

國立交通大學

統計學研究所

碩士論文

用 EM 演算法建構階段 I 管制圖之研究

Constructing Phase I Control Charts with the

EM Algorithm

研究生：柯育辰

指導教授：洪志真 教授

中華民國九十六年六月

用 EM 演算法建構階段 I 管制圖之研究

Constructing Phase I Control Charts with the EM Algorithm

研 究 生：柯育辰

Student：Yu-Chen Ke

指 導 教 授：洪志真

Advisor：Jyh-Jen Horng Shiau

國 立 交 通 大 學

統 計 學 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Institute of Science

College of Science

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Statistics

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

用 EM 演算法建構階段 I 管制圖之研究

研究生：柯育辰

指導教授：洪志真 博士

國立交通大學統計所 碩士班

摘 要

本篇論文主要是針對當階段 I 中的資料來自於混合常態分配時，提出一個 EM-MLE 法來估計管制狀態內之製程的參數並用以建構管制圖，並經由模擬證實新方法會比傳統估計參數的方法在參數估計上、階段 I 中之假警報率和偵測力，還有階段 II 中平均連串長度的表現都要來得好。

Constructing Phase I Control Charts with the EM Algorithm

Student: Yu-Chen Ke

Advistor: Jyh-Jen Horng Shiau

Institute of Statistics

National Chiao Tung University

Hsinchu, Taiwan



Abstract

When phase I data are from a mixture normal distribution, we propose an EM-MLE method to estimate in-control process parameters and to construct control charts accordingly. A simulation study shows that the new method performs better than the method commonly used practice, in terms of parameter estimation, the false-alarm-rate and detecting power in phase I analysis ,and the average run length in phase II.

致謝

時光飛逝，轉眼間兩年的碩士生涯即將結束，這也是我求學生涯的一個重要的里程碑。在這段研究生生涯裡，最要感謝的是我的指導老師－洪志真教授的諄諄教誨，在課業和生活上給我指導和鼓勵，令我銘記在心。此外，感謝顏家鈴學姐和陳泰賓學長在論文上的指導，還有所上其他教授在課業上的幫助，讓我可以順利的拿到碩士學位。

在這兩年裡謝謝所上許多同學們的陪伴，像是一起做研究的夥伴美惠，會提醒繳房租的室友們映伶和雅莉，一起打球的永在、阿淳、阿Q和建威，還有雪芳在程式上的幫助，讓原本是艱辛又苦澀的生活過的多采多姿。

最後感謝家人在背後默默的支持與幫助，讓我能無後顧之憂的完成碩士學位。

柯育辰

2007.7.13 新竹

目錄

| | |
|------------------------------|-----------|
| 第一章 緒論 | 1 |
| 1.1 前言 | 1 |
| 1.2 研究動機與目的 | 2 |
| 1.3 研究架構 | 3 |
| 第二章 文獻探討 | 4 |
| 2.1 管制圖 | 4 |
| 2.1.1 \bar{X} 管制圖 | 4 |
| 2.1.2 S^2 管制圖 | 6 |
| 2.2 監控方法優劣之評估 | 7 |
| 2.2.1 階段 I | 7 |
| 2.2.2 階段 II | 7 |
| 2.3 估計未知參數所產生的問題 | 8 |
| 2.4 子群數的探討 | 9 |
| 2.5 階段 I 資料來自於兩個常態分配 | 10 |
| 2.5.1 兩分配的平均數不同 | 10 |
| 2.5.2 兩分配的標準差不同 | 12 |
| 第三章 當平均數偏移之參數估計 | 13 |
| 3.1 常態分配混合之介紹(平均數偏移) | 13 |

| | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|-----------|
| 3.2 | \bar{x} 管制圖在混合常態分配的應用 | 14 |
| 3.3 | 估計參數的方法一：直接估計法 | 15 |
| 3.4 | 估計參數的方法二：重覆篩選法 | 16 |
| 3.5 | 估計參數的方法三：EM-MLE 法 | 17 |
| 3.6 | EM 演算法中的初始值 | 21 |
| 3.7 | 在階段 II 的平均連串長度 | 23 |
| 第四章 當標準差改變之參數的估計 | | 25 |
| 4.1 | 常態分配混合之介紹(標準差改變)..... | 25 |
| 4.2 | s^2 管制圖在混合常態分配的應用 | 25 |
| 4.3 | 估計參數的方法一：直接估計法 | 27 |
| 4.4 | 估計參數的方法二：重覆篩選法 | 28 |
| 4.5 | 估計參數的方法三：EM-MLE 法 | 28 |
| 4.6 | EM 演算法中的初始值 | 32 |
| 4.7 | 在階段 II 的平均連串長度 | 33 |
| 第五章 電腦模擬與比較 | | 35 |
| 5.1 | 平均數偏移..... | 35 |
| 5.1.1 | 模擬過程..... | 35 |
| 5.1.2 | 參數估計的比較..... | 37 |
| 5.1.3 | 假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ 的比較..... | 38 |

| | |
|---|-----------|
| 5.1.4 階段 II 中 ARL 的表現 | 39 |
| 5.2 標準差改變..... | 40 |
| 5.2.1 模擬過程..... | 40 |
| 5.2.2 參數估計的比較..... | 41 |
| 5.2.3 假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ 的比較..... | 42 |
| 第六章 結論與未來展望 | 43 |
| 參考文獻 | 44 |



圖目錄

| | |
|---|----|
| 圖一： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 μ_0 的表現 | 46 |
| 圖二： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 σ 的表現 | 46 |
| 圖三： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 μ_0 的表現 | 47 |
| 圖四： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 σ 的表現 | 47 |
| 圖五： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率 的表現 | 48 |
| 圖六： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的 表現 | 48 |
| 圖七： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率 的表現 | 49 |
| 圖八： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的 表現 | 49 |
| 圖九：階段 I 中 $\delta=2$ 和 $p=0.2$ 時利用三種方法估計參數後，在階段 II 中 ARL 的表現(圖形的標題 $N(0,1)$ 表示階段 II 的資料來自於 $N(0,1)$) | 50 |
| 圖十： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 σ_0 的表現 | 51 |
| 圖十一： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 σ_0 的表現 | 51 |
| 圖十二： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中假警報 | |

| | |
|--|----|
| 率的表現..... | 52 |
| 圖十三： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現..... | 52 |
| 圖十四： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率的表現..... | 53 |
| 圖十五： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現..... | 53 |



表目錄

| | |
|---|----|
| 表一：在混合分配下， \bar{X} 管制圖中當管制上下限為 $\mu_x \pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 之假警報率和偵測力理論值..... | 54 |
| 表二：在混合分配下， S^2 管制圖中當管制上下限為 $(\tilde{\sigma}^2 \chi^2_{0.99865, n-1}/(n-1), \tilde{\sigma}^2 \chi^2_{0.00135, n-1}/(n-1))$ 之假警報率和偵測力理論值..... | 54 |
| 表三： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果..... | 55 |
| 表四： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果..... | 56 |
| 表五： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果..... | 57 |
| 表六： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 求 μ_0 和 σ 的最大概似估計量估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果..... | 58 |
| 表七： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 59 |
| 表八： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 60 |
| 表九： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 61 |

| | |
|--|----|
| 表十： \bar{X} 管制圖在 $\delta=2$ 和 $p=0.2$ 時用直接估計法估計參數後在階段 II 中的 ARL | 62 |
| 表十一： \bar{X} 管制圖在 $\delta=2$ 和 $p=0.2$ 時用重覆篩選法估計參數後在階段 II 中的 ARL | 62 |
| 表十二： \bar{X} 管制圖在 $\delta=2$ 和 $p=0.2$ 時用 EM-MLE 法估計參數在階段 II 中的 ARL | 63 |
| 表十三： S^2 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果..... | 63 |
| 表十四： S^2 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果..... | 64 |
| 表十五： S^2 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果..... | 64 |
| 表十六： S^2 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 65 |
| 表十七： S^2 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 66 |
| 表十八： S^2 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果..... | 67 |

第一章 緒論

1.1 前言

統計製程管制(Statistical Process Control, SPC)是一種廣泛被工業界採用的統計工具，主要是用於製程的監控與改善，降低產品之間的差異性並提升製程能力。而在 SPC 中最常被採用的統計方法是管制圖(control charts)，其目的是監控制程，找出製程中的不正常變異並加以改進。例如傳統的 Shewhart 管制圖、累積和管制圖(Cumulative Sum, CUSUM)和指數加權平均管制圖(Exponentially Weighted Moving Average, EWMA)，均為其中的代表。

導致製程變異的原因通常分為兩類：共同性原因(common causes)和特殊性原因(special causes)。共同性原因存在於正常製程之中；而特殊性原因則是由於製程中不當的操作、使用不適用的原料、機台老舊或人為疏失等原因所造成的變異。而管制圖主要是用來偵測特殊性原因。

對於製程的監控，一般可分為製程均值的監控和製程變異的監控。在製程均值的監控中常用的管制圖為 \bar{X} 管制圖和 EWMA 管制圖等；至於製程變異的監控，R 管制圖和 S 管制圖等都是常見的方法。

1.2 研究動機與目的

統計製程管制中之製程監控一般分成兩大階段：階段 I (phase I) 和階段 II (phase II)。階段 I 的工作之一為收集製程是在管制狀態內(in control)的資料，估計參數，然後做出管制界限(control limit)；而在階段 II 中，則是利用階段 I 所做的管制界限來監控制程。以往大多數的研究都著重在階段 II 中當參數已知時如何建構出適當的管制界限來監控制程，或是當製程在管制狀態外(out of control)時該如何偵測出來，接著找出造成製程失控的可歸屬原因(assignable causes)並想辦法消除之。但是階段 II 的參數其實是由階段 I 中的資料估計得來的，而要估計得準確，資料必須是來自於管制狀態內之製程。故當階段 I 的資料中有部份來自於管制狀態外之製程時，會造成參數估計上的困難及導致估計的錯誤，因而做出不理想的管制界限和管制圖，進而造成在階段 II 時無法正確判斷製程是否失控，因此如何在階段 I 中估計出正確的參數是一個很重要的課題。

本篇論文主要是研究當階段 I 的資料內有部份來自於管制狀態外之製程時，如何估計管制狀態內之製程的參數。為簡單計，在此我們假設資料來自於混合常態分配，其中一個為當製程在管制狀態內之分配，另一個分配則是製程在管制狀態外，我們利用一個新方法(稱之 EM-MLE 法)來估計管制狀態內之製程的參數，以為建構管制界限和

管制圖，提供給階段 II 做製程的監控。

1.3 研究架構


本論文分為六個部份。第一章先確立研究主題和動機。第二章則是文獻的探討，包含管制圖的基本概念、估計參數所衍生的問題和子群數的探討。在第三章中，當資料來自二常態分配的混合，而二分配之差別在於平均數的偏移時，我們介紹分配的特性及三種估計參數的方法：直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法。第四章則是當二常態分配的差別在於標準差的不同時，介紹分配的特性及三種估計參數的方法：直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法。在第五章中，我們用電腦模擬來比較三種方法在階段 I 中參數的估計及假警報率 (false alarm rate, α) 和偵測力 (power, $1-\beta$) 的表現，還有階段 II 中平均連串長度上的表現 (average run length, ARL)，發現三者之中 EM-MLE 法表現最佳。第六章則是結論，除了將三種方法的比較做總結外，並提出未來還可以探討的研究方向。

第二章 文獻探討

2.1 管制圖

一般傳統的管制圖包含中心線(control line, CL)、管制上限(upper control limit, UCL)和管制下限(lower control limit, LCL)。當樣本點落在管制上下限內，則視製程為在管制狀態內；然而，當樣本點落在管制上下限外，則視製程為在管制狀態外，亦即製程發生失控，必須找出製程失控的可歸屬原因並消除之。

2.1.1 \bar{X} 管制圖



傳統 Shewhart 管制圖的概念是由 Walter Shewhart 在 1924 年所提出 (Shewhart, 1931)，假設製程資料具有常態分配，其平均值為 μ ，標準差為 σ ，且 μ 和 σ 均為已知。令 X_1, X_2, \dots, X_n 代表一組樣本數為 n 的合理子群 (rational subgroup)，則此子群的平均數 $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$ 也有常態分配，而平均值為 μ ，標準差為 σ / \sqrt{n} 。在 $1 - \alpha$ 的信賴水準下，其管制上下限和中心線如下：

$$\begin{aligned}UCL &= \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\CL &= \mu \\LCL &= \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

當製程的 μ 或 σ 為未知時，則必須對其作估計。假設有 m 組子群，

每組子群包含 n 個樣本，令 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ 為各組子群的平均，則 μ 的一個合理估計量為

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}。$$

常用的 σ 估計量有下列三種：

(1) 平均全距 $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ (average range)

$$\hat{\sigma}_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}，$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m R_i / m，d_2(n) = \frac{E(R)}{\sigma}，$$

其中全距 $R_i = X_{i\max} - X_{i\min}$ 為子群內最大值 $X_{i\max}$ 和最小值 $X_{i\min}$ 的差而

$d_2(n)$ 為將 \bar{R} 調成不偏估計量的校正參數其值可查表，例如

Montgomery(2005)附表六。

(2) 平均樣本標準差 $\hat{\sigma}_{\bar{S}}$ (average sample standard deviation)

$$\hat{\sigma}_{\bar{S}} = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}，$$

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i，S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}，$$

$$c_4(n) = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}，$$

其中 S_i 為子群內樣本的標準差，而 $c_4(n)$ 為將 \bar{S} 調成不偏估計量的校正

參數。

(3) 綜合樣本標準差 $\hat{\sigma}_{S_p}$ (pooled sample standard deviation)

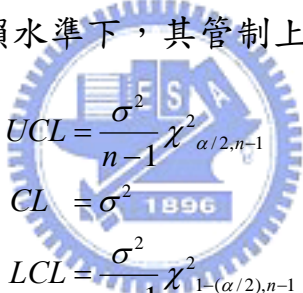
$$\hat{\sigma}_{S_p} = \frac{S_p}{c_4(m(n-1)+1)}，$$

$$S_p = \sqrt{\sum_{i=1}^m S_i^2 / m}, \quad S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

因 $\text{var}(\hat{\sigma}_{\bar{R}}) \geq \text{var}(\hat{\sigma}_{\bar{S}}) \geq \text{var}(\hat{\sigma}_{S_p})$ 且三者均為不偏(Champ and Chou (2003))，所以 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 是三者中最佳的 σ 估計量。

2.1.2 S^2 管制圖

2.1.1 小節的 \bar{X} 管制圖主要是用來監控子群間(between subgroup)的變異，而對於子群內(within subgroup)的變異則利用 R 管制圖、S 管制圖或 S^2 管制圖來監控。而本篇論文會用到 S^2 管制圖，因此在這裡加以介紹。在 $1-\alpha$ 的信賴水準下，其管制上下限和中心線如下：



$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{\alpha/2, n-1} \\ CL &= \sigma^2 \\ LCL &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi^2_{1-(\alpha/2), n-1}, \end{aligned}$$

其中 $\chi^2_{\alpha/2, n-1}$ 和 $\chi^2_{1-(\alpha/2), n-1}$ 代表自由度為 $(n-1)$ 的卡方分配之 $\alpha/2$ 的上下臨界點。當製程的 σ^2 未知時，則可用此 m 組子群內樣本變異數 S^2 之平均(記為 \bar{S}^2)來估計

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2,$$

此即為上述之 S_p^2 。

2.2 監控方法優劣之評估

2.2.1 階段 I

在階段 I 中，可用假警報率和偵測力來評估監控方法的表現。假警報率 α 即統計檢定中犯型 I 誤差(當製程是在管制狀態內，但產生的樣本卻落於管制界線外)的機率；偵測力 $1-\beta$ 即統計檢定中之檢定力，其中 β 是犯型 II 誤差(當製程是在管制狀態外，但產生的樣本卻落於管制界線內)的機率。假警報率愈低偵測力愈高表示方法表現愈佳。

2.2.2 階段 II

在階段 II 中常用平均連串長度(average run length, ARL)來比較管制圖的優劣。連串長度(run length, RL)代表的是從製程開始監控直到偵測到資料點落在管制圖界線外的資料個數，而平均連串長度則是連串長度分配(run length distribution)的期望值，連串長度標準差(standard deviation of the run length, SDRL)則是連串長度分配的標準差。當參數已知時，連串長度分配為一個參數為 p 的幾何分配(Geometric(p))，其中參數 p 為資料點落在管制上下限外的機率。因此，

$$ARL = \frac{1}{p} ,$$
$$SDRL = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \sqrt{ARL(ARL-1)} .$$


平均連串長度分成管制狀態內(製程在管制狀態下)的平均連串長度(記為 ARL_0)與管制狀態外(製程失控時)的平均連串長度(記為 ARL_1)，其分別為

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha},$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}。$$

當製程是在管制狀態內時，平均連串長度 ARL_0 愈大愈好，減少誤判率；當製程是在管制狀態外時，平均連串長度 ARL_1 愈小愈好，以期能迅速偵測出製程的問題。

在 Shewhart \bar{X} 管制圖管制圖中，當管制上下限距離中心線是三倍標準差時



$$p = 1 - P(LCL \leq \bar{X} \leq UCL) = 1 - \Phi(3) + \Phi(-3) = 0.0027，$$

$$ARL = \frac{1}{p} = 370.4，SDRL = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \sqrt{ARL(ARL-1)} = 369.9。$$

2.3 估計未知參數所產生的問題

Woodall and Montgomery (1999) 提到一般在階段 II 時是假設參數已知的情況下去建構管制圖，然後利用管制圖去監控製程並加以改進。但事實上參數是在階段 I 中估計出來的，因此 Jensen, Jones-Farmer, Champ, and Woodall (2006) 指出在階段 I 中用估計的參數來取代真正的參數所產生的估計誤差會嚴重影響到階段 II 中管制圖的表現。

在 Shewhart \bar{X} 管制圖中，當 σ 未知時，Ghosh, Reynolds, and Hui (1981) 使用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 當做 σ 的估計量，發現 ARL 比在參數已知的情況大很多。

