

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

Bianchi IX 宇宙模型的探討

A Study on the Bianchi IX Model Universe



研究生：柯勝藍

指導教授：高文芳 教授

中華民國九十六年六月

Bianchi IX 宇宙模型的探討
A Study on the Bianchi IX Model Universe

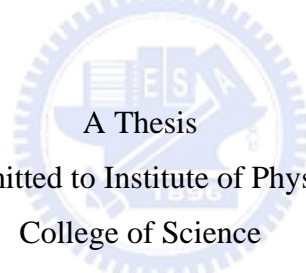
研究生：柯勝藍

Student : Sheng-Lan Ko

指導教授：高文芳

Advisor : W. F. Kao

國立交通大學
物理研究所
碩士論文



A Thesis
Submitted to Institute of Physics
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Physics
June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

Bianchi IX 宇宙模型的研究

學生：柯勝藍

指導教授：高文芳 博士

國立交通大學物理研究所碩士班

摘 要

爆漲理論可以解釋視界、平坦等微調問題。然而，若限制宇宙一開始就是如 FRW 度規所描述的各向同性，亦是一種不自然。因此我們放寬各向同性的限制但仍要求宇宙是空間均勻的，亦即，我們把 Bianchi 空間引入重力誘發爆漲裡頭。我們最後重新檢驗了在變分法裡頭容易被忽略的一個問題，最後我們發現，在 Lagrangian 放入一些高階修正項的 Bianchi II, VIII, IX 模型都可以直接對尺度因子變分而得到正確的場方程式。

A Study on the Bianchi IX model universe

student : Sheng-Lan Ko

Advisors : Dr. W. F. Kao

Institute of Physics
National Chiao Tung University

ABSTRACT

The inflation theory is known to solve the horizon and flatness problems. However, to restrict the initial universe to be isotropic as described by FRW metric is not natural. Hence, we release the constraint of isotropy but still require the universe to be homogeneous, i.e. we take Bianchi spaces into induced gravity inflation. We re-examine a problem about action principle which may be easily ignored in the end. After some detailed study, we find that it is correct to do variation of the action with respect to scale factors for Bianchi IX model up to some higher derivative Lagrangian corrections.

誌 謝

我很感謝父母親提供給我無憂無慮的環境，讓我可以好好的追尋我的興趣與夢想。也感激他們給我自由的選擇我的興趣跟發展空間。就像握著尼龍繩堅定的手讓風箏越飛越高，但卻永遠安全的連繫在一起。家人和朋友們的支持和鼓勵總是讓我在最困頓時突破瓶頸，因此我要把畢業的喜悅分享給所有給我力量衝破困境的人。

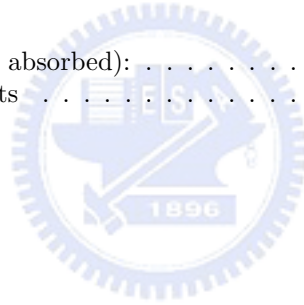
我很感激我的指導教授高文芳博士，可以說是他帶領我進入物理的殿堂，他的聰明跟學問很難學完，但是他的樂觀、和善與作學問的態度卻是影響我極深的。所上的許多教授也教導我很多，亦師亦父、亦師亦友，在物理所這個小小的大家庭裡，我學到很多東西。

最後，我很懷念這兩年的生活，這裡的伙伴都很和善也很可愛，學長姐和同學們的鼓勵和討論、指導，不僅對學業、生活上有幫助，也對煩悶的研究生生活注入活力。很多研究所的學生到畢業可能都沒見過幾個同學，但我在這裡交到了許多好朋友。要感謝的人太多，僅在此說一聲：謝謝您！

Contents

1	FRW universe and Inflation	1
1.1	大霹靂FRW 宇宙	1
1.1.1	Cosmological Principle	1
1.1.2	isotropic and homogeneous metric	1
1.1.3	理想流體與狀態方程	2
1.1.4	模型宇宙的演化	3
1.2	FRW 的缺點	4
1.2.1	The flatness problem	5
1.2.2	The horizon problem	5
1.3	Inflation scenario	5
1.3.1	視界與平坦問題的解決	6
1.3.2	爆漲機制	6
2	Bianchi II, VIII, IX models	9
2.1	the metric	9
2.2	the Bianchi Type II model	10
2.2.1	Spin connections	10
2.2.2	黎曼張量的分量	10
2.2.3	里奇張量的分量	11
2.2.4	純量曲率	11
2.2.5	高階曲率項	12
2.3	the Bianchi Type VIII, IX model	13
2.3.1	Spin connections	13
2.3.2	黎曼張量的分量	14
2.3.3	里奇張量的分量	14
2.3.4	純量曲率	15
2.3.5	高階曲率項	15
2.4	場方程式	16
2.4.1	Friedmann equation	16
2.4.2	a_i 的場方程式	17
2.4.3	E-H action 下的三條場方程式	18
2.4.4	Bianchi Identity	18
2.5	Induced gravity model	18

3 Results and analysis	20
3.1 E-H model 從非勻向到勻向	20
3.2 E-H model 解的穩定性分析	20
3.3 E-H model 數值模擬驗證	21
3.4 E-H model 下不同狀態的數值解	23
3.5 Induced gravity model 的數值解	27
3.6 變分方法的詳細探討	37
3.6.1 和愛因斯坦方程作比較	37
3.6.2 正確的變分方法	38
3.6.3 為什麼直接對 a 變分會對	41
3.6.4 正確變分中該引入的座標	42
3.6.5 高階修正可否直接對 a 變分	43
A Bianchi spaces	47
A.1 the Killing equations	48
A.2 三維運動群的九種李代數	48
A.3 在 G_2 裡 $[X_1, X_2] = 0$ 的度規	49
A.4 Bianchi II 的度規	49
A.5 Bianchi I 到 Bianchi IX 度規詳列	50
B Conventions	52
B.1 變數定義	52
C Units	54
C.1 Planck units (8π absorbed):	54
C.2 Geometrized units	54



List of Figures

1.1	SSB illustration:(a) sign = -1 (b) sign = 1	7
3.1	Bianchi II model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. , $a'(0) = 0.35$, $a_z(0) = 0.1$, $a(0) = 0.2$	22
3.2	Bianchi VIII model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. , $a'(0) = 0.1$, $a_z(0) = 0.5$, $a(0) = 0.2$	22
3.3	Bianchi IX model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec., $a'(0) = 1$, $a_z(0) = 2$, $a(0) = 1$	23
3.4	Bianchi II with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 0.42$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 9.91$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 3.10$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$	24
3.5	Bianchi VIII with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 1.02$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 9.96$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 3.26$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$	24
3.6	Bianchi IX with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 1$, $a'(0) = 0.01$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 12$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 2.94$, $a_z(0) = 0.27$, $a'_z(0) = 0.1$	25
3.7	Bianchi II with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 0.42$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 9.91$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 3.10$, $a_z(0) = 0.1$, $a'_z(0) = 0.1$	25

3.8 Bianchi VIII with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 1.02, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 9.96, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 3.26, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$ 26

3.9 Bianchi IX with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 1, a'(0) = 0.01, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 12, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 2.94, a_z(0) = 0.27, a'_z(0) = 0.1$ 26

3.10 Bianchi II R. D. to M. D., with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1, a'(0) = 5.46, a_z(0) = 0.2, a'_z(0) = 2$ 27

3.11 Bianchi VIII R. D. to M. D. with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1, a'(0) = 5.53, a_z(0) = 0.2, a'_z(0) = 2$ 27

3.12 Bianchi IX R. D. to M. D. with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9) , the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1, a'(0) = 12, a_z(0) = 0.2, a'_z(0) = 3$ 28

3.13 Bianchi II induced gravity inflation, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), with $\lambda = 4 \times 10^{-17}, \epsilon = 0.05, v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. For fig(a), dashed curve is $a(t)$, solid one is $a_z(t)$, vertical axis is log scale. . For fig(b), dashed horizontal line stands for minimum of $V(\phi)$. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5, a'(0) = 10^2, a_z(0) = 10^5, a'_z(0) = 10^2$ 29

3.14 Bianchi VIII induced gravity inflation, with $\lambda = 4 \times 10^{-17}, \epsilon = 0.05, v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. The plots are quite similar to Bianchi II's, thus the curvature term k/a^2 in the field equations is irrelevant. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5, a'(0) = 10^2, a_z(0) = 10^5, a'_z(0) = 10^2$ 30

3.15 Bianchi IX induced gravity inflation. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5, a'(0) = 10^2, a_z(0) = 10^5, a'_z(0) = 10^2$ 30

3.16 Bianchi IX example for comparison of numerical result and analytical approximation , solution of (3.5.17) and (3.5.20), in fig(b), the period is about $1.26 \times 10^8 t_p$, and the analytical approximation is about $1.11 \times 10^8 t_p$ 32

3.17 Bianchi II: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4) 33

3.18 Bianchi VIII: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4) 33

3.19 Bianchi IX: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4) 33

3.20 Bianchi II induced gravity inflation, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), with $\lambda = 8 \times 10^{-18}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. For fig(a), vertical axis is log scale. dashed curve is $a(t)$, solid one is $a_z(t)$. For fig(b), Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^2$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.0001$ 34

3.21 Bianchi VIII induced gravity inflation, with $\lambda = 8 \times 10^{-18}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. The plots are quite similar to Bianchi II's, thus the curvature term k/a^2 in the field equations is irrelevant. Initial conditions are: $a(0) = 300$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.001$ 35

3.22 Bianchi IX induced gravity inflation. Initial conditions are: $a(0) = 300$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.0001$ 35

3.23 Bianchi II: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), rolling down from RHS 36

3.24 Bianchi VIII: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4) 36

3.25 Bianchi IX: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4) 36



Chapter 1

FRW universe and Inflation

1.1 大霹靂FRW 宇宙

1.1.1 Cosmological Principle

宇宙論從愛因斯坦1917年一篇 Cosmological considerations of the General Theory of Relativity 開始進入科學化的研究。牛頓的重力描述在系統的質量與大小比很小的時後精確，即 $M/R \ll 1$ ，相對地，廣義相對論 (GR) 在 R 小得比 M 快，或是 M 大得比 R 快時顯得重要。前者例如中子星或黑洞，後者就是宇宙，因而描述宇宙的基本架構就是廣義相對論。

許多實驗觀測發現在數百 Mpc 尺度以上時，宇宙是十分均勻且各向對稱的 [1], [2], [3]。CMB (10^5 年以前殘留下來的背景輻射) 的高度均勻性也告訴我們 bary universe 是高度均勻且無向的。上述結果就是建立宇宙模型常採用的「大宇宙原則」。大宇宙原則給我們一個圖像，我們可以把宇宙當作一個流體的物理系統，每個流體元素 (fluid element) 是由好幾個銀河構成，於是我們自然會選擇 comoving frame 來描述這個宇宙：

$t \equiv$ the proper time of each fluid element

$x^i \equiv$ the spatial coordinates carried by each fluid element

1.1.2 isotropic and homogeneous metric

由於我們的時間座標是流體元素的 proper time，這意味著 $g_{00} = -1$ ，而我們可以考慮固定時間的三維空間切片，這意味著時間座標跟空間座標互相垂直，即我們有：

$$\begin{cases} g_{00} = -1 \\ g_{0i} = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

我們岔題研究一下二維均勻且無向的三種曲面，我們將證明他們可以寫成：

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 d\theta^2 \right) \quad (1.1.2)$$

其中 $k = 0, 1, -1$ 分別表示平面，二維球面以及假球面。 $k = 0$ 的情況很容易看出來度規給出平面，另一方面我們用球座標寫出半徑為 a 的球面度規：

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

再令 $\sin \theta \rightarrow \rho$, $\phi \rightarrow \theta$ 即可寫成 (1.1.2) 的形式。假球是由一 x - z 平面的等切距曲線 (tractrix) 繞 z 軸旋轉而來，等切距曲線的參數是 $(x, z) = (a \sin \theta, a \cos \theta + a \ln(\tan \theta/2))$ ，繞 z 軸旋轉後的曲面參數式就是：

$$\vec{X}(\theta, \phi) = \left(a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta + a \ln\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (1.1.3)$$

計算其度規可得：

$$ds^2 = a^2 \cot^2 \theta d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.1.4)$$

改以局部角座標表示，可改寫為 $ds^2 = a^2 (du^2 + \sinh^2 u dv^2)$ 即為 (1.1.2) 形式。對三維均勻且無向空間可以依此類推，於是在四維時空底下，這樣一個空間均勻且無向的度規叫做 Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 度規可以寫為 [1]：

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.1.5)$$

如此一來，研究宇宙的幾何就相當於決定 k 的值，而研究宇宙的動態行為，就相當於決定 $a(t)$ 。

1.1.3 理想流體與狀態方程

理想流體的定義是在暫時共動座標系 (momentarily comoving reference frame) 裡沒有黏滯性和熱傳導的流體 [1]。由於只有粒子流動才能造成能量流動，沒有熱傳導這性質告訴我們 $T^0_i = T^i_0 = 0$ 。而沒有黏滯性意味著沒有剪切應力，這告訴我們 $T^i_j = 0$ 除非 $i = j$ 。另外， T^i_j 是對角矩陣這件事在所有暫時共動座標系都應成立，也就是說必須有空間旋轉對稱，這告訴我們每個 T^i_i 都應相同。於是我們得到在暫時共動座標系裡的能動張量為：

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (1.1.6)$$

這樣一個理想流體，他的狀態方程可以寫為：

$$p = \omega \rho \quad (1.1.7)$$

我們知道宇宙可以分為幾個時期，輻射主控、物質主控與真空主控宇宙。當 $\omega = -1$ 時，很明顯能動張量等效於宇宙常數的效應。而若宇宙中充滿著非相對論性物質，由於非相對論性物質的壓力很小可以忽略，因而我們有 $\omega = 0$ 。

若宇宙中是充滿著相對論性粒子，用 n 標示粒子，第 n 顆粒子的能動四向量為 p_n^α ，則 p_n^α 的密度可以定義為：

$$T^\alpha_0 = \sum_n p_n^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.8)$$

我們也可以定義這能動四向量流為：

$$T^{\alpha}_0 = \sum_n p_n^{\alpha} \frac{dx_n^i}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.9)$$

這兩個定義可以寫在一起變成：

$$T^{\alpha}_{\beta} = \sum_n p_n^{\alpha} \frac{dx_n^{\beta}}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.10)$$

又由四動量中 $p^0 = E = m\gamma$ 且 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ ，我們有：

$$p_n^{\beta} = E_n \frac{dx^{\beta}}{dt} \quad (1.1.11)$$

(1.1.10) 就能改寫為：

$$T^{\alpha}_{\beta} = \sum_n \frac{p_n^{\alpha} p_n^{\beta}}{E_n} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.12)$$

又假設這能動張量是描述一理想流體，於是：

$$p = \frac{1}{3} T^i_i = \frac{1}{3} \sum_n \frac{p_n^2}{E_n} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.13)$$

$$-\rho = T^0_0 = \sum_n E_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (1.1.14)$$

對於一相對論性流體， $E_n \approx |p_n|$ ，於是我們得到相對論性流體會有 $p = \rho/3$ ，即 $\omega = 1/3$ 。其實觀察能動張量的 trace T^{μ}_{μ} ，這是一個 Lorentz invariant，他的量綱是能量，因而只能跟相對論性粒子的能量有關，但相對論性粒子沒有靜止質量，他的能量並非洛倫茲不變量，因而 T^{μ}_{μ} 理應是 0，從而也可得 $\omega = 1/3$ 。

1.1.4 模型宇宙的演化

考慮在理想流體下的FRW 度規宇宙 [1]，其 (0,0) 分量的愛因斯坦場方程可算出：

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.1.15)$$

這又叫 Friedmann equation，另外 (i,i) 分量的場方程式為：

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (1.1.16)$$

從這兩條方程可以得到能量守恆方程 $D_{\mu} T^{\mu}_0 = 0$ ，即 $d(\rho a^3) = -p d(a^3)$ 。把 (0,0) 分量和 (i,i) 分量的場方程相減可得：

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (1.1.17)$$

從這條式子可以發現若宇宙中只充滿一般性的物質，即 $\rho, p > 0$ ，那麼宇宙的膨脹將會是減速的。宇宙常數項為一定真空能量密度，且其具有負壓力，因而引進宇宙常數可以讓宇宙靜止，這正是當初愛因斯坦引入宇宙常數的目的，然而，他也可以造成宇宙加速膨脹，這是近年來實驗上觀測得到的。

我們若把 Friedmann equation 以哈伯常數 $H \equiv \dot{a}/a$ 改寫，且重新整理成這樣：

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho}{3H^2/(8\pi G)} - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (1.1.18)$$

其中密度比 Ω 定義作物質密度與關鍵密度 (critical density) $\rho_c \equiv 3H^2/(8\pi G)$ 的比值。如此一來上式明顯地把物質分佈跟宇宙的幾何連了起來。如果總物質密度超過了關鍵密度，那麼宇宙是封閉的 (closed)，若等於關鍵密度，宇宙是平坦的 (flat)，若小於關鍵密度，宇宙是開放的 (open)。

$$\begin{aligned} \Omega > 1 &\rightarrow k = +1 \quad \text{closed universe} \\ \Omega = 1 &\rightarrow k = 0 \quad \text{flat universe} \\ \Omega < 1 &\rightarrow k = -1 \quad \text{open universe} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

目前的實驗數據顯示，我們目前的宇宙 $\Omega - 1 \approx O(1)$ ，這意味著我們現在的宇宙是極其平坦的。

由能量守恆 $d(\rho a^3) = -pd(a^3)$ 加上狀態方程 $p = \omega\rho$ 可得 $\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}$ ，代入 $k = 0$ 的 Friedmann equation：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3(1+\omega)}$$

假設 $a \sim t^x$ 代入上式可得解 $x = 2/3(1 + \omega)$ ，於是對於物質主控跟輻射主控而言：

$$\begin{aligned} \text{Matter dominated} &\quad a \sim t^{2/3} \\ \text{Radiation dominated} &\quad a \sim t^{1/2} \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

雖然上面的結果是對 $k = 0$ 的平坦宇宙談的，但其實對 $k = \pm 1$ 而言，由於 power law 的關係，在早期宇宙時 Friedmann equation 中的曲率項相對來講會很小，因而可以丟掉，所以上述結果對任何幾何的宇宙都成立。對於真空主控來說， $x = 2/3(1 + \omega)$ 會發散，這代表真空主控的解不是 $a \sim t^x$ 形式。又我們已經知道真空能量主控會膨脹的很快，所以我們又可以把曲率項丟掉，因而解出：

$$\text{vacuum dominated} \quad a(t) = a(0)e^{t/\tau} \quad (1.1.21)$$

其中 $\tau = \sqrt{3/(\Lambda c^2)}$

1.2 FRW 的缺點

前節簡述的 FRW 大霹靂模型可以解釋很多在宇宙中觀測到的結果跟現象，然而卻存在一些所謂不自然的「微調」(fine tuning) 問題 [1],[4]。這並不是熱霹靂的矛盾或錯誤，只是一個不自然的初始條件，而爆漲宇宙模型可以視為一個給予我們現今宇宙初始條件的理論。

1.2.1 The flatness problem

由於物質和能量的吸引力，我們會預測宇宙會減速膨脹。在輻射主控時 $a \sim t^{1/2}$ 所以 $\dot{a} \sim t^{-1/2}$ ，而物質主控時 $a \sim t^{2/3}$ 所以 $\dot{a} \sim t^{-1/3}$ 。觀察 Friedmann equation，

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2}$$

在 $k \neq 0$ 的情況下，可以發現 $\Omega = 1$ 是個不穩定平衡點！也就是說 $\Omega - 1$ 是個遞增函數，一旦有小小的偏離將會越來越大，這有點「重力偏好曲率」的感覺。在現今的實驗發現 $0.01 < \Omega_p < 10$ ， p 代表現今，往時間更早以前推論，這意味著早期宇宙的 $\Omega - 1$ 要是異常的小。

我們可以作個簡單的定量估計，回溯到輻射、物質共存時期 t_{rm} (即 $\rho_r(t_{rm}) = \rho_m(t_{rm})$) 之前，紅位移約 $z_{rm} \sim O(10^4)$ ，宇宙是物質主控的 $a \sim t^{2/3}$ ， $\dot{a} \sim t^{-1/3} \sim a^{-1/2}$ ，於是我們可以估計現在 t_p 和物質輻射共存時期 t_{rm} 的 $\Omega - 1$ 比：

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{rm} - 1}{\Omega_p - 1} &= \left(\frac{\dot{a}(t_{rm})}{\dot{a}(t_p)} \right)^{-2} \\ &= \left(\frac{a(t_{rm})}{a(t_p)} \right) = (1 + z_{rm})^{-1} = O(10^{-4}) \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

再往前推到原始核合成 (nucleosynthesis) 時期， $t_{nu} \sim O(10^2 s)$ ，這時是輻射主控時期 $a \sim t^{1/2}$ ， $\dot{a} \sim t^{-1/2} \sim a^{-1}$ ，於是：

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{nu} - 1}{\Omega_{rm} - 1} &= \left(\frac{\dot{a}(t_{nu})}{\dot{a}(t_{rm})} \right)^{-2} = \left(\frac{a(t_{nu})}{t_{rm}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{k_B T_{nu}}{k_B T_{rm}} \right)^{-2} \sim O(10^{-10}) \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

結合上兩式就能得到，若現今要求 $\Omega_p - 1 \sim O(1)$ ，回溯到核合成時期就必須 $\Omega_{nu} - 1 \sim O(10^{-14})$ ，再往回推會得到更誇張的初始條件要求，這就是所謂的 flatness problem。

1.2.2 The horizon problem

大宇宙原則說了在某個尺度以上，宇宙看起來是均勻又等向的，例如 CMB 可以均勻到 10^{-5} 。但是在兩個角度所接受到的 CMB 有可能是來自兩個從來沒有互相溝通過的區域，即各自在各自的視界 (horizon) 以外，由於任何資訊傳遞不能快過光速，因此在宇宙有限的時間乘上光速這個距離以外的兩個區域就分屬在各自的視界以外，這樣一堆從未互相溝通過的區域有著這麼均勻的性質，這個奇怪的問題就叫作 horizon problem.

