國立交通大學

物理研究所

碩士論文

Bianchi type VI 宇宙模型的研究

The Study of Bianchi Type VI cosmology Mode

指導教授：高文芳

研究生：林勤倫

中華民國九十六年七月

Bianchi type VI 宇宙模型的研究

The Study of Bianchi Type VI cosmology Mode

研 究 生：林勤倫　　　　Student：Cheng-Lun Lin

指導教授：高文芳　　　　Advisor：W.F Kao

國立交通大學

物理研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Computer and Information Science

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Physics

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

目錄

Bianchi type six 的研究

學生:林勤倫　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　指導教受:高文芳

國立交通大學物理研究所碩士班

摘　　　要

暴漲理論(inflationary theory)的提出,解決了對於標準熱大爆炸宇宙模型(standard big bang cosmology model)描述下,宇宙大尺度上(大於10^8公尺數量級)有著非常高精確度的均勻性(homogeneous)、各向同性(isotropic)以及視界(horizon)等等的問題。但是對於星系的起源,卻是個問題。在最出的均勻、各向同性的宇宙中,是否有足夠凝聚成星系的困擾?與其說宇宙從一開始高精確度均勻性、各向同性以及視界的 Friedman model,不如更合理的假設宇宙一開始就是不規則,然後經過一段時間後($t \to \infty$),演化成最終的 Friedman model。在研究宇宙開始形成的時候,我們選用了 Bianchi model。在處理的過程中,我們發現了一些有趣的事情:關於 Eistein-Hibert model 的場方程式與一般利用變分所得到的場方程式的討論。關於這點,在第二章,我們會給予探討;在第三章,我們把焦點放在 Bianchi type VI 的 solution 上面,並討論 solution 的形式。最後,我們在附錄裡頭放了一些最基本得運算技巧。本篇論文希望可以交代一些關於宇宙學的一些研究。

The study of Bianchi type VI cosmology Model

student：Allen Lin **Advisors：Wen-Fun Kao**

Institute of Physics
National Chiao Tung University

Abstract

Cosmology as what we see today—Isotropic and Homogeneous . Actually,we can support that the cosmology can be Anisotropy and **Homogeneous in the early time . And as the evaluation of cosmology** ,it can be **Isotropic and Homogeneous as the present time . Bianchi Model is what we can take as our ideal Model--** Anisotropic and **Homogeneous** ,using the Model ,as the evaluation of cosmology. Can it be **Isotropy and Homogeneous as what we know of present cosmology?**

Variational Method is a good way to obtain Field equation ,However ,we find something wrong while using the Variational Method .We'll discuss it in chapter2.

If there is no question in finding Field equation ,we will discuss the properties of solution in Bianchi type VI cosmological Model.

誌謝

一、我的雙親－林柏志先生、溫春英女士，因爲打從我出生的時候到現在，都是您給我任何的幫助，也給我諄諄的教誨，使我有能力 ，機會可以更向前一步。養育之恩，不敢有忘。

二、我的指導教授－高文芳老師，感謝您在我對物理感到最無奈的時刻收留我，這一年的相處，在您身上看到了物理之美；也在您的管理之下獲得最大成就感。一年教誨，一生受用。

三、研究團隊的成員－勝藍、泓毅、小黑、君睿－在研究的過程裏頭，幾乎可以說是老是進度最慢的我。真的感謝你們不厭其煩的拉我一把。一日之識，一生之情。

四、我的同窗好友－平翰、永順、德明、肇嘉、依芳、大捲，這些日子跟妳們相處的很愉快，雖然要畢業了，但是我並不會難過，因爲朋友是一輩子的。

五、我的特殊朋友－烜逸，雖然我們不常相處，但是卻好像認識很久的樣子。每次與你喝酒作樂，實是人生一大樂事。

六、我的學長們－坤憲、宗哲、光胤、邦杰，平常晚上總是一起吃飯，在物理所的日子都是學長學弟一起出去吃飯。我想，我會想念這段日子的。

七、我所居住的這塊土地－台灣，在這裡，我看到了最美的感動。出生在這裡；讀書在這裡；研究在這裡 ，讓我感到很自豪。打拼的人們；爲了學術努力不懈的學者；在最不看好的環境，產生的企業家。一再的說明，這塊土地上的人們所做的一切都是最美麗的感動。