在 Shewhart \bar{X} 管制圖中，當 μ 或 σ 為未知而必須要估計時，Quesenberry (1993) 和 Chen (1997) 均指出 ARL 和 SDRL 都會比 μ 和 σ 為已知時來得大，尤其 SDRL 會大很多；而且當樣本數 n 或子群組數 m 變小時 ARL 和 SDRL 會變得更大。Chen (1997) 有分別用 2.1.1 節提到的三種估計 σ 的方法： $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ 、 $\hat{\sigma}_{\bar{S}}$ 、 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 來求 ARL 和 SDRL，發現用 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 估計 σ 算出來的 ARL 和 SDRL 較接近當 σ 是已知時的情形。



2.4 子群數的探討

在 Shewhart 管制圖中，通常需要足夠的子群來估計以確保估計出來的管制上下限會接近在參數已知的管制上下限。子群數小的話可以降低成本增快速度，但是也會出現估計較為不準的問題。

Montgomery (2005) 建議選子群組數介於 20 到 30 之間，樣本數為 4、5 或 6。

Quesenberry (1993) 則提出不同的看法，他認為在樣本數是 4~6 的情況下只用 20~30 組子群來估計參數是太少了，用估出來的參數和參數已知時所作的管制上下限並不接近。從 Quesenberry (1993) 附表

一的 ARL 和 SDRL 值就可得知，參數為估計得來的 ARL 和 SDRL 值比參數已知時的值大很多，尤其是 SDRL。他也提到當樣本數是 5 的時候大概要用 100 組子群來估計參數所得到的 ARL 和 SDRL 才會跟參數已知時的 ARL 和 SDRL 較接近，而且隨著子群數的變大而更接近。他提出了一個在 \bar{X} 管制圖中判斷需要多少子群組數才能把參數估準的公式：當樣本數為 n 時，需要的子群組數為 $400/(n-1)$ 。

Chen (1997)則提出當樣本數是 5 時需要至少 100 組子群，而當樣本數是 10 時需要至少 50 組子群，才能把管制上下限估準。

2.5 階段 I 資料來自於兩個常態分配

2.5.1 兩分配的平均數不同

當階段 I 中資料是來自於兩個常態分配時 Champ and Chou (2003) 探討子群組數大小和製程在管制狀態外時偏移程度對樣本點落在管制上下限外的機率所產生的影響。Champ and Chou (2003) 文中考慮之情形為： m 組子群，子群內樣本數為 n ，其中有一組子群是來自於管制狀態外之製程，而剩下的 $m-1$ 組子群則來自於管制狀態內之製程。

假設 $\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_0^2/n)$, $\bar{X}_i \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/n)$, $i = 2, \dots, m$, $\mu_1 \neq \mu_0$, δ_1 代表 μ_1 偏移 μ_0 多少個標準差的程度，亦即 $\delta_1 = (\mu_1 - \mu_0)/(\sigma_0/\sqrt{n})$ 。則

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}} &\sim N\left(\frac{m-1}{m}(\mu_1 - \mu_0), \frac{m-1}{m} \frac{\sigma_0^2}{n}\right), \\ \bar{X}_i - \bar{\bar{X}} &\sim N\left(-\frac{1}{m}(\mu_1 - \mu_0), \frac{m-1}{m} \frac{\sigma_0^2}{n}\right), \quad i = 2, 3, \dots, m, \\ \frac{m(n-1)S_p^2}{\sigma_0^2} &\sim \chi^2_{m(n-1)}.\end{aligned}$$

管制上下限和中心線為

$$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_4 S_p, \quad CL = \bar{\bar{X}}, \quad UCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_4 S_p,$$

其中 $A_4 = \sqrt{(m-1)/(mn)} t_{m(n-1), 0, \alpha/(2m)}$ ， $t_{\nu, \theta, 1-\gamma}$ 是自由度為 ν 且非中心參數 (noncentrality) 為 θ 的非中心 t 分配 (non-central t distribution) 之第 100γ 個百分位點。則 \bar{X}_1 落在管制上下限外的機率 $p_{\bar{X},1}$ (亦即假警報率) 為

$$p_{\bar{X},1} = 1 - F_{m(n-1), \theta_1}\left(\sqrt{\frac{mn}{m-1}} A_4\right) + F_{m(n-1), \theta_1}\left(-\sqrt{\frac{mn}{m-1}} A_4\right);$$

而對 $i = 2, \dots, m$ ， \bar{X}_i 落在管制上下限外的機率 $p_{\bar{X},2}$ (亦即偵測力) 為

$$p_{\bar{X},2} = 1 - F_{m(n-1), \theta_2}\left(\sqrt{\frac{mn}{m-1}} A_4\right) + F_{m(n-1), \theta_2}\left(-\sqrt{\frac{mn}{m-1}} A_4\right),$$

其中 $\theta_1 = \sqrt{(m-1)/m} \delta_1$ ， $\theta_2 = \sqrt{1/(m(m-1))} \delta_1$ ， $F_{\nu, \theta}$ 代表的是 $t_{\nu, \theta}$ 的累積分配函數 (cumulative distribution function, cdf)。

經由計算在各種不同情形下之 $p_{\bar{X},1}$ 和 $p_{\bar{X},2}$ 的結果發現，當子群組數 m 增加時，假警報率下降但偵測力亦下降。當偏移程度 δ_1 增加時，偵測力上升但假警報率亦上升。

在階段 I 中，當參數是需要估計時，監控統計量和估出來的管制上下限不獨立，於是 Champ and Chou (2003) 提出了一個類似「delete one」的方法來避免此問題，亦即在檢驗某組子群是否失控時所用之

管制上下限為由其他 $m-1$ 組子群所求得。結果顯示，當子群數 m 增加時，假警報率和檢定力都會下降。當偏移程度增加時，假警報率和檢定力都會上升，這些都與傳統的方法相同。但令人訝異的是相較於傳統方法，此方法的假警報率較高、檢定力比較低，並沒有比較好。

2.5.2 兩分配的標準差不同

除了上面提到的 $\hat{\sigma}_{\bar{R}}$ 、 $\hat{\sigma}_{\bar{S}}$ 、 $\hat{\sigma}_{S_p}$ 三種估計標準差的方法外，Wu, Zhao, and Wang (2002)提出了另外三種用中位數(median)來估計標準差的方法：

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{med1} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{median} |X_{ij} - X_{med}^{(i)}|, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \hat{\sigma}_{med2} &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |X_{ij} - X_{med}^{(i)}|, \\ \hat{\sigma}_{med3} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{median} |X_{ij} - \bar{X}_i|, \quad j = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

其中 $X_{med}^{(i)}$ 代表的是第 i 個子群中樣本的中位數。

當資料來自於二不同常態分配，一個為管制狀態內 $N(\mu, \sigma^2)$ ，另一個為管制狀態外 $N(\mu, 9\sigma^2)$ ，Wu, Zhao, and Wang (2002)分別拿六種估計標準差的方法來做比較，無論子群組數(10,20,30,50,100,200)或是樣本數(4,5,10)的大小為何，發現用 $\hat{\sigma}_{med1}$ 來估計標準差所得到的 ARL 與參數已知時較接近。

第三章 當平均數偏移之參數估計

當階段 I 中的資料是來自於常態分配的混合時(其中一個是製程在管制狀態內之分配，另一個則是製程在管制狀態外之分配)，本文將介紹三種估計參數的方法並分成平均數偏移和標準差改變兩種情形來討論。本章將先介紹平均數偏移的情況，並利用偵測子群間變異的 \bar{X} 管制圖來判斷製程是否有所改變；而標準差改變的情形則留到第四章再來探討。

3.1 常態分配混合之介紹(平均數偏移)

當階段 I 中的資料 X 是來自於二個常態分配混合時，其中一個是製程在管制狀態內之分配 $N(\mu_0, \sigma^2)$ ，另一個則是製程在管制狀態外之分配 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，資料來自管制狀態外之製程的機率為 p ，平均數的偏移程度 $\delta = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma$ 。本文中討論的分配混合與一般之混合分配略有不同，因為混合的方式是以子群為單位，亦即各子群來自管制狀態外之製程的機率為 p ，而各子群內之樣本均來自同一製程。

混合資料之平均數為 $\mu_x = (1-p)\mu_0 + p\mu_1$ 。在管制圖中的變異數為子群內的變異數，又因為兩分配的變異數相同，所以不論子群內的資料是來自哪個分配，子群內的變異數都是 σ^2 。

3.2 \bar{X} 管制圖在混合常態分配的應用

當子群內樣本來自 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 時，其平均值 \bar{X} 服從 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ ；當樣本來自 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 時， \bar{X} 服從 $N(\mu_1, \sigma^2/n)$ ，所以 \bar{X} 服從混合常態分配，平均數為 $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ ，子群內的變異數為 σ^2/n ，其中 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 。

當把來自於常態分配混合的資料誤認為來自於管制狀態內之製程時， \bar{X} 管制圖在管制界限離中心線是 L 倍標準差時的管制上下限為

$$UCL = \mu_{\bar{X}} + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \mu_{\bar{X}}$$

$$LCL = \mu_{\bar{X}} - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

此 \bar{X} 管制圖之假警報率 α 為

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} > \mu_{\bar{X}} + L\sigma/\sqrt{n} | F_0) + P(\bar{X} < \mu_{\bar{X}} - L\sigma/\sqrt{n} | F_0) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_{\bar{X}} + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_{\bar{X}} - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 + p\delta\sigma + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 + p\delta\sigma - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} | F_0\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \sqrt{n}p\delta + L | F_0\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \sqrt{n}p\delta - L | F_0\right) \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{n}p\delta + L) + \Phi(\sqrt{n}p\delta - L), \end{aligned}$$

而偵測力 $1 - \beta$ 為

$$\begin{aligned}
1-\beta &= P(\bar{X} > \mu_{\bar{X}} + L\sigma/\sqrt{n} | F_1) + P(\bar{X} < \mu_{\bar{X}} - L\sigma/\sqrt{n} | F_1) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_x + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_x - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_1 - (1-p)\delta\sigma + L\sigma/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_1 - (1-p)\delta\sigma - L\sigma/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} | F_1\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > -\sqrt{n}(1-p)\delta + L | F_1\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < -\sqrt{n}(1-p)\delta - L | F_1\right) \\
&= 1 - \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta + L) + \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta - L) \circ
\end{aligned}$$

從 $\alpha = 1 - \Phi(\sqrt{n}p\delta + L) + \Phi(\sqrt{n}p\delta - L)$ 及

$1 - \beta = 1 - \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta + L) + \Phi(-\sqrt{n}(1-p)\delta - L)$ 二式中可以發現，當資料來自於管制狀態外之製程的比例 p 增加時，偵測力 $1 - \beta$ 如預期變大，但是同時假警報率 α 也變大了；當 p 變大時，不但假警報率變大，偵測力也愈小了。針對 $L = 3$ 時，表一列出對應於 $\delta = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 和 $p = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ 之 α 和 $1 - \beta$ 值。



3.3 估計參數的方法一：直接估計法

在上小節之 \bar{X} 管制圖中，直接用 $\bar{\bar{X}}$ 來估計平均數 μ ，而標準差 σ 則用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計。若 \bar{X} 來自於混合分配，則在直接估計法中， $\bar{\bar{X}}$ 估計的其實是混合分配的期望值 $\mu_{\bar{X}}$ ，而不是我們想要的管制狀態內之製程的平均數 μ_0 。當有資料來自於管制狀態外之製程時， μ_0 跟 $\mu_{\bar{X}}$ 就會不相同，在這種情況下， $\bar{\bar{X}}$ 就不是一個理想的 μ_0 估計量。

3.4 估計參數的方法二：重覆篩選法

重覆篩選法亦即傳統上在階段 I 用來估計參數的方法。在 \bar{X} 管制圖中，用 $\bar{\bar{X}}$ 來估計平均數 μ ，而標準差 σ 則用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計，在管制界限離中心線是三倍標準差時的管制上下限為：

$$\begin{aligned}UCL &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_{s_p}}{\sqrt{n}} \\CL &= \bar{\bar{X}} \\LCL &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_{s_p}}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$


當有資料點落在管制上下限之外時，則必須把該資料刪除且用剩下的資料重新估計參數並計算所對應之管制上下限；再用新的管制上下限去檢測是否有資料落在管制界限外。這個過程將一直被重覆直到所有的資料點都落在管制上下限內，此時所估計的參數則作為管制狀態內之製程的參數的估計量。

從 3.3 節中得知若 \bar{X} 來自於混合常態分配，則 $\bar{\bar{X}}$ 就不會是一個理想的管制狀態內之製程平均數 μ_0 之估計量，雖然在重覆篩選法中比直接估計法多了篩選的步驟，但是在篩選的過程中也有可能把管制狀態內之製程的資料給刪除，而且也無法把全部管制狀態外之製程的資料都刪除。因此，當資料來自於混合分配時，重覆篩選法並不是一個好的估計參數的方法。

3.5 估計參數的方法三：EM-MLE 法

由於資料是來自於二個常態分配的混合，因此我們想到利用參數的最大概似估計量來估計參數，下面將介紹求參數的最大概似估計量的過程。資料 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 來自於混合常態分配，其中包含二個常態分配， $N(\mu_0, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_1, \sigma^2)$ (對本文所考慮之資料而言，此處之 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ 應該是 $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m\}$ ，二常態分配應該為 $N(\mu_0, \sigma^2/n)$ 和 $N(\mu_1, \sigma^2/n)$ ，但為了避免符號的複雜性，本節中之方法敘述採用上面的簡單符號表示)。令 f_0 和 f_1 分別表示此二分配之機率密度函數(probability density function, pdf)。令 p 為資料來自於 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的機率。

混合常態分配的機率密度函數為


$$\begin{aligned} f(z; \theta) &= (1-p)f_0(z) + pf_1(z) \\ &= (1-p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) + p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

其中參數 $\theta = (p, \mu_0, \mu_1, \sigma)^t$ 。概似函數(likelihood function)為

$$L(\theta | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^m f(z_i; \theta),$$

而對數概似函數(log likelihood function)為

$$\begin{aligned} l(\theta | \mathbf{z}) &= \log(L(\theta | \mathbf{z})) \\ &= \sum_{i=1}^m \log(f(z_i; \theta)). \end{aligned}$$

因為資料 Z 是不完全的資料(incomplete data)，所以我們利用 EM 演算法來求參數 θ 的最大概似估計量，有關不完全資料利用 EM 演算法求最大概似估計量更詳細的內容請參考 Dempster, Laird, and Rubin

(1977)。首先，令隨機變數 Y 代表 Z 來自於哪一個分配，亦即令 $Y=0$ 當 Z 來自於 $N(\mu_0, \sigma^2)$ ， $Y=1$ 當 Z 來自於 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 。則 (Z, Y) 之聯合機率密度函數為

$$f(z, y; \theta) = (1-p)^{1-y} p^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\mu_y)^2}{2\sigma^2}\right),$$

其中 $\mu_y \in \{\mu_0, \mu_1\}$ ；換言之，

$$f(z, y=0; \theta) = (1-p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$f(z, y=1; \theta) = p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right)。$$

令 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)'$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)'$ 代表此 m 個資料點之值。則其概似函

數(likelihood function)為

$$L(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m f(z_i, y_i; \theta),$$

而對數概似函數(log likelihood function)為

$$\begin{aligned} l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \log(L(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y})) \\ &= \sum_{i=1}^m \log(f(z_i, y_i; \theta))。 \end{aligned}$$

利用 EM 演算法求參數 θ 的最大概似估計量，敘述如下：

E 步驟(E-step)：首先可得

$$p(Y=0 | z_i; \theta) = \frac{f(z_i, y_i=0; \theta)}{f(z_i, y_i=0; \theta) + f(z_i, y_i=1; \theta)}, \quad (3.1)$$

$$p(Y=1 | z_i; \theta) = \frac{f(z_i, y_i=1; \theta)}{f(z_i, y_i=0; \theta) + f(z_i, y_i=1; \theta)}。 \quad (3.2)$$

對 $l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y})$ 求期望值

$$\begin{aligned}
Q &= E_Y(l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) | \mathbf{z}; \theta^{old}) \\
&= E_Y\left(\sum_{i=1}^m \log(f(z_i, y_i; \theta)) | z_i; \theta^{old}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m [f(z_i, y_i = 0; \theta) p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) + f(z_i, y_i = 1; \theta) p(Y = 1 | z_i; \theta^{old})] \\
&= \sum_{i=1}^m \left[\left(\log(1-p) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma - \frac{(z_i - \mu_0)^2}{2\sigma^2} \right) p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) \right. \\
&\quad \left. + \left(\log p - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma - \frac{(z_i - \mu_1)^2}{2\sigma^2} \right) p(Y = 1 | z_i; \theta^{old}) \right] \circ
\end{aligned}$$

M 步驟(M-step)：求 θ 使得 Q 有極大值

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial p} &= \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{1-p} p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) + \frac{1}{p} p(Y = 1 | z_i; \theta^{old}) \right] \\
\frac{\partial Q}{\partial \mu_0} &= \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - \mu_0)}{\sigma^2} p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) \\
\frac{\partial Q}{\partial \mu_1} &= \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - \mu_1)}{\sigma^2} p(Y = 1 | z_i; \theta^{old}) \\
\frac{\partial Q}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^m \left[\left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{(z_i - \mu_0)}{\sigma^3} \right) p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) + \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{(z_i - \mu_1)}{\sigma^3} \right) p(Y = 1 | z_i; \theta^{old}) \right] \circ
\end{aligned}$$

令上列各式為 0，可得

$$p^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m p(Y = 1 | z_i; \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m [p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) + p(Y = 1 | z_i; \theta^{old})]} \quad (3.3)$$

$$1 - p^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m p(Y = 0; z_i, \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m [p(Y = 0; z_i, \theta^{old}) + p(Y = 1; z_i, \theta^{old})]} \quad (3.4)$$

$$\mu_0^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i p(Y = 0; z_i, \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m p(Y = 0; z_i, \theta^{old})} \quad (3.5)$$

$$\mu_1^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i p(Y = 1; z_i, \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m p(Y = 1; z_i, \theta^{old})} \quad (3.6)$$

$$\sigma^{new} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m [(z_i - \mu_0^{new})^2 p(Y=0; z_i, \theta^{old}) + (z_i - \mu_1^{new})^2 p(Y=1; z_i, \theta^{old})]}{m}} \quad (3.7)$$