1.3 Inflation scenario

爆漲模型假設在 $10^{-35} s$ 到 $10^{-33} s$ 之間宇宙經歷了一個相變，使得整體爆漲了 10^{30} 倍以上 [1],[4]。

1.3.1 視界與平坦問題的解決

定性上來說，我們可以想像所有的曲率因暴漲而被拉平，而在這段期間超光速的 (superluminary) 膨脹也讓視界問題獲得解決，因為現在處在彼此視界範圍外的兩塊區域，在當初暴漲之前是屬於因果接觸的 (causal contact)。

注意到這個超光速的膨脹並非違反相對論裡的假設，因為這個膨脹是空間本身的膨脹。由於暴漲時超光速的過程，現在或 photon decoupling 時彼此在視界之外的區域在暴漲剛開始之前是因果接觸的，因此在當時整個現在可觀測宇宙達到熱平衡，這就能解釋 CMB 為何如此均勻。

暴漲是因宇宙中真空能量造成指數膨脹，這麼大的膨脹尺度可以把空間拉平，定量上我們可以用 Friedmann equation 估計：

$$\frac{\Omega(t_f) - 1}{\Omega(t_i) - 1} = \left(\frac{\dot{a}(t_f)}{\dot{a}(t_i)} \right)^2 = \exp[-2(t_f - t_i)/\Delta\tau] \sim 10^{60} \quad (1.3.24)$$

假設宇宙被真空主控膨脹了 $e^{(\Delta t)/\Delta\tau} \sim 10^{30}$ 倍，那麼暴漲結束後的初始條件 $\Omega(t_f)$ 就能相當的接近 1。

1.3.2 暴漲機制

Zee 在 1979 年提出，一個類似 GUT 的自發性對稱破壞的重力理論 [5]，隔年 Zee 其實就發現了他的對稱破壞的重力理論可以解釋視界問題 [6]。之後隨著暴漲學說 [4] 的提出，多以重力耦合到 Zee 的自發對稱破壞位能的 lagrangian 描述 [7]，許多人認為該純量場即 Higgs field [8], [9]，暴漲與粒子物理標準模型的討論見 [10]：

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\phi^2 R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - V_0^2)^2 \quad (1.3.25)$$

其中 ϵ, λ 為無量綱常數。

Spontaneous symmetry breaking

暴漲理論說宇宙在早期經歷一個自發對稱破壞的相變，我們簡單說明式 (1.3.25) 位能的來由 [1]。考慮下列這個 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{(sign)}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (1.3.26)$$

當 sign 是 -1 時，位能的圖形如下圖 (a) 所示；當 sign 是 1 時，位能的圖形如下圖 (b) 所示。我們會發現 (1.3.26) 這個系統擁有 $\phi \leftrightarrow -\phi$ 的鏡射對稱，然而考慮當 sign 是 1 的真空態，我們必須選擇在位能的極小 $\sigma_\pm = \pm\sqrt{m^2/\lambda}$ 作微擾，而一旦做出選擇，真空態就不再具有鏡射對稱，這就是自發性對稱破壞。由式 (1.3.26) 的 lagrangian，可以計算能量張量密度為：

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{L}g_{\mu\nu} \quad (1.3.27)$$

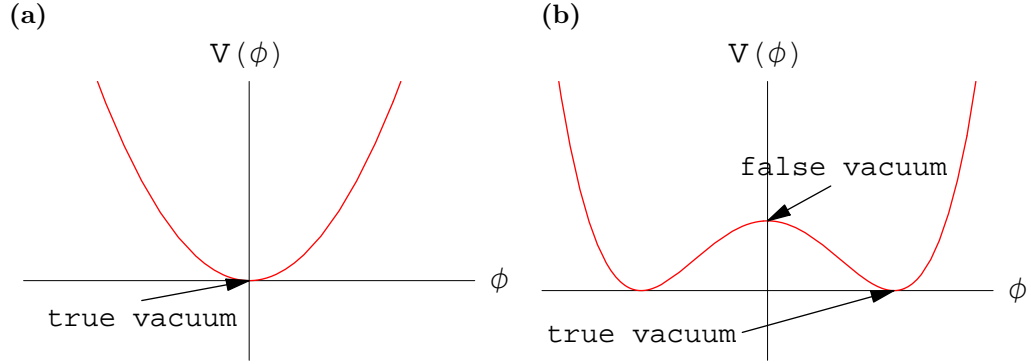


Figure 1.1: SSB illustration:(a) sign = -1 (b) sign = 1

當位能到達極小值， ϕ 可取作常數，因而發現 $T_{\mu\nu} = V(\langle \phi \rangle)g_{\mu\nu}$ ，其中 $\langle \phi \rangle$ 代表 ϕ 的真空期望值。所以真空能量密度就是：

$$\langle T^0_0 \rangle = -\frac{m^4}{4\lambda} \quad (1.3.28)$$

由於我們得要讓爆漲結束，且現今對於真空能量密度的測量結果發現宇宙常數非常小，實際上關於宇宙常數的理論與實驗比較上還有好幾個 orders 的差距 [11]，但我們這裡主要目的是讓爆漲結束後爆漲位能 $V(\phi)$ 即消失，然而在考慮了高階曲率修正項後，在一些模型底下會讓爆漲結束後還有宇宙常數 [12]。因此我們在 (1.3.26) 的 lagrangian 裡加上 $m^4/4\lambda$ 讓真空態的能量密度為 0。令 $V_0^2 = \sigma_{\pm}^2$ ，於是我們的自發對稱破壞位能就能寫為：

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - V_0^2)^2 \quad (1.3.29)$$

Inflation scenario:

當宇宙自大霹靂後，在溫度降低的過程中會經歷上述的自發對稱破壞相變，這時位能從圖 (1.1.a) 變到 (1.1.b)，系統 (宇宙) 將會暫時的處於所謂「假真空」(false vacuum) 狀態中，從式 (1.3.25) 的 lagrangian 可以看出，此時的位能項相當於提供了一個等效的宇宙常數，因而可以造成宇宙的快速膨脹。若是我們適當的選取參數，讓假真空附近異常的平緩，我們可以延長 ϕ 滾下的時間，造成所謂的 slow rollover (亦有學者提出其他爆漲機制，例如 Linde 於 94 年提出由一個純量場觸發另一個純量場的爆漲，其純量場更是以快速的滾動 [13])，當然 ϕ 成長的緩慢是跟 scale factor 的快速膨脹相比的，然而要造成 slow-rollover 的參數選擇似乎又是另一個 fine-tune 的問題，這個問題在考慮弦論之後似乎可以解決 [14], [15]，但文章內我們不會討論。

在第三章裡算出的 ϕ 的場方程是：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \epsilon\phi R + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (1.3.30)$$

這跟一彈珠滾下有摩擦阻力的碗盤是類似的式子。當選取參數使得位能如圖 (1.1.(b)) 的假真空附近那樣的平緩時，我們就能使宇宙被真空能量主控一段時間，而達到所謂的

de Sitter phase。

當 ϕ 逐漸增加到達 $\sigma_{\pm} = \pm V_0$ 的時後， ϕ 總是會不可避免的衝過頭，然後就在極小值的位置震盪，這時候暴漲即告結束，在這個過程中自發對稱破壞的純量場在假真空狀態中會造成等效真空能量而達到暴漲。

實際上暴漲也對宇宙中結構的形成給予了良好的解釋，由於暴漲的效應，原始甚微的量子微擾 (quantum fluctuation) 會被暴漲拉大到古典的尺度，或是到達天文結構的尺度，因而暴漲不僅僅提供了我們大霹靂宇宙模型適當的初始條件，他也充當了宇宙結構形成的「種子」，然而宇宙中也必須存在一些暗物質 (dark matter) 來幫助加速宇宙結構的形成，這些現象甚至可以藉由實驗上對大尺度 CMB 測量的非均向性分析驗證 [16], [17]。



Chapter 2

Bianchi II, VIII, IX models

2.1 the metric

Bianchi 宇宙模型是非均向 (anisotropic)、但時空均勻 (homogeneous) 的，這我們可從算出來的純量曲率 (scalar curvature) 中得到驗證。我們從 Bianchi 宇宙模型 type II、VIII、IX 的度規開始出發，他們可以如下形式寫在一起 [18]：

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a^2(t) (dy^2 + f^2(y)dz^2) + a_z^2(t) (dx - h(y)dz)^2 \quad (2.1.1)$$

其中

$$f(y) = \begin{pmatrix} y \\ \sinh y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad h(y) = \begin{pmatrix} -y^2/2 \\ -\cosh y \\ \cos y \end{pmatrix} \quad \text{for Bianchi} \quad \begin{pmatrix} II \\ VIII \\ IX \end{pmatrix}$$

對第 VIII、第 IX 型的 Bianchi 模型，我們可以利用以下的座標變換讓度規長得像 Friedmann-Robertson-Walker 度規， $(\sinh y, \sin y) \rightarrow r, z \rightarrow \theta$ 以及 $x \rightarrow z$ ，然後度規就變成：

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \right] + a_z^2(t) \left[dz - k\sqrt{1 - kr^2} d\theta \right]^2 \quad (2.1.2)$$

其中 $k = -1, 1$ 分別標示第 VIII 和第 IX 型模型。而對於 Bianchi II 模型，我們令 $y \rightarrow r, x \rightarrow z$ 以及 $z \rightarrow \theta$ ，如此一來這度規變成：

$$ds^2 = -b(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 + \left[a(t)^2 r^2 + a_z(t)^2 \frac{r^4}{4} \right] d\theta^2 + a_z(t)^2 r^2 dz d\theta + a_z(t)^2 dz^2$$

我們再令 $rd\theta = d\phi, a_2 = a_z/2$ 以及 $z' = 2z$, Bianchi II 的度規就可以寫成：

$$ds^2 = -b(t)^2 dt^2 + a_1^2(t) dr^2 + g_{mn} dx^m dx^n \quad (2.1.3)$$

其中 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, z, \phi)$ 而且，

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} a_2(t)^2 & ra_2(t)^2 \\ ra_2(t)^2 & a_1(t)^2 + r^2 a_2(t)^2 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

底下我們將就 (2.1.2) 以及 (2.1.3), (2.1.4) 的度規形式開始討論。

2.2 the Bianchi Type II model

爲了計算 $g^{\mu\nu}$ ，我們得先算 $[g_{\mu\nu}]$ 的反矩陣，我們容易得到 $g^{00} = -1/b^2$ 和 $g^{11} = 1/a_1^2$ ，而：

$$g_{mn}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 + r^2 a_2^2 & -r a_2^2 \\ -r a_2^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

而在對四維時空作體積分時，由於 4-volume element 爲 $\sqrt{-g}dx^4$ ，我們得算出 $[g_{\mu\nu}]$ 的行列式值：

$$\det(g) = -\frac{a_1^4 a_2^2}{B} \quad (2.2.2)$$

在 (2.2.2) 中我們引入了 $B(t) \equiv 1/b(t)^2$ 。

2.2.1 Spin connections

接下來我們計算出所有非零的 spin connections，spin connections 跟度規之間的關係是：

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

這些 spin connections 可以簡潔的寫爲：

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{\dot{B}}{2B} \quad \Gamma^0_{11} = B a_1^2 H_1 \quad \Gamma^1_{01} = H_1 \quad (2.2.3)$$

$$\Gamma^1_{23} = -\frac{1}{2} J \quad \Gamma^1_{33} = -r J \quad (2.2.4)$$

$$\Gamma^0_{mn} = B \begin{bmatrix} a_2^2 H_2 & r a_2^2 H_2 \\ r a_2^2 H_2 & (a_1^2 H_1 + r^2 a_2^2 H_2) \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$\Gamma^m_{0n} = \begin{bmatrix} H_2 & -r(H_1 - H_2) \\ 0 & H_1 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$\Gamma^m_{1n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -r J & 1 - r^2 J \\ J & r J \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

其中，哈伯常數 $H_i \equiv \dot{a}_i/a_i$ ， $i = 1, 2$ 。我們也引入了變數 $J \equiv a_2^2/a_1^2$ 。且注意到上式中的矩陣行列順序是 $(z, \phi) \times (z, \phi)$ 或 $(x^2, x^3) \times (x^2, x^3)$ 。即 m, n 的取值是 2 或 3。

2.2.2 黎曼張量的分量

黎曼張量 (Riemann curvature tensor) 是廣義相對論裡頭很重要的幾何量，他是度規的二次微分：

$$R^d_{cba} = -\partial_a \Gamma^d_{bc} - \Gamma^e_{cb} \Gamma^d_{ae} - (a \leftrightarrow b)$$

爲了便於往後的計算，我們把黎曼張量的第二脚標以度規拉上，即 $R^{ab}_{cd} = g^{be} R^a_{ecd}$ ，底下計算出所有不爲零的黎曼張量分量：

$$R^{0i}_{0i} = \frac{1}{2} \dot{B} H_i + B(H_i^2 + \dot{H}_i) \quad (2.2.8)$$

$$R^{0m}{}_{1n} = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}BJ\Delta & -B(1 - \frac{r^2}{2}J)\Delta \\ -\frac{B}{2}J\Delta & -\frac{r}{2}BJ\Delta \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$R^{1m}{}_{0n} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{a_1^2}J\Delta & \frac{1}{2a_1^2}(1 - 2r^2J)\Delta \\ \frac{1}{a_1^2}J\Delta & \frac{r}{a_1^2}J\Delta \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

$$R^{1m}{}_{1n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a_1^2}J + BH_1H_2 & r(\frac{J}{a_1^2} - BH_1\Delta) \\ 0 & -\frac{3}{4a_1^2}J + BH_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

$$\begin{bmatrix} R^{01}{}_{23} & R^{23}{}_{23} \\ R^{23}{}_{01} & R^{02}{}_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{2}J\Delta & \frac{J}{4a_1^2} + BH_1H_2 \\ \frac{\Delta}{2a_1^2} & -\frac{r}{2}\dot{B}\Delta - rB(H_1^2 - H_2^2 + \dot{\Delta}) \end{bmatrix} \quad (2.2.12)$$

其中我們引入了 $\Delta \equiv H_1 - H_2$ 。同樣地，上面的 m, n 取值是 2 或 3，分別對應到矩陣的第一、第二行列。

2.2.3 里奇張量的分量

我們在此子節中算出所有里奇張量 (Ricci tensor) 的非零項分量，我們將看到當我們計算高階曲率項時，先計算出里奇張量會方便許多。里奇張量定義為黎曼張量第一與第四腳標的縮併 (contraction)：

$$R_{ba} \equiv R^c{}_{abc}$$

我們直接由上一子節的結果縮併第一與第四腳標：

$$R^a{}_b = g^{ca}R_{cb} = g^{ca}R^d{}_{cbd} = R^{da}{}_{bd}$$

計算出所有非零 $R^a{}_b$ 形式的里奇張量：

$$\begin{aligned} R^0{}_0 &= - \left[\frac{\dot{B}}{2}(3H) + B(H_s^2 + 3\dot{H}) \right] \\ R^1{}_1 = R^3{}_3 &= - \left[-\frac{J}{2a_1^2} + \frac{\dot{B}}{2}H_1 + B(2H_1^2 + H_1H_2 + \dot{H}_1) \right] \\ R^2{}_2 &= - \left[\frac{J}{2a_1^2} + \frac{\dot{B}}{2}H_2 + B(H_2^2 + 2H_1H_2 + \dot{H}_2) \right] \\ R^2{}_3 &= r \left[-\frac{J}{a_1^2} + \frac{\dot{B}}{2}\Delta + B(2H_1^2 - H_1H_2 - H_2^2 + \dot{\Delta}) \right] \end{aligned}$$

2.2.4 純量曲率

純量曲率的定義是 $R \equiv R_{ab}g^{ab}$ ，他可以由子節 (2.2.2) 的結果直接得到，因為：

$$-R = -R_{ab}g^{ab} = R^c{}_{abc}g^{ab} = R^{bc}{}_{bc}$$

計算可得：

$$-R = R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2a_1^2}J + B[(3H)^2 + 2(3\dot{H}) + H_s^2] + \dot{B}(3H) \quad (2.2.13)$$