人不是孤單的，唯有跟他人作聯繫，才可以多充實自己 。感謝上述所提及的人，僅以誌謝表達心中的感恩。

表目錄

圖目錄

1、選用的模型

在序言的時候，我們提到：與其說宇宙從一開始高精確度均勻性、各向同性以及視界的 Friedman model，不如更合理的假設宇宙一開始就是不規則，然後經過一段時間後（ $t \to \infty$ ），演化成最終的 Friedman model。

在選用模型上，因爲 Bianchi Model 具有：非均向(anisotropic)、時空均勻(homogeneous)，很符合我們的需求，也因此我們的研究內容往這方面發展。在我本身的研究是選用 Bianchi type VI 作爲我的研究。在本章裡頭，我先一一交代一些物理量的形成─只要給一個度規，其他的物理量很自然就會知道。

1.1：the metric

Bianchi 宇宙模型是非均向(anisotropic)、時空均勻(homogeneous)的，由 type VI 的度規裡頭，我們便開始我們的研究。

在 Bianchi Type VI Model：

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a_1{}^2(t)dx^2 + a_2{}^2(t)e^{-2x}dy^2 + a_3{}^2(t)e^{2x}dz^2 \tag{1.1.1}$$

由 $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ ，我們可以得到：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2{}^2 e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3{}^2 e^{2x} \end{pmatrix}$$

而 g^{ij} 變是 g_{ij} 的反矩陣：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1{}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2{}^2 e^{-2x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_3{}^2 e^{2x}} \end{pmatrix}$$

有時候爲了方便起見，我們往往會引入 $B \equiv \dfrac{1}{b^2}$

1.2：計算 spin connection、curvature tensor

有了度規以後，接下來我們要求得所有非零的 spin connection：

利用 $\Gamma^{a}{}_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd}+\partial_c g_{bd}-\partial_d g_{bc})$

$$\Gamma^{t}{}_{tt}=\frac{-\dot{B}}{2B}=H_0$$
$$\Gamma^{i}{}_{ti}=H_i$$
$$\Gamma^{t}{}_{ii}=BH_i g_{ii}$$
$$\Gamma^{x}{}_{yy}=\frac{k}{a_1^2}g_{yy}$$
$$\Gamma^{x}{}_{zz}=\frac{-k}{a_1^2}g_{zz}$$
$$\Gamma^{y}{}_{xy}=-k$$
$$\Gamma^{z}{}_{xz}=k$$

其中哈伯常數 $H_i=\frac{\dot{a}_i}{a_i}$ ，$i=1,2,3$

黎曼張量(Rienman curvature tensor)在宇宙學、廣義相對論、微分幾何中都是個重要的概念，而他是度規的二次微分：

$$R^{d}{}_{cba}=-\partial_a\Gamma^{d}{}_{bc}-\Gamma^{e}{}_{cb}\Gamma^{d}{}_{ae}-(a\leftrightarrow b)$$

由於角標的關係，我們有以下的關係：

$$R^{ab}{}_{cd}=g^{be}R^{a}{}_{ecd}$$

利用上面的公式，我們可以得到不為零的黎曼張量：

$$R^{ti}{}_{ti}=\frac{\dot{B}}{2}H_i+B(\dot{H}_i+H_i^2)$$
$$R^{xy}{}_{xy}=BH_1H_2-\frac{k^2}{a_1^2}$$
$$R^{xz}{}_{xz}=BH_1H_3-\frac{k^2}{a_1^2}$$
$$R^{yz}{}_{yz}=BH_2H_3+\frac{k^2}{a_1^2}$$
$$R^{xy}{}_{ty}=\frac{k}{a_1^2}(H_2-H_1)$$

$$R^{xz}{}_{tz} = -\frac{k}{a_1^{\,2}}(H_3 - H_1)$$

$$R^{ty}{}_{xy} = Bk(H_1 - H_2)$$

$$R^{tz}{}_{xz} = Bk(H_3 - H_1)$$

1.3：里奇張量(Ricci tensor)