混合分配之 EM 演算法的步驟：

步驟一. 給參數 θ 之初始值 θ^{old} 。

步驟二. 計算(3.1)和(3.2)式。

步驟三. 計算(3.3) ~ (3.7)式。

步驟四. 如果 $(l(\theta^{new} | \mathbf{z}) - l(\theta^{old} | \mathbf{z})) / l(\theta^{old} | \mathbf{z})$ 小於允許誤差

(tolerance=0.0001)，停止所有步驟，取 θ^{new} 為參數的最大

概似估計量；否則拿 θ^{new} 取代 θ^{old} ，然後跳到步驟二。

我們可利用 EM 演算法得到的最大概似估計量 θ^{new} 中的 μ_0^{new} 和 σ^{new} 來估計管制狀態內之製程的參數，進而計算出管制上下限，但從第五章的模擬結果會得知用 EM 演算法估計的 $\hat{\sigma}$ 並不太準確，由於兩常態分配的標準差都一樣是 σ ，所以我們改使用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計參數 σ 。

如果偏移程度為 0 表示所有的資料都來自於同一分配，這時將資料分成兩群用上面的 EM 演算法求參數的最大概似估計量來估計參數並不恰當。因此，我們考慮先用最大概似函數來判別資料是來自於一個分配還是兩個不同的分配。當資料來自於同一常態分配時，概似

函數為 $L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^m f(z_i; \mu, \sigma^2)$ ，其中

$f(z; \mu, \sigma^2) = \exp(-(z - \mu)^2 / 2\sigma^2) / \sqrt{2\pi\sigma^2}$ 。 $\hat{\mu} = \bar{Z}$ 和 $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^m (Z_i - \bar{Z})^2 / m$ 為

參數的最大概似函數估計量。當資料來自於兩個分配的最大概似函數

值為 $L(\hat{\theta}|\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^m f(z_i; \hat{\theta})$ ，其中參數 $\hat{\theta}$ 為 EM 演算法中(3.3) ~ (3.7)式的結果。當資料來自於同一分配的最大概似函數值大於兩個分配之值時，則假設資料是來自於同一個分配，所以用常態分配的最大概似估計量 \bar{Z} 和 $\sum_{i=1}^m (Z_i - \bar{Z})^2 / m$ 來估計平均數和標準差；反之，則用上面的 EM 演算法求參數的最大概似估計量來估計參數。

我們提出的新方法(EM-MLE 法)為：先判斷資料來自於一個分配或是兩個分配，再求 μ_0 的最大概似估計量來估計 μ_0 和用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 估計 σ 。

3.6 EM 演算法中的初始值

在 EM 演算法中，初始值對概似估計量最後收斂的結果有很大的影響，不好的初始值可能會導致概似估計量不收斂或是收斂到錯誤的結果；而好的初始值不但可以讓概似估計量收斂至真正的參數值，更可以加速收斂的速度；因此，好的初始值是很重要的。在這裡我們提出了利用 K-means 將資料分成兩群，然後對這兩群算各自的平均數、標準差和權重當成初始值。K-means 分群法的步驟如下：

步驟一. 隨機將資料分成兩群(cluster)，並算出各群的質量中心 (centroid)，亦即平均值。

步驟二. 逐一將每個資料點重新分配到距離兩群質量中心較近的那一群，其中距離採用歐式距離(Euclidean distance)，如

果出現有資料點原本屬於其中一群，後來被歸類到另一群時，則重新計算兩群的質量中心。

步驟三. 重覆步驟二直到沒有資料點被重新分群。

舉例說明：現在有四個資料點 A、B、C 和 D，值為

$$(A,B,C,D)=(5,-1,1,-3)。$$

步驟一，隨機將資料先分成{A,B}和{C,D}兩群，算出兩群的質量中心如下：

| 群 | 質量中心 |
|-------|-------------------|
| {A,B} | $[5+(-1)]/2 = 2$ |
| {C,D} | $[1+(-3)]/2 = -1$ |

步驟二，先算出 A 至{A,B}、{C,D}兩群質量中心的距離如下：

$$d(A,\{A,B\}) = \sqrt{(5-2)^2} = 3,$$

$$d(A,\{C,D\}) = \sqrt{(5-(-1))^2} = 6。$$

A 距離{A,B}群較近，所以 A 還是屬於{A,B}群，不需重新分群。再

算出 B 和{A,B}、{C,D}兩群質量中心的距離如下：

$$d(B,\{A,B\}) = \sqrt{((-1)-2)^2} = 3,$$

$$d(B,\{C,D\}) = \sqrt{((-1)-(-1))^2} = 0。$$

B 距離{C,D}群較近，所以 B 應該屬於{C,D}群，需重新分群。新的

兩群為 A 和{B,C,D}，重新算出兩群的質量中心如下：

| 群 | 質量中心 |
|---------|------------------------|
| A | 5 |
| {B,C,D} | $[(-1)+1+(-3)]/3 = -1$ |

重覆步驟二。逐一算出每個點與 A 和 {B,C,D} 兩群質量中心的距離，並判斷是否需要重新分群

| 群 | 距離 | | | |
|---------|----|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| A | 0 | 6 | 4 | 8 |
| {B,C,D} | 6 | 0 | 2 | 2 |

發現 A 還是屬於 A 群，B、C 和 D 還是屬於 {B,C,D} 群，所以不需重新分群。所有的點都不需重新分群了，因此用 K-means 分成的兩群為 A 和 {B,C,D}。

3.7 在階段 II 的平均連串長度

從階段 I 估計得到 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ 後，在階段 II 中管制界限離中心線是 3 倍標準差時的管制上下限為

$$UCL = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$CL = \hat{\mu}_0$$

$$LCL = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

當階段 II 中資料 X 來自於管制狀態內之製程 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 時，子群平均數

$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2 / \sqrt{n})$ 。則假警報率 α

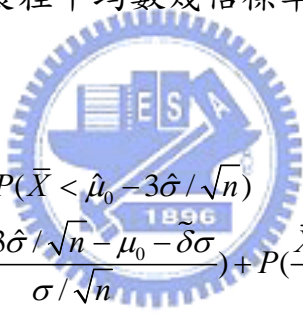
$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\bar{X} > \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}) + P(\bar{X} < \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

而平均連串長度為

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.9)$$

當階段 II 中資料 X 來自於管制狀態外之製程 $N(\mu_0 + \tilde{\delta}\sigma, \sigma^2)$ 時，子群平均數 $\bar{X} \sim N(\mu_0 + \tilde{\delta}\sigma, \sigma^2/\sqrt{n})$ 。其中 $\tilde{\delta}$ 代表的是管制狀態外之製程平均數偏移管制狀態內之製程平均數幾倍標準差的程度。則偵測力 $1 - \beta$

可由下求得



$$\begin{aligned}
1 - \beta &= P(\bar{X} > \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n}) + P(\bar{X} < \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n}) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}/\sqrt{n} - \mu_0 - \tilde{\delta}\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

而平均連串長度為

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (3.10)$$

第四章 當標準差改變之參數的估計

在第三章中已經介紹了平均數偏移的情形，本章將討論標準差改變的情形，並利用偵測子群內變異的 S^2 管制圖來判斷製程變異是否有所改變。

4.1 常態分配混合之介紹(標準差改變)

當階段 I 中的資料 X 是來自於二個常態分配的混合時，其中一個是製程在管制狀態內之分配 $N(\mu, \sigma_0^2)$ ，另一個分配則是製程在管制狀態外之分配 $N(\mu, \sigma_1^2)$ ，資料來自管制狀態外之製程的機率為 p ，標準差的改變程度 $\gamma = \sigma_1 / \sigma_0$ ，在本篇論文中我們只考慮標準差的改變程度 $\gamma > 1$ 的情形，對 $\gamma < 1$ 的情形之處理方式類似。

4.2 S^2 管制圖在混合常態分配的應用

當資料 X 來自於常態分配的混合時，從 3.2 節中得知 \bar{X} 來自於混合常態分配。當子群內樣本來自於 $N(\mu, \sigma_0^2)$ 時， $(n-1)S^2 / \sigma_0^2 \sim \chi^2_{n-1}$ ，當樣本來自於 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 時， $(n-1)S^2 / \sigma_1^2 \sim \chi^2_{n-1}$ ，所以子群內樣本變異數 S^2 也是混合分配，其中 $\bar{X} = \sum_{j=1}^n X_j / n$ ， $S^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 / (n-1)$ 。 S^2 之累積分配函數為

$$F(s^2) = (1-p)F_0(s^2) + pF_1(s^2) ,$$

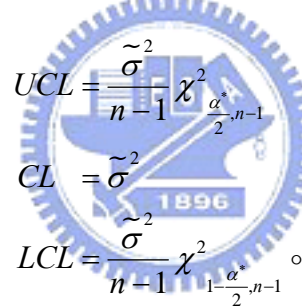
其中 $F_0(s^2)$ 和 $F_1(s^2)$ 分別為子群來自於 $N(\mu, \sigma_0^2)$ 和 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 時 S^2 的累積

分配函數。 S^2 混合分配之期望值 $\tilde{\sigma}^2$ 為

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 &= E(S^2) \\ &= \int s^2 dF(s^2) \\ &= \int s^2 d[(1-p)F_0(s^2) + pF_1(s^2)] \\ &= (1-p) \int s^2 dF_0(s^2) + p \int s^2 dF_1(s^2) \\ &= (1-p)\sigma_0^2 + p\sigma_1^2 \circ \end{aligned}$$

當把來自於常態分配混合的資料誤認為來自於管制狀態內之製

程時，在 $1-\alpha^*$ 的信賴水準下， S^2 圖的管制上下限為



$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \\ CL &= \tilde{\sigma}^2 \\ LCL &= \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \circ \end{aligned}$$

則此 S^2 管制圖之假警報率 α 為

$$\begin{aligned} \alpha &= P(S^2 < \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) + P(S^2 > \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) \\ &= P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) + P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) \\ &= P(\chi^2_{n-1} < \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) + P(\chi^2_{n-1} > \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_0) \\ &= F_{\chi^2(n-1)}(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}) \\ &= F_{\chi^2(n-1)}([\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}]) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}([\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}]), \end{aligned}$$

其中 $F_{\chi^2(n-1)}$ 是 χ^2_{n-1} 的累積分配函數。

而偵測力 $1-\beta$ 為

$$\begin{aligned}
 1-\beta &= P(S^2 < \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) + P(S^2 > \frac{\tilde{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) \\
 &= P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} < \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) + P(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} > \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) \\
 &= P(\chi^2_{n-1} < \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) + P(\chi^2_{n-1} > \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} | F_1) \\
 &= F_{\chi^2(n-1)}(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_1^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}) \\
 &= F_{\chi^2(n-1)}([\frac{(1-p)}{\gamma^2} + p] \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}) + 1 - F_{\chi^2(n-1)}([\frac{(1-p)}{\gamma^2} + p] \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}),
 \end{aligned}$$

針對 $\alpha^* = 0.0027$ ，表二列出對應於 $\gamma = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ 和 $p = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$

之 α 值和 $1-\beta$ 值，由表二可以看出當 γ 愈大時，偵測力如預期的愈來愈大，不過假警報率卻時大時小；當 p 愈大時，不但假警報率愈大，偵測力也愈差。



4.3 估計參數的方法一：直接估計法

在 S^2 管制圖中，一般用 $\overline{S^2}$ 來估計變異數 σ_0^2 。若資料來自於混合常態分配，如前所述 S^2 也會來自於一個混合分配。在直接估計法中， $\overline{S^2}$ 估計的其實是 S^2 混合分配的期望值 $\tilde{\sigma}^2$ ，而不是我們想要的管制狀態內之製程的變異數 σ_0^2 。當有資料來自於管制狀態外之製程時， σ_0^2 跟 $\tilde{\sigma}^2$ 就會不相同，在這種情況下， $\overline{S^2}$ 就不是一個理想的 σ_0^2 估計量。

4.4 估計參數的方法二：重覆篩選法

在 S^2 管制圖中，用 $\overline{S^2}$ 來估計變異數 σ_0^2 ，在 $1-\alpha^*$ 的信賴水準下的管制上下限為

$$\begin{aligned}UCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \\CL &= \overline{S^2} \\LCL &= \frac{\overline{S^2}}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \circ\end{aligned}$$

篩選過程與 3.4 小節相同，重覆篩選法也就是傳統上用來估計參數的方法。從 4.3 節中得知若 S^2 來自於混合常態分配，則 $\overline{S^2}$ 就不會是一個理想的管制狀態內之製程平均數 σ_0^2 估計量，雖然在重覆篩選法中比直接估計法多了篩選的步驟，但是在篩選的過程中也有可能把管制狀態內之製程的資料給刪除，而且也無法把全部管制狀態外之製程的資料都刪除。因此，當資料來自於混合常態分配時，重覆篩選法並不是一個好的估計參數的方法。

4.5 估計參數的方法三：EM-MLE 法

由於資料是來自於二個常態分配的混合，因此我們想到利用參數的最大概似估計量來估計參數，下面將介紹求參數的最大概似估計量的過程。資料 $\{Z_1, \dots, Z_m\}$ 來自於混合常態分配，其中包含二個常態分配， $N(\mu, \sigma_0^2)$ 和 $N(\mu, \sigma_1^2)$ (對本文所考慮之資料而言，此處之 $\{Z_1, \dots, Z_m\}$ 應該

是 $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m\}$ ，二常態分配應該為 $N(\mu, \sigma_0^2/n)$ 和 $N(\mu, \sigma_1^2/n)$ ，但為了避免符號的複雜性，本節中之方法敘述採用上面的簡單符號表示)。令 f_0 和 f_1 分別代表此二分配之機率密度函數， p 代表的是資料來自於 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 的機率。混合常態分配的機率密度函數為

$$\begin{aligned} f(z; \theta) &= (1-p)f_0(z) + pf_1(z) \\ &= (1-p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right) + p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right), \end{aligned}$$

其中參數 $\theta = (p, \mu, \sigma_0, \sigma_1)^t$ 。概似函數(likelihood function)為

$$L(\theta | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^m f(z_i; \theta),$$

而對數概似函數(log likelihood function)為

$$\begin{aligned} l(\theta | \mathbf{z}) &= \log(L(\theta | \mathbf{z})) \\ &= \sum_{i=1}^m \log(f(z_i; \theta)). \end{aligned}$$

因為資料 Z 是不完全的資料，所以我們利用 EM 演算法來求參數 θ 的最大概似估計量。首先，令隨機變數 Y 代表 Z 來自於哪一個分配，亦即令 $Y=0$ 當 Z 來自於 $N(\mu, \sigma_0^2)$ ， $Y=1$ 當 Z 來自於 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 。則 (Z, Y) 之聯合機率密度函數為

$$f(z, y; \theta) = (1-p)^{1-y} p^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

其中 $\sigma_y \in \{\sigma_0, \sigma_1\}$ ；換言之

$$\begin{aligned} f(z, y=0; \theta) &= (1-p) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ f(z, y=1; \theta) &= p \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right). \end{aligned}$$

令 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^t$ 代表此 m 個資料點之值。則其概似函數(likelihood function)為

$$L(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^m f(z_i, y_i; \theta),$$

而對數概似函數(log likelihood function)為

$$\begin{aligned} l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \log(L(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y})) \\ &= \sum_{i=1}^m \log(f(z_i, y_i; \theta)). \end{aligned}$$

利用 EM 演算法求參數 θ 的最大概似估計量，敘述如下：

E 步驟(E-step)：首先可得

$$p(Y = 0 | z_i, \theta) = \frac{f(z_i, y_i = 0; \theta)}{f(z_i, y_i = 0; \theta) + f(z_i, y_i = 1; \theta)}, \quad (4.1)$$

$$p(Y = 1 | z_i; \theta) = \frac{f(z_i, y_i = 1; \theta)}{f(z_i, y_i = 0; \theta) + f(z_i, y_i = 1; \theta)} \quad (4.2)$$

對 $l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y})$ 求期望值

$$\begin{aligned} Q &= E_Y(l(\theta | \mathbf{z}, \mathbf{y}) | \mathbf{z}; \theta^{old}) \\ &= E_Y\left(\sum_{i=1}^m \log(f(z_i, y_i | \theta)) | \mathbf{z}; \theta^{old}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m [f(z_i, y_i = 0; \theta) p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) + f(z_i, y_i = 1; \theta) p(Y = 1 | z_i; \theta^{old})] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[(\log(1-p) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma_0 - \frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma_0^2}) p(Y = 0 | z_i; \theta^{old}) \right. \\ &\quad \left. + (\log p - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \log \sigma_1 - \frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma_1^2}) p(Y = 1 | z_i; \theta^{old}) \right]. \end{aligned}$$

M 步驟(M-step)：求 θ 使得 Q 有極大值

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial p} &= \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{1-p} p(Y=0 | z_i; \theta^{old}) + \frac{1}{p} p(Y=1 | z_i; \theta^{old}) \right], \\ \frac{\partial Q}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^m \left[-\frac{(z_i - \mu)}{\sigma_0^2} p(Y=0 | z_i; \theta^{old}) + \frac{(z_i - \mu)}{\sigma_1^2} p(Y=1 | z_i; \theta^{old}) \right], \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_0} &= \sum_{i=1}^m \left(-\frac{1}{\sigma_0} + \frac{(z_i - \mu)}{\sigma_0^3} \right) p(Y=0 | z_i; \theta^{old}), \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} &= \sum_{i=1}^m \left(-\frac{1}{\sigma_1} + \frac{(z_i - \mu)}{\sigma_1^3} \right) p(Y=1 | z_i; \theta^{old}).\end{aligned}$$

