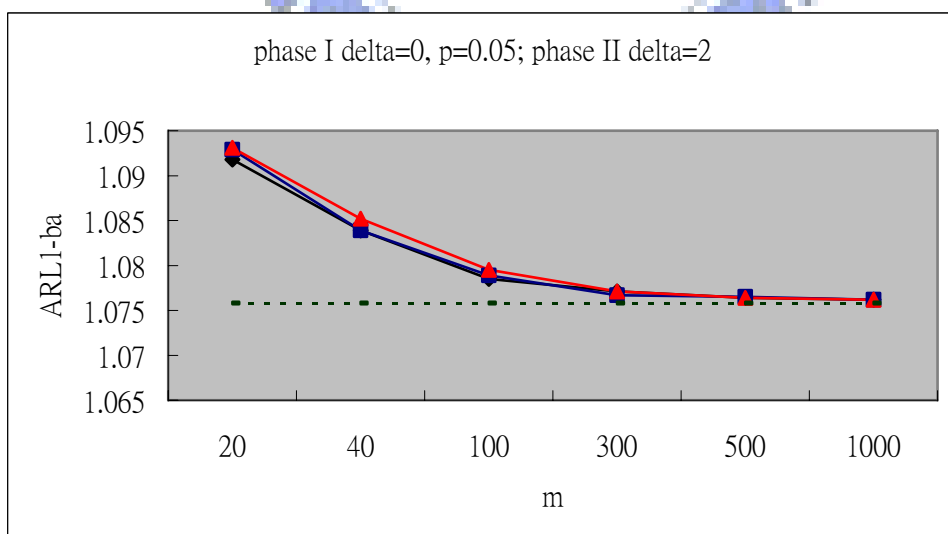
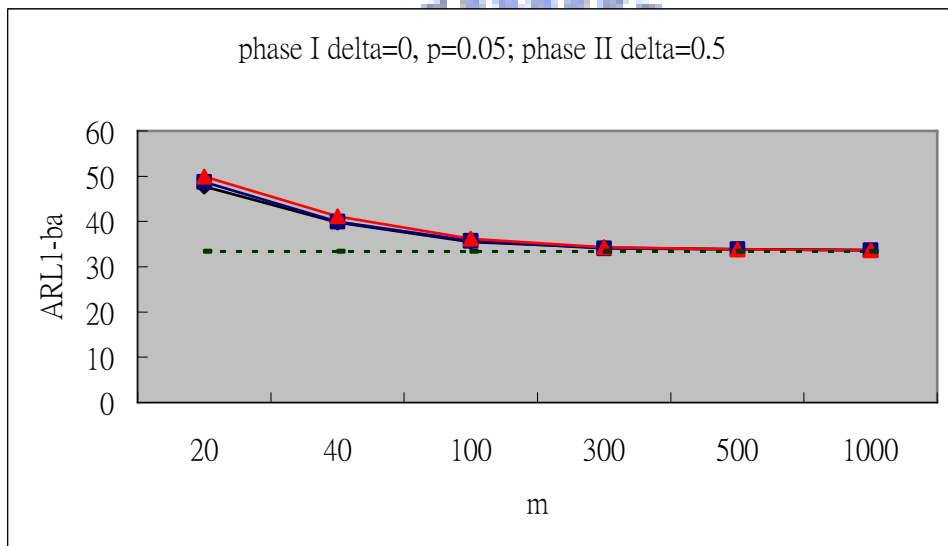
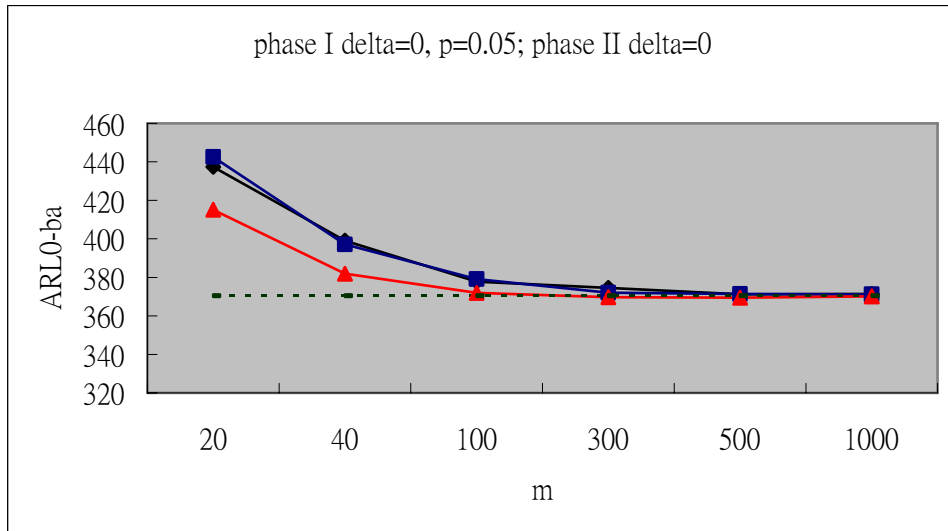
黑色：直接估計法