其中 $3H \equiv 2H_1 + H_2$, $3\dot{H} \equiv 2\dot{H}_1 + \dot{H}_2$ 還有 $H_s^2 \equiv 2H_1^2 + H_2^2$ 。我們注意到 (2.2.13) 式中的右手邊是跟座標無關的，這個結果驗證了 Bianchi type II 是時空均勻的 (homogeneous)。當我們取 $H_1 \rightarrow H_2$ 的極限時 (即取均向極限)，我們得到：

$$-R = (12H^2 + 6\dot{H}) - \frac{\kappa}{2a^2}$$

而標準熱霹靂的 Friedmann-Roberson-Walker 模型的純量曲率是 [1]：

$$-R_{FRW} = 12H^2 + 6\dot{H} + 6\frac{k}{a^2}$$

因此在趨向均向 (isotropic) 極限的時後，Bianchi II 模型是趨近於開放 (open) $k = -1$ 宇宙的。

2.2.5 高階曲率項

在接近普朗克尺度 (Planck scales) 時，量子重力理論 (Loop quantum gravity) 或是弦論 (string theory) 預測到愛因斯坦的重力理論必需要修正 [23],[19],[20]。弦論在愛因斯坦方程加上一無窮級數，當研究尺度跟弦的大小差不多時，修正項就重要了，這正是早期宇宙也許會發生的。近日高能物理學家與暢銷書作家 Anthony Zee 在研討會上說了，我們 (物理學家) 已引入了太多的純量場，我們也不知道到底是否真的存在純量場？，然而也有學者發表了直接由高階修正項的重力理論直接導致爆漲的可能性 [21]。於是，對我們的 Lagrange formulation 來說，高到三次的修正項對 Lagrangian density 的影響是：

$$\mathcal{L} = -R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu}{}_{\beta\gamma} R^{\beta\gamma}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \quad (2.2.14)$$

β 項：

首先我們考慮二次曲率項 $R^{ab}R_{ab} = R^a{}_b R^b{}_a$ ，在 Bianchi II 裡頭由子節 (2.2.3) 可以計算出：

$$\begin{aligned} R^{ab}R_{ab} &= R^a{}_b R^b{}_a = (R^0{}_0)^2 + (R^1{}_1)^2 + (R^2{}_2)^2 + (R^3{}_3)^2 \\ &= \left[\frac{\dot{B}}{2}(3H) + B(H_2^2 + \dot{H}_2 + 2H_1^2 + 2\dot{H}_1) \right]^2 \\ &\quad + \left[-\frac{J}{2a_1^2} + \frac{\dot{B}}{2}H_1 + B(2H_1^2 + H_1H_2 + \dot{H}_1) \right]^2 \times 2 \\ &\quad + \left[\frac{J}{2a_1^2} + \frac{\dot{B}}{2}H_2 + B(H_2^2 + \dot{H}_2 + 2H_1H_2) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

我們可以在 (2.2.15) 式中檢查一下，每一項的因次都是 L^{-2} 。

γ 項:

由於黎曼張量的對稱性:

$$R^{ab}{}_{cd} = -R^{ba}{}_{cd} = R^{ba}{}_{dc}$$

容易發現:

$$R^{ab}{}_{cd}R^{cd}{}_{ef}R^{ef}{}_{ab} = 8 \times \{R_\gamma\} \quad (2.2.16)$$

又由於腳標排列的對稱性， R_γ 可以寫成:

$$\begin{aligned} \{R_\gamma\} = & (R^{0i}{}_{0i})^3 + \underbrace{(R^{ij}{}_{ij})^3}_{i < j} \\ & + 3 \times \left\{ \begin{array}{l} R^{01}{}_{01}R^{01}{}_{23}R^{23}{}_{01} + R^{01}{}_{23}R^{23}{}_{23}R^{23}{}_{01} + R^{02}{}_{02}R^{02}{}_{12}R^{12}{}_{02} \\ + R^{02}{}_{02}R^{02}{}_{13}R^{13}{}_{02} + R^{02}{}_{03}R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{02} + R^{02}{}_{03}R^{03}{}_{13}R^{13}{}_{02} \\ + R^{02}{}_{12}R^{12}{}_{12}R^{12}{}_{02} + R^{02}{}_{12}R^{12}{}_{13}R^{13}{}_{02} + R^{02}{}_{13}R^{13}{}_{13}R^{13}{}_{02} \\ + R^{03}{}_{03}R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{03} + R^{03}{}_{03}R^{03}{}_{13}R^{13}{}_{03} + R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{12}R^{12}{}_{03} \\ + R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{13}R^{13}{}_{03} + R^{03}{}_{13}R^{13}{}_{13}R^{13}{}_{03} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

注意到:

$$R^{02}{}_{12}R^{12}{}_{13}R^{13}{}_{02} + R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{13}R^{13}{}_{03} = 0$$

$$R^{02}{}_{03}R^{03}{}_{12}R^{12}{}_{02} + R^{02}{}_{03}R^{03}{}_{13}R^{13}{}_{02} = 0$$

把其他項仔細的加起來:

$$\begin{aligned} \{R_\gamma\} = & 2 \left[\frac{\dot{B}}{2}H_1 + B(H_1^2 + \dot{H}_1) \right]^3 + \left[\frac{\dot{B}}{2}H_2 + B(H_2^2 + \dot{H}_2) \right]^3 \\ & + 2 \left(\frac{J}{4a_1^2} + BH_1H_2 \right)^3 + \left(-\frac{3J}{4a_1^2} + BH_1^2 \right)^3 \\ & + 3 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{BJ\Delta^2}{a_1^2} \left(-\frac{3J}{4a_1^2} + BH_1^2 \right) - \frac{BJ\Delta^2}{2a_1^2} \left(\frac{J}{4a_1^2} + BH_1H_2 \right) \\ - \frac{BJ\Delta^2}{a_1^2} \left[\frac{\dot{B}}{2}H_2 + B(H_2^2 + \dot{H}_2) \right] - \frac{BJ\Delta^2}{2a_1^2} \left[\frac{\dot{B}}{2}H_1 + B(H_1^2 + \dot{H}_1) \right] \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

同樣地，上式中的每一項因次都是一致的。注意觀察 B 和 \dot{B} 出現時總是會跟著一些「伙伴」，我們即將利用這一巧妙的性質推出跟模型無關的一條場方程通式。

2.3 the Bianchi Type VIII, IX model

2.3.1 Spin connections

類似地，我們先算出 spin connections:

$$\Gamma^0{}_{00} = -\frac{\dot{B}}{2B} \quad \Gamma^0{}_{11} = BH_1g_{11} \quad \Gamma^1{}_{01} = H_1 \quad (2.3.1)$$

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{kr}{1-kr^2} \quad \Gamma^1{}_{23} = -\frac{r}{2}\sqrt{1-kr^2}J \quad \Gamma^1{}_{22} = r(1-kr^2) - kr(1-kr^2)J \quad (2.3.2)$$

$$\Gamma^0_{mn} = B \begin{bmatrix} H_1 a^2 r^2 + H_z a_z^2 (1 - kr^2) & H_z g_{23} \\ H_z g_{23} & H_z g_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$\Gamma^m_{0n} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ k\sqrt{1-kr^2}\Delta & H_z \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

$$\Gamma^m_{1n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} - \frac{k}{2r} J & \frac{1}{2r\sqrt{1-kr^2}} J \\ \frac{2k-r^2}{2r\sqrt{1-kr^2}} - \frac{\sqrt{1-kr^2}}{2r} J & \frac{k}{2r} J \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

2.3.2 黎曼張量的分量

$$R^{0i}_{0i} = B(\dot{H}_i + H_i^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_i \quad (2.3.6)$$

$$R^{0m}_{1n} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2r} B J \Delta & -\frac{k}{2r\sqrt{1-kr^2}} B J \Delta \\ -\frac{k}{2r\sqrt{1-kr^2}} [2r^2 - (1-kr^2)J] B \Delta & -\frac{k}{2r} B J \Delta \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

$$R^{1m}_{0n} = \begin{pmatrix} -\frac{k(1-kr^2)}{r} \frac{J}{a^2} \Delta & \frac{k\sqrt{1-kr^2}}{r} \frac{J}{a^2} \Delta \\ \frac{k\sqrt{1-kr^2}}{2ra^2} [r^2 - 2(1-kr^2)J] \Delta & \frac{k(1-kr^2)}{r} \frac{J}{a^2} \Delta \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

$$R^{1m}_{1n} = \begin{pmatrix} -\frac{3k^2}{4} \frac{J}{a^2} + \frac{k}{a^2} + B H_1^2 & 0 \\ -\sqrt{1-kr^2} [k^2 \frac{J}{a^2} - \frac{k}{a^2} - B H_1^2 + B H_1 H_z] & \frac{k^2}{4} \frac{J}{a^2} + B H_1 H_z \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{bmatrix} R^{01}_{23} & R^{23}_{23} \\ R^{23}_{01} & R^{03}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kr\sqrt{1-kr^2}}{2} J B \Delta & \frac{k^2}{4} \frac{J}{a^2} + B H_1 H_z \\ -\frac{k}{2r\sqrt{1-kr^2}} \frac{1}{a^2} \Delta & \sqrt{1-kr^2} \left[\frac{\dot{B}}{2} \Delta + B(\dot{\Delta} + H_1^2 - H_z^2) \right] \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

2.3.3 里奇張量的分量

$$R^0_0 = -\frac{\dot{B}}{2}(2H_1 + H_z) - B(2H_1^2 + H_z^2 + 2\dot{H}_1 + \dot{H}_z)$$

$$R^1_1 = -\frac{k}{a^2} + \frac{k^2}{2} \frac{a_z^2}{a^4} - \frac{\dot{B}}{2} H_1 - B(2H_1^2 + H_1 H_z + \dot{H}_1)$$

$$R^2_2 = R^1_1$$

$$\begin{aligned} R^3_3 &= \sqrt{1-kr^2} \left[-\frac{k}{a^2} + k^2 \frac{a_z^2}{a^4} - \frac{\dot{B}}{2} (H_1 - H_z) + B(-2H_1^2 + H_1 H_z + H_z^2 - \dot{H}_1 + \dot{H}_z) \right] \\ &= \sqrt{1-kr^2} (R^1_1 + R^3_3) \end{aligned}$$

$$R^3_3 = \frac{k^2}{2} \frac{a_z^2}{a^4} + \frac{\dot{B}}{2} H_z + B(H_z^2 + 2H_1 H_z + \dot{H}_z)$$

2.3.4 純量曲率

注意到了曲率裡頭的項有一些規則，因此我們引入一些變數改寫之：

$$\begin{aligned}
 A &= \dot{H}_1 + H_1^2 \\
 B &= H_1^2 + \frac{k}{a^2} \\
 C &= H_1 H_z \\
 D &= \dot{H}_z + H_z^2 \\
 E &= \frac{k^2 a_z^2}{4 a^4} \\
 F &= (H_1 - H_z)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -R &= R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = -\frac{k^2}{2a^2}J + 2\frac{k}{a^2} + B[(3H)^2 + 2(3\dot{H}) + H_s^2] + \dot{B}(3H) \\
 &= 4A + 2B + 4C + 2D - 2E \tag{2.3.11}
 \end{aligned}$$

在趨向各向均勻極限時，Bianchi VIII 模型是趨向於開放 ($k = -1$) 宇宙，而 Bianchi IX 模型則是趨向於封閉 (closed, $k = 1$) 的宇宙。

2.3.5 高階曲率項

β 項：

$$\begin{aligned}
 R^a{}_b R^b{}_a &= R^0{}_0 R^0{}_0 + R^1{}_1 R^1{}_1 + R^2{}_2 R^2{}_2 + R^3{}_3 R^3{}_3 \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[B(\dot{H}_i + H_i^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_i \right] \right\}^2 \\
 &\quad + \left[-\frac{k^2 a_z^2}{2 a^4} + \left(\frac{k}{a^2} + B H_1^2 \right) + B H_1 H_z + B(\dot{H}_1 + H_1^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_1 \right]^2 \\
 &\quad + \left[-\frac{k^2 a_z^2}{2 a^4} + \left(\frac{k}{a^2} + B H_1^2 \right) + B H_1 H_z + B(\dot{H}_1 + H_1^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_1 \right]^2 \\
 &\quad + \left[\frac{k^2 a_z^2}{2 a^4} + 2B H_1 H_z + B(\dot{H}_z + H_z^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_z \right]^2 \tag{2.3.12} \\
 &= 6A^2 + 2B^2 + 6C^2 + 2D^2 + 12E^2 \\
 &\quad + 4AB + 4AC + 4BC + 4AD + 4CD - 8AE - 8BE + 4DE
 \end{aligned}$$

γ 項:

$$\begin{aligned}
 & \gamma R^{ab}{}_{cd} R^{cd}{}_{ef} R^{ef}{}_{ab} \\
 &= -\frac{3k^2}{2} \frac{J}{a^2} B \Delta^2 \left(B(\dot{H}_1 + H_1^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_1 \right) + 2 \left(B(\dot{H}_1 + H_1^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_1 \right)^3 \\
 & \quad - 3k^2 \frac{J}{a^2} B \Delta^2 \left(B(\dot{H}_z + H_z^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_z \right) + \left(B(\dot{H}_z + H_z^2) + \frac{\dot{B}}{2} H_z \right)^3 \\
 & \quad - \frac{3k^2}{2} \frac{J}{a^2} B \Delta^2 \left(\frac{k^2}{4} \frac{J}{a^2} + B H_1 H_z \right) + 2 \left(\frac{k^2}{4} \frac{J}{a^2} + B H_1 H_z \right)^3 \\
 & \quad - 3k^2 \frac{J}{a^2} B \Delta^2 \left(-\frac{3k^2}{4} \frac{J}{a^2} + \frac{k}{a^2} + B H_1^2 \right) + \left(-\frac{3k^2}{4} \frac{J}{a^2} + \frac{k}{a^2} + B H_1^2 \right)^3 \\
 & \hspace{15em} (2.3.13) \\
 &= 2A^3 + B^3 + 2C^3 + 2D^3 - 25E^3 - 9B^2E + 6C^2E + 27BE^2 + 6CE^2 \\
 & \quad + 30FE^2 - 6AEF - 12BEF - 6CEF - 18DEF
 \end{aligned}$$

注意到從純量曲率開始，若作如下代換 $k \rightarrow 0, k^2 \rightarrow 1, a \rightarrow a_1, a_z \rightarrow a_2$ 以及 $H_z \rightarrow H_2$ 將會得到 Bianchi II 的相應量，這其實意味著也許能找到一個座標把三個度規寫在一起。無論如何，我們底下將常常一起討論三個模型。

2.4 場方程式

2.4.1 Friedmann equation

我們將推出一個無論是 Einstein-Hilbert action 或是高階修正都能通用的 Friedmann equation [22],[23]。把 Action 的空間部分先積掉， $S = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L} = N \int dt L$ 簡化為一維變分。注意到我們已在 (2.1.2) 和 (2.1.3) 中塞入一函數 $b(t)$ 。把 action 對 $b(t)$ 變分之後再設回 1 可得一場方程：

$$\frac{\partial L}{\partial B} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{B}} \right) = 0$$

其中 $L = \sqrt{g} \mathcal{L} = \mathcal{L} V / \sqrt{B}$, $V \equiv a^2 a_z$, $\dot{V} = V(3H)$ 。先處理掉 $\sqrt{g} = V$ 可得：

$$\mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} + 2 \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} = 0 \tag{2.4.1}$$

注意到 (2.2.13), (2.2.15), (2.2.17), (2.3.11), (2.3.12) 與 (2.3.13) 中由於因次的關係， B 總是出現在 BH_i 與 $BH_i H_j$ 中。於是我們可以用連鎖律作如下的代換：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B} \rightarrow \frac{H_i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} + \dot{H}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} \tag{2.4.2}$$

而 \dot{B} 總是以 $\dot{B}H_i/2$ 的項出現，但由於最後要把 B 設回 1，所以這裡手法稍微不同。注意到 \dot{B} 的地方都跟著一項 \dot{H}_i ，於是可作這代換：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}} \rightarrow \frac{H_i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} \quad (2.4.3)$$

把 (2.4.2) 和 (2.4.3) 代入 (2.4.1) 即得：

$$\mathcal{L} + H_i \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} = H_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_i} + \dot{H}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{H}_i} \quad (2.4.4)$$

2.4.2 a_i 的場方程式

對 $a(t)$ 變分的場方程式：

$$\begin{aligned} \delta L &= (\delta V)\mathcal{L} + V\delta\mathcal{L} \\ &= \frac{2}{a}V\mathcal{L}\delta a + V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}\delta a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}}\delta \dot{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}}\delta \ddot{a} \right) \\ &= V \left(\frac{2}{a}\mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a} - \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{a}} + \left(\frac{d}{dt} + 3H \right)^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ddot{a}} \right) \delta a = 0 \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

然而我們已經先把 Lagrangian density 以哈伯常數 H_i ， \dot{H}_i 表示了，因此我們把偏微分項作如下代換：

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta a} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial a} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} \\ &= -\frac{1}{a}H_1 L_1 - \frac{1}{a}(\dot{H}_1 - H_1^2)L^1 + \partial_a \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{a}} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \dot{a}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial \dot{a}} \\ &= \frac{1}{a}L_1 - \frac{2}{a}H_1 L^1 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \ddot{a}} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \ddot{a}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial \ddot{a}} \\ &= \frac{1}{a}L^1 \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

把 (2.4.6), (2.4.7) 和 (2.4.8) 代入 (2.4.5)。我們便得到對 $a(t)$ 變分的通式：

$$2\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H \right)^2 L^1 - \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) L_1 + a\partial_a \mathcal{L} = 0 \quad (2.4.9)$$

其中 $L^i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{H}_i$, $L_i = \partial \mathcal{L} / \partial H_i$ 。類似地，對 a_z 變分的通式算出來是：

$$\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H \right)^2 L^1 - \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) L_1 + a_z \partial_{a_z} \mathcal{L} = 0 \quad (2.4.10)$$

2.4.3 E-H action 下的三條場方程式

在 Einstein-Hilbert action 模型下的場方程式由前節可算出：

$$2H_1H_z + H_1^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{k^2}{4} \frac{a_z^2}{a^4} - \Lambda = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\frac{k^2}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + H_1^2 + H_z^2 + H_1H_z + \dot{H}_1 + \dot{H}_z - \Lambda = 0 \quad (2.4.12)$$

$$\frac{k}{a^2} - \frac{3k^2}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + 3H_1^2 + 2\dot{H}_1 - \Lambda = 0 \quad (2.4.13)$$

其中只有 Friedmann equation 是一條一次微分方程。當把 $k \rightarrow 0$, $k^2 \rightarrow 1$ 就是 Bianchi II 的場方程式。

2.4.4 Bianchi Identity

由於 Bianchi identity，前節有兩條獨立的微分方程給出 $a(t)$ 與 $a_z(t)$ 的解。定義 $H^\mu{}_\nu \equiv G^\mu{}_\nu - T^\mu{}_\nu$ ，由 Bianchi identity $D_\mu H^\mu{}_\nu = 0$ 以及能量守恆 $D_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ ，我們有 $D_\mu H^\mu{}_\nu = 0$ 。他的 0 分量給我們：

$$(\partial_t + 3H)H^t{}_t = 2H_1H^r{}_r + H_zH^z{}_z \quad (2.4.14)$$

若 $H^t{}_t = 0$ 且 $H^r{}_r$ 和 $H^z{}_z$ 其中一個為 0，另一個也將為 0。 θ 和 z 分量自己消掉了，但 r 分量告訴我們：

$$\partial_r H^r{}_r + \Gamma^\theta{}_{\theta r} H^r{}_r + \Gamma^z{}_{zr} H^r{}_r - \Gamma^\theta{}_{\theta r} H^\theta{}_\theta - \Gamma^\theta{}_{zr} H^z{}_\theta - \Gamma^z{}_{zr} H^z{}_z - \Gamma^z{}_{\theta r} H^\theta{}_z = 0 \quad (2.4.15)$$