令上列各式為 0，可得

$$p^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m p(Y=1 | z_i; \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m [p(Y=0 | z_i; \theta^{old}) + p(Y=1 | z_i; \theta^{old})]} \quad (4.3)$$

$$1 - p^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m p(Y=0 | z_i; \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m [p(Y=0 | z_i; \theta^{old}) + p(Y=1 | z_i; \theta^{old})]} \quad (4.4)$$

$$\mu^{new} = \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m} \quad (4.5)$$

$$\sigma_0^{new} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (z_i - \mu^{new})^2 p(Y=0 | z_i; \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m p(Y=0 | z_i; \theta^{old})}} \quad (4.6)$$

$$\sigma_1^{new} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (z_i - \mu^{new})^2 p(Y=1 | z_i; \theta^{old})}{\sum_{i=1}^m p(Y=1 | z_i; \theta^{old})}}. \quad (4.7)$$

混合分配之 EM 演算法的步驟：

步驟一. 給參數 θ 之初始值 θ^{old} 。

步驟二. 計算(4.1)和(4.2)式。

步驟三. 計算(4.3) ~ (4.7)式。

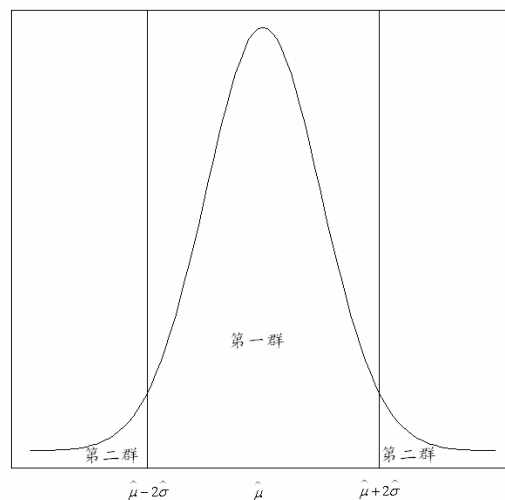
步驟四. 如果 $(l(\theta^{new} | \mathbf{z}, \mathbf{y}) - l(\theta^{old} | \mathbf{z}, \mathbf{y})) / l(\theta^{old} | \mathbf{z}, \mathbf{y}) < \text{允許誤差}$

(0.0001)，停止所有步驟，取 θ^{new} 為參數的最大概似估計量；否則拿 θ^{new} 取代 θ^{old} ，然後跳到步驟二。

在 S^2 管制圖中我們提出的新方法(EM-MLE法)為：先判斷資料來自於一個分配或是兩個分配，再求 σ_0 的最大概似估計量來估計 σ_0 。判斷資料來自於一個分配或是兩個分配的方法與 \bar{X} 管制圖相同。

4.6 EM 演算法中的初始值

在 EM 演算法中初始值的重要性已經在 3.4 小節中提及了，在這裡我們提出一種表現得不錯的初始值給定方法。由於資料點是來自於兩個常態分配，兩分配的差別在於其中一個分配的標準差較大，所以我們先算出這筆資料的平均數 $\hat{\mu}$ 和標準差 $\hat{\sigma}$ ，然後將資料落在 $(\hat{\mu}-2\hat{\sigma}, \hat{\mu}+2\hat{\sigma})$ 區間裡的分成一群，在區間外的分為另一群(如下面圖示)，分別算各群的平均數、標準差和權重當初始值。



4.7 在階段 II 的平均連串長度

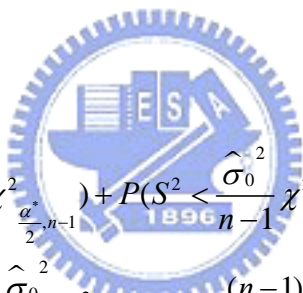
從階段 I 估計得到 $\hat{\sigma}_0$ 後，在階段 II 中 $1-\alpha^*$ 的信賴水準下 S^2 的管制上下限為

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \\ CL &= \hat{\sigma}_0^2 \\ LCL &= \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \circ \end{aligned}$$

當階段 II 中資料來自於管制狀態內之製程 $N(\mu, \sigma_0^2)$ 時，

$(n-1)S^2 / \sigma_0^2 \sim \chi^2_{n-1}$ ，其中 $\bar{X} = \sum_{j=1}^n X_j / n$ ， $S^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 / (n-1)$ 。

故假警報率 α 為



$$\begin{aligned} \alpha &= P\left(S^2 > \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right) + P\left(S^2 < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right) \\ &= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right) + P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right) \\ &= 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right) + F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1}\right), \end{aligned}$$

其中 $F_{\chi^2(n-1)}$ 是 $\chi^2(n-1)$ 的累積分配函數。而平均連串長度為

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \circ$$

當階段 II 中資料來自於管制狀態外之製程 $N(\mu, \tilde{\gamma}^2 \sigma_0^2)$ 時，

$(n-1)S^2 / \tilde{\gamma}^2 \sigma_0^2 \sim \chi^2_{n-1}$ ，其中 $\tilde{\gamma}$ 代表的是管制狀態外之製程的標準差相對

於管制狀態內之製程的標準差之改變程度。則其偵測力 $1-\beta$ 為

$$\begin{aligned}
1 - \beta &= P\left(S^2 > \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) + P\left(S^2 < \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) \\
&= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} > \frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) + P\left(\frac{(n-1)S^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) \\
&= 1 - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) + F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\tilde{\gamma}^2 \sigma^2} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right),
\end{aligned}$$

而平均連串長度為

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \circ$$



第五章 電腦模擬與比較

在本章中，我們將直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法三種方法在參數的估計上、階段 I 中假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ ，還有階段 II 中之 ARL 這三方面上的表現來做比較。

5.1 平均數偏移

5.1.1 模擬過程

在模擬的過程中，我們假設資料來自於混合常態分配，其中一個分配是製程在管制狀態內 $N(\mu_0, \sigma^2)$ ，另一個分配則是製程在管制狀態外 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，其中子群數 $m=100(1000)$ ，樣本數 $n=5$ ， $\mu_0=0$ ， $\sigma^2=1$ ，平均數的偏移程度 $\delta=(\mu_1-\mu_0)/\sigma$ ($\delta=0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$)，資料來自於管制狀態外之製程的比例 p ($p=0.05, 0.1, 0.15, 0.2$)，對不同的 δ 和 p 的組合作模擬。模擬步驟如下：

步驟一. 給定 δ 和 p 值。

步驟二. 生成 m 組子群資料，每組 n 個樣本；每組子群有 $1-p$ 的機率來自於 $N(\mu_0, \sigma^2)$ ， p 的機率來自於 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，子群內的資料則都來自同一分配。

步驟三. 計算出 m 組子群的組內平均 $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m\}$ 並用直接估計法、重覆

篩選法和 EM-MLE 法三種方法估計管制狀態內之製程的參

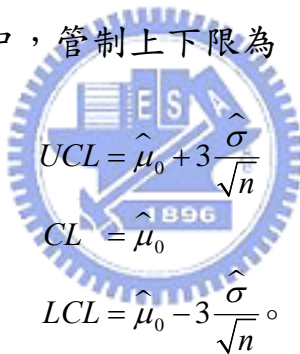
數 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ 。

步驟四. 利用步驟三得到的 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ 建構出 \bar{X} 管制圖，計算本組樣本的假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ 。

步驟五. 利用步驟四建構出的 \bar{X} 管制圖，再用(3.9)和(3.10)式計算在階段 II 中的 ARL 。

重覆上面模擬步驟 $r=10000$ 次，求得 10000 個 $\hat{\mu}_0$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 α 、 $1-\beta$ 和 ARL 的平均。

在我們模擬的過程中，管制上下限為


$$\begin{aligned}UCL &= \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \\CL &= \hat{\mu}_0 \\LCL &= \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

在這裡說明一下步驟四中計算 α 和 $1-\beta$ 的方法。假設步驟二生成的亂數中有 k 組資料來自於 $N(\mu_0, \sigma^2)$ ， $m-k$ 組資料來自於 $N(\mu_1, \sigma^2)$ ，利用步驟三得到的 $\hat{\mu}_0$ 和 $\hat{\sigma}$ 做出 \bar{X} 管制圖後，假設有 $a+b$ 個 \bar{X} 資料點落在管制界限外，其中有 a 個點是來自於管制狀態內之製程，另外 b 個點是來自於管制狀態外之製程，則 $\alpha = a/k$ ， $1-\beta = b/(m-k)$ 。當偏移程度 $\delta=0$ ，也就是所有資料都來自於管制狀態內之製程時，就不會有 $1-\beta$ ，於是設 $1-\beta = NA$ 。

5.1.2 參數估計的比較

表三到表五分別列出當子群數 $m=100$ 時直接估計法、重覆篩選法、和 EM-MLE 法三種估計參數方法的估計值在 10000 次模擬中的平均值和標準差，表六則是列出求 μ_0 和 σ 的最大概似估計量來估計參數(與 EM-MLE 法不同，EM-MLE 法是用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計 σ)。圖一和圖二分別是當子群數 $m=100$ 時直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法三種方法在 μ_0 和 σ 估計上的比較。圖三和圖四則是當 $m=1000$ 時的情形。

從表三中可以發現直接估計法在估計 μ_0 方面估計得不好，而且隨著平均數的偏移程度 δ 和資料來自於管制狀態外之製程的比例 p 變大而變差，原因是因為 \bar{X} 是算所有資料的平均，連資料來自於管制狀態外之製程也會被計算進去，所以會受到管制狀態外之製程的資料影響，導致估計得不理想。

在 \bar{X} 管制圖中用重覆篩選法去估計參數，從表四中可以發現在估計 μ_0 方面也估計得不好，原因是因為 \bar{X} 會受到管制狀態外之製程的資料影響，雖然說有做過篩選，但是在篩選的過程中也有可能把管制狀態內之製程的資料給刪除，而且也無法把全部管制狀態外之製程的資料都刪除。

從表五中可以發現 EM-MLE 法在所有的情況下 μ_0 和 σ 都估計得相當理想，所以 EM-MLE 法是一個不錯的估計參數方法。在 EM-MLE

法中我們是採用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計 σ ，如果是用 σ 的最大概似估計量估計參數，從表六中可以發現 σ 估計得不理想，因為子群內的資料來自同一分配，所以我們採用 $\hat{\sigma}_{s_p}$ 來估計 σ 。

從圖一的比較中可以發現，無論偏移程度 δ 是多少，EM-MLE 法在估計 $\mu_0 = 0$ 方面表現較好，圖二則顯示三種方法在估計 $\sigma = 1$ 方面表現得差不多。

從圖一至圖四可以發現，當子群數 m 變大時，三種方法在估計 $\mu_0 = 0$ 和 $\sigma = 1$ 方面都會表現的比較好。

5.1.3 假警報率 α 和偵測力 $1 - \beta$ 的比較

表七到表九分別列出當子群數 $m = 100$ 時直接估計法、重覆篩選法、和 EM-MLE 法三種估計參數方法在階段 I 中假警報率和偵測力在 10000 次模擬中的平均值和標準差。圖五和圖六表示的是當子群數 $m = 100$ 時三種估計法在階段 I 中假警報率和偵測力的表現，圖七和圖八則是 $m = 1000$ 時的情形。從圖五和圖六中可以發現，EM-MLE 法的假警報率比起另外兩種方法要來得低，而偵測力則比較高，因此 EM-MLE 法表現得比另外兩種方法好。

從圖五至圖八可以發現，當子群數 m 變大時，三種方法在假警報率和偵測力上都會表現的比較好。

5.1.4 階段 II 中 ARL 的表現

在階段 I 中偏移程度 δ 和資料來自於管制狀態外之製程的比例 p 有許多不同的組合，在這裡我們只列出當 $\delta=2$ 和 $p=0.2$ 時用三種估計方法估計參數後在階段 II 中 ARL 的表現，表十至表十二分別列出直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法三種估計參數方法在階段 II 中 ARL 的表現。圖九表示的是三種方法在階段 II 中 ARL 的表現。當階段 II 的資料來自於管制狀態內 $N(0,1)$ 時，我們發現直接估計法之 ARL_0 比參數已知時之設定值 370.4 小很多；重覆篩選法之 ARL_0 較靠近 370.4 但即使 m 大到 1000 仍有偏差(bias)；而 EM-MLE 法之 ARL_0 雖然在 m 較小時比 370.4 大，但隨著 m 愈大則愈逼近 370.4。當階段 II 的資料來自於管制狀態外時，EM-MLE 法的 ARL_1 比另外兩種方法都要小而且較接近參數已知時之 ARL_1 。由上面的比較可以得知 EM-MLE 法在階段 II 中 ARL 的表現比其他兩種方法為佳。

從表十二中可以發現，無論偏移程度 $\tilde{\delta}$ 是多少，當子群數 m 變大時， ARL 會變小且漸漸逼近參數已知時($m=\infty$)，而當 $m=200$ 時， ARL 就會跟參數已知時相當接近，也就是說當階段 I 資料來自於混合常態分配時，EM-MLE 法至少需要 200 個子群，才能使得估計的參數和管制圖在階段 II 中 ARL 的表現與參數已知時相近。

5.2 標準差改變

5.2.1 模擬過程

在模擬的過程中，我們假設資料來自於混合常態分配，其中一個分配是製程在管制狀態內 $N(\mu, \sigma_0^2)$ ，另一個分配則是製程在管制狀態外 $N(\mu, \sigma_1^2)$ ，其中子群數 $m=100(1000)$ ，樣本數 $n=5$ ， $\mu=0$ ， $\sigma_0^2=1$ ，標準差的改變程度 $\gamma=\sigma_1/\sigma_0$ ($\gamma=1, 1.5, 2, 2.5, 3$)，資料來自於管制狀態外之製程的比例 p ($p=0.05, 0.1, 0.15, 0.2$)，對於不同的 δ 和 p 的組合作模擬。模擬步驟如下：

步驟一. 給定 γ 和 p 初始值。

步驟二. 生成 m 組子群，每組 n 個樣本，每組子群有 $1-p$ 的機率來自於 $N(\mu, \sigma_0^2)$ ， p 的機率來自於 $N(\mu, \sigma_1^2)$ ，子群內的資料則都會來自同一分配。

步驟三. 用直接估計法、重覆篩選法和 EM-MLE 法三種方法估計管制狀態內之製程的參數 $\hat{\sigma}_0$ 。

步驟四. 利用步驟三得到的 $\hat{\sigma}_0$ 建構出 S^2 管制圖，計算假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$

重覆上面模擬步驟 $r=10000$ 次，求得 10000 個 $\hat{\sigma}_0$ 、 α 和 $1-\beta$ 的平均。

在我們模擬的過程中，管制上下限為

$$UCL = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{\frac{\alpha^*}{2}, n-1}$$

$$CL = \hat{\sigma}_0^2$$

$$LCL = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi^2_{1-\frac{\alpha^*}{2}, n-1} \circ$$

計算 α 和 $1-\beta$ 的方法如 5.1.1 小節所述。

5.2.2 參數估計的比較

表十三到表十五分別列出當子群數 $m=100$ 時直接估計法、重覆篩選法、和 EM-MLE 法三種估計參數方法的估計值在 10000 次模擬中的平均值和標準差。圖十和圖十一表示的是當子群數 $m=100$ 和 $m=1000$ 時三種估計法估計 σ_0 的表現。

從表十三中可以發現直接估計法在估計 σ_0 方面估計得不好，而且隨著標準差的改變程度 γ 和資料來自於管制狀態外之製程的比例 p 變大而變差，原因是因為 $\overline{S^2}$ 是算所有資料子群內的變異數，連資料來自於管制狀態外之製程也會被計算進去，所以會受到管制狀態外之製程的資料影響，導致估計得不理想。

在 S^2 管制圖中用重覆篩選法去估計參數，從表十四中可以發現在估計 σ_0 方面也估計得不好，原因是因為 $\overline{S^2}$ 會受到管制狀態外之製程的資料影響，雖然說有做過篩選，但是在篩選的過程中也有可能把管制狀態內之製程的資料給刪除，而且也無法把全部管制狀態外之製程的資料都刪除。

S^2 管制圖中用 EM-MLE 法去估計參數，從表十五中可以發現在所有的情況下 σ_0 都估計得相當理想，所以 EM-MLE 法是一個不錯的估計參數方法。

從圖十的比較中可以發現，無論改變程度 γ 是多少，EM-MLE 法在估計 $\sigma_0 = 0$ 方面表現較好，所以 EM-MLE 法比起另外兩種方法要來得好。

5.2.3 假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ 的比較

表十六到表十八分別列出當子群數 $m=100$ 時直接估計法、重覆篩選法、和 EM-MLE 法三種估計參數方法在階段 I 中假警報率和偵測力在 10000 次模擬中的平均值和標準差。圖十二和圖十三表示的是當子群數 $m=100$ 時三種估計法在階段 I 中假警報率和偵測力的表現，圖十四和圖十五則是 $m=1000$ 時的情形。從圖十二和圖十三中可以發現，EM-MLE 法的假警報率比起另外兩種方法要來得低，而偵測力則比較高，因此 EM-MLE 法表現得比另外兩種方法好。

第六章 結論與未來展望

當階段 I 中的資料是來自於混合常態分配，其中一個分配是製程在管制狀態內，另一個分配則是製程在管制狀態外，無論二分配的不同是在平均數偏移或是標準差改變，EM-MLE 法在參數估計上、階段 I 中假警報率 α 和偵測力 $1-\beta$ 的表現還有階段 II 中 ARL 的表現上都比另外兩種方法好。

在 EM 演算法中，其實是需要較大的資料量才能得到較好的結果，但是在階段 I 中又不太可能有太多的資料，這是一個矛盾的地方。

在本篇論文中，對於混合常態分配中兩分配的不同我們只分別做了平均數偏移和標準差改變的情形，在未來我們可以考慮探討更一般的情形，即二分配的平均數和標準差都有可能不相同，或是混合常態分配由不只二個常態分配混合。