所謂的里奇張量是定義爲黎曼張量裡頭第一腳標與第四角標的縮併(contraction)：

$$R_{ba} \equiv R^{c}{}_{abc}$$

而我們也可以表示爲：

$$R^{a}{}_{b} = g^{ca}R_{cb} = g^{ca}R^{d}{}_{cbd} = R^{da}{}_{bd}$$

計算出所以非零的里奇張量：

$$R^{t}{}_{t} = \frac{1}{2}\dot{B}(H_1 + H_2 + H_3) + B(H_1^{\,2} + H_2^{\,2} + H_3^{\,2} + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3)$$

$$R^{t}{}_{x} = Bk(H_3 - H_2)$$

$$R^{t}{}_{x} = \frac{k}{a_1^{\,2}}(H_3 - H_2)$$

$$R^{x}{}_{x} = \frac{1}{2}\dot{B}H_1 + B(H_1^{\,2} + \dot{H}_1) + BH_1(H_2 + H_3) - 2\frac{k^2}{a_1^{\,2}}$$

$$R^{y}{}_{y} = \frac{1}{2}\dot{B}H_2 + B(H_2^{\,2} + \dot{H}_2) + BH_2(H_1 + H_3)$$

$$R^{z}{}_{z} = \frac{1}{2}\dot{B}H_3 + B(H_3^{\,2} + \dot{H}_3) + BH_3(H_1 + H_2)$$

1.4：scalar tensor

scalar tensor 的定義為 $R \equiv R_{ab} g^{ab}$ ，可由上一節的概念得到，因為：

$$-R = -R_{ab} g^{ab} = R^{ab}{}_{ab}$$

在 Bianchi type VI 裡頭：

$$-R = 2\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\dot{B}(H_1+H_2+H_3)+B(H_1{}^2+H_2{}^2+H_3{}^2+\dot{H}_1+\dot{H}_2+\dot{H}_3)+ \\ BH_1H_2+BH_2H_3+BH_3H_1-\frac{k^2}{a_1{}^2} \end{array}\right]$$

我們注意到：等式的右邊裡頭跟座標是沒有關係了，這也驗證了 Bianchi Type VI 是時空均勻的(homogeneous)。

當我們取 $H_1 \to H_2 \to H_3$ 極限(即 isotropic 極限)

$$-R = 12H^2 + 6\dot{H} - 2\frac{k^2}{a_1{}^2}$$

而標準熱霹靂的 Friedmann-Roberson-Walker 模型的 scalar tensor 為：

$$-R_{FRW} = 12H^2 + 6\dot{H} + 6\frac{K}{a^2}$$

整理得到的結果為：

Bianchi Type VI Model in isotropic case	$-R = 12H^2 + 6\dot{H} - 2\frac{k^2}{a_1^2}$
Friedmann-Roberson-Walker Model	$-R_{FRW} = 12H^2 + 6\dot{H} + 6\frac{K}{a^2}$

表 1-1

Bianchi type Model VS F.R.W Model

因此在趨向於均勻(isotropic)極限後，Bianchi type VI 會趨近於開放($K = -1$) 的宇宙

2、變分的問題

利用 Bianchi Model 的性質研究宇宙模型是很有意義的，就像之前第一章所敘述：Bianchi 宇宙模型是非均向(anisotropic)、時空均勻(homogeneous)的。這也就是我們選用 Bianchi Model 的最大原因。然而我們在處理場方程式 (Field equation) 的時候遇到了很大的問題—發生在用變分法得到的場方程式與愛因斯坦的場方程式(Einstein Field Equation)有不一樣的地方。關於這一點，我們將在這一章節給予深入的討論。

2.1：問題的起源

metric（度規張量）：在黎曼幾何裡面，是指一用來衡量度規空間中距離及角度的二階張量

在廣義一點 Bianchi type model 的度規：

$$ds^2=-\frac{1}{B(t)}+a_1{}^2(t)dx^2+a_2{}^2(t)e^{2\alpha_2 x}dy^2+a_3{}^2(t)e^{2\alpha_3 x}dz^2 \tag{2.1.1}$$

其中$(\alpha_2,\alpha_3)=(-1,-1)$代表 type V；$(\alpha_2,\alpha_3)=(-k,k)$代表 type VI

Einstein 的場方程式，可以由 Einstein-Hilbert action 變分得到；然而我們也可以直接對$B(t)$、$a_1(t)$、$a_2(t)$、$a_3(t)$變分得到場方程式：