2.5 Induced gravity model

我們現在考慮，造成爆漲的因素是一純量場 (scalar field)。於是寫下這個 Lagrangian density，我們採用 Zee 的自發對稱破壞位能 (spontaneous-symmetry-breaking potential) [25],[7],[5]：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\epsilon}{2} \phi^2 R + T(\phi) - V(\phi) \\ &= -\frac{\epsilon}{2} \phi^2 R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - V_0^2)^2 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

其中 ϵ 是其 coupling constant, λ 和 V_0 是某個常數, ϵ 和 λ 都是無量綱的。利用前節的場方程式, 很容易得出對 B , a 和 a_z 變分的場方程分別是:

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left[(H_1^2 + 2H_1H_z + \frac{k}{a^2} - \frac{a_z^2}{4a^4}) + 2H_\phi(3H) \right] \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left(\begin{aligned} & (\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_z + H_z^2 + H_1H_z + \frac{a_z^2}{4a^4}) \\ & + 2H_\phi(H_1 + H_z) + 2H_\phi^2 + 2(\dot{H}_\phi + H_\phi^2) \end{aligned} \right) \\ & - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left[(2\dot{H}_1 + 3H_1^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{3a_z^2}{4a^4}) + (4H_\phi H_1 + 4H_\phi^2 + 2\dot{H}_\phi) \right] \\ & - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

其中 $H_\phi \equiv \dot{\phi}/\phi$ 。注意到當令 ϕ 為常數時, 上面三個場方程會回到 (2.4.11), (2.4.12) 與 (2.4.13)。至於對 ϕ 的變分:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta(\sqrt{g}\mathcal{L}) \\ &= -\sqrt{g}\epsilon\phi R\delta\phi - \delta\left(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) - \sqrt{g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi = 0 \end{aligned}$$

而上式右手邊的中間項可以如下計算:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) &= \sqrt{g}\partial^\mu\phi\partial_\mu(\delta\phi) \\ &= -\partial_\mu(\sqrt{g}\partial^\mu\phi)\delta\phi \\ &= -\sqrt{g}D_\mu\partial^\mu\phi\delta\phi \end{aligned}$$

其中我們用到了 $\partial_\mu(\sqrt{g}A^\mu) = D_\mu A^\mu$ 。因此對 ϕ 變分得到的場方程式是:

$$-\epsilon\phi R + D_\mu\partial^\mu\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (2.5.5)$$

Chapter 3

Results and analysis

3.1 E-H model 從非勻向到勻向

Einstein-Hilber 模型中的場方程式 (2.4.11), (2.4.12) 與 (2.4.13) 是一複雜的非線性聯立微分方程組，雖然無法得到解析解，但我們可以作定性分析 [23]。我們首先證明在 Bianchi II, VIII, IX 的模型下，雖然一開始非各向均勻 (anisotropic)，但隨著爆漲過程，會趨向各個方向都對稱。注意到 $\dot{V}/V = 3H$ ，從 (2.4.12) 與 (2.4.13) 我們可以得到：

$$\begin{aligned}\dot{\Delta} + 2H_1^2 - H_1 H_z - H_z^2 &= -\frac{k}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^4} \\ \dot{\Delta} + (3H)\Delta &= -\frac{k}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^4} \\ \frac{d}{dt}(V\Delta) &= -ka_z + \frac{a_z^3}{a^2} \\ \Delta &= \Delta(0)\frac{V(0)}{V} - \frac{k}{a^2} \frac{\int_0^t a_z(t')dt'}{a_z} + \frac{\int_0^t a_z^3(t')/a^2(t')dt'}{a^2 a_z}\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

其中 $\Delta(0)$ 和 $V(0)$ 是某個初始值。從 (3.1.1) 式中可以清楚看到，當爆漲呈現自然指數上升 (exponential increase) 的時後，右邊的三項都將隨著時間的增加而趨近於零。這意味著：

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

這個結果告訴我們，從 Bianchi II, VIII, IX 模型出發不會違背現今觀察到且我們深信的大宇宙原則 (Cosmological Principle)，因為 Bianchi 模型本身即具有平移對稱性 (spacetime homogeneous)，而現在證明了隨著時間的演化，雖然爆漲的一開始是非各向均勻 (anisotropic)，之後還是會回歸到各向均勻的宇宙 (spacetime isotropic)。

3.2 E-H model 解的穩定性分析

我們已經知道隨著爆漲，宇宙會趨向於各向對稱。然而到達各向均勻時，這個對稱的狀態是穩定抑或不穩定呢 [23]？這點我們可以對 (2.4.11), (2.4.12) 與 (2.4.13) 作一微

擾 (perturbation) 驗證，我們將證明其一階微擾將隨時間趨近於零。首先假設系統已達各向均勻的狀態，此時不僅 $H_1 \approx H_z$ ，我們還知道 $a(t)$ 和 $a_z(t)$ 都很大，因此和其他項比起來， k/a^2 及 a_z^2/a^4 都可以丟掉。於是微分方程組 (2.4.11), (2.4.12) 與 (2.4.13) 變成：

$$\begin{aligned} 2H_1H_z + H_1^2 - \Lambda &= 0 \\ H_1^2 + H_z^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_1H_z - \Lambda &= 0 \\ 3H_1^2 + 2\dot{H}_1 - \Lambda &= 0 \end{aligned}$$

令 $H_1 = H_0 + \delta H_1$, $H_z = H_0 + \delta H_z$ 代入上式並保留到第一階：

$$2H_0\delta H_1 + H_0\delta H_z = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\delta\dot{H}_1 + \delta\dot{H}_z + 3H_0(\delta H_1 + \delta H_z) = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\delta\dot{H}_1 + 3H_0\delta H_1 = 0$$

(3.2.1) 告訴我們 $\delta H_z = -2\delta H_1$ 。接著把 $\delta(H_1 + H_z)$ 看做一個變數並令 $H_0 = \dot{a}/a$ ，可從 (3.2.2) 積出：

$$\delta H_1 + \delta H_z = \frac{\text{constant}}{a^3} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad (3.2.3)$$

從 (3.2.3) 明顯看出 $\delta H_1 \rightarrow 0$ 且 $\delta H_z \rightarrow 0$ ，當 $t \rightarrow \infty$ 。這告訴我們爆漲終了的時候宇宙是各向對稱且穩定的，當有任何擾動使得爆漲終了宇宙偏離了各向均勻的狀態，他會隨即回復各向均勻。

3.3 E-H model 數值模擬驗證

由於 Einstein-Hilbert 模型的場方程 (2.4.11), (2.4.12) 和 (2.4.13) 無法得到解析解，因此我們作數值解分別跑出 Bianchi II, VIII, IX 的 scale factors 以及 anisotropy(Δ) 的圖形：

在 induced gravity 之前，理論只牽扯到 c 和 G 兩個常數，把這兩個常數令作 1，即是幾何單位 (Geometrized units)。我們可以把所有的單位變成長度的某次方，詳細請見附錄。

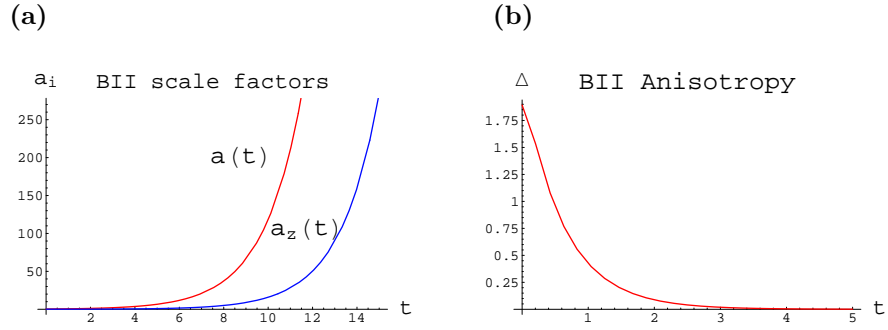


Figure 3.1: Bianchi II model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. , $a'(0) = 0.35$, $a_z(0) = 0.1$, $a(0) = 0.2$

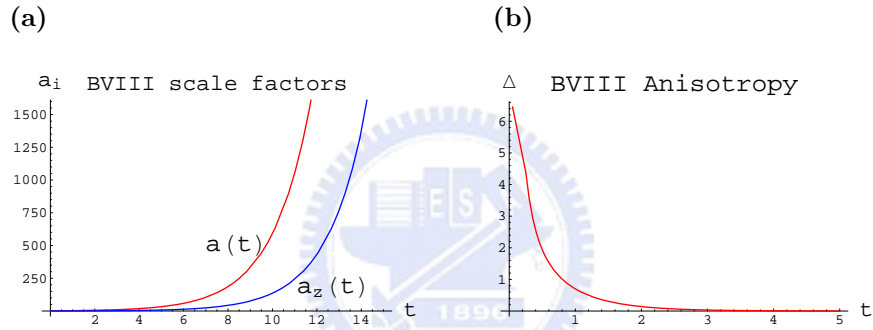


Figure 3.2: Bianchi VIII model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. , $a'(0) = 0.1$, $a_z(0) = 0.5$, $a(0) = 0.2$

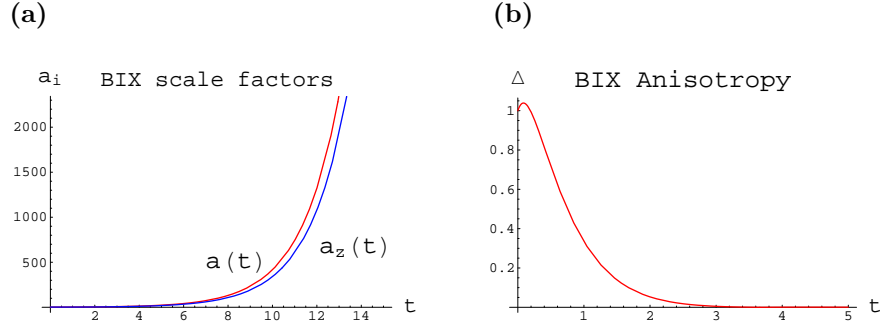


Figure 3.3: Bianchi IX model with $\Lambda = 1$, solution of (2.4.11), (2.4.12) and (2.4.13), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec., $a'(0) = 1$, $a_z(0) = 2$, $a(0) = 1$

3.4 E-H model 下不同狀態的數值解

許多物理系統都能理想化成一些只有局部碰撞的粒子集合，例如：黑體輻射、稀薄電漿... 等等。其中一個例子就是我們的宇宙。這樣一個稀薄的完美流體系統，他的狀態方程十分簡單可以描述如下 [1]：

$$p = \omega \rho \quad (3.4.1)$$

其中 $\omega = 0, 1/3, -1$ 時分別表示宇宙處在物質 (非相對性物質)、輻射、與真空狀態。

我們考慮這樣一個簡單的理想流體，他的能量動量張量是：

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3.4.2)$$

於是我們該解的場方程式就是：

$$2H_1 H_z + H_1^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{1}{4} \frac{a_z^2}{a^4} - \Lambda = \rho(t) \quad (3.4.3)$$

$$\frac{1}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + H_1^2 + H_z^2 + H_1 H_z + \dot{H}_1 + \dot{H}_z - \Lambda = -p(t) \quad (3.4.4)$$

$$\frac{k}{a^2} - \frac{3}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + 3H_1^2 + 2\dot{H}_1 - \Lambda = -p(t) \quad (3.4.5)$$

另外，從能量守恆， $D_\mu T^\mu{}_0 = 0$ 可得：

$$\partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\mu a} T^a{}_0 - \Gamma^a{}_{\mu 0} T^\mu{}_a = 0$$

由 (3.4.2) 式與第二章中的 spin connection 表，我們有：

$$\dot{\rho} + (3H)\rho + (3H)p = 0$$

積分可得：

$$\rho(t) = \rho_0 V^{-(1+\omega)} \quad (3.4.6)$$

其中 ρ_0 是某個初始值，而 $V = a^2 a_z$ 。當 $\omega = 0$ 時能量密度跟體積成反比，這就是物質主宰的宇宙，當 $\omega = 1/3$ 時，由於輻射的能量跟波長成反比，因此 $\rho \approx V^{-4/3}$ ，

當 $\omega = -1$ 時， $\rho = \text{constant}$ ，隨著宇宙膨脹能量密度維持定值，黑暗能量正有著這個性質。

把 (3.4.6) 和狀態方程 (3.4.1) 代入 (3.4.3), (3.4.4) 與 (3.4.5)，就得到我們要用數值解的微分方程組：

$$2H_1 H_z + H_1^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{1}{4} \frac{a_z^2}{a^4} - \Lambda = \rho_0 V^{-(1+\omega)} \quad (3.4.7)$$

$$\frac{1}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + H_1^2 + H_z^2 + H_1 H_z + \dot{H}_1 + \dot{H}_z - \Lambda = -\omega \rho_0 V^{-(1+\omega)} \quad (3.4.8)$$

$$\frac{k}{a^2} - \frac{3}{4} \frac{a_z^2}{a^4} + 3H_1^2 + 2\dot{H}_1 - \Lambda = -\omega \rho_0 V^{-(1+\omega)} \quad (3.4.9)$$

我們將考慮有宇宙常數和沒有宇宙常數的情況，分別畫出各個情況 $a(t)$ 對時間 t 的圖以及非均向性 Δ 對時間 t 的作圖，我們可以看到真空狀態的爆漲總是最快的，而且無論哪一種模型，最終都會趨向各向均勻：

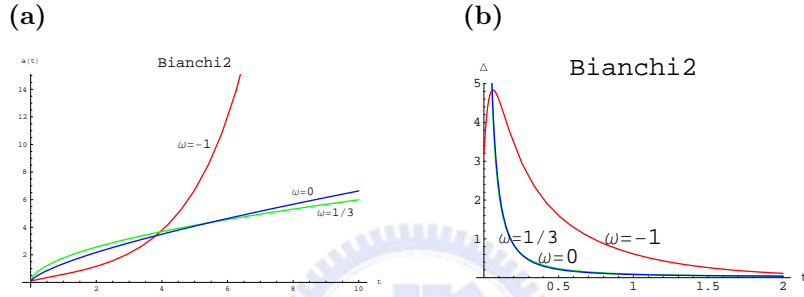


Figure 3.4: Bianchi II with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 0.42, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 9.91, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 3.10, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$

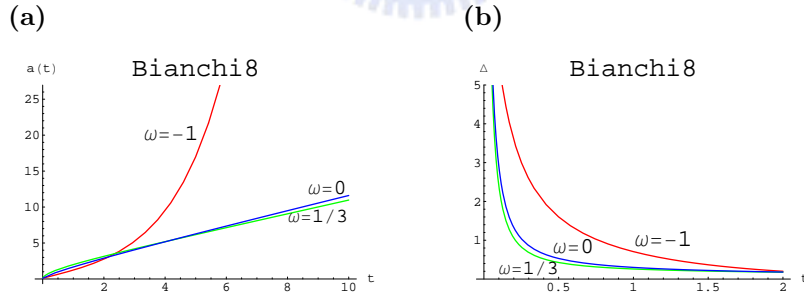


Figure 3.5: Bianchi VIII with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 1.02, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 9.96, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 3.26, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$

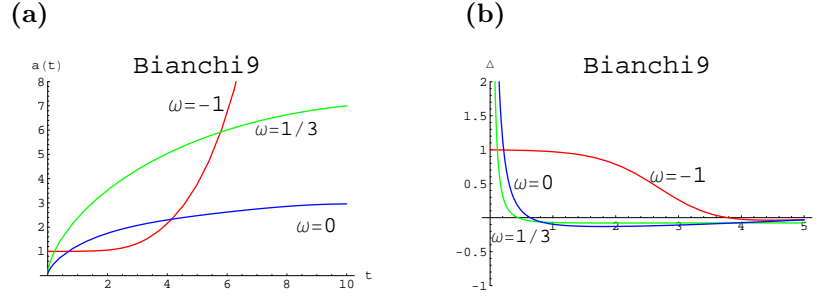


Figure 3.6: Bianchi IX with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 1, a'(0) = 0.01, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 12, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 2.94, a_z(0) = 0.27, a'_z(0) = 0.1$

接下來是有宇宙常數的數值解：

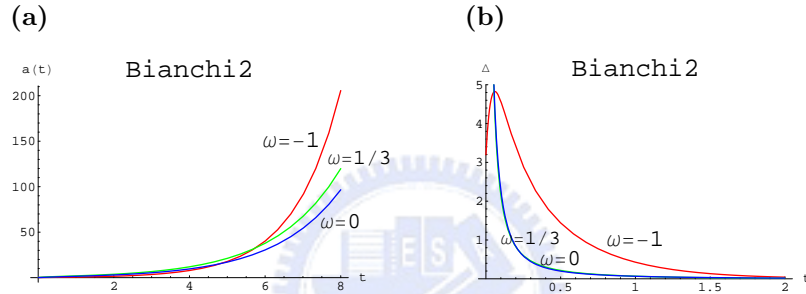


Figure 3.7: Bianchi II with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 0.42, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 9.91, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 3.10, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$

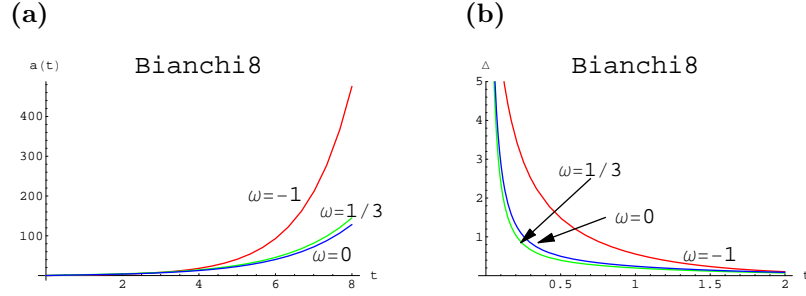


Figure 3.8: Bianchi VIII with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 1.02, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 9.96, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 3.26, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$

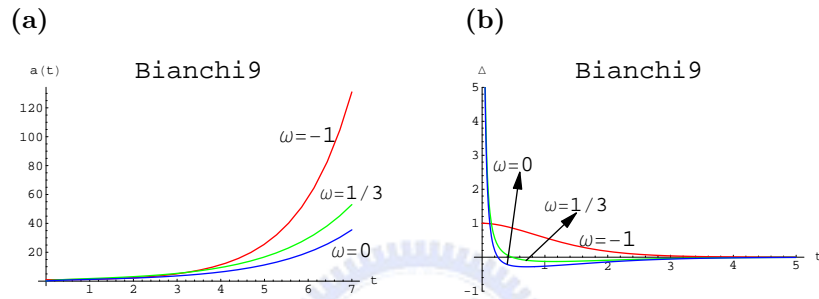


Figure 3.9: Bianchi IX with $\rho_0 = \Lambda = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. For VD, $a(0) = 1, a'(0) = 0.01, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For RD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 12, a_z(0) = 0.1, a'_z(0) = 0.1$. For MD, $a(0) = 0.1, a'(0) = 2.94, a_z(0) = 0.27, a'_z(0) = 0.1$

我們可以看到，真空態的膨脹總是最快的，輻射主控態次之，而物質主控態的爆漲則是最慢的。無論如何，任何的模型、任何的初始條件都會使的非均勻性趨近於零。

接著我們把輻射主控（時間到30萬年）跟物質主控（時間從30萬年到150億年），按真實時間比例連接起來，且做出非均勻性對時間的圖，其實在爆漲時已經把非均勻性向幾乎抹平了。