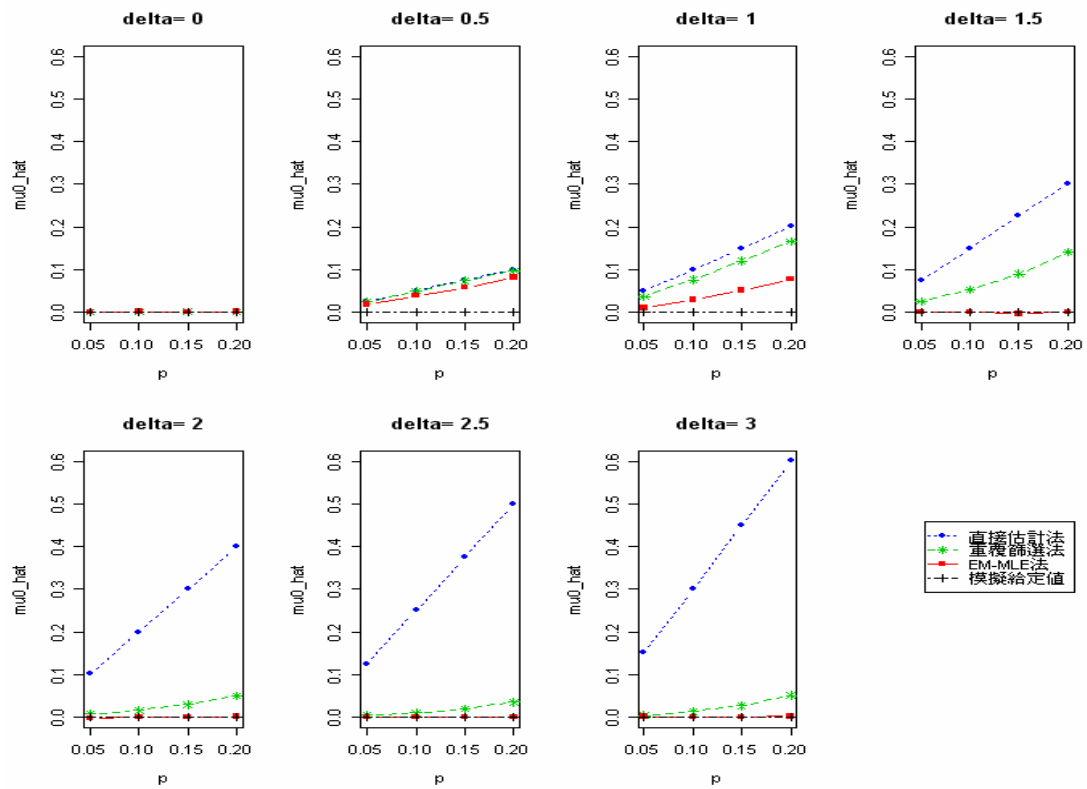
參考文獻

- Champ, C. W.; and Chou, S.-P. (2003). “Comparison of Standard and Individual Limits Phase I Shewhart \bar{X} , R, and S Charts”. *Quality and Reliability Engineering International* 19, pp. 161-170.
- Chen, G. (1997). “The Mean and Standard Deviation of the Run Length Distribution of \bar{X} Charts When Control Limits are Estimated”. *Statistica Sinica* 7, pp. 789-798.
- Dempster, A.P.; Laird, N.M.; and Rubin, D.B. (1977) “Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm”. *Journal of Royal Statistical Society B* 39, pp. 1-38.
- Ghosh, B. K; Reynolds, M. R., JR.; and Hui, Y. V. (1981). “Shewhart Charts with Estimated Process Variance”. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 18, pp. 1797-1822.
- Jensen, W. A.; Jones-Farmer, L. A.; Champ, C. W.; and Woodall, W. H. (2006) “Effects of Parameter Estimation on Control Charts Properties: A Literature Review”. *Journal of Quality Technology* 38, pp. 349-364.
- Montgomery, D. C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th ed. John Wiley, New York.
- Quesenberry, C. P. (1993). “The Effect of Sample Size on Estimated Limits for \bar{X} and X Control Charts”. *Journal of Quality Technology* 25, pp. 237-247.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. D. Van Nostrand, New York.
- Woodall and W. H, Montgomery, D. C. (1999). “Research Issues and Ideas in Statistical Process Control”. *Journal of Quality Technology* 31, pp. 376-386.

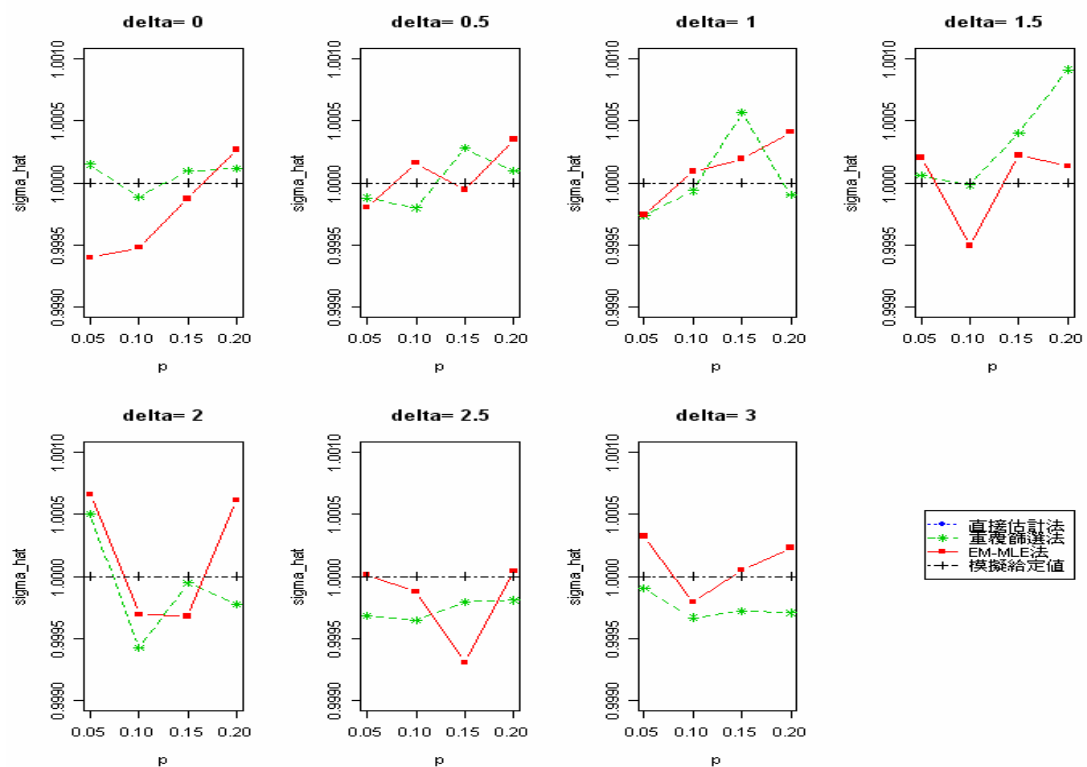
Wu, C.; Zhao, Y.; and Wang, Z. (2002). “The Median Absolute Deviations and their Application to Shewhart \bar{X} Control Charts”. *Communications in Statistics- Simulation and Computation* 31, pp. 425-442.



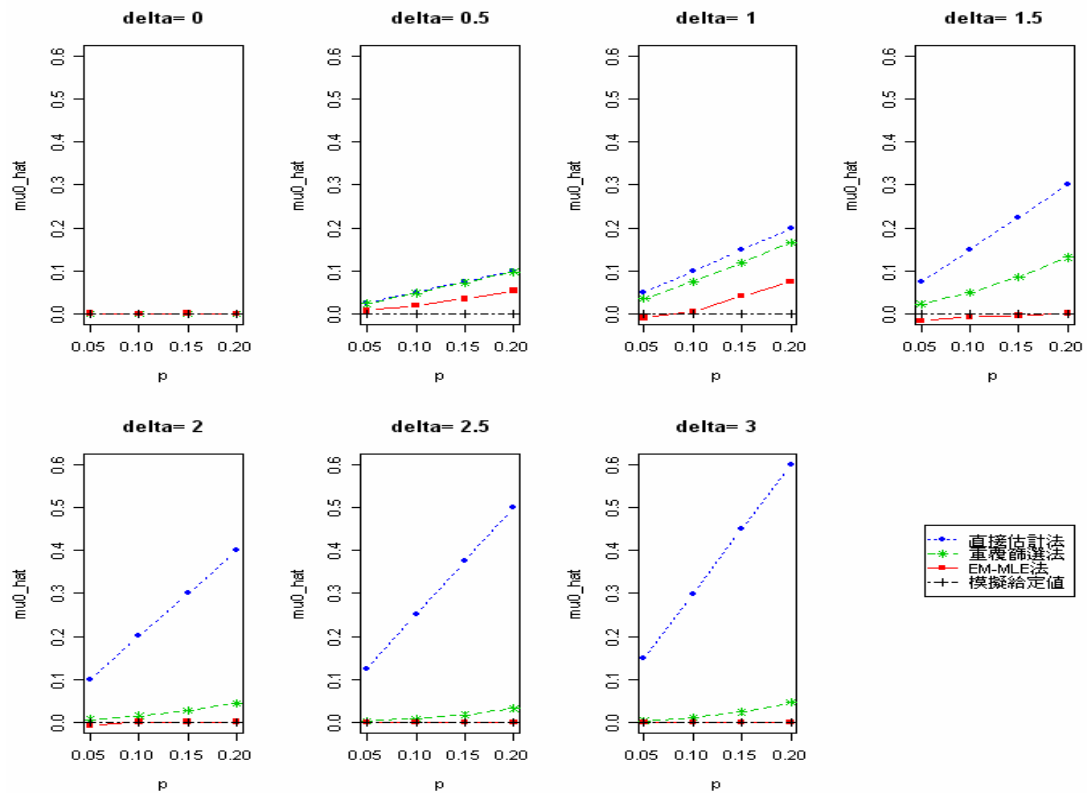
圖一： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 μ_0 的表現



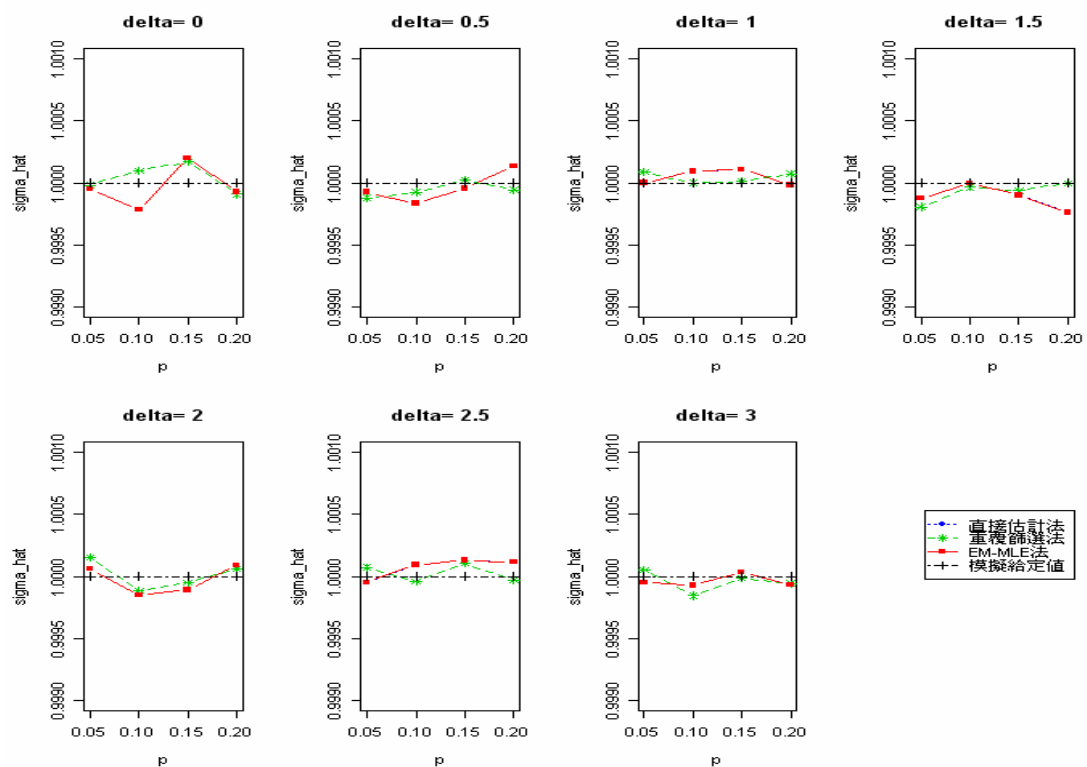
圖二： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 σ 的表現



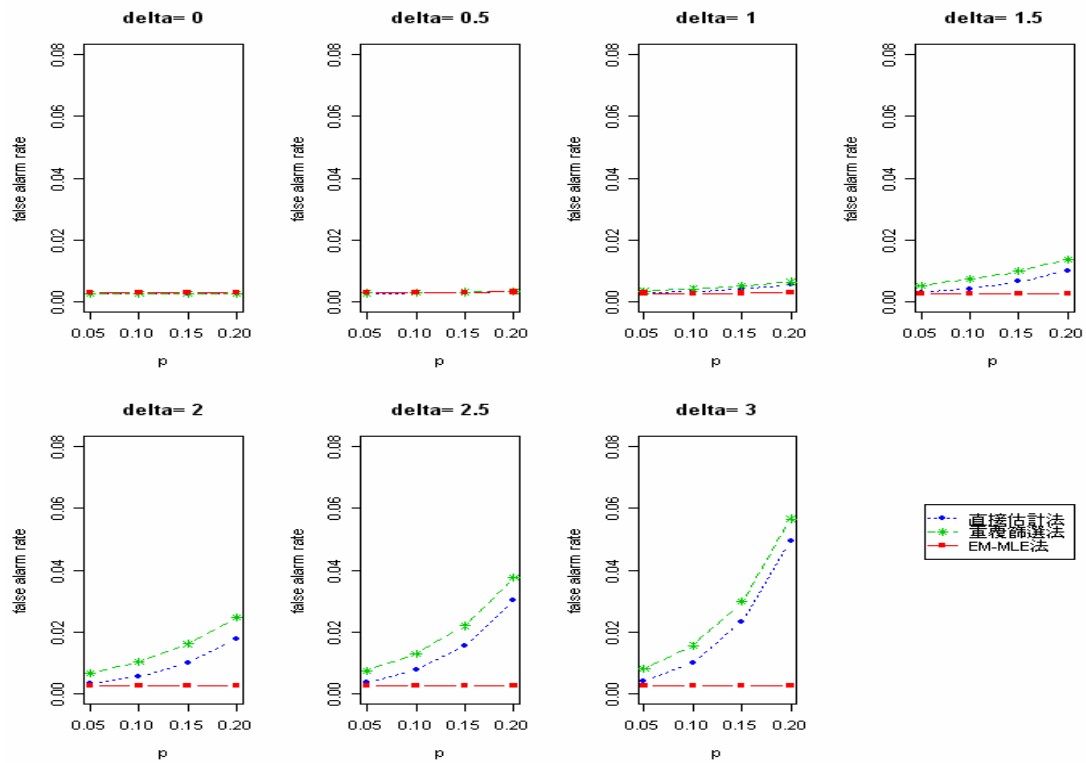
圖三： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 μ_0 的表現



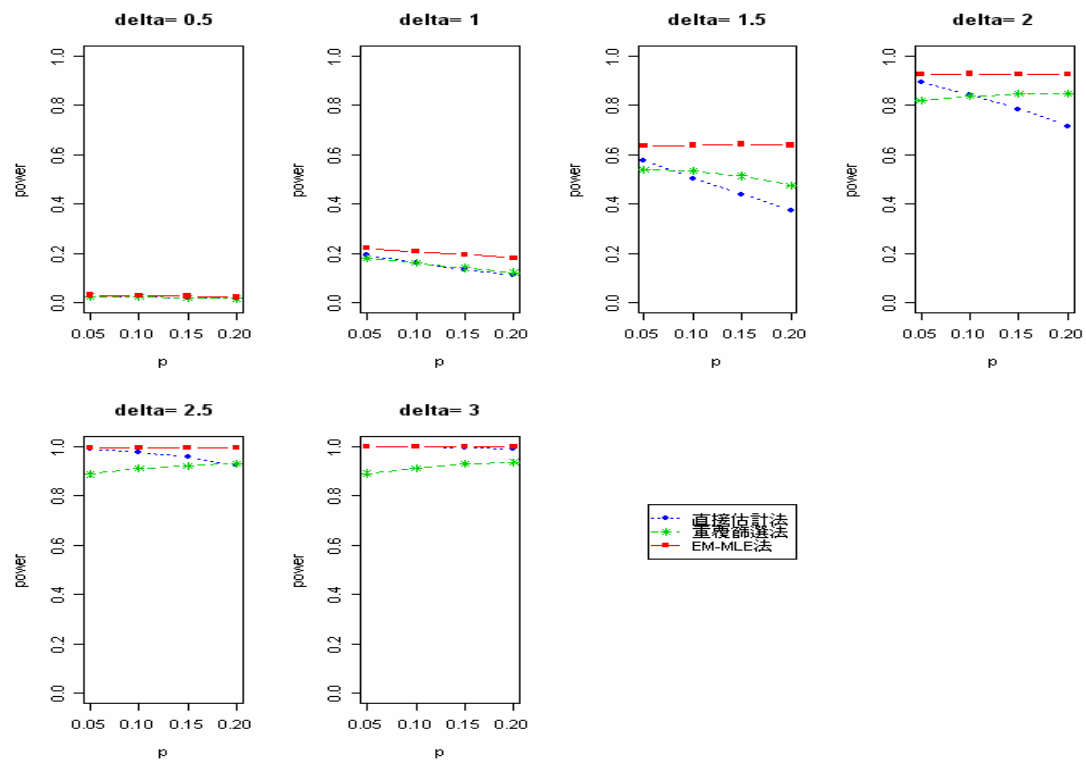
圖四： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 σ 的表現