（一）由 Einstein 的場方程式：

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-R_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu}$$

$$H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+\alpha_2\alpha_3)}{a_1{}^2}=\Lambda$$

$$\dot{H}_2+H_2{}^2+\dot{H}_3+H_3{}^2-\frac{(\alpha_2\alpha_3)}{a_1{}^2}=\Lambda$$

$$\dot{H}_1+H_1{}^2+\dot{H}_3+H_3{}^2-\frac{\alpha_3{}^2}{a_1{}^2}=\Lambda$$

$$\dot{H}_1+H_1{}^2+\dot{H}_2+H_2{}^2-\frac{\alpha_2{}^2}{a_1{}^2}=\Lambda$$

（二）由變分得到的場方程式：

1、對$B(t)$變分：

$$\frac{\delta L}{\delta B}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{B}})=0$$

$$\Rightarrow H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+\alpha_2\alpha_3)}{a_1{}^2}=\Lambda$$

2、對$a_1(t)$變分：

$$\frac{\delta L}{\delta a_1(t)}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_1(t)})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_1})=0$$

$$\Rightarrow \dot{H}_2+H_2{}^2+\dot{H}_3+H_3{}^2+\frac{(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+\alpha_2\alpha_3)}{a_1{}^2}=\Lambda$$

3、對$a_2(t)$變分：

$$\frac{\delta L}{\delta a_2(t)}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_2(t)})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_2})=0$$

$$\Rightarrow \dot{H}_1+H_1{}^2+\dot{H}_3+H_3{}^2-\frac{(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+\alpha_2\alpha_3)}{a_1{}^2}=\Lambda$$

4、對 $a_3(t)$ 變分：

$$\frac{\delta L}{\delta a_3(t)}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_3(t)}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_2+H_2^{\,2}-\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$$

整理如下：

Einstein 場方程	變分法
$H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$	$H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$
$\dot{H}_2+H_2^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}-\frac{(\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$	$\Rightarrow \dot{H}_2+H_2^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$
$\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}-\frac{\alpha_3^{\,2}}{a_1^{\,2}}=\Lambda$	$\Rightarrow \dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}-\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$
$\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_2+H_2^{\,2}-\frac{\alpha_2^{\,2}}{a_1^{\,2}}=\Lambda$	$\Rightarrow \dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_2+H_2^{\,2}-\frac{(\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^{\,2}}=\Lambda$

表 2-1

關於變分結果與場方程式的比較

其中 $L=\frac{a_1(t)a_2(t)a_3(t)e^{(\alpha_2+\alpha_3)x}}{B(t)}(-R-2\Lambda)$

我們可以發現：**除了對 $B(t)$ 作變分之外**，其他 3 個式子都是不一樣的，這 2 組得到場方程式應該要是一樣的，究竟裡頭出了什麼問題呢？首先，我們先處裡問題，將問題處理好，我們在去討論其中問題的來源。

2.2：解決問題的方法

對於前述的變分過程，由於只對 a_i 作變分，很明顯這樣的做法過於簡略，因此，我們定義一個比較廣義的度規張量：

$$ds^2 = -\frac{1}{B(t)^2} + A_1{}^2(t,x)dx^2 + A_2{}^2(t,x)dy^2 + A_3{}^2(t,x)dz^2$$

其中我們將之前度規的係數改為：

$$a_2{}^2(t)e^{-2kx} \rightarrow A_2{}^2(t,x)$$

$$a_3{}^2(t)e^{2kx} \rightarrow A_3{}^2(t,x)$$

spin connection：

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{-B}{2B} = H_0$$

$$\Gamma^i_{ti} = H_i \Rightarrow H_i = \frac{\dot{A}_i}{A_i}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^t_{ii} = BH_i g_{ii}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^i_{xi} = k_i \Rightarrow k_i = \frac{A_i'}{A_i}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^x_{ii} = -\frac{A_i{}^2}{A_1{}^2} k_i; i = y, z$$

Ricci tensor：

$$R^t{}_t = \frac{1}{2}\dot{B}(H_1 + H_2 + H_3) + B(\dot{H}_1 + H_1{}^2 + \dot{H}_2 + H_2{}^2 + \dot{H}_3 + H_3{}^2)$$

$$R^x{}_x = B(\dot{H}_1 + H_1{}^2 + H_1H_2 + H_1H_3) + \frac{1}{A_1{}^2}(k_1k_2 + k_1k_3 - k_2' - k_2{}^2 - k_3' - k_3{}^2)$$

$$R^y{}_y = B(\dot{H}_2 + H_2{}^2 + H_2H_1 + H_2H_3) + \frac{1}{A_1{}^2}(k_1k_2 - k_2k_3 - k_2' - k_2{}^2)$$

$$R^y{}_y = B(\dot{H}_3 + H_3{}^2 + H_3H_1 + H_3H_2) + \frac{1}{A_1{}^2}(k_1k_3 - k_2k_3 - k_3' - k_3{}^2)$$

$$R^x{}_t = \frac{1}{A_1{}^2}\left[H_1H_2 + H_2H_3 - \frac{p_2}{A_2} - \frac{p_3}{A_3}\right]$$

$$R^t{}_x = \frac{1}{A_1{}^2}\left[H_1k_2 + H_2k_3 - \frac{p_2}{A_2} - \frac{p_3}{A_3}\right]$$