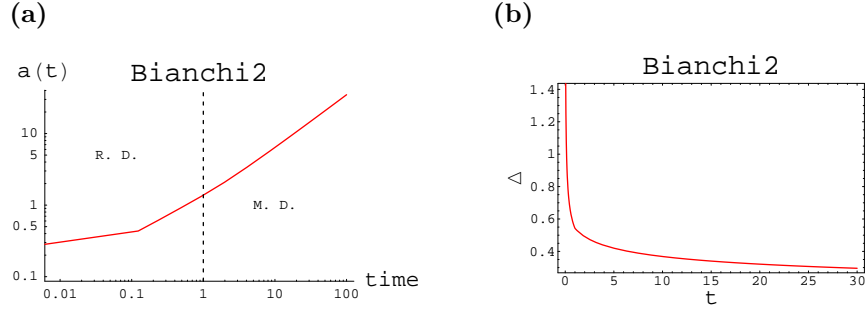


Figure 3.10: Bianchi II R. D. to M. D., with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 5.46$, $a_z(0) = 0.2$, $a'_z(0) = 2$

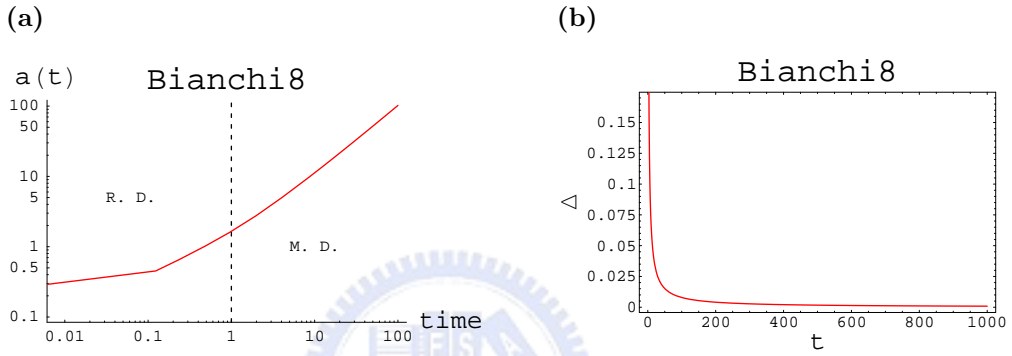


Figure 3.11: Bianchi VIII R. D. to M. D. with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 5.53$, $a_z(0) = 0.2$, $a'_z(0) = 2$

3.5 Induced gravity model 的數值解

回憶第一章中的Induced gravity 的 Lagrangian 是

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\phi^2 R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v_0^2)^2$$

爲了簡化起見，我們考慮第二章中引起爆漲的純量場只是時間的函數，因爲我們考慮的 Bianchi space 也是時空均勻的，這麼一來：

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = -\dot{\phi}^2$$

而且 (2.5.5) 左邊的第二項就能這樣展開：

$$D_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi + \Gamma^\mu_{\nu\mu}g^{\nu\alpha}\partial_\alpha\phi = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi}$$

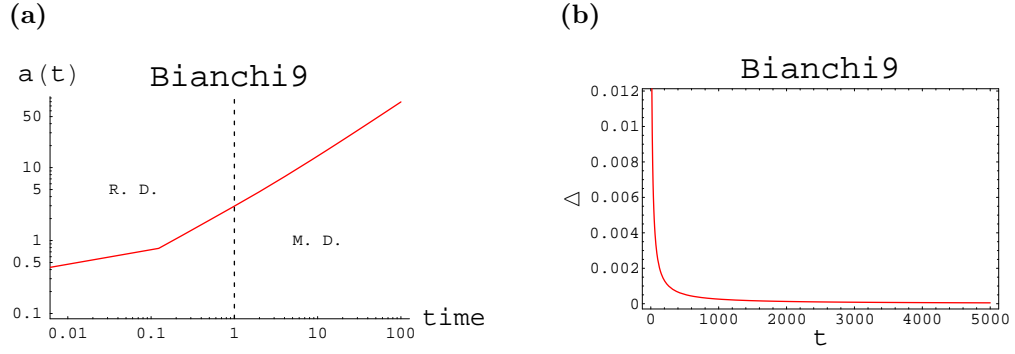


Figure 3.12: Bianchi IX R. D. to M. D. with $\rho_0 = 1$, solution of (3.4.7), (3.4.8) and (3.4.9), the unit of t -axis is $t_g = (3 \times 10^8)^{-1}$ sec. $a(0) = 0.1$, $a'(0) = 12$, $a_z(0) = 0.2$, $a'_z(0) = 3$

於是我們要解的場方程式就變成：

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left[(H_1^2 + 2H_1H_z + \frac{k}{a^2} - \frac{a_z^2}{4a^4}) + 2H_\phi(3H) \right] \\ & - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left(\begin{aligned} & (\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_z + H_z^2 + H_1H_z + \frac{a_z^2}{4a^4}) \\ & + 2H_\phi(H_1 + H_z) + 2H_\phi^2 + 2(\dot{H}_\phi + H_\phi^2) \end{aligned} \right) \\ & + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon\phi^2 \left[(2\dot{H}_1 + 3H_1^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{3a_z^2}{4a^4}) + (4H_\phi H_1 + 4H_\phi^2 + 2\dot{H}_\phi) \right] \\ & + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \epsilon\phi R + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (3.5.4)$$

我們作數值解並畫出每個模型 scale factors 的爆漲情況與純量場隨時間的變化，並做出非均勻性 Δ 與時間的關係，注意到我們故意選擇參數使純量場在一開始時作緩慢的滾動，在滾動到位能極小的時後即停止爆漲：

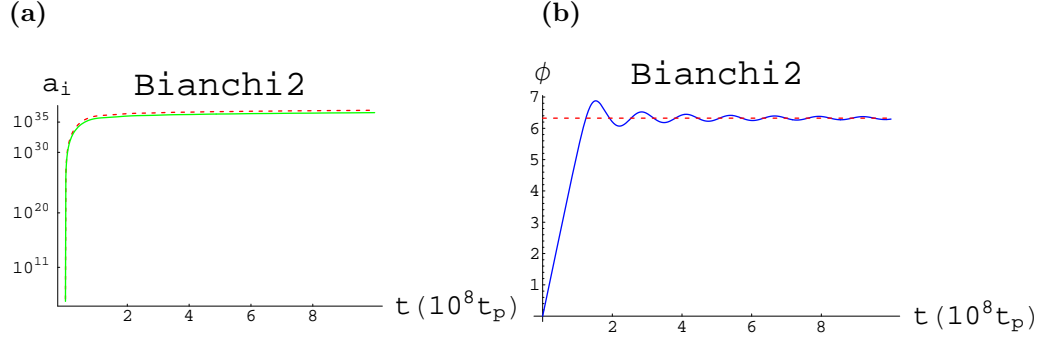


Figure 3.13: Bianchi II induced gravity inflation, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), with $\lambda = 4 \times 10^{-17}$, $\epsilon = 0.05$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. For fig(a), dashed curve is $a(t)$, solid one is $a_z(t)$, vertical axis is log scale. For fig(b), dashed horizontal line stands for minimum of $V(\phi)$. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5$, $a'(0) = 10^2$, $a_z(0) = 10^5$, $a'_z(0) = 10^2$

時間單位為 $t'_p \sim 2.70 \times 10^{-43} \text{sec}$ ，其中 $t'_p = \sqrt{8\pi G\hbar/c^5}$ 為 modified planck time unit(我們設 $8\pi G = 1$)。底下我們作非均向性的數值分析，發現隨著爆漲很快地所有非均向性都會被抹平，基於這個特點，讓我們增加了 Bianchi spaces 可以拿來當作爆漲模型的信心，也讓我們容易作底下的近似解析分析。

把 (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) 和 (3.5.4) 改寫成：

$$\epsilon \left[H_1^2 + 2H_1H_z + \frac{k}{a^2} - \frac{a_z^2}{4a^4} \right] + 2\epsilon\dot{\phi}(3H) - \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - \frac{V(\phi)}{\phi} = 0 \quad (3.5.5)$$

$$2\epsilon \left[H_1^2 + H_1H_z + \dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_z^2 + \frac{a_z^2}{4a^4} \right] + 4\epsilon\dot{\phi}(H_1 + H_z) + 4\epsilon\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + 4\epsilon\ddot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - 2\frac{V(\phi)}{\phi} = 0 \quad (3.5.6)$$

$$\epsilon\phi \left[3H_1^2 + 2\dot{H}_1 + \frac{k}{a^2} - \frac{3a_z^2}{4a^4} \right] + 4\epsilon\dot{\phi}H_1 + 2\epsilon\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + 2\epsilon\ddot{\phi} + \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - \frac{V(\phi)}{\phi} = 0 \quad (3.5.7)$$

$$\epsilon\phi \left[-6H_1 - 4H_1H_z - 4\dot{H}_1 - 2\dot{H}_z - 2H_z^2 - 2\frac{k}{a^2} + \frac{a_z^2}{2a^4} \right] + \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.5.8)$$

將上面四式加起來會發現，方刮號裡的東西都消掉了，而得出：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{V' - 4V/\phi}{1 + 6\epsilon} = 0 \quad (3.5.9)$$

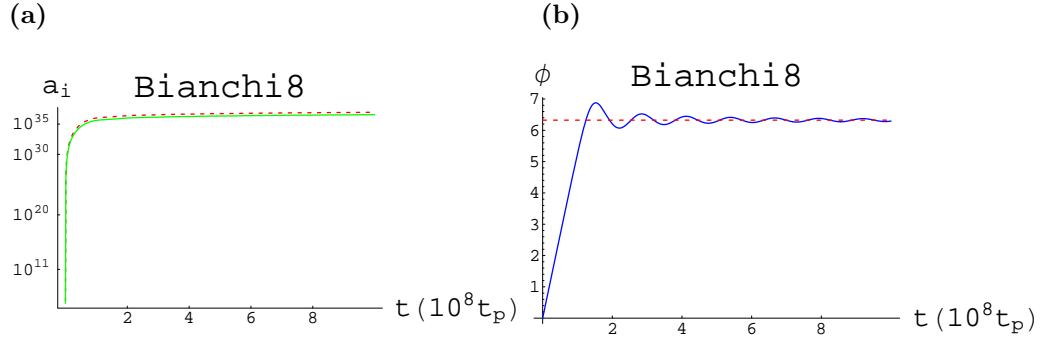


Figure 3.14: Bianchi VIII induced gravity inflation, with $\lambda = 4 \times 10^{-17}$, $\epsilon = 0.05$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. The plots are quite similar to Bianchi II's, thus the curvature term k/a^2 in the field equations is irrelevant. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5$, $a'(0) = 10^2$, $a_z(0) = 10^5$, $a'_z(0) = 10^2$

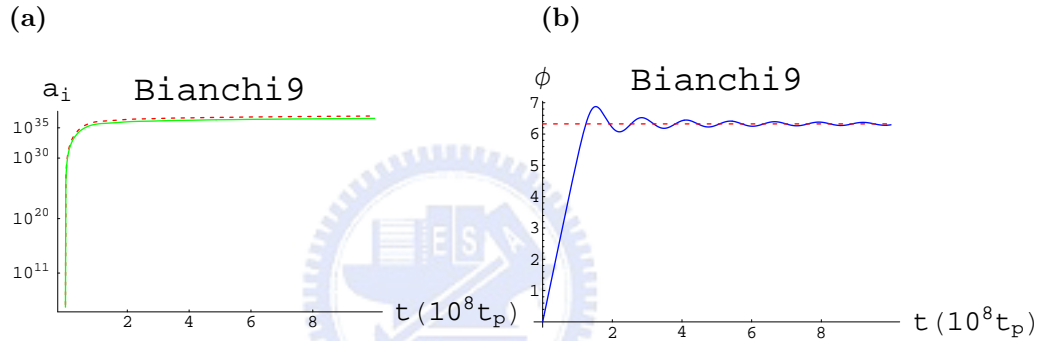


Figure 3.15: Bianchi IX induced gravity inflation. Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^5$, $a'(0) = 10^2$, $a_z(0) = 10^5$, $a'_z(0) = 10^2$

而由於非均向性很快的被抹平，因此我們令 $H_1 = H_z$ ，(3.5.1) 可以改寫為：

$$\frac{1}{\epsilon\phi^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right] - \frac{k}{a^2} + \frac{a_z^2}{4a^4} = 3H^2 \left[1 + 2\frac{H_\phi}{H} \right] \quad (3.5.10)$$

首先我們分析早期「slow-rollover」時期，即爆漲時期。此時 scale factors 的成長速度是遠大於純量場的成長速度的，因而 $H_\phi \ll H$ 。而此時純量場的「加速度」因為受到強大的「阻力」而很小，即 $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ 。而且此時純量場的「動能」是遠小於當時的「位能差」，亦即 $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ，總結我們在 slow-rollover 時有如下近似：

$$H_\phi \ll H \quad (3.5.11)$$

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.5.12)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \quad (3.5.13)$$

又 k/a^2 與 $a_z^2/4a^4$ 項由於 scale factors 的快速膨脹很快就不重要，作了這些近似後 (3.5.9) 與 (3.5.10) 就變成：

$$3H\dot{\phi} = \frac{4V/\phi - V'}{1 + 6\epsilon} \quad (3.5.14)$$

$$H^2 = \frac{V}{3\epsilon\phi^2} \quad (3.5.15)$$

把 (3.5.15) 開根號得：

$$H = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{12\epsilon} \frac{\phi^2 - v_0^2}{\phi}} \quad (3.5.16)$$

其中上方符號代表從右滾下，下方符號代表從左滾下。將 (3.5.16) 代入 (3.5.14)，並忽略 (3.5.14) 中分母的 6ϵ 可得：

$$\dot{\phi} = \mp \sqrt{\frac{4\lambda\epsilon}{3}} v_0^2$$

可以解得：

$$\phi(t) = \phi(0) \mp \sqrt{\frac{4\lambda\epsilon}{3}} v_0^2 t \equiv \phi(0) \mp \alpha t \quad (3.5.17)$$

我們可以看到數值解的 $\phi - t$ 圖形的確在前段看起來像是線性的。把 (3.5.17) 代入 (3.5.16)：

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{12\epsilon}} \left[\phi - \frac{v_0^2}{\phi} \right] \\ \Rightarrow \ln a &= \pm \sqrt{\frac{\lambda}{12\epsilon}} \left[\phi(0)t \mp \frac{\alpha}{2} t^2 \pm \frac{v_0^2}{\alpha} \ln \phi \right] + \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{a}{a_0} &= \left(\frac{\phi}{\phi(0)} \right)^{1/(4\epsilon)} \exp \left[\frac{\phi(0)^2 - \phi^2}{8\epsilon v_0^2} \right] \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

從 (3.5.18) 可以看到，從左邊滾下的爆漲在早期主要是以指數相當大的 power law 爆漲，而從右邊滾下的爆漲在 slow-rollover 時期主要是以 exp 形式爆漲。

接著我們研究當位勢滾到極小值附近作震盪時的近似。令 $\phi = v_0 + \varphi$ 代入 (3.5.9) 中，且忽略分母的 6ϵ ，忽略 φ 二次以上的高階項可得：

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + 2\lambda v_0^2 \varphi = 0 \quad (3.5.19)$$

這就是一條 damped oscillation 的方程，可解得：

$$\varphi(t) = e^{-3Ht/2} \sin \left(\frac{\sqrt{8v_0^2\lambda - 9H^2}}{2} t \right) \sim e^{-3Ht/2} \sin \left(\sqrt{2\lambda} v_0 t \right) \quad (3.5.20)$$

底下我們拿 Bianchi IX 當例子，把 ϕ 的線性近似解跟 $\phi - t$ 圖畫在一起，且估算一下在震盪時期的週期，和數值作出來的週期作個比較：

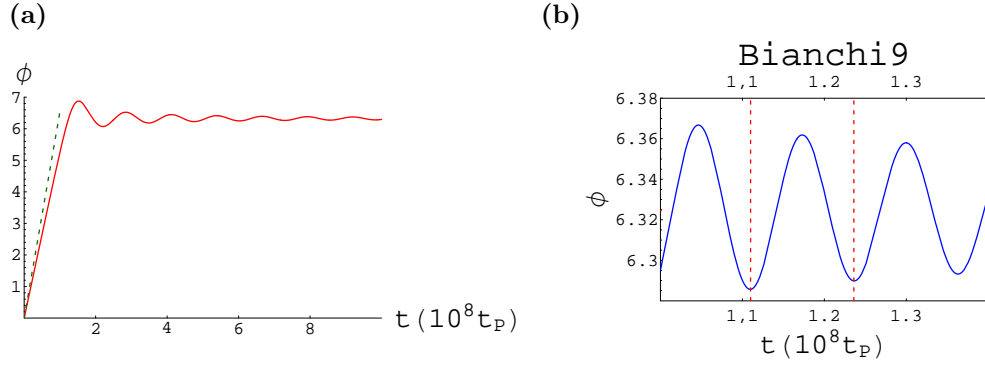


Figure 3.16: Bianchi IX example for comparison of numerical result and analytical approximation, solution of (3.5.17) and (3.5.20), in fig(b), the period is about $1.26 \times 10^8 t_p$, and the analytical approximation is about $1.11 \times 10^8 t_p$

我們發現上圖 (a) 在 $10^7 t_p$ 以前該線性近似都還蠻貼近數值結果，另一方面在上圖 (b) 裡頭數值作出來的週期大約是 $1.26 \times 10^8 t_p$ ，而我們解析近似出來的週期大約是 $1.11 \times 10^8 t_p$ ，亦是在可接受的範圍。

注意到我們選擇參數 ϵ 與 v_0 的取值時，必須滿足 $\epsilon = 2/v_0^2$ 的關係，原因是我們必須讓暴漲結束時的牛頓常數跟我們現在所知的一樣。

又 λ 的取值方面，由於我們要在 $10^8 t_p$ 的時間內暴漲約 $e^{60} \sim 10^{26}$ 以上，因而可以知道 $H \sim 10^{-6}$ 左右，從式(3.5.16) 可以看到，這意味著 λ 的 order 大約是 $\lambda \sim 10^{-11} \epsilon$ 。

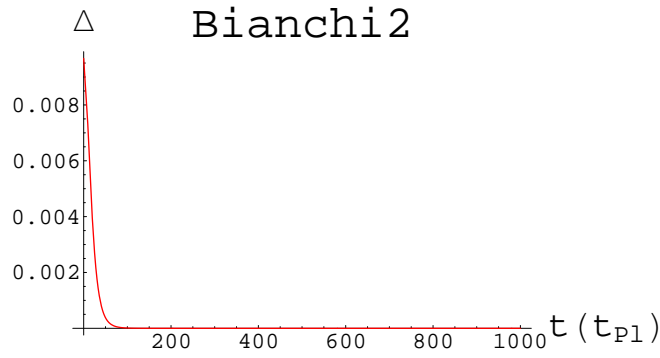


Figure 3.17: Bianchi II: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4)