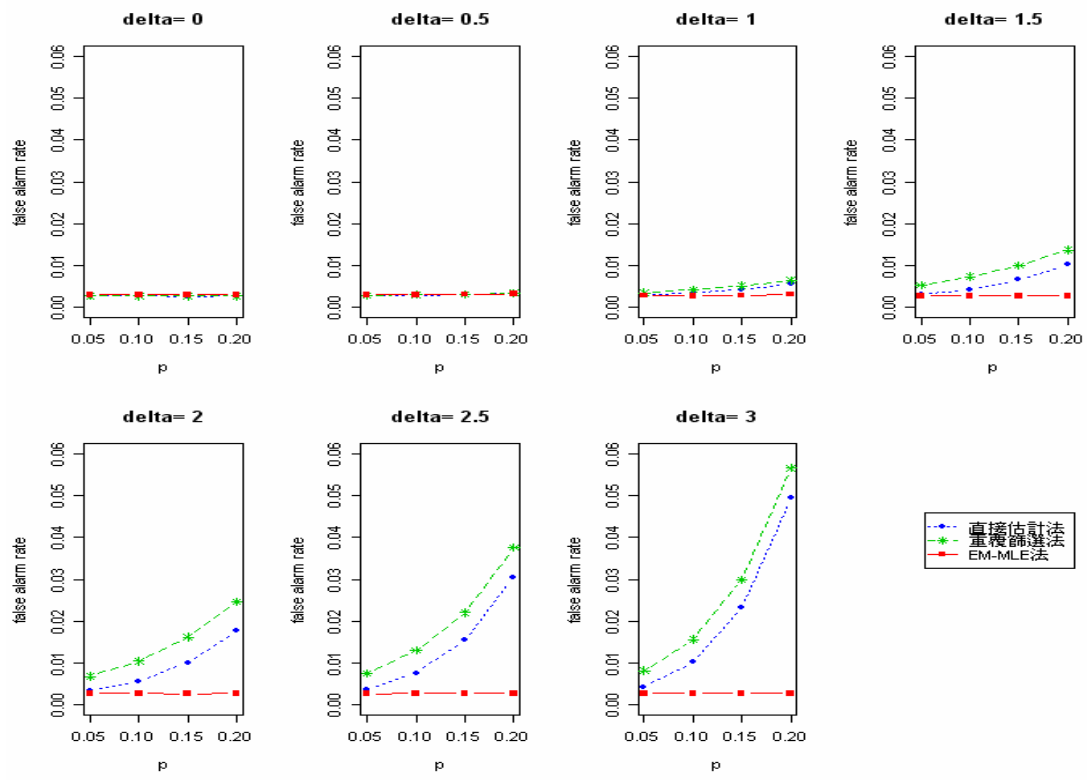
圖五： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率的表現



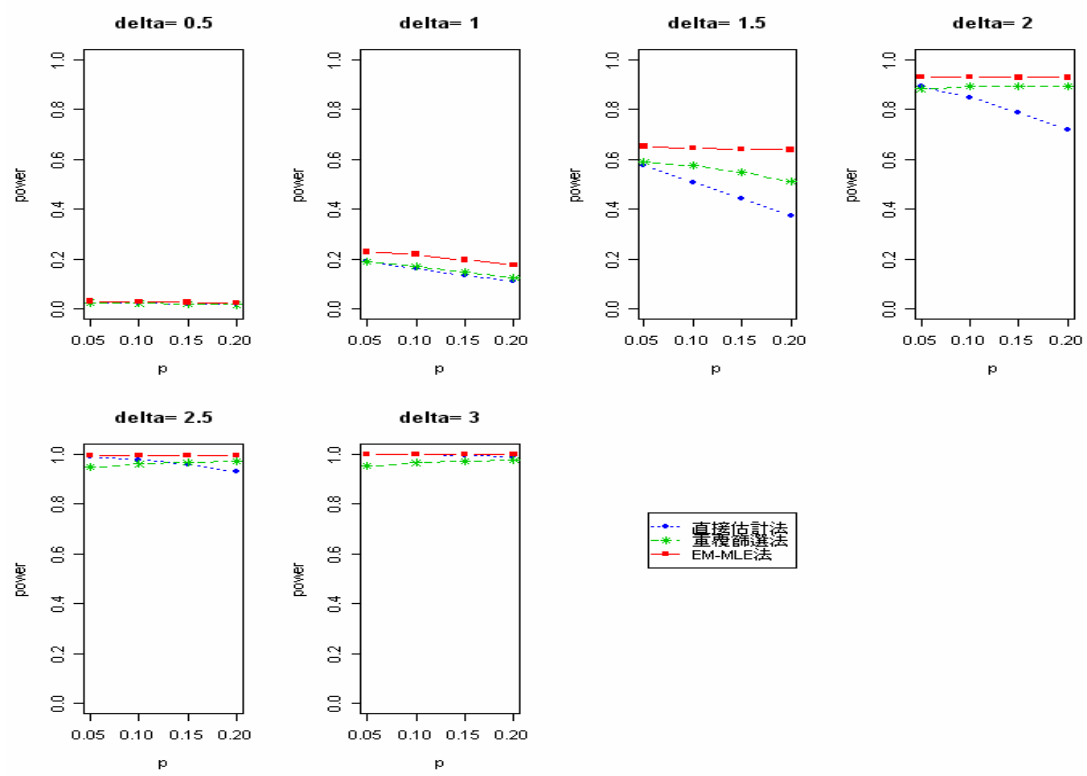
圖六： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現



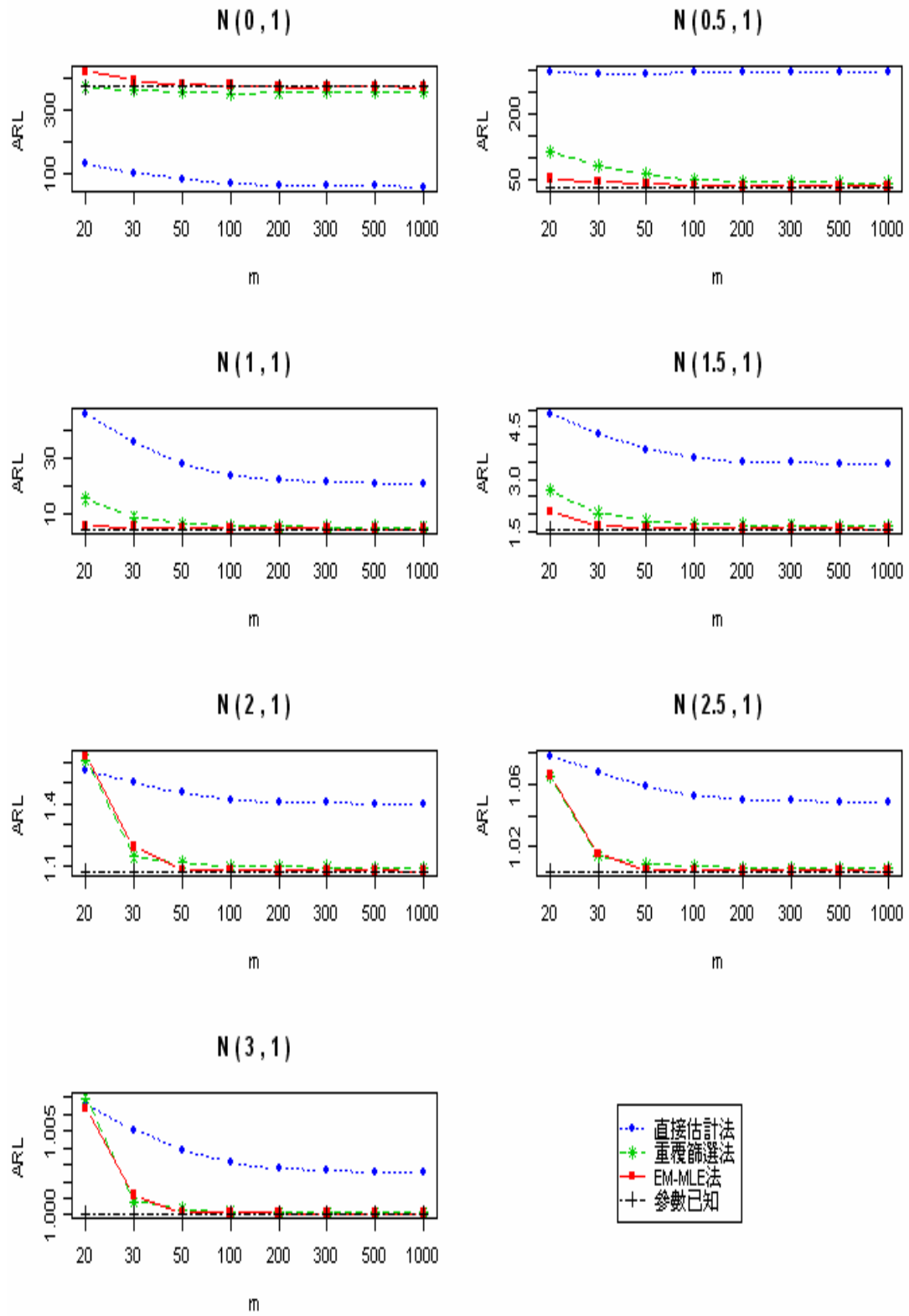
圖七： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率的表現



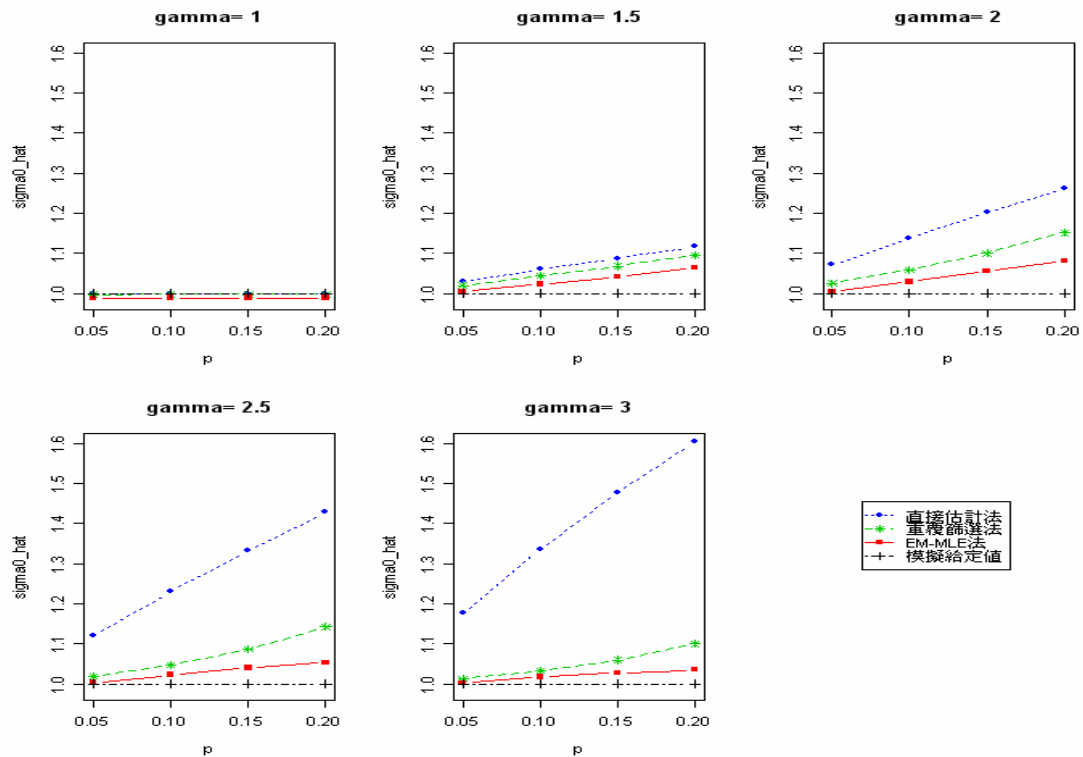
圖八： \bar{X} 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現



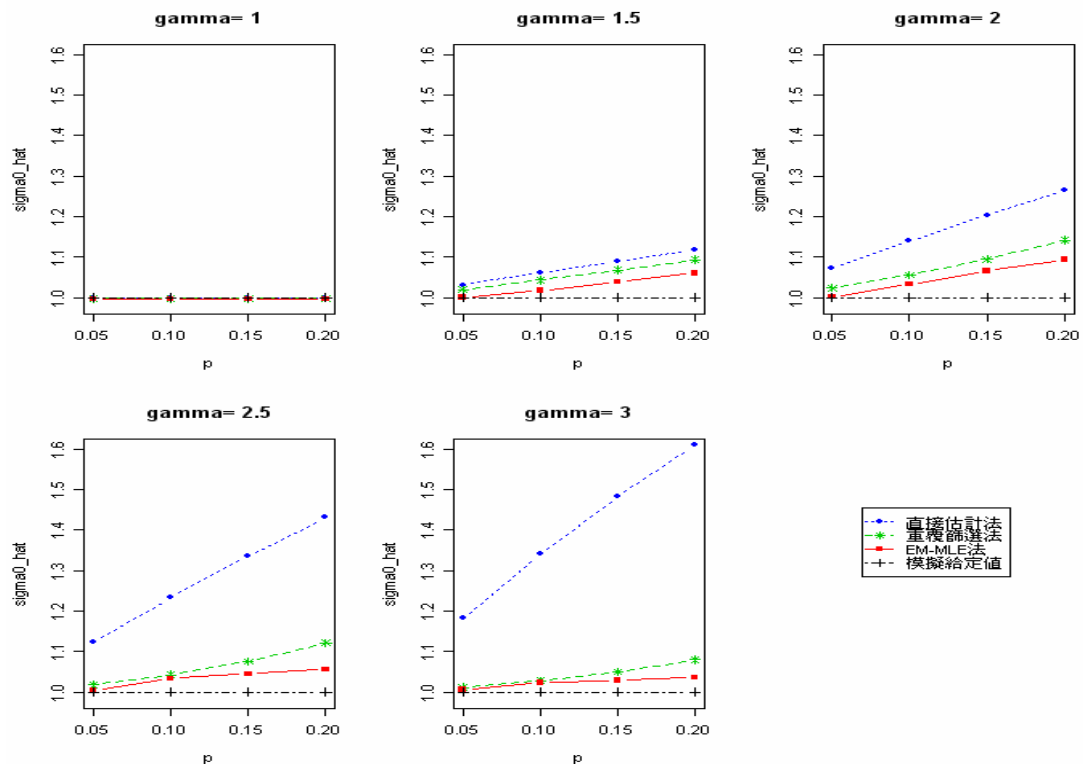
圖九：階段 I 中 $\delta = 2$ 和 $p = 0.2$ 時利用三種方法估計參數後，在階段 II 中 ARL 的表現(圖形的標題 $N(0,1)$ 表示階段 II 的資料來自於 $N(0,1)$)



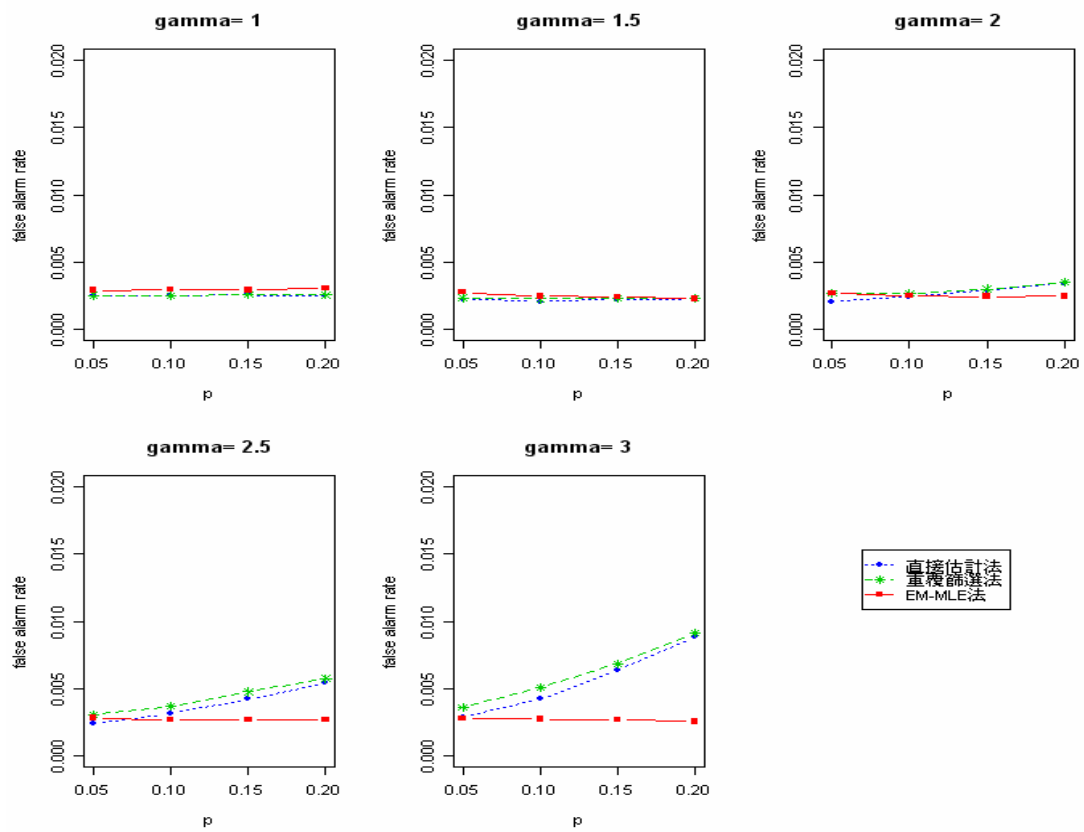
圖十： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法估計 σ_0 的表現