藍色：重複篩選法

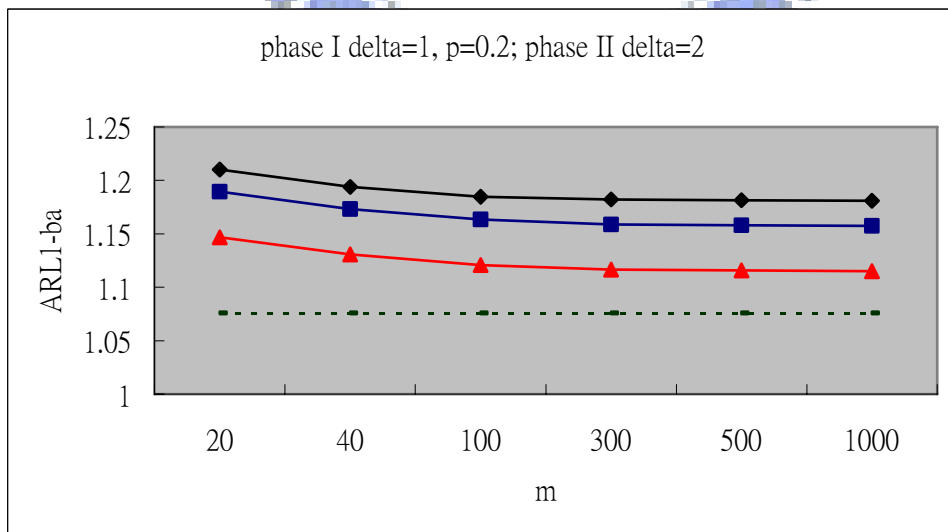
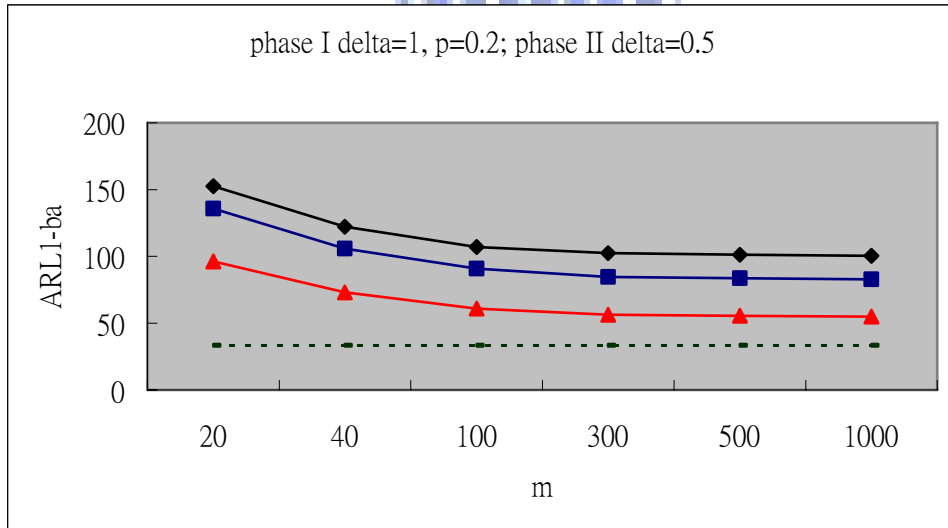
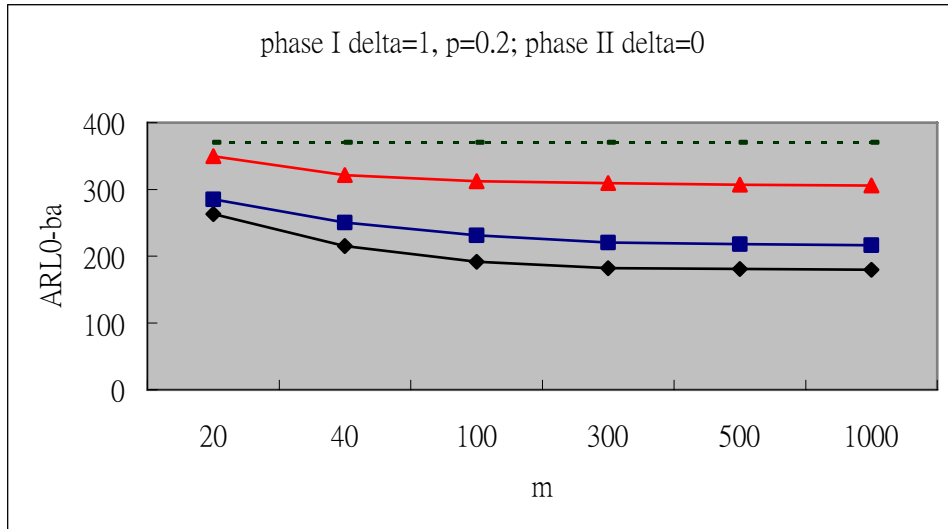
紅色：核密度估計法