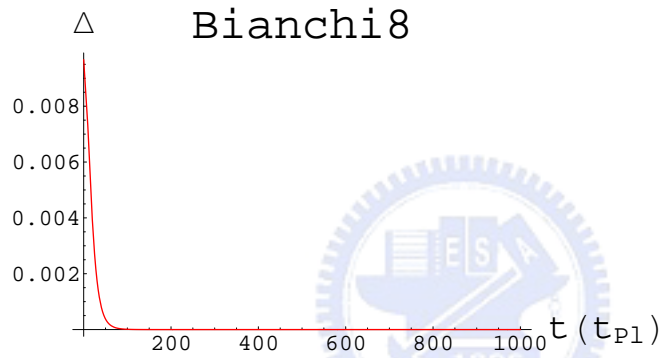


Figure 3.18: Bianchi VIII: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4)

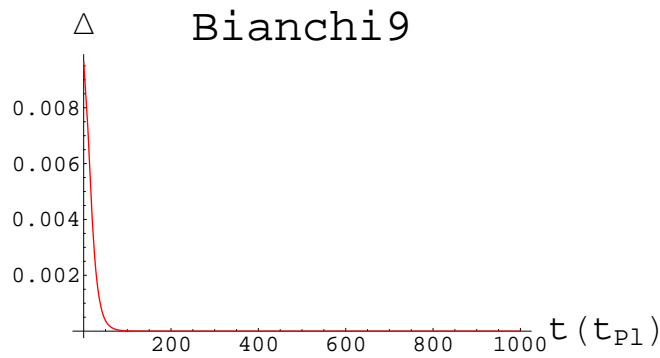


Figure 3.19: Bianchi IX: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4)

上面我們作的是讓純量場 ϕ 從 0 的位置滾下，接著我們發現讓 ϕ 從 $\phi(0) \gg V_0$ 滾下也可以成功爆漲：

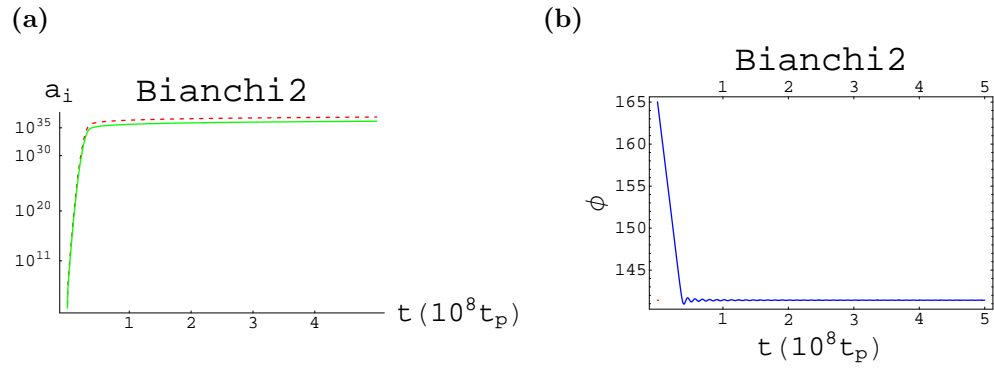


Figure 3.20: Bianchi II induced gravity inflation,, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), with $\lambda = 8 \times 10^{-18}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. For fig(a), vertical axis is log scale. dashed curve is $a(t)$, solid one is $a_z(t)$. For fig(b), Initial conditions are: $a(0) = 3 \times 10^2$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.0001$



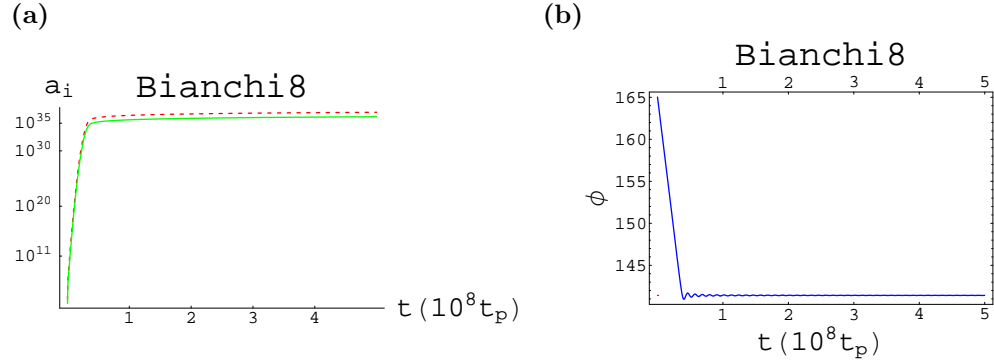


Figure 3.21: Bianchi VIII induced gravity inflation, with $\lambda = 8 \times 10^{-18}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $v_0 = \sqrt{2/\epsilon}$. The plots are quite similar to Bianchi II's, thus the curvature term k/a^2 in the field equations is irrelevant. Initial conditions are: $a(0) = 300$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.001$

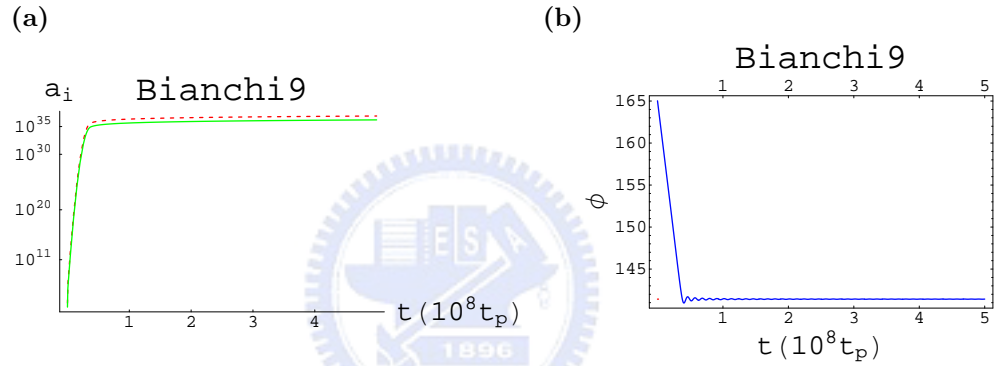


Figure 3.22: Bianchi IX induced gravity inflation. Initial conditions are: $a(0) = 300$, $a'(0) = 100$, $a_z(0) = 100$, $a'_z(0) = 10$, $\phi(0) = 71$, $\phi'(0) = -0.0001$

接著我們一樣作非均向性的數值分析，發現隨著爆漲很快地所有非均向性還是都會被抹平。

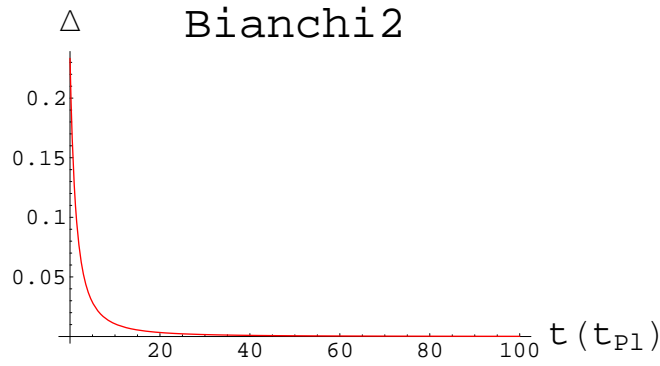


Figure 3.23: Bianchi II: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4), rolling down from RHS

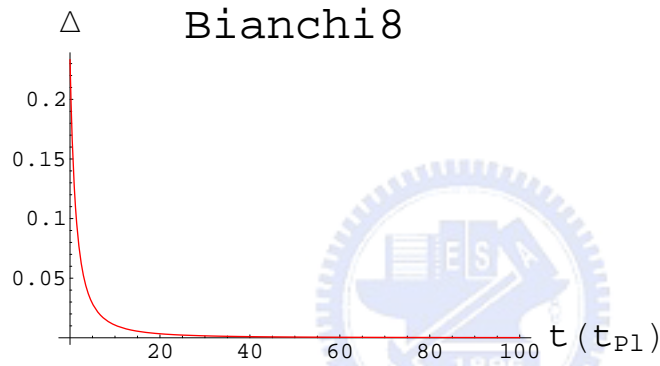


Figure 3.24: Bianchi VIII: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4)

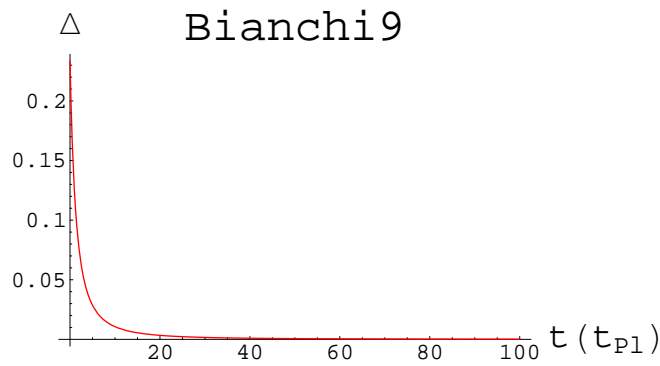


Figure 3.25: Bianchi IX: Dynamics of Anisotropy, sol. of (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) and (3.5.4)

3.6 變分方法的詳細探討

上面我們作了許多分析，這些分析要正確，很重要的一個前提是，對 $g_{\mu\nu}$ 變分的場方程式得要是對的。

3.6.1 和愛因斯坦方程作比較

考慮真空解，我們知道愛因斯坦方程式是[1]：

$$\underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - R_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow G^{\mu}_{\nu} = -\Lambda\delta^{\mu}_{\nu} \quad (3.6.1)$$

底下我們將算出 Einstein tensor，直接套用愛因斯坦方程式 (3.6.1) 來驗證我們的場方程式 (2.4.11), (2.4.12) 和 (2.4.13) 正不正確。由第二章，我們可以直接算出 G^{μ}_{ν} ：

$$G^0_0 = -\frac{k}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{a_z^2}{a^4} - H_1^2 - 2H_1H_z \quad (3.6.2)$$

$$G^1_1 = -\frac{1}{4}\frac{a_z^2}{a^4} - H_1^2 - H_1H_z - H_z^2 - \dot{H}_1 - \dot{H}_z \quad (3.6.3)$$

$$G^2_2 = G^1_1 \quad (3.6.4)$$

$$G^3_3 = -\frac{k}{a^2} + \frac{3}{4}\frac{a_z^2}{a^4} - 3H_1^2 - 2\dot{H}_1 \quad (3.6.5)$$

$$G^3_2 = -k\sqrt{1-kr^2}\left[-\frac{k}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^4} - 2H_1^2 + H_1H_z + H_z^2 - \dot{H}_1 + \dot{H}_z\right] \quad (3.6.6)$$

現下上式有 4 條方程但我們只有兩個變數，而 Bianchi identity 正給了我們上面四條方程的兩個關聯式。我們可以輕易驗證第二章中推出的 Bianchi identity：

$$(\partial_t + 3H)H^0_0 = 2H_1H^1_1 + H_zH^3_3$$

而另一條 Bianchi identity 則給我們：

$$\begin{aligned} & [\partial_r H^r_r + \Gamma^\theta_{\theta r} H^r_r + \Gamma^z_{zr} H^r_r - \Gamma^\theta_{\theta r} H^\theta_\theta - \Gamma^\theta_{zr} H^z_\theta - \Gamma^z_{zr} H^z_z] \\ & - [\Gamma^z_{\theta r} H^\theta_z] = 0 \\ \Rightarrow & \Gamma^3_{31}(H^1_1 - H^3_3) - \Gamma^2_{31}H^3_2 - \Gamma^3_{21}H^2_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

再由：

$$\begin{aligned} H_{23} &= g_{a2}H^a_3 = g_{22}H^2_3 + g_{32}H^3_3 \\ &= H_{32} = g_{a3}H^a_2 = g_{23}H^2_2 + g_{33}H^3_2 \end{aligned}$$

可以得到：

$$H^1_1 - H^3_3 = \frac{a_z^2 H^3_2 - (a^2 r^2 + (1 - kr^2)a_z^2) H^2_3}{k\sqrt{1 - kr^2} a_z^2} \quad (3.6.8)$$

把 (3.6.8) 代入 (3.6.7) :

$$\frac{ka_z^2}{2ra^2} \frac{a_z^2 H^3{}_2 - [a^2 r^2 + (1 - kr^2)a_z^2] H^2{}_3}{k\sqrt{1 - kr^2}a_z^2} - \frac{a_z^2}{2r\sqrt{1 - kr^2}a^2} H^3{}_2 - \left[\frac{k(2 - kr^2)}{2r\sqrt{1 - kr^2}} - \frac{\sqrt{1 - kr^2}a_z^2}{2ra^2} \right] H^2{}_3 = 0 \quad (3.6.9)$$

化簡可得 :

$$-\frac{k}{2r\sqrt{1 - kr^2}} H^2{}_3 = 0 \quad (3.6.10)$$

因此 Bianchi identity 告訴我們 $H^2{}_3$ 會消掉。把 (3.6.10) 代入 (3.6.8) 就能得到 $H^1{}_1$, $H^3{}_3$ 與 $H^3{}_2$ 間的關係，因此 (3.6.7) 這條 r 分量的 Bianchi identity 給了我們兩個資訊。

從上面我們看到若把 (3.6.2), (3.6.3), (3.6.5) 代入愛因斯坦方程 (3.6.1) 則得到 (2.4.11), (2.4.12), (2.4.13) 三式。因而我們之前的推導都是正確無誤的。而且其實我們只要推導對 g_{00} 和 g_{11} 變分的場方程式即可，其他的由 Bianchi identity 可以寫出來。

3.6.2 正確的變分方法

前節的結果雖然驗證無誤，但仔細研究一下我們的變分方法，似乎有很大的瑕疵。我們知道把 action 對度規分量 $g_{\mu\nu}$ 變分，就能得到場方程式 [1]，一般來說， $g_{\mu\nu}$ 是個場，即他是時空的函數，因此我們理應對 $g_{\mu\nu}(x^\rho)$ 變分才對，然而我們作的卻是對 scale factors 變分！這顯然有點問題，我們不只變分到時間部分，scale factors 還出現在不同的度規分量中。

我們先對 Bianchi IX 求 Einstein-Hilbert 模型下的 G_{11} 場方程式，由於 Bianchi IX 度規中有一些很醜的 factor，我們考慮底下這個度規形式¹，

$$ds^2 = -b(t)^2 dt^2 + a_1(t, r)^2 dr^2 + a_2(t, r)^2 d\theta^2 + 2a_4^2(t, r) d\theta dz + a_3(t)^2 dz^2 \quad (3.6.11)$$

他保留了 (2.1.2) 的度規形式，而且對 $a_1(t, r)$ 變分就可以得到正確的場方程式。我們把跟度規有關的量算出：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & a_4^2 \\ 0 & 0 & a_4^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.6.12)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (g^{mn}) \end{pmatrix} \quad \text{where } g^{mn} = \frac{1}{a_2^2 a_3^2 - a_4^4} \begin{pmatrix} a_3^2 & -a_4^2 \\ -a_4^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.6.13)$$

$$\det(g) = a_1^2 (-a_2^2 a_3^2 + a_4^4) \quad (3.6.14)$$

¹下一節將說明為什麼對 $a_1(t, r, \theta, z)$ 和對 $a_1(t, r)$ 變分是一樣的，都可以得到 $G_{11} = \Lambda$

接著算出 spin connections :

$$\Gamma^0_{11} = a_1^2 H_1(t) \quad \Gamma^1_{01} = H_1(t) \quad (3.6.15)$$

$$\Gamma^1_{11} = I_1(r) \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{a_2^2}{a_1^2} I_2(t, r) \quad \Gamma^1_{23} = -\frac{a_4^2}{a_1^2} I_4(r) \quad (3.6.16)$$

$$\Gamma^0_{mn} = \begin{bmatrix} a_2^2 H_2(t, r) & a_4^2 H_4 \\ a_4^2 H_4 & a_3^2 H_3 \end{bmatrix} \quad (3.6.17)$$

$$\Gamma^m_{n0} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} a_2^2 a_3^2 H_2 - a_4^4 H_4 & a_3^2 a_4^2 (H_4 - H_3) \\ a_2^2 a_4^2 (H_4 - H_2) & a_2^2 a_3^2 H_3 - a_4^4 H_4 \end{bmatrix} \quad (3.6.18)$$

$$\Gamma^m_{n1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} a_2^2 a_3^2 I_2 - a_4^4 I_4 & a_3^2 a_4^2 I_4 \\ a_2^2 a_4^2 (I_4 - I_2) & -a_4^2 I_4 \end{bmatrix} \quad (3.6.19)$$

其中 $\delta = a_2^2 a_3^2 - a_4^4$, $I_i = a'_i/a_i$ 接著我們先算出所有需要加出純量曲率的黎曼張量分量：

$$R^{01}_{01} = \dot{H}_1 + H_1^2 \quad (3.6.20)$$

$$R^{02}_{02} = \delta^{-2} \left\{ \begin{aligned} & Q_1[-2H_2^2 + H_3H_4 - H_2H_3 + 3H_2H_4 - 3H_4^2 - \dot{H}_4 - \dot{H}_2] \\ & + Q_2(H_2^2 + \dot{H}_2) + Q_3(H_4^2 + \dot{H}_4) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.21)$$

$$R^{03}_{03} = \delta^{-2} \left\{ \begin{aligned} & Q_1[-2H_3^2 + H_2H_4 - H_2H_3 + 3H_3H_4 - 3H_4^2 - \dot{H}_4 - \dot{H}_3] \\ & + Q_2(H_3^2 + \dot{H}_3) + Q_3(H_4^2 + \dot{H}_4) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.22)$$

$$\begin{aligned} R^{12}_{12} = & \delta^{-2} [-Q_1(H_1H_2 + H_1H_4) + Q_2H_1H_2 + Q_3H_1H_4] \\ & + \delta^{-2} a_1^{-2} \left\{ \begin{aligned} & Q_1(-I_1I_2 + 2I_2^2 - I_1I_4 - 3I_2I_4 + 3I_4^2 + I_4' + I_2') \\ & + Q_2(I_1I_2 - I_2^2 - I_2') + Q_3(I_1I_4 - I_4^2 - I_4') \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

$$\begin{aligned} R^{13}_{13} = & \delta^{-2} [Q_2H_1H_3 + Q_3H_1H_4 - Q_1(H_1H_3 + H_1H_4)] \\ & + \delta^{-2} a_1^{-2} [Q_1(-I_1I_4 - I_2I_4 + 3I_4^2 + I_4') + Q_3(I_1I_4 - I_4^2 - I_4')] \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

$$R^{23}_{23} = \delta^{-1} a_4^{-4} (Q_1H_2H_3 - Q_3H_4^2) + a_1^{-2} a_4^{-4} \delta^{-1} Q_3 I_4^2 \quad (3.6.25)$$

其中 $Q_1 = a_2^2 a_3^2 a_4^4$, $Q_2 = a_2^4 a_3^4$, $Q_3 = a_4^8$.