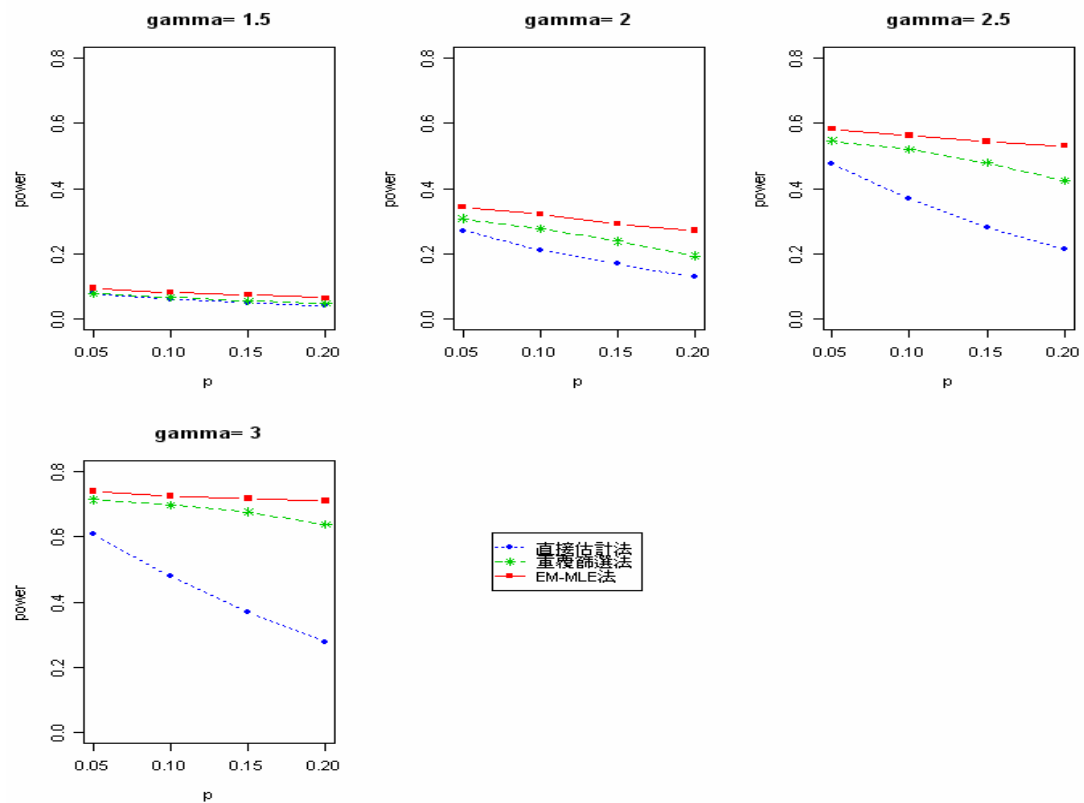
圖十一： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法估計 σ_0 的表現



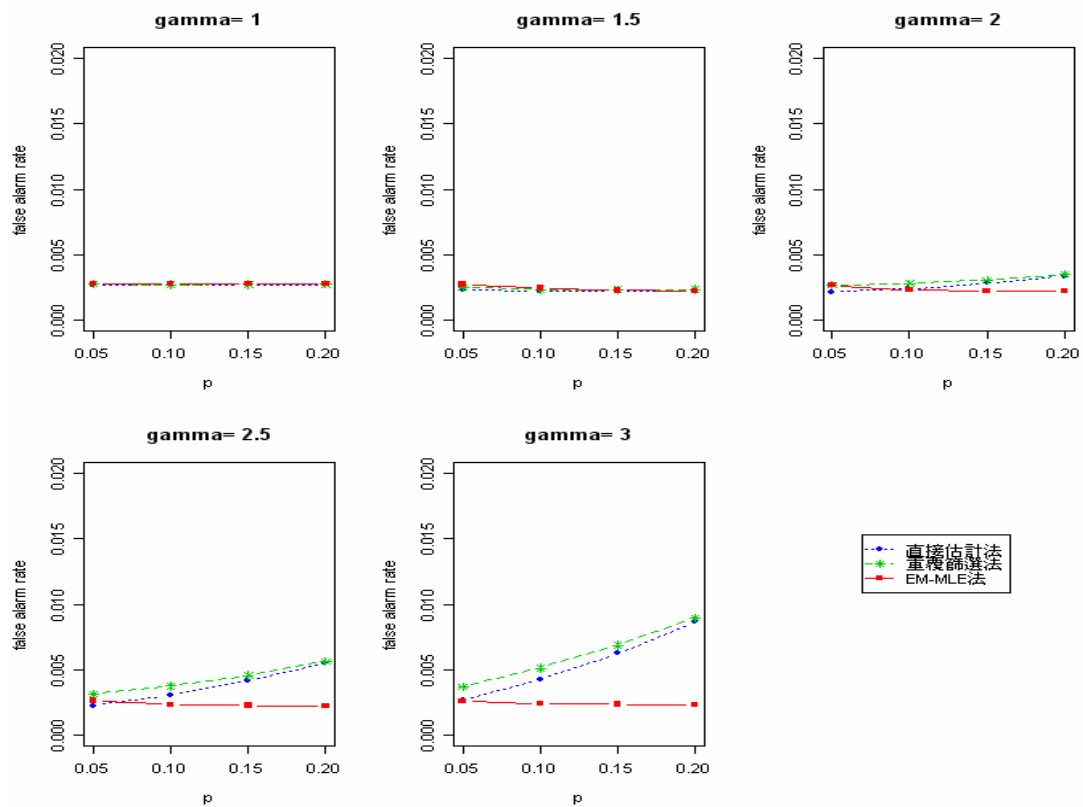
圖十二： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率的表現



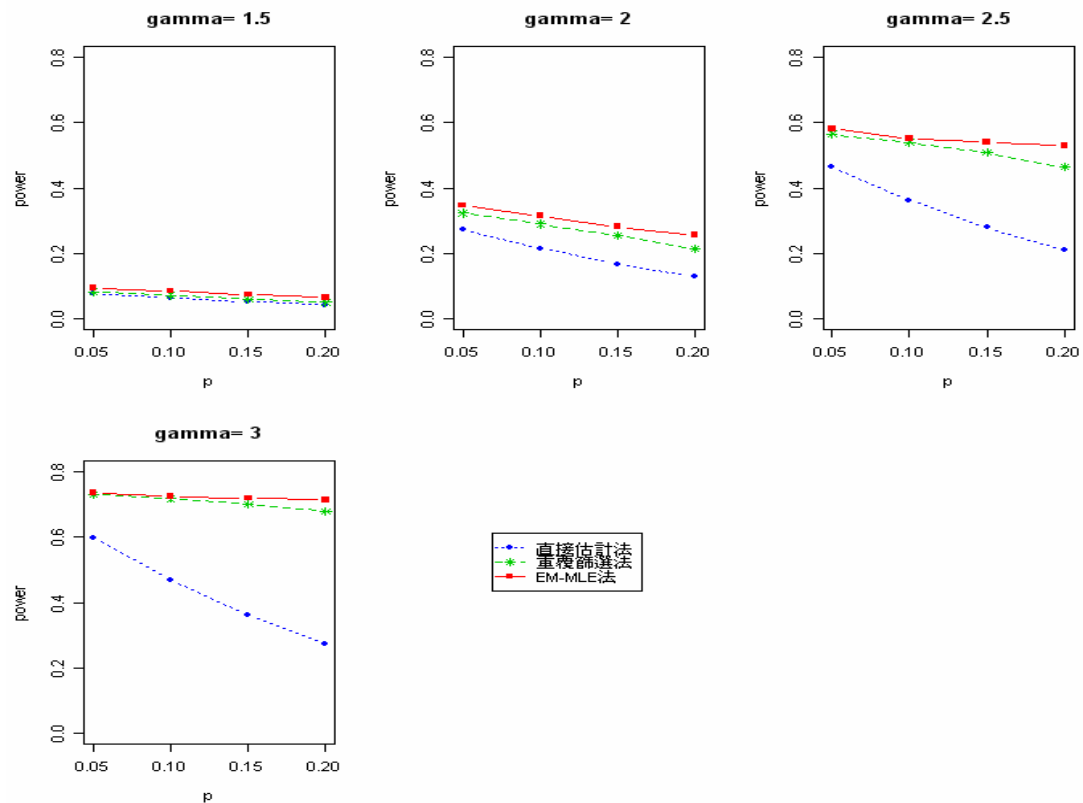
圖十三： S^2 管制圖中，子群數 $m=100$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現



圖十四： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中假警報率的表現



圖十五： S^2 管制圖中，子群數 $m=1000$ ，三種估計法在階段 I 中偵測力的表現



表一：在混合分配下， \bar{X} 管制圖中當管制上下限為 $\mu_x \pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 之假警報率和偵測力理論值

(a)假警報率 α

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0027 | 0.0027 | 0.0029 | 0.0031 | 0.0034 | 0.0038 | 0.0043 |
| 0.1 | 0.0027 | 0.0029 | 0.0034 | 0.0043 | 0.0056 | 0.0075 | 0.0100 |
| 0.15 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0043 | 0.0065 | 0.0100 | 0.0154 | 0.0231 |
| 0.2 | 0.0027 | 0.0034 | 0.0056 | 0.0100 | 0.0177 | 0.0299 | 0.0486 |

(b)偵測力 $1-\beta$

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0027 | 0.0263 | 0.1906 | 0.5739 | 0.8941 | 0.9896 | 0.9996 |
| 0.1 | 0.0027 | 0.0231 | 0.1617 | 0.5075 | 0.8473 | 0.9789 | 0.9988 |
| 0.15 | 0.0027 | 0.0202 | 0.1358 | 0.4408 | 0.7885 | 0.9601 | 0.9966 |
| 0.2 | 0.0027 | 0.0177 | 0.1129 | 0.3757 | 0.7183 | 0.9295 | 0.9910 |

表二：在混合分配下， S^2 管制圖中當管制上下限為

$(\tilde{\sigma}^2 \chi^2_{0.99865, n-1} / (n-1), \tilde{\sigma}^2 \chi^2_{0.00135, n-1} / (n-1))$ 之假警報率和偵測力理論值

(a)假警報率 α

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0027 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0023 | 0.0027 |
| 0.1 | 0.0027 | 0.0022 | 0.0024 | 0.0031 | 0.0043 |
| 0.15 | 0.0027 | 0.0022 | 0.0028 | 0.0042 | 0.0063 |
| 0.2 | 0.0027 | 0.0023 | 0.0034 | 0.0055 | 0.0086 |

(b)偵測力 $1-\beta$

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0027 | 0.0781 | 0.2756 | 0.4635 | 0.5972 |
| 0.1 | 0.0027 | 0.0640 | 0.2159 | 0.3616 | 0.4689 |
| 0.15 | 0.0027 | 0.0523 | 0.1680 | 0.2782 | 0.3606 |
| 0.2 | 0.0027 | 0.0428 | 0.1299 | 0.2117 | 0.2731 |

表三： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | -0.0001 | 0.0238 | 0.0492 | 0.0751 | 0.1008 | 0.1242 | 0.1512 |
| 0.1 | 0.0003 | 0.0501 | 0.0987 | 0.1494 | 0.2000 | 0.2500 | 0.3001 |
| 0.15 | 0.0000 | 0.0751 | 0.1501 | 0.2260 | 0.2997 | 0.3747 | 0.4509 |
| 0.2 | 0.0000 | 0.0998 | 0.2003 | 0.3001 | 0.4005 | 0.4990 | 0.6012 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0448 | 0.0456 | 0.0500 | 0.0562 | 0.0625 | 0.0700 | 0.0791 |
| 0.1 | 0.0443 | 0.0466 | 0.0544 | 0.0637 | 0.0759 | 0.0876 | 0.0997 |
| 0.15 | 0.0448 | 0.0479 | 0.0576 | 0.0700 | 0.0844 | 0.1000 | 0.1168 |
| 0.2 | 0.0447 | 0.0487 | 0.0603 | 0.0750 | 0.0900 | 0.1093 | 0.1286 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9994 | 0.9998 | 0.9997 | 1.0002 | 1.0007 | 1.0000 | 1.0003 |
| 0.1 | 0.9995 | 1.0002 | 1.0001 | 0.9995 | 0.9997 | 0.9999 | 0.9998 |
| 0.15 | 0.9999 | 0.9999 | 1.0002 | 1.0002 | 0.9997 | 0.9993 | 1.0001 |
| 0.2 | 1.0003 | 1.0003 | 1.0004 | 1.0001 | 1.0006 | 1.0000 | 1.0002 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0352 | 0.0350 | 0.0349 | 0.0361 | 0.0354 | 0.0350 | 0.0349 |
| 0.1 | 0.0354 | 0.0355 | 0.0353 | 0.0351 | 0.0357 | 0.0352 | 0.0354 |
| 0.15 | 0.0354 | 0.0353 | 0.0355 | 0.0348 | 0.0355 | 0.0352 | 0.0353 |
| 0.2 | 0.0356 | 0.0352 | 0.0352 | 0.0356 | 0.0354 | 0.0354 | 0.0353 |

表四： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0000 | 0.0238 | 0.0355 | 0.0247 | 0.0069 | 0.0042 | 0.0034 |
| 0.1 | 0.0003 | 0.0488 | 0.0756 | 0.0522 | 0.0151 | 0.0096 | 0.0124 |
| 0.15 | 0.0004 | 0.0733 | 0.1199 | 0.0892 | 0.0289 | 0.0185 | 0.0259 |
| 0.2 | -0.0008 | 0.0968 | 0.1662 | 0.1402 | 0.0497 | 0.0346 | 0.0505 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0446 | 0.0471 | 0.0500 | 0.0514 | 0.0480 | 0.0472 | 0.0468 |
| 0.1 | 0.0461 | 0.0477 | 0.0558 | 0.0596 | 0.0520 | 0.0493 | 0.0491 |
| 0.15 | 0.0459 | 0.0499 | 0.0614 | 0.0717 | 0.0574 | 0.0524 | 0.0527 |
| 0.2 | 0.0456 | 0.0505 | 0.0658 | 0.0862 | 0.0657 | 0.0565 | 0.0600 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 1.0001 | 0.9999 | 0.9997 | 1.0001 | 1.0005 | 0.9997 | 0.9999 |
| 0.1 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9999 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9996 | 0.9997 |
| 0.15 | 1.0001 | 1.0003 | 1.0006 | 1.0004 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 |
| 0.2 | 1.0001 | 1.0001 | 0.9999 | 1.0009 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0351 | 0.0357 | 0.0355 | 0.0360 | 0.0362 | 0.0366 | 0.0363 |
| 0.1 | 0.0350 | 0.0356 | 0.0354 | 0.0367 | 0.0368 | 0.0374 | 0.0374 |
| 0.15 | 0.0349 | 0.0349 | 0.0356 | 0.0374 | 0.0382 | 0.0387 | 0.0391 |
| 0.2 | 0.0354 | 0.0357 | 0.0357 | 0.0374 | 0.0395 | 0.0405 | 0.0406 |

表五： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | -0.0011 | 0.0170 | 0.0094 | 0.0000 | -0.0028 | -0.0001 | 0.0007 |
| 0.1 | 0.0013 | 0.0377 | 0.0292 | -0.0003 | -0.0010 | -0.0005 | -0.0004 |
| 0.15 | -0.0003 | 0.0572 | 0.0513 | -0.0040 | -0.0001 | -0.0004 | -0.0005 |
| 0.2 | 0.0008 | 0.0816 | 0.0771 | -0.0002 | 0.0010 | -0.0006 | 0.0015 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0713 | 0.0732 | 0.0686 | 0.0620 | 0.0562 | 0.0532 | 0.0499 |
| 0.1 | 0.0711 | 0.0773 | 0.0714 | 0.0599 | 0.0499 | 0.0487 | 0.0473 |
| 0.15 | 0.0693 | 0.0801 | 0.0764 | 0.0596 | 0.0501 | 0.0488 | 0.0488 |
| 0.2 | 0.0710 | 0.0840 | 0.0862 | 0.0602 | 0.0523 | 0.0510 | 0.0504 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9994 | 0.9998 | 0.9997 | 1.0002 | 1.0007 | 1.0000 | 1.0003 |
| 0.1 | 0.9995 | 1.0002 | 1.0001 | 0.9995 | 0.9997 | 0.9999 | 0.9998 |
| 0.15 | 0.9999 | 0.9999 | 1.0002 | 1.0002 | 0.9997 | 0.9993 | 1.0001 |
| 0.2 | 1.0003 | 1.0003 | 1.0004 | 1.0001 | 1.0006 | 1.0000 | 1.0002 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0352 | 0.0350 | 0.0349 | 0.0361 | 0.0354 | 0.0350 | 0.0349 |
| 0.1 | 0.0354 | 0.0355 | 0.0353 | 0.0351 | 0.0357 | 0.0352 | 0.0354 |
| 0.15 | 0.0354 | 0.0353 | 0.0355 | 0.0348 | 0.0355 | 0.0352 | 0.0353 |
| 0.2 | 0.0356 | 0.0352 | 0.0352 | 0.0356 | 0.0354 | 0.0354 | 0.0353 |

表六： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 求 μ_0 和 σ 的最大概似估計量估計 μ_0 和 σ ，模擬 10000 次參數估計的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | -0.0011 | 0.0170 | 0.0094 | 0.0000 | -0.0028 | -0.0001 | 0.0007 |
| 0.1 | 0.0013 | 0.0377 | 0.0292 | -0.0003 | -0.0010 | -0.0005 | -0.0004 |
| 0.15 | -0.0003 | 0.0572 | 0.0513 | -0.0040 | -0.0001 | -0.0004 | -0.0005 |
| 0.2 | 0.0008 | 0.0816 | 0.0771 | -0.0002 | 0.0010 | -0.0006 | 0.0015 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0713 | 0.0732 | 0.0686 | 0.0620 | 0.0562 | 0.0532 | 0.0499 |
| 0.1 | 0.0711 | 0.0773 | 0.0714 | 0.0599 | 0.0499 | 0.0487 | 0.0473 |
| 0.15 | 0.0693 | 0.0801 | 0.0764 | 0.0596 | 0.0501 | 0.0488 | 0.0488 |
| 0.2 | 0.0710 | 0.0840 | 0.0862 | 0.0602 | 0.0523 | 0.0510 | 0.0504 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9836 | 1.0103 | 1.0861 | 1.1299 | 1.0981 | 1.0658 | 1.0381 |
| 0.1 | 0.9829 | 1.0351 | 1.1538 | 1.0817 | 1.0074 | 0.9918 | 0.9903 |
| 0.15 | 0.9834 | 1.0540 | 1.2010 | 1.0285 | 0.9912 | 0.9876 | 0.9873 |
| 0.2 | 0.9828 | 1.0715 | 1.2362 | 1.0072 | 0.9899 | 0.9873 | 0.9885 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0675 | 0.0699 | 0.0847 | 0.1341 | 0.1668 | 0.1689 | 0.1549 |
| 0.1 | 0.0672 | 0.0715 | 0.0982 | 0.1759 | 0.1170 | 0.0859 | 0.0775 |
| 0.15 | 0.0675 | 0.0719 | 0.1150 | 0.1548 | 0.0809 | 0.0715 | 0.0723 |
| 0.2 | 0.0675 | 0.0729 | 0.1326 | 0.1264 | 0.0764 | 0.0718 | 0.0714 |