Lagrange：

$$L=\sqrt{g}\tilde{L}=\sqrt{g}(-R-2\Lambda)$$
$$=\frac{A_1A_2A_3}{\sqrt{B}}\{\dot{B}(H_1+H_2+H_3)+2B\left[(\dot{H}_1+H_1^{\ 2}+\dot{H}_2+H_2^{\ 2}+\dot{H}_3+H_3^{\ 2})+H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1\right]-$$
$$\frac{1}{A_1^{\ 2}}\left[k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'+k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'-k_2k_3\right]-2\Lambda\}$$

這裡使用的物理量，都廣義的包含了（t,x）成分到裏頭。我們現在試著用這樣的 L 去得到場方程式，並且與 Einstein equation 作比較

一、直接變分

（1）對 B 作變分：

$$L=\sqrt{g}\tilde{L}(B,\dot{B})\rightarrow\delta L=0\rightarrow\frac{\delta L}{\delta B}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{B}})=0$$
$$\Rightarrow H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\frac{1}{A_1^{\ 2}}(k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'+k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'-k_2k_3)=\Lambda$$

令：$k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'+k_1k_2-k_2^{\ 2}-k_2'-k_2k_3=K_0$

$$\Rightarrow H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\frac{K_0}{A_1^{\ 2}}=\Lambda$$

（2）對 a_1 變分：

$$L=\sqrt{g}\tilde{L}(A_1,\dot{A}_1,\ddot{A}_1,A_1',A_1'',\dot{A}_1')\rightarrow\delta L=0$$
$$\rightarrow\frac{\delta L}{\delta A_1}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_1})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta\ddot{A}_1})-\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta A_1'})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\delta L}{\delta A_1''})+\frac{d}{dt}\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_1'})=0$$
$$\Rightarrow\dot{H}_2+H_2^{\ 2}+\dot{H}_3+H_3^{\ 2}+H_2H_3-\frac{k_2k_3}{A_1^{\ 2}}=\Lambda$$

（3）對 a_2 變分：

$$L=\sqrt{g}\tilde{L}(A_2,\dot{A}_2,\ddot{A}_2,A_2',A_2'',\dot{A}_2')\rightarrow\delta L=0$$
$$\rightarrow\frac{\delta L}{\delta A_2}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_2})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta\ddot{A}_2})-\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta A_2'})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\delta L}{\delta A_2''})+\frac{d}{dt}\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_2'})=0$$
$$\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^{\ 2}+\dot{H}_3+H_3^{\ 2}+H_1H_3+\frac{\left[k_1k_3-k_3'-k_3^{\ 2}\right]}{A_1^{\ 2}}=\Lambda$$

（4）對 a_3 變分：

$$L=\sqrt{g}\,\tilde{L}(A_3,\dot{A}_3,\ddot{A}_3,A_3',A_3'',\dot{A}_3')\rightarrow\delta L=0$$

$$\rightarrow\frac{\delta L}{\delta A_3}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_3})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta\ddot{A}_3})-\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta A_3'})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\delta L}{\delta A_3''})+\frac{d}{dt}\frac{d}{dx}(\frac{\delta L}{\delta\dot{A}_3'})=0$$

$$\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+H_1H_2+\frac{\left[k_1k_2-k_2'-k_2^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$$

在我們用 Einstein equation 去處理場方程式可以得到：

$$\frac{1}{2}R-R^t{}_t=\Lambda\Rightarrow H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\frac{1}{A_1^2}(k_1k_2-k_2^2-k_2'+k_1k_2-k_2^2-k_2'-k_2k_3)=0$$

$$\frac{1}{2}R-R^x{}_x=\Lambda\Rightarrow\dot{H}_2+H_2^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_2H_3-\frac{k_2k_3}{A_1^2}=\Lambda$$

$$\frac{1}{2}R-R^y{}_y=\Lambda\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_1H_3+\frac{\left[k_1k_3-k_3'-k_3^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$$

$$\frac{1}{2}R-R^z{}_z=\Lambda\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+H_1H_2+\frac{\left[k_1k_2-k_2'-k_2^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$$