加出來的純量曲率是：

$$\begin{aligned}
 -R = & \delta^{-2} a_1^{-2} \left\{ \begin{array}{l} I_1 I_2 (Q_2 - Q_1) + I_2^2 (2Q_1 - Q_2) + 2I_1 I_4 (Q_3 - Q_1) \\ -4Q_1 I_2 I_4 + I_4^2 (7Q_1 - 3Q_3) + 2I_4' (Q_1 - Q_3) + I_2' (Q_1 - Q_2) \end{array} \right\} \\
 & + \delta^{-2} \left\{ \begin{array}{l} H_1^2 (Q_2 + Q_3 - 2Q_1) + H_1 H_2 (Q_2 - Q_1) \\ + H_2^2 (Q_2 - 2Q_1) + H_1 H_3 (Q_2 - Q_1) \\ + H_2 H_3 (Q_2 - 3Q_1) + H_3^2 (Q_2 - 2Q_1) \\ + 2H_1 H_4 (Q_3 - Q_1) + 4(H_2 H_4 + H_3 H_4) Q_1 \\ + H_4^2 (3Q_3 - 7Q_1) + \dot{H}_1 (Q_2 + Q_3 - 2Q_1) \\ + \dot{H}_3 (Q_2 - Q_1) + 2\dot{H}_4 (Q_3 - Q_1) \\ + \dot{H}_2 (Q_2 - Q_1) \end{array} \right\} \quad (3.6.26)
 \end{aligned}$$

我們考慮的是下面這個變分：

$$L = \sqrt{-g} \mathcal{L} = L(a_1, \dot{a}_1, \ddot{a}_1, a_1') \quad \text{where} \quad \mathcal{L} = -R - 2\Lambda = R^{ab}{}_{ab} - 2\Lambda$$

Euler-Lagrange 方程是：

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_1} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial L}{\partial a_1'} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{a}_1} \right) = 0 \quad (3.6.27)$$

把 (3.6.26) 式代入 (3.6.27)，計算出來的結果是：

$$\begin{aligned}
 \delta^{-3/2} & \left\{ \begin{array}{l} \Lambda(2Q_1 - Q_2 - Q_3) + (H_2^2 + H_3^2)(-2Q_1 + Q_2) + H_2 H_3(-3Q_1 + Q_2) \\ + 4Q_1 H_4(H_2 + H_3) + H_4^2(-7Q_1 + 3Q_3) + \dot{H}_3(-Q_1 + Q_2) \\ + 2\dot{H}_4(-Q_1 + Q_3) + \dot{H}_2(-Q_1 + Q_2) \end{array} \right\} \\
 & + a_1^{-2} \delta^{-3/2} (Q_1 - Q_3) I_4^2 = 0 \quad (3.6.28)
 \end{aligned}$$

接著代換回 Bianchi IX 的座標，需要作如下的代換：

$$a_1^2 \rightarrow \frac{a^2}{1-kr^2} \quad a_2^2 \rightarrow a^2 r^2 + a_z^2(1-kr^2) \quad (3.6.29)$$

$$a_3 \rightarrow a_z \quad a_4^2 \rightarrow -k\sqrt{1-kr^2}a_z^2 \quad (3.6.30)$$

$$\delta \rightarrow r^2 a^2 a_z^2 \quad (3.6.31)$$

$$Q_1 \rightarrow (1-kr^2)a_z^6[a^2 r^2 + a_z^2(1-kr^2)] \quad (3.6.32)$$

$$Q_2 \rightarrow a_z^4[a^2 r^2 + a_z^2(1-kr^2)]^2 \quad (3.6.33)$$

$$Q_3 \rightarrow (1-kr^2)^2 a_z^8 \quad (3.6.34)$$

$$Q_4 \rightarrow (1-kr^2)^2 a_z^8 \quad (3.6.35)$$

$$I_1 \rightarrow \frac{kr}{1-kr^2} \quad (3.6.36)$$

$$I_2 \rightarrow \frac{a^2 r^2 - kra_z^2}{a^2 r^2 + a_z^2(1-kr^2)} \quad (3.6.37)$$

$$I_4 \rightarrow \frac{r}{-2k(1-kr^2)} \quad (3.6.38)$$

$$H_2 \rightarrow \frac{a^2 H_1 r^2 + a_z^2(1-kr^2)H_z}{a^2 r^2 + a_z^2(1-kr^2)} \quad (3.6.39)$$

$$H_3 \rightarrow H_z \quad H_4 \rightarrow H_z \quad (3.6.40)$$

做完複雜的代數運算之後，會發現我們得到了跟 (2.4.12) 一模一樣的式子：

$$\frac{a_z^2}{4a^4} + H_1^2 + H_z^2 + H_1 H_z + \dot{H}_1 + \dot{H}_z - \Lambda = 0$$

這更進一步確定了前面分析的可信度，由於 Bianchi identity 的關係，又對 g_{00} 變分的場方程 (即 Friedmann equation) 總是正確的，我們只要導出對 g_{11} 變分的場方程式即可。另外，Bianchi II, VIII 從標準的變分方法也能得到正確的結果。

3.6.3 為什麼直接對 a 變分會對

我們來詳細看看，為何我們一開始對 scale factor $a(t)$ 變分可以得到正確的場方程。首先，為了能三個模型一起探討，我們回到最原始的 (2.1.1) 度規。但我們為了區分 g_{11} 和 g_{22} 裡頭 $a(t)$ 的貢獻，我們把 g_{22} 裡的 $a(t)$ 改成 $\tilde{a}(t)$ 。除非特別說明，此節中的 a 泛指 g_{11} 中的 a 。且度規皆為 (3.6.41)

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a^2(t)dy^2 + \tilde{a}(t)^2 f^2(y)dz^2 + a_z^2(t)(dx - h(y)dz)^2 \quad (3.6.41)$$

其中

$$f(y) = \begin{pmatrix} y \\ \sinh y \\ \sin y \end{pmatrix}, \quad h(y) = \begin{pmatrix} -y^2/2 \\ -\cosh y \\ \cos y \end{pmatrix} \quad \text{for Bianchi} \quad \begin{pmatrix} II \\ VIII \\ IX \end{pmatrix}$$

接著我們去算出純量曲率：

$$\begin{aligned}
 -R - 2\Lambda = & -2\Lambda + 2H_1^2 + 2\tilde{H}_1^2 + 2H_1\tilde{H}_1 + 2(H_1 + \tilde{H}_1)H_z + 2H_z^2 \\
 & + 2\dot{H}_1 + 2\dot{\tilde{H}}_1 + 2\dot{H}_z - \frac{a_z^2 h'(y)^2}{2a^2 \tilde{a}^2 f(y)^2} - \underbrace{\frac{2f''(y)}{a^2 f(y)}}_{asym.}
 \end{aligned} \quad (3.6.42)$$

其中 $f''(y)/f(y) = 0, 1, -1$ 對應到 II, VIII, IX. 而 $h' = -f$ 所以純量曲率還是時空均勻的。接著注意到 $a(t)$ 的場方程通式 (2.4.9) 還能用，但首項需要一點小修正：

$$\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)^2 L^1 - \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)L_1 + a\partial_a \mathcal{L} = 0 \quad (3.6.43)$$

$$\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3\tilde{H}\right)^2 \tilde{L}^1 - \left(\frac{d}{dt} + 3\tilde{H}\right)\tilde{L}_1 + \tilde{a}\partial_{\tilde{a}} \mathcal{L} = 0 \quad (3.6.44)$$

把 (3.6.42) 代入 (3.6.43) 就得到 $a(t)$ 的貢獻，代入 (3.6.44) 就得到 \tilde{a} 的貢獻。注意到純量曲率 (3.6.42) 跟以前幾乎一模一樣，而且幾乎每項都是對稱的，除了 *asym.* 那項以外。由於我們已知 g_{11} 裡的 $a(t)$ 加上 g_{22} 裡的 \tilde{a} 將給我們正確場方程式。這意味著 (3.6.43) 與 (3.6.44) 都將給我們幾乎整個 $G_{11} = \Lambda$ ，除了 k/a^2 這項以外！然而將 *asym.* 項代入 (3.6.43) 與 (3.6.44) 中會給出一正一負，互相消掉，這正是為什麼我們在第二章中對 scale factor $a(t)$ 變分會得到正確場方程式的原因，即 (3.6.43) 加上 (3.6.44) 就得到 $G_{11} = \Lambda$ 。

3.6.4 正確變分中該引入的座標

由於正確的變分是對 $g_{\mu\nu}(x^\rho)$ 作變分，因此我們理應把 g_{11} 中的 $a(t)$ 改成 $a(t, x, y, z)$ 去變分²，之後再把多塞入的空間座標部分令為零，這樣我們才能得到所有的變分貢獻³。我們寫下此時的 Euler-Lagrange 方程：

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \left(\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial L}{\partial a_{,\mu}} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^\alpha dx^\beta} \frac{\partial L}{\partial a_{,\alpha\beta}} \right) \delta a \\
 = & \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{a}} \right)}_{original} \delta a \\
 & + \underbrace{\left(-\frac{d}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial a_{,i}} + \frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu} \frac{\partial L}{\partial a_{,\mu\nu}} \Big|_{\mu < \nu} \right)}_{added} \delta a
 \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

其中 $L = \sqrt{-g}\mathcal{L}$ ，而 *original* 項就是不在 scale factor a 中塞入空間座標所得方程，我們來看看 *added* 項能多加的貢獻。注意到 $V \equiv \sqrt{-g}$ 不會有 scale factors 的微分

²此舉會讓 scalar curvature 暫時不時空均勻，但變分完畢把多塞入的座標令為零以後就回到時空均勻

³Many thanks for the discussion with Mr. H. Y. Jhong and J. R. Lin in this subsection.

項，因而：

$$\begin{aligned} \text{added} = & \left\{ -V \frac{d}{dx^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{,i}} + V \frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{,\mu\nu}} \Big|_{\mu > \nu} \right\} \\ & + \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{,i}} \frac{dV}{dx^i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{,\mu\nu}} \frac{d^2 V}{dx^\mu dx^\nu} \Big|_{\mu < \nu} \right] \end{aligned} \quad (3.6.46)$$

由於我們最後要把多塞入的空間部分都拿掉，而大刮號裡的兩項都包含空間的微分，因此 added 項中的大刮號部分最後會是零。中刮號部分就是多塞入空間座標後會有影響的部分，這部份就看你的 V 裡面有哪些座標，就會有哪些影響。例如度規 (2.1.1) 中算出來的 $V = a\tilde{a}a_z f(y)$ ，因而我們只需塞入 y 去變分，這正是 3.6.2 節中的註解提到的。

3.6.5 高階修正可否直接對 a 變分

在探討此節的標題之前，我們先來看 Einstein-Hilbert 模型下，在 g_{11} 中的 a 變成 $a(t, y)$ 以後對 3.6.3 節中計算的影響。考慮多塞入 y 以後的度規如下：

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a(t, y)^2 dy^2 + \tilde{a}(t)^2 f^2(y) dz^2 + a_z^2(t) (dx - h(y)dz)^2 \quad (3.6.47)$$

算出來的純量曲率是：

$$\begin{aligned} -R - 2\Lambda = & -2\Lambda + 2H_1^2 + 2\tilde{H}_1^2 + 2H_1\tilde{H}_1 + 2(H_1 + \tilde{H}_1)H_z + 2H_z^2 \\ & + 2\dot{H}_1 + 2\dot{\tilde{H}}_1 + 2\dot{H}_z - \frac{a_z^2 h'(y)^2}{2a^2 \tilde{a}^2 f(y)^2} - \underbrace{\frac{2f''(y)}{a^2 f(y)}}_{\text{asym.}} + \underbrace{\frac{2f'(y)I_1}{a^2 f}}_{\text{new}} \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

多塞入 y 的作用是暫時把純量曲率變得不時空均勻，多了 new 這一項。因為 Bianchi II, VIII, IX 要多塞入 y ，我們就先算出對 $a(t, y)$ 變分的通式：

對 $a(t, y)$ 變分的通式：

此時 $V = \sqrt{-g} = a\tilde{a}a_z f(y)$ ，我們有：

$$\frac{dV}{dt} = V(3H) \quad (3.6.49)$$

$$\frac{dV}{dy} = V \left(I_1 + \frac{f'}{f} \right) \quad (3.6.50)$$

變分出來就得到：

$$\delta L = V \left[\frac{\mathcal{L}}{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \left(\frac{d}{dt} + 3H \right)^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\dot{a}}} - \left(\frac{d}{dy} + I_1 + \frac{f'}{f} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'} + \left(\frac{d}{dy} + I_1 + \frac{f'}{f} \right)^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'^2} \right] \delta a = 0 \quad (3.6.51)$$

把 Lagrangian 用哈伯常數表示，故作如下代換：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial a} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial a} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1} \frac{\partial I_1}{\partial a} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1'} \frac{\partial I_1'}{\partial a} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} \\ &= -\frac{1}{a}H_1L_1 - \frac{1}{a}(\dot{H}_1 - H_1^2)L^1 - \frac{1}{a}I_1L_1^* - \frac{1}{a_1}(I_1' - I_1'^2)L^{*1} + \partial_a\mathcal{L}\end{aligned}\quad (3.6.52)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \dot{a}} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \dot{a}} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial \dot{a}} \\ &= \frac{1}{a}L_1 - \frac{2}{a}H_1L^1\end{aligned}\quad (3.6.53)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \ddot{a}} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \ddot{a}} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta \dot{H}_1} \frac{\partial \dot{H}_1}{\partial \ddot{a}} \\ &= \frac{1}{a}L^1\end{aligned}\quad (3.6.54)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a'} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1} \frac{\partial I_1}{\partial a'} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1'} \frac{\partial I_1'}{\partial a'} \\ &= \frac{1}{a}L_1^* - \frac{2}{a}I_1L^{*1}\end{aligned}\quad (3.6.55)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta a''} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1} \frac{\partial I_1}{\partial a''} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta I_1'} \frac{\partial I_1'}{\partial a''} \\ &= \frac{1}{a}L^{*1}\end{aligned}\quad (3.6.56)$$

其中 $L^{*1} = \partial\mathcal{L}/\partial I_1'$, $L_1^* = \partial\mathcal{L}/\partial I_1$ 我們得到的場方程通式是：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} + \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)^2L^1 - \left(\frac{d}{dt} + 3H\right)L_1 \\ + \left(\frac{d}{dy} + I_1 + \frac{f'}{f}\right)^2L^{*1} - \left(\frac{d}{dy} + I_1 + \frac{f'}{f}\right)L_1^* + a\partial_a\mathcal{L} = 0\end{aligned}\quad (3.6.57)$$

我們把 asym. 項和 new 項代入 (3.6.57) 中，我們會發現在把空間部分令回零以後，兩項給出來的貢獻正好消掉：

$$\text{asym.} \rightarrow \frac{2f''}{a^2f}\quad (3.6.58)$$

$$\text{new} \rightarrow \frac{-2f''}{a^2f}\quad (3.6.59)$$

因此我們得到的結論是：在 Einstein-Hilbert 模型下，由於純量曲率的項幾乎都很對稱，因而對 g_{11} 中的 $a(t)$ 變分可以幾乎得到 G_{11} 方程，而塞入空間部分 y 的效應是把非對稱項剛好消掉。

所以我們就得到一個判斷高階修正項可否直接對 scale factor $a(t)$ (出現在 g_{11} 與 g_{22} 中) 變分的判斷法則：

高階項可否對 $a(t)$ 直接變分：

The method to check：我們得把高階項修正算出來，看看裡面的時間部分項是不是如純量曲率般有 a 、 \tilde{a} 的對稱性，而非對稱項的貢獻可以不必如同在 Einstein-Hilbert 模型底下那樣地，和多塞入空間座標 y 的貢獻完全消光，亦即，只要非對稱項在 $a(t)$ 的變分貢獻加上在 $\tilde{a}(t)$ 的變分貢獻為非對稱項在 $a(t)$ 的變分貢獻與空間部分在 $a(t, y)$ 的變分貢獻的兩倍，那麼我們就可以把 g_{22} 裡頭的 \tilde{a} 的 tilde 拿掉，直接對 scale factor $a(t)$ 變分得到場方程式。

β 項的詳細驗證：

舉個例子，我們來驗證一下加入了 β 修正項的 action 可不可以直接對 scale factor $a(t)$ (包含在 g_{11} 跟 g_{22} 中的 $a(t)$) 變分，我們把 β 曲率項計算出來後，發現的確有許多對稱項，但非對稱項變多了，

$$\begin{aligned}
 \text{asym.} = & -\frac{2H_1^2 f'^2}{a^2 f^2} + \frac{4H_1 \tilde{H}_1 f'^2}{a^2 f^2} - \frac{2\tilde{H}_1^2 f'^2}{a^2 f^2} \\
 & + \frac{2a_z^2 f''}{a^4 \tilde{a}^2 f} - \frac{2H_1^2 f''}{a^2 f} - \frac{4H_1 \tilde{H}_1 f''}{a^2 f} \\
 & - \frac{2\tilde{H}_1^2 f''}{a^2 f} - \frac{2H_1 H_z f''}{a^2 f} - \frac{2\tilde{H}_1 H_z f''}{a^2 f} \\
 & - \frac{2\dot{H}_1 f''}{a^2 f} - \frac{2\dot{\tilde{H}}_1 f''}{a^2 f} + \frac{2f''^2}{a^4 f^2}
 \end{aligned} \tag{3.6.60}$$

把 asym. 項代入 (3.6.57) 式即可得到其對 a 變分後的貢獻，我們也可以從 (3.6.57) 式得到 asym. 項對 \tilde{a} 變分後的貢獻，只要注意把 (3.6.57) 裡的 $L_1, L^1, a\partial_a \mathcal{L}$ 改成 $\tilde{L}_1, \tilde{L}^1, \tilde{a}\partial_{\tilde{a}} \mathcal{L}$ ，於是我們得到 asym. 項在對 a, \tilde{a} 的變分貢獻和(即對 scale factor a 的貢獻) 是：

$$-\frac{4}{a^4} + \frac{8a_z^2}{a^6} - \frac{16H_1 H_z}{a^2} - \frac{16\dot{H}_1}{a^2} \tag{3.6.61}$$

而加入了空間座標後， β 曲率修正項多出的部分是：

$$\begin{aligned}
 \text{new} = & -\frac{2a_z^2 f' I_1}{a^4 \tilde{a}^2 f} + \frac{2(H_1^2 + \tilde{H}_1^2) f' I_1}{a^2 f} + \frac{4H_1 \tilde{H}_1 f' I_1}{a^2 f} \\
 & + \frac{2(H_1 + \tilde{H}_1) H_z f' I_1}{a^2 f} + \frac{2(\dot{H}_1 + \dot{\tilde{H}}_1) f' I_1}{a^2 f} - \frac{4f' f'' I_1}{a^4 f^2} \\
 & + \frac{a_z^2 I_1^2}{2a^4 \tilde{a}^2} + \frac{2f'^2 I_1^2}{a^4 f^2}
 \end{aligned} \tag{3.6.62}$$

同樣地，由變分公式 (3.6.57) 可以得出 new 項和 asym. 項對 a 變分後的貢獻和：

$$-\frac{2}{a^4} + \frac{4a_z^2}{a^6} - \frac{8H_1 H_z}{a^2} - \frac{8\dot{H}_1}{a^2} \tag{3.6.63}$$

注意到 (3.6.61) 恰好是 (3.6.63) 的兩倍。這意味著若我們把 g_{22} 裡的 tilde 拿掉，直接對 scale factor $a(t)$ 變分，得到的方程；將與對 $a(t, y)$ (g_{22} 裡的 scale factor 仍寫作 \tilde{a}) 變分所得的方程差兩倍。因此多了 β 修正後我們還是可以把 tilde 拿掉，直接對 $a(t)$ 變分得到正確的場方程式！