表七： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0032 | 0.0036 | 0.0040 | 0.0047 |
| 0.1 | 0.0028 | 0.0029 | 0.0035 | 0.0045 | 0.0062 | 0.0083 | 0.0115 |
| 0.15 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0044 | 0.0068 | 0.0107 | 0.0172 | 0.0268 |
| 0.2 | 0.0027 | 0.0034 | 0.0057 | 0.0105 | 0.0194 | 0.0331 | 0.0542 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0054 | 0.0055 | 0.0057 | 0.0059 | 0.0061 | 0.0068 | 0.0072 |
| 0.1 | 0.0055 | 0.0058 | 0.0063 | 0.0072 | 0.0087 | 0.0105 | 0.0132 |
| 0.15 | 0.0053 | 0.0061 | 0.0073 | 0.0093 | 0.0121 | 0.0168 | 0.0237 |
| 0.2 | 0.0053 | 0.0066 | 0.0086 | 0.0122 | 0.0179 | 0.0267 | 0.0396 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0273 | 0.1922 | 0.5769 | 0.8933 | 0.9886 | 0.9996 |
| 0.1 | NA | 0.0228 | 0.1637 | 0.5046 | 0.8453 | 0.9773 | 0.9985 |
| 0.15 | NA | 0.0203 | 0.1360 | 0.4402 | 0.7842 | 0.9571 | 0.9955 |
| 0.2 | NA | 0.0182 | 0.1134 | 0.3754 | 0.7165 | 0.9247 | 0.9885 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0859 | 0.2047 | 0.2519 | 0.1501 | 0.0514 | 0.0085 |
| 0.1 | NA | 0.0508 | 0.1247 | 0.1716 | 0.1215 | 0.0465 | 0.0116 |
| 0.15 | NA | 0.0378 | 0.0960 | 0.1412 | 0.1176 | 0.0547 | 0.0168 |
| 0.2 | NA | 0.0312 | 0.0757 | 0.1219 | 0.1166 | 0.0656 | 0.0245 |

表八： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0027 | 0.0030 | 0.0047 | 0.0091 | 0.0126 | 0.0138 | 0.0148 |
| 0.1 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0058 | 0.0124 | 0.0197 | 0.0224 | 0.0268 |
| 0.15 | 0.0028 | 0.0034 | 0.0067 | 0.0163 | 0.0280 | 0.0355 | 0.0444 |
| 0.2 | 0.0028 | 0.0038 | 0.0082 | 0.0202 | 0.0387 | 0.0553 | 0.0779 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0053 | 0.0058 | 0.0076 | 0.0125 | 0.0164 | 0.0178 | 0.0186 |
| 0.1 | 0.0053 | 0.0061 | 0.0089 | 0.0163 | 0.0246 | 0.0271 | 0.0309 |
| 0.15 | 0.0054 | 0.0065 | 0.0099 | 0.0204 | 0.0322 | 0.0389 | 0.0461 |
| 0.2 | 0.0055 | 0.0071 | 0.0115 | 0.0231 | 0.0416 | 0.0544 | 0.0698 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0262 | 0.1802 | 0.5406 | 0.8210 | 0.9888 | 0.9994 |
| 0.1 | NA | 0.0228 | 0.1614 | 0.5345 | 0.8385 | 0.9789 | 0.9986 |
| 0.15 | NA | 0.0196 | 0.1420 | 0.5141 | 0.8468 | 0.9621 | 0.9965 |
| 0.2 | NA | 0.0176 | 0.1228 | 0.4751 | 0.8482 | 0.9316 | 0.9905 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0892 | 0.2074 | 0.2683 | 0.1985 | 0.1617 | 0.1603 |
| 0.1 | NA | 0.0534 | 0.1371 | 0.1990 | 0.1484 | 0.1227 | 0.1237 |
| 0.15 | NA | 0.0385 | 0.1095 | 0.1780 | 0.1271 | 0.1057 | 0.1037 |
| 0.2 | NA | 0.0316 | 0.0915 | 0.1685 | 0.1176 | 0.0933 | 0.0937 |

表九： \bar{X} 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 μ_0 和 σ 的假警報率和偵測力，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\mu}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0033 | 0.0034 | 0.0032 | 0.0032 | 0.0030 | 0.0028 | 0.0027 |
| 0.1 | 0.0035 | 0.0035 | 0.0031 | 0.0031 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0028 |
| 0.15 | 0.0033 | 0.0036 | 0.0033 | 0.0031 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0026 |
| 0.2 | 0.0034 | 0.0040 | 0.0038 | 0.0030 | 0.0030 | 0.0027 | 0.0026 |

(b) $\hat{\mu}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0058 | 0.0061 | 0.0059 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 |
| 0.1 | 0.0059 | 0.0062 | 0.0061 | 0.0060 | 0.0058 | 0.0055 | 0.0056 |
| 0.15 | 0.0057 | 0.0067 | 0.0064 | 0.0062 | 0.0059 | 0.0059 | 0.0056 |
| 0.2 | 0.0058 | 0.0074 | 0.0075 | 0.0063 | 0.0061 | 0.0059 | 0.0060 |

(c) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0305 | 0.2218 | 0.6358 | 0.9260 | 0.9945 | 0.9999 |
| 0.1 | NA | 0.0288 | 0.2075 | 0.6388 | 0.9279 | 0.9940 | 0.9999 |
| 0.15 | NA | 0.0258 | 0.1954 | 0.6430 | 0.9270 | 0.9947 | 0.9998 |
| 0.2 | NA | 0.0223 | 0.1815 | 0.6391 | 0.9270 | 0.9943 | 0.9999 |

(d) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | δ | | | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0895 | 0.2173 | 0.2519 | 0.1343 | 0.0375 | 0.0055 |
| 0.1 | NA | 0.0586 | 0.1465 | 0.1745 | 0.0903 | 0.0263 | 0.0040 |
| 0.15 | NA | 0.0444 | 0.1219 | 0.1464 | 0.0743 | 0.0196 | 0.0037 |
| 0.2 | NA | 0.0355 | 0.1097 | 0.1304 | 0.0652 | 0.0179 | 0.0028 |

表十： \bar{X} 管制圖在 $\delta = 2$ 和 $p = 0.2$ 時用直接估計法估計參數後在階段 II 中的 ARL

| m | $\tilde{\delta}$ | | | | | | |
|----------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | ARL_0 | | | ARL_1 | | | |
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 20 | 126.9675 | 297.789 | 46.4591 | 4.889119 | 1.557689 | 1.077551 | 1.00654 |
| 30 | 98.57248 | 290.4632 | 35.89206 | 4.292703 | 1.499738 | 1.067387 | 1.005041 |
| 50 | 81.41554 | 289.451 | 28.14893 | 3.850738 | 1.450508 | 1.058354 | 1.003819 |
| 100 | 67.43647 | 294.8182 | 23.75079 | 3.601215 | 1.419914 | 1.05248 | 1.003071 |
| 200 | 62.04301 | 294.0881 | 21.98677 | 3.487266 | 1.404523 | 1.049553 | 1.002739 |
| 300 | 60.04845 | 296.8953 | 21.65987 | 3.471081 | 1.402816 | 1.049112 | 1.002672 |
| 500 | 58.83653 | 295.671 | 21.10089 | 3.430718 | 1.396968 | 1.048042 | 1.002564 |
| 1000 | 57.6698 | 296.2461 | 20.85895 | 3.415897 | 1.395052 | 1.047635 | 1.002514 |
| ∞ | 370.3983 | 33.40078 | 4.495312 | 1.566493 | 1.075838 | 1.00482 | 1.000104 |

表十一： \bar{X} 管制圖在 $\delta = 2$ 和 $p = 0.2$ 時用重覆篩選法估計參數後在階段 II 中的 ARL

| m | $\tilde{\delta}$ | | | | | | |
|----------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | ARL_0 | | | ARL_1 | | | |
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 20 | 371.2702 | 113.696 | 15.41789 | 2.694917 | 1.610013 | 1.064163 | 1.006954 |
| 30 | 359.2671 | 82.06555 | 8.745305 | 2.021019 | 1.145642 | 1.014279 | 1.000785 |
| 50 | 355.3655 | 62.22221 | 6.386072 | 1.793656 | 1.11525 | 1.009635 | 1.000344 |
| 100 | 350.8763 | 49.23295 | 5.544992 | 1.71079 | 1.101208 | 1.00757 | 1.00021 |
| 200 | 352.2484 | 44.94234 | 5.313581 | 1.683616 | 1.096266 | 1.006902 | 1.000177 |
| 300 | 352.9314 | 43.62549 | 5.238808 | 1.674486 | 1.094592 | 1.006683 | 1.000167 |
| 500 | 353.0933 | 42.78439 | 5.192488 | 1.668998 | 1.093564 | 1.006543 | 1.00016 |
| 1000 | 353.8581 | 42.35123 | 5.17048 | 1.666608 | 1.093096 | 1.00647 | 1.000157 |
| ∞ | 370.3983 | 33.40078 | 4.495312 | 1.566493 | 1.075838 | 1.00482 | 1.000104 |

表十二： \bar{X} 管制圖在 $\delta = 2$ 和 $p = 0.2$ 時用 EM-MLE 法估計參數在階段 II 中的 ARL

| m | $\tilde{\delta}$ | | | | | | |
|----------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | ARL_0 | | ARL_1 | | | | |
| | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 20 | 419.5828 | 52.69736 | 5.54102 | 2.059485 | 1.630862 | 1.065031 | 1.006322 |
| 30 | 389.9802 | 44.54323 | 5.137878 | 1.656354 | 1.191322 | 1.015442 | 1.001201 |
| 50 | 379.8026 | 39.08546 | 4.807639 | 1.603446 | 1.082962 | 1.005795 | 1.000148 |
| 100 | 375.0066 | 36.37864 | 4.669098 | 1.58808 | 1.079943 | 1.005349 | 1.000127 |
| 200 | 369.2918 | 34.79498 | 4.576909 | 1.576618 | 1.077783 | 1.005072 | 1.000115 |
| 300 | 369.967 | 34.43519 | 4.558168 | 1.574538 | 1.077357 | 1.005008 | 1.000112 |
| 500 | 370.9186 | 34.09268 | 4.53897 | 1.572247 | 1.076906 | 1.004946 | 1.000109 |
| 1000 | 369.6732 | 33.75816 | 4.518131 | 1.569525 | 1.076399 | 1.004885 | 1.000107 |
| ∞ | 370.3983 | 33.40078 | 4.495312 | 1.566493 | 1.075838 | 1.00482 | 1.000104 |

表十三： S^2 管制圖中 $m = 100$ 用直接估計法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9989 | 1.0301 | 1.0711 | 1.1210 | 1.1771 |
| 0.1 | 0.9998 | 1.0598 | 1.1378 | 1.2314 | 1.3366 |
| 0.15 | 0.9993 | 1.0879 | 1.2027 | 1.3329 | 1.4786 |
| 0.2 | 0.9995 | 1.1165 | 1.2620 | 1.4284 | 1.6064 |

(b) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0352 | 0.0396 | 0.0529 | 0.0727 | 0.0970 |
| 0.1 | 0.0348 | 0.0425 | 0.0619 | 0.0893 | 0.1188 |
| 0.15 | 0.0351 | 0.0454 | 0.0689 | 0.0975 | 0.1280 |
| 0.2 | 0.0353 | 0.0485 | 0.0737 | 0.1026 | 0.1353 |

表十四： S^2 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9971 | 1.0198 | 1.0253 | 1.0187 | 1.0127 |
| 0.1 | 0.9978 | 1.0436 | 1.0583 | 1.0468 | 1.0322 |
| 0.15 | 0.9974 | 1.0682 | 1.0999 | 1.0866 | 1.0595 |
| 0.2 | 0.9978 | 1.0947 | 1.1509 | 1.1425 | 1.0999 |

(b) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0361 | 0.0393 | 0.0433 | 0.0436 | 0.0418 |
| 0.1 | 0.0358 | 0.0431 | 0.0525 | 0.0531 | 0.0497 |
| 0.15 | 0.0362 | 0.0464 | 0.0632 | 0.0707 | 0.0638 |
| 0.2 | 0.0361 | 0.0493 | 0.0753 | 0.0970 | 0.0916 |

表十五： S^2 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 σ_0^2 ，模擬 10000 次的結果

(a) $\hat{\sigma}$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.9876 | 1.0040 | 1.0046 | 1.0026 | 1.0017 |
| 0.1 | 0.9887 | 1.0225 | 1.0288 | 1.0224 | 1.0172 |
| 0.15 | 0.9886 | 1.0418 | 1.0558 | 1.0397 | 1.0274 |
| 0.2 | 0.9887 | 1.0639 | 1.0815 | 1.0530 | 1.0350 |

(b) $\hat{\sigma}$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0357 | 0.0391 | 0.0405 | 0.0413 | 0.0405 |
| 0.1 | 0.0363 | 0.0422 | 0.0470 | 0.0494 | 0.0493 |
| 0.15 | 0.0360 | 0.0450 | 0.0567 | 0.0593 | 0.0560 |
| 0.2 | 0.0360 | 0.0477 | 0.0684 | 0.0715 | 0.0635 |

表十六： S^2 管制圖中 $m=100$ 用直接估計法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬

10000 次的結果

(a) α 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0025 | 0.0022 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0029 |
| 0.1 | 0.0025 | 0.0021 | 0.0026 | 0.0032 | 0.0042 |
| 0.15 | 0.0026 | 0.0022 | 0.0029 | 0.0042 | 0.0064 |
| 0.2 | 0.0025 | 0.0022 | 0.0035 | 0.0054 | 0.0089 |

(b) α 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0049 | 0.0049 | 0.0046 | 0.0050 | 0.0055 |
| 0.1 | 0.0051 | 0.0048 | 0.0052 | 0.0060 | 0.0070 |
| 0.15 | 0.0051 | 0.0051 | 0.0058 | 0.0072 | 0.0089 |
| 0.2 | 0.0050 | 0.0053 | 0.0066 | 0.0083 | 0.0109 |

(c) $1-\beta$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0765 | 0.2709 | 0.4746 | 0.6065 |
| 0.1 | NA | 0.0599 | 0.2124 | 0.3673 | 0.4787 |
| 0.15 | NA | 0.0492 | 0.1683 | 0.2820 | 0.3685 |
| 0.2 | NA | 0.0411 | 0.1297 | 0.2154 | 0.2785 |

(d) $1-\beta$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.1355 | 0.2158 | 0.2367 | 0.2275 |
| 0.1 | NA | 0.0776 | 0.1266 | 0.1467 | 0.1502 |
| 0.15 | NA | 0.0550 | 0.0894 | 0.1063 | 0.1172 |
| 0.2 | NA | 0.0433 | 0.0687 | 0.0842 | 0.0945 |

表十七： S^2 管制圖中 $m=100$ 用重覆篩選法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬

10000 次的結果

(a) α 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0036 |
| 0.1 | 0.0025 | 0.0023 | 0.0027 | 0.0037 | 0.0051 |
| 0.15 | 0.0026 | 0.0023 | 0.0030 | 0.0048 | 0.0068 |
| 0.2 | 0.0026 | 0.0023 | 0.0035 | 0.0058 | 0.0091 |

(b) α 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0051 | 0.0050 | 0.0054 | 0.0057 | 0.0062 |
| 0.1 | 0.0051 | 0.0051 | 0.0055 | 0.0064 | 0.0077 |
| 0.15 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0060 | 0.0075 | 0.0092 |
| 0.2 | 0.0051 | 0.0053 | 0.0067 | 0.0086 | 0.0110 |

(c) $1-\beta$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0781 | 0.3077 | 0.5469 | 0.7135 |
| 0.1 | NA | 0.0669 | 0.2766 | 0.5200 | 0.6974 |
| 0.15 | NA | 0.0558 | 0.2385 | 0.4793 | 0.6760 |
| 0.2 | NA | 0.0478 | 0.1938 | 0.4249 | 0.6379 |

(d) $1-\beta$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.1384 | 0.2445 | 0.2586 | 0.2331 |
| 0.1 | NA | 0.0872 | 0.1650 | 0.1863 | 0.1657 |
| 0.15 | NA | 0.0653 | 0.1344 | 0.1648 | 0.1490 |
| 0.2 | NA | 0.0526 | 0.1145 | 0.1595 | 0.1518 |

表十八： S^2 管制圖中 $m=100$ 用 EM-MLE 法估計 σ_0^2 的假警報率和偵測力，模擬

10000 次的結果

(a) α 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0028 | 0.0028 |
| 0.1 | 0.0029 | 0.0025 | 0.0025 | 0.0027 | 0.0027 |
| 0.15 | 0.0029 | 0.0024 | 0.0025 | 0.0027 | 0.0027 |
| 0.2 | 0.0031 | 0.0023 | 0.0025 | 0.0027 | 0.0025 |

(b) α 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | 0.0054 | 0.0055 | 0.0053 | 0.0055 | 0.0055 |
| 0.1 | 0.0055 | 0.0053 | 0.0053 | 0.0055 | 0.0056 |
| 0.15 | 0.0055 | 0.0053 | 0.0054 | 0.0058 | 0.0057 |
| 0.2 | 0.0056 | 0.0053 | 0.0056 | 0.0060 | 0.0058 |

(c) $1-\beta$ 平均

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.0947 | 0.3431 | 0.5819 | 0.7387 |
| 0.1 | NA | 0.0813 | 0.3209 | 0.5615 | 0.7245 |
| 0.15 | NA | 0.0747 | 0.2913 | 0.5438 | 0.7162 |
| 0.2 | NA | 0.0641 | 0.2715 | 0.5309 | 0.7102 |

(d) $1-\beta$ 標準差

| p | γ | | | | |
|------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
| 0.05 | NA | 0.1518 | 0.2457 | 0.2512 | 0.2231 |
| 0.1 | NA | 0.0947 | 0.1648 | 0.1752 | 0.1552 |
| 0.15 | NA | 0.0744 | 0.1370 | 0.1497 | 0.1303 |
| 0.2 | NA | 0.0597 | 0.1251 | 0.1401 | 0.1181 |