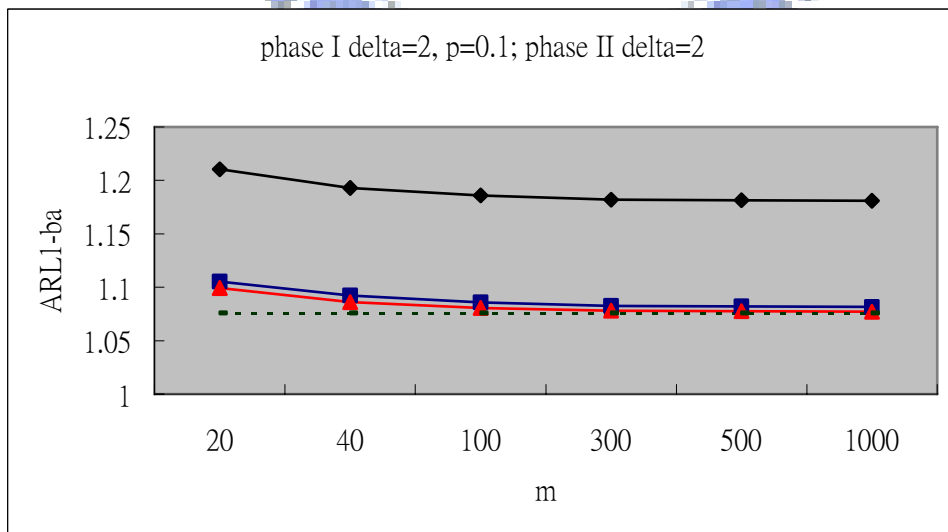
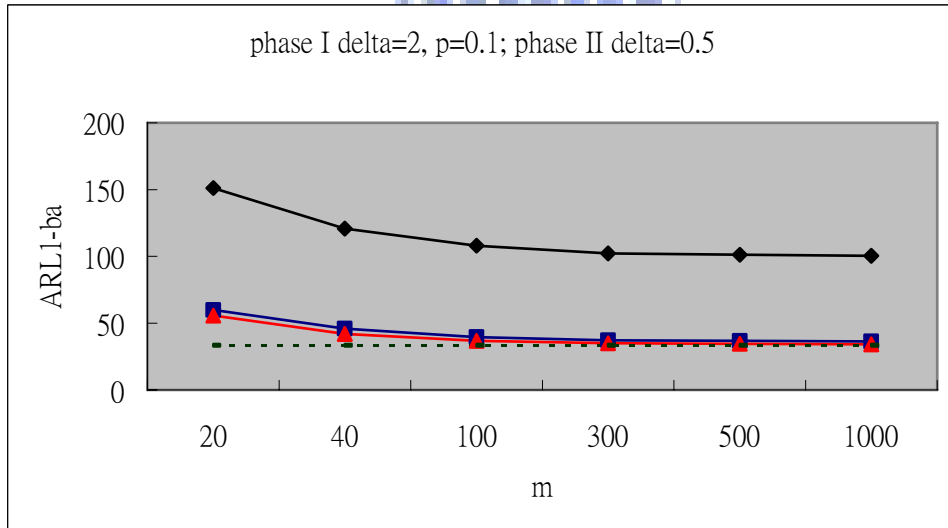
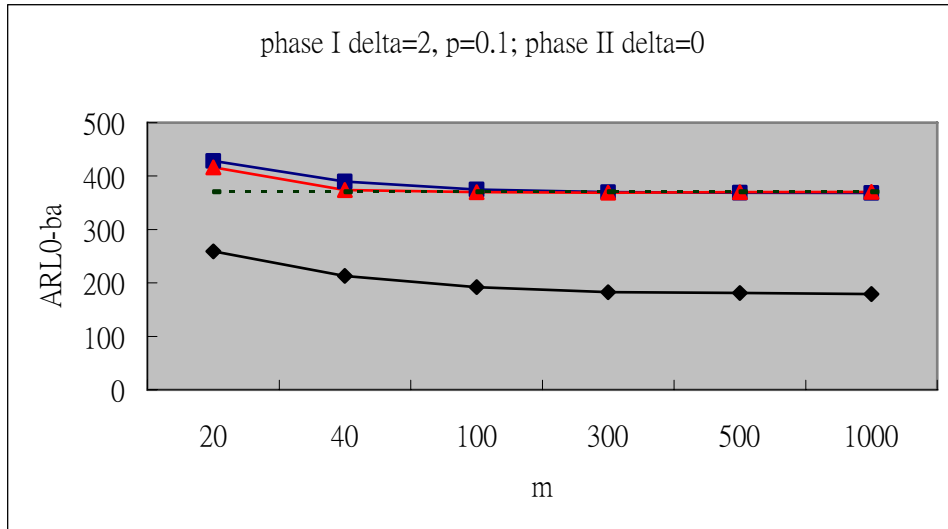
圖六：對三種不同的估計方法，10000 個模擬 $1-\beta$ 標準差之折線圖



圖七：階段 I 為 $(\delta, p) = (0, 0.05)$ 時的情況，階段 II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖



圖八：階段 I 為 $(\delta, p) = (1, 0.2)$ 時的情況，階段 II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖



圖九：階段 I 為 $(\delta, p) = (2, 0.1)$ 時的情況，階段 II \overline{ARL}_0 和 \overline{ARL}_1 之折線圖