同樣的我們將這兩種方法所得到的場方程式整理如下：

Einstein 場方程式	變分法
$H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\frac{K_0}{A_1^2}=\Lambda$	$\Rightarrow H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1+\frac{K_0}{A_1^2}=\Lambda$
$\dot{H}_2+H_2^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_2H_3-\frac{k_2k_3}{A_1^2}=\Lambda$	$\dot{H}_2+H_2^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_2H_3-\frac{k_2k_3}{A_1^2}=\Lambda$
$\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_1H_3+\frac{\left[k_1k_3-k_3'-k_3^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$	$\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_3+H_3^2+H_1H_3+\frac{\left[k_1k_3-k_3'-k_3^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$
$\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+H_1H_2+\frac{\left[k_1k_2-k_2'-k_2^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$	$\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+H_1H_2+\frac{\left[k_1k_2-k_2'-k_2^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$

表 2-2

關於變分結果與場方程式的比較(廣義的度規)

上述是我們將廣義的度規張量換回來，會發現原來的變分法跟 Einstein 場方程式所

得到的場方程相同的。

當然我們可以利用把 model 本身的形式來表示：

$$L=\int dx^{4}\sqrt{g}\,\tilde{L}$$

當然，$\tilde{L}=\tilde{L}(A_i,H_i,\dot{H}_i,k_i,k_i')$，利用最小作用利原理可以得到一通用的方程式：

$$\tilde{L}+A_i\frac{\delta\tilde{L}}{\delta A_i}-(\frac{d}{dt}+3H)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta H_i}+(\frac{d}{dt}+3H)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\dot{H}_i}-(\frac{d}{dx}+3k)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_i}+(\frac{d}{dx}+3k)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_i'}$$

（1）$i=1$

$$A_i\frac{\delta\tilde{L}}{\delta A_i}=-4\left[\frac{k_1k_2+k_1k_3-k_2^{\,2}-k_3^{\,2}-k_2k_3}{A_1^{\,2}}\right]$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta H_i}=2\left[\dot{H}_1+3\dot{H}+3HH_1+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\dot{H}_i}=2\left[3\dot{H}+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dx}+3k)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_i}=2\left[\frac{k_2'+k_3'+k_2^{\,2}+k_3^{\,2}+k_1k_2-k_1k_3+2k_2k_3}{A_1^{\,2}}\right]$$

$$\frac{d}{dx}+3k)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_i'}=0$$

$$\Rightarrow\dot{H}_2+H_2^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_2H_3-\frac{k_2k_3}{A_1^{\,2}}=\Lambda$$

（2）$i=2$

$$A_2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta A_2}=0$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta H_2}=2\left[\dot{H}_1+3\dot{H}+3HH_2+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\dot{H}_2}=2\left[3\dot{H}+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dx}+3k)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_2}=2\left[\frac{2k_1'-k_2'-4k_1^{\,2}+2k_1k_2+12kk_1-3kk_2-9k^2}{A_1^{\,2}}\right]$$

$$(\frac{d}{dx}+3k)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_2'}=2\left[\frac{2k_1'-4k_1^{\,2}+12kk_1-3k'-9k^2}{A_1^{\,2}}\right]$$

$$\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_1H_3+\frac{\left[k_1k_3-k_3'-k_3^{\,2}\right]}{A_1^{\,2}}=\Lambda$$

（3）$i=3$

$$A_3\frac{\delta\tilde{L}}{\delta A_3}=0$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta H_3}=2\left[\dot{H}_1+3\dot{H}+3HH_3+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dt}+3H)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta\dot{H}_3}=2\left[3\dot{H}+9H^2\right]$$

$$(\frac{d}{dx}+3k)\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_3}=2\left[\frac{2k_1'-k_3'-4k_1^2+2k_1k_3+12kk_1-3kk_3-9k^2}{A_1^2}\right]$$

$$(\frac{d}{dx}+3k)^2\frac{\delta\tilde{L}}{\delta k_3'}=2\left[\frac{2k_i'-4k_1^2+12kk_1-3k'-9k^2}{A_1^2}\right]$$

$$\Rightarrow\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+H_1H_2+\frac{\left[k_1k_2-k_2'-k_2^2\right]}{A_1^2}=\Lambda$$