γ 項的結果：

γ 部分的非對稱項就更複雜了，但是我們仍然可以驗證非對稱項的總貢獻會是非對稱項在 g_{11} 裡 a 的變分加上空間座標部分在 g_{11} 裡 a 變分後貢獻和的兩倍，這意味著對底下這個 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = -R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \gamma R^{\mu\nu}{}_{\delta\eta} R^{\delta\eta}{}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\mu\nu}$$

我們可以直接對 scale factor $a(t)$ 變分得到正確的場方程式！



Appendix A

Bianchi spaces

在此節附錄中我們將簡要地介紹我們探討的 Bianchi 九種爆漲模型的由來，其實他是數學家 Luigi Bianchi 早在 1898 年所作，把三維運動群的李代數 (Lie algebra) 分類的工作 [27],[1]，之後才被重力和宇宙學者拿來當作研究的模型。

所謂的流形 (manifold) 就是一個集合伴隨著一些座標黏貼布 (coordinate patch) 滿足一些性質，例如這些座標貼布要貼滿整個集合，而且彼此要覆蓋得很滑順，我們可以把牠想像成一個抽象的空間，這個空間加入了度規後，就成了度規空間。假設 \mathcal{X} 是個度規空間， g 是度規張量，他是一個 functional：

$$g : T_p(\mathcal{X}) \times T_p(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.0.1})$$

一個流形給定度規以後，就給了這個流形結構，這時空間裡才有距離等幾何的意義。我們在此考慮正定的 (positive definite) 度規空間，叫做黎曼空間 (Riemannian space)。

兩個度規空間 \mathcal{X} , \mathcal{Y} 之間有一映射 (mapping) $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 使得：

$$\forall u, v \in \mathcal{X}, g_y(f(u), f(v))|_{f(p)} = g_x(u, v)|_p \quad (\text{A.0.2})$$

那麼這個映射就叫做保距映射 (distance preserving map)，一個保距映射自然會是一對一的。而這兩個度規空間就叫做同測 (isometric)，若此同測映射是從某一測度空間映到他自己，那麼連同合成函數運算 (function composition) 將會形成一個群，叫做同測群 (isometry group)。

從自己保測映射到自己的映射又叫做這個空間的運動 (motion)，我們在此考慮連續的運動，因此描述群裡的元素將要一些連續的參數，即他們形成李群 (Lie group) G_r ，有 r 個 generators：

$$(G_r, \circ), \quad r \text{ infinitesimal transformations } X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f \quad (\text{A.0.3})$$

因此決定哪些空間可以擁有連續運動保測群，就相當於找出所有可能的 ds^2 類別，使得在連續運動，即在李群 $G_r \equiv (X_1 f, \dots, X_r f)$ 的轉換之下， ds^2 不變！在三維空間下，分析李代數的分類，我們就能找到九種度規形式，即九類 ds^2 ，這正是我們 Bianchi model 的由來。底下我們簡單摘要推導出 Bianchi II 的度規。

A.1 the Killing equations

我們來推導一下任何 n 維空間度規

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.1.1})$$

在某一無窮小轉換下

$$Xf = \xi^r \partial_r f \quad (\text{A.1.2})$$

維持不變所需要滿足的方程式 [27]。把這轉換作用到 ds^2 上，假設這轉換運算子 X 跟 differential operator d 可以互易：

$$\begin{aligned} X(ds^2) &= X(g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} dX(x^i) dx^j + g_{ij} dx^i dX(x^j) \\ &= \xi^r (\partial_r g_{ij}) dx^i dx^j + g_{rj} d\xi^r dx^j + g_{ir} dx^i d\xi^r \\ &= \{\xi^r \partial_r g_{ij} + g_{rj} \partial_i \xi^r + g_{ir} \partial_j \xi^r\} dx^i dx^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此，

$$\xi^r \partial_r g_{ij} + g_{rj} \partial_i \xi^r + g_{ir} \partial_j \xi^r = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

其中 i, j 取值從 $1 \dots n$ ，(A.1.3) 就是 killing equation.

A.2 三維運動群的九種李代數

最後我們發現三維運動群的李代數一共分為九種(Bianchi I IX)，底下我們列出他們各自的李代數 [27]：

- I $[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = [X_2, X_3]f = 0$
- II $[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = 0, [X_2, X_3]f = X_1 f$
- III $[X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = 0$
- IV $[X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = X_1 f + X_2 f$
- V $[X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = X_2 f$
- VI $[X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_1 f, [X_2, X_3]f = hX_2 f, (h \neq 0, 1)$
- VII $[X_1, X_2]f = 0, [X_1, X_3]f = X_2 f, [X_2, X_3]f = -X_1 f + hX_2 f, (0 \leq h < 2)$
- VIII $[X_1, X_2]f = X_1 f, [X_1, X_3]f = 2X_2 f, [X_2, X_3]f = X_3 f$
- IX $[X_1, X_2]f = X_3 f, [X_2, X_3]f = X_1 f, [X_3, X_1]f = X_2 f$

注意到從 Bianchi I 到 Bianchi VII 類型裡， $[X_1, X_2]$ 都是零，因此我們在下一節算一下 $[X_1, X_2]$ 對度規長相的影響。

A.3 在 G_2 裡 $[X_1, X_2] = 0$ 的度規

在此情況下，我們會有 $\xi^1 = 0$ 且度規可以寫成：

$$ds^2 = dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + 2a_{23}dx_2dx_3 + a_{33}dx_3^2 \quad (\text{A.3.1})$$

因為現在在 X_1f 與 X_2f 底下 $\xi^1 = 0$ ，在 killing equation(A.1.3) 裡頭取 $i = 1$ ， $k = 2, 3$ 會給我們：

$$a_{22} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + a_{23} \frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{A.3.2})$$

$$a_{23} \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} + a_{33} \frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{A.3.3})$$

又由於 $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \neq 0$ ，我們有 $\partial \xi^2 / \partial x_1 = \partial \xi^3 / \partial x_1 = 0$ ，也就是說 X_1f 和 X_2f 的係數要跟 x_1 座標無關。接著我們選取 X_1f 與 X_2f 的軌跡，使得他們可以分別寫成 $X_1f = \xi \partial f / \partial x_2$ ， $X_2f = \eta \partial f / \partial x_3$ 。

在 $[X_1, X_2]$ 的情況下，我們有

$$X_1f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_2f = \frac{\partial f}{\partial x_3} \quad (\text{A.3.4})$$

因此度規就能寫成：

$$ds^2 = dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2dx_3 + \gamma dx_3^2 \quad (\text{A.3.5})$$

其中 α ， β 和 γ 都只是 x_1 的函數。

A.4 Bianchi II 的度規

在此節我們將導出Bianchi II 的度規形式。由前一節的結果為基礎，我們再引入第三個無窮小轉換 $X_3f = \xi^r \partial_r f$ 。一般來說，我們可以把李代數寫成：

$$[X_1, X_3]f = aX_1f + bX_2f + cX_3f \quad (\text{A.4.1})$$

$$[X_2, X_3]f = a'X_1f + b'X_2f + c'X_3f \quad (\text{A.4.2})$$

而第一類到第九類分別對應到一組 (a, b, c, a', b', c') 的數字。因而我們有：

$$\partial_{x_2}\xi^1 = c\xi^1, \quad \partial_{x_2}\xi^2 = c\xi^2 + a, \quad \partial_{x_2}\xi^3 = c\xi^3 + b \quad (\text{A.4.3})$$

$$\partial_{x_3}\xi^1 = c'\xi^1, \quad \partial_{x_3}\xi^2 = c'\xi^2 + a', \quad \partial_{x_3}\xi^3 = c'\xi^3 + b' \quad (\text{A.4.4})$$

而由於我們更進一步假設 (X_1f, X_2f, X_3f) 是 transitive 的，所以 $\xi^1 \neq 0$ 。代入 killing equation 可以得出：

$$\partial_{x_1}\xi^1 = 0 \quad (\text{A.4.5})$$

$$c\xi^1 + \alpha\partial_{x_1}\xi^2 + \beta\partial_{x_1}\xi^3 = 0 \quad (\text{A.4.6})$$

$$c'\xi^1 + \beta\partial_{x_1}\xi^2 + \gamma\partial_{x_1}\xi^3 = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\xi^1 + \alpha(c\xi^2 + a) + \beta(c\xi^3 + b) = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

$$\frac{1}{2}\gamma'\xi^1 + \beta(c'\xi^2 + d') + \gamma(c'\xi^3 + b') = 0 \quad (\text{A.4.9})$$

$$\beta'\xi^1 + \alpha(c'\xi^2 + a') + \beta(c\xi^2 + c'\xi^3 + a + b') + \gamma(c\xi^3 + b) = 0 \quad (\text{A.4.10})$$

上面這些方程就是前七種李群需要解的方程式。回到 Bianchi II，對照李代數可得 $a = b = c = b' = c' = 0$ ， $a' = 1$ 。由 (A.4.3), (A.4.4) 以及 (A.4.5) 可知 ξ^1 是個常數，我們令他為 $\xi^1 = -1/h$ 。而從 (A.4.8), (A.4.9) 和 (A.4.10) 可以得到 $\alpha' = 0$ ， $\beta' = h\alpha$ ， $\gamma' = 2h\beta$ ，還有積分可得：

$$\alpha = k^2, \quad \beta = hk^2x_1 + l, \quad \gamma = h^2k^2x_1^2 + 2hlx_1 + m \quad (\text{A.4.11})$$

其中 k, l, m 是新引入的常數。因而度規現在長成這樣：

$$ds^2 = dx_1^2 + k^2dx_2^2 + 2(hk^2x_1 + l)dx_2dx_3 + (h^2k^2x_1^2 + 2hlx_1 + m)dx_3^2 \quad (\text{A.4.12})$$

再作座標變換 $x_2 \rightarrow x_2/k$ ， $x_3 \rightarrow x_3/k$ ，並引入新參數 $n^2 = m/k^2 - l^2/k^4$ 。

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2(hx_1 + l/k^2)dx_2dx_3 + ((hx_1 + l/k^2)^2 + n^2)dx_3^2 \quad (\text{A.4.13})$$

再作座標變換 $ny_1 = hx_1 + l/k^2$ ， $(n/h)y_2 = x_2$ ， $(1/h)y_3 = x_3$ ，度規就變成：

$$ds^2 = \frac{n^2}{h^2} [dy_1^2 + dy_2^2 + 2y_1dy_2dy_3 + (y_1^2 + 1)dy_3^2]$$

或者是：

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1dx_2dx_3 + (x_1^2 + 1)dx_3^2 \quad (\text{A.4.14})$$

此度規形式 (A.4.14) 正是當初我們在第二章一開始的 (2.1.3) 式。

A.5 Bianchi I 到 Bianchi IX 度規詳列

在此節裡我們列出所有 Bianchi space 的度規，注意到這裡的度規是 Bianchi 一開始推出來的原始形式，因此可能需要作一點座標變換才能得到在其他文獻中會看到的 Bianchi 模型的度規，例如底下的 VIII 和 IX 跟第二章中的度規看起來就有點不一樣。

$$\text{I} \quad ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{II} \quad ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2^2(t)dy^2 + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{III} \quad ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)(\cosh zdx + \sinh zdy)^2 + a_2^2(t)(\sinh zdx + \cosh zdy)^2) + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{IV } ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2^2(t)dy^2) + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{V } ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1^2(t)dx^2 + a_2^2(t)dy^2) + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{VI } ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cosh zdx + \sinh zdy)^2 + a_2^2(t)(\sinh zdx + \cosh zdy)^2 + a_3^2(t)dz^2$$

$$\text{VII } ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cos zdx + \sin zdy)^2 + a_2^2(t)(\sin zdx - \cos zdy)^2$$

$$\text{VIII } ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cosh zdx - \sinh zdy)^2 + a_2^2(t)(\sinh zdx - \cosh zdy)^2 + a_3^2(t)(dz + \cosh xdy)^2$$

$$\text{IX } ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t)(\cos zdx + \sin zdy)^2 + a_2^2(t)(-\sin zdx + \cos zdy)^2 + a_3^2(t)(dz + \cos xdy)^2$$



Appendix B

Conventions

我們大部分的 Conventions 都取自 [24]。希臘字的上下標代表從 0 取到 3，拉丁字代表從 1 取到 3，即空間部分。變量下標的逗號或是 ∂ 代表著偏微分，即：

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f \equiv f_{,x} \quad (\text{B.0.1})$$

度規的 signature 是 $g_{\mu\nu} \sim (t, \mathbf{x}) = (-1, 1, 1, 1)$ 。定義 spin connection 作：

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (\text{B.0.2})$$

定義黎曼曲率張量作：

$$[D_a, D_b] A_c = R^d{}_{cba} A_d \quad (\text{B.0.3})$$

經過計算，黎曼曲率可以用 spin connections 表示成：

$$R^d{}_{cba} = -\partial_a \Gamma^d{}_{bc} - \Gamma^e{}_{cb} \Gamma^d{}_{ae} - (a \leftrightarrow b) \quad (\text{B.0.4})$$

里奇張量定義作：

$$R_{ba} \equiv R^c{}_{abc} \quad (\text{B.0.5})$$

純量曲率定義作：

$$R = R_{ab} g^{ab} \quad (\text{B.0.6})$$

愛因斯坦張量定義為：

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - R_{\mu\nu} \quad (\text{B.0.7})$$

B.1 變數定義

- $V = a^2 a_z \sim a_1^2 a_2$
- $B = 1/b^2$
- $H_i = \dot{a}/a$

- $J = a_z^2/a^2 \sim a_2^2/a_1^2$
- 在探討變分方法的章節中，即 (3.6.2) 節 $\delta = a_2^2 a_3^2 - a_4^4$
- (3.6.2) 節 $I_i = a'_i/a_i$, prime 表對座標 r 微分，dot 表對時間 t 微分
- (3.6.2) 節 $Q_1 = a_2^2 a_3^2 a_4^4$, $Q_2 = a_2^4 a_3^4$, $Q_3 = a_4^8$
- Lagrangian L ，reduced lagrangian $L = \sqrt{-g}\mathcal{L}$



Appendix C

Units

C.1 Planck units (8π absorbed):

我們讓 $8\pi G = \hbar = c = 1$.

name	expression	SI equivalent
modified Planck length	$l'_p = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^3}}$	$8.10263 \times 10^{-34}\text{m}$
modified Planck mass	$m'_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}$	$4.34139 \times 10^{-9}\text{kg}$
modified Planck time	$t_p = \sqrt{\frac{8\pi G \hbar}{c^5}}$	$2.70275 \times 10^{-43}\text{sec}$

C.2 Geometrized units

我們讓 $8\pi G = c = 1$ ，如此一來所有的單位都成表示成長度的某次方。

Quantity	non-G dim.	G. dim	Conversion factor
length	L	L	1
mass	M	L	G/c^2
time	T	L	c
mass density	$L^{-3}M$	L^{-2}	G/c^2

其中 non-G dim. 代表非幾何單位的量綱，G. dim 代表幾何單位的量綱。

Bibliography

- [1] P. A. M. Dirac, "*General Theory of Relativity*" (Princeton University Press, 1975)
C.W. Misner, K. Thorne and T.A. Wheeler, "*Gravitation*" (Freeman, SF, 1973)
S. Weinberg, "*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The general Theory of Relativity*" (Wiley, 1972)
E.W. Kolb and M.S. Turner, "*The Early Universe*" (Addison-Wesley, 1990)
B. F. Schutz, "*A first course in General Relativity*" (Cambridge, 1985)
T. P. Cheng, "*Relativity, Gravitation, and Cosmology*" (Oxford, 2005)
R. M. Wald, "*General Relativity*" (Chicago Press, 1984)
B. O'Neill, "*Elementary Differential Geometry*" (Academic Press, 1997)
- [2] S. Gulkis, P. M. Lubin, S. S. Meyer and R. F. Silverberg, *The cosmic background explorer*, Sci. Am. 262(1) 122-129 (1990).
- [3] D. J. Fixsen, et al, *The cosmic microwave background spectrum from the full COBE firas data set* , Astrophys. J. 473 576-587 (1996)
- [4] A.H. Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems* , Phys. Rev. D. 23, 347, (1981)
- [5] A. Zee, *Broken-Symmetric Theory of Gravity* , phys. Rev. Lett. 42, 417-421 (1979)

- [6] A. Zee, *Horizon Problem and the Broken-symmetric Theory of Gravity* , Phys. Rev. Lett. v44, 703-706 (1980)
- [7] F. S. Accetta, D. J. Zoller and M.S. Turner, *Induced-gravity inflation* , Phys. Rev. D 31, 3046, (1985)
- [8] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. v48, 1220 (1982)
- [9] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* , hep-th/0503203 (2005)
- [10] Q. Shafi and A. Vilenkin, *Inflation with $SU(5)$* , Phys. Rev. Lett. V52, 691 (1984)
- [11] S. Weinberg, *The cosmological constant problem* , Review of modern physics, V61, 1 (1989)
- [12] W. F. Kao, *Inflationary universe in higher derivative induced gravity* , Phys. Rev. D, V62, 8 (2000)
- [13] A. Linde, *Hybrid Inflation* , Phys. Rev. D V49, 748 (1994)
- [14] N. Turok, *String-driven inflation* , Phys. Rev. Lett. V60, 549 (1988)
- [15] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. Maldacena, L. Mcallister and S. P. Trivedi, *Towards inflation in string theory* , J. Cosmol. Astropart. Phys. 10, 013 hep-th/0308055 (2003)
- [16] R. K. Schaefer and Q. Shafi, *Inflation and large-scale structure formation after the Cosmic Background Explorer*, Phys. Rev. D V47, 1333 (1993)
- [17] R. K. Schaefer and Q. Shafi, *Simple model of large scale structure formation* , Phys. Rev. D V49, 4990 (1994)
- [18] I. Yavuz and U. Camci, *Ricci Collineations of the Bianchi Type II, VIII, and IX Space-times* , Gen.Rel.Grav. 28, 691-700 (1996)
- [19] G.F. Chapline and N.S. Manton, Phys. Lett. 120B 105 (1983); C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec and M.J. Perry, Nucl. Phys. B262 593(1985); M.B. Green, J.H.

- Schwartz and E.Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, (1986)
- [20] A. Zee, Phys. Rev. Letts. 42 (1979) 417; 44 (1980) 703; L. Smolin, Nucl. Phys. B160 (1979) 253;
- [21] A. Dobado and A. L. Maroto, *Inflationless inflation* , Phys. Rev. D V52, 1895 (1995)
- [22] W.F. Kao and U. L. Pen, *Generalized FRW metric and redundancy in the generalized Einstein equations* , Phys. Rev. D 44, 3974 (1991).
- [23] W.F. Kao, *Anisotropic higher derivative gravity and inflationary universe* , Phys. Rev. D 74, 043522 (2006)
- [24] W. F. Kao, Lecture notes for the course of General Relativity, (2007)
- [25] W. F. Kao, *Kaluza-Klein Induced Gravity Inflation* , Phys. Rev. D 62, (2000)
- [26] T. Singh and A. K. Agrawal, *astrophysics and space science*, V. 191, N. 1 (1991)
- [27] L. Bianchi, *On the spaces of three dimensions that admit a continuous group of movements* , Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat. 11, 267 (1898)
- [28] G. F. R. Ellis, *83 years of general relativity and cosmology: progress and problems* , class. Quantum Grav. 16, A37-A75 (1999)
- [29] H. Fleming, *Comment on a broken-symmetric theory of gravity* , phys. rev. D 21, 1690 (1979)
- [30] M. S. Turner, *Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe* , phys. rev. D 28, 1243 (1983)