利用上述的方法也可以得到相同的場方程。顯然問題的來源是我們對於變分過程中有些地方沒有嚴謹的處理。

2.3：思考問題的起因

關於之前我們用變分法得不到跟 Einstein equation 的場方程，我們的解決之道是將我們的度規張量表示爲更廣義的形式，方可解決。現在我們來討論一下，究竟是什麼原因會使得我們用一般的變分法失效？

首先，我們先回到剛剛處理變分時候的思考：

(1) 我們先考慮到 $S=\int\sqrt{g}\,\tilde{L}dx^4=\int Ldx^4$

(2) 因爲 curvature 是二階的微分式，所以 $L=L(a_i,\dot{a}_i,\ddot{a}_i;t)$

(3) 可以得到對 a_i 的變分公式：$\frac{\delta L}{\delta a_i(t)}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{a}_i(t)})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta\ddot{a}_i})=0$

(4) 然後將

$$L=2\left[(\dot{H}_1+H_1^2+\dot{H}_2+H_2^2+\dot{H}_3+H_3^2)+H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_2\alpha_3)}{a_1^2}-\Lambda\right]$$

帶入 $\frac{\delta L}{\delta a_i(t)}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{a}_i(t)})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta\ddot{a}_i})=0$

(5) 得到不正確的場方程式

回到 Hilbert 的變分過程中：

$$\delta S = \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{g} dx^4 + \int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{g} dx^4 \qquad (2.3.1)$$

在變分過程中：

$\int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{g} dx^4$ ：Einstein 的曲率張量

$\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{g} dx^4$ ：完全的微分項，對於變分時不會有任何貢獻

在 Hilbert 的變分過程是將 g_{ii} 作變分，而我們僅是將 a_i 作變分，也就是：

$$\delta g^{ii} = -\frac{2}{a_i} g^{ii} \delta a_i \qquad (2.3.2)$$

當我們把 $\int g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{g} dx^4$ 帶入我們的例子時，會發現：

$$\Delta = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)}{{a_1}^2} \left[\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{a_1} \delta a_1 - \frac{\alpha_2}{a_1} \delta a_2 - \frac{\alpha_2}{a_1} \delta a_3 \right] \neq 0 \qquad (2.3.2)$$

並不為 0，這就是問題的來源：我們僅對 a_i 作變分是不夠完整的。

討論：

在 Bianchi type V 的模型中： $\alpha_2 = 1$ 、 $\alpha_3 = 1 \Rightarrow \Delta \neq 0$

而在 Bianchi type IV 裡頭的(α_2 ， α_3)為(-1，1) $\Rightarrow \Delta = 0$

因此對於 Bianchi type V Model 而言，僅對 a_i 變分是不夠的；而在我們選用的在 Bianchi type IV Model 而言，對 a_i 變分是可以得到正確的場方程式

2.4：如何決定加入在度規的參數

有鑒於直接對 a_i 變分是個簡單、明瞭的方法；但是另一方面，對 a_i 變分並不總是

對，原因是上一節說過：因爲得到場方程式的由來是對 g_{ii} 變分，但是如果我們一開始就把所有參數都放進到度規，在計算處理方面有顯得麻煩。現在我們來找論究竟要在 $a_i(t)$ 裡頭加入哪些參數。

首先考慮將 $a_i(t)$ 改爲 $a_i(t,x,y,z)$[1]，度規形式可以表示爲：

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2(t,x,y,z)dx^2 + a_2^2(t,x,y,z)dy^2 + a_3^2(t,x,y,z)dz^2 \qquad (2.4.1)$$

Euler-Lagrange equation：

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu}}\delta a_{i,\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\delta a_{i,\mu\nu} = \left[\frac{\partial L}{\partial a_i} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\right]\delta a_i$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial a_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\right]\delta a_i + \left[-\frac{d}{dx^j}\frac{\partial L}{\partial a_{i,j}} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\right]\delta a_i$$

其中第一項即是我們之前變分的結果。然而第二項卻是個有趣的結果，我們先把第二項作個簡單的展開：

$$\left\{-V\frac{d}{dx^j}\frac{\partial L}{\partial a_{i,j}} + V\frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu}\frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\bigg|_{\mu>\nu}\right\} + \left[-\frac{\partial L}{\partial a_{i,j}}\frac{dV}{dx^j} + \frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\frac{d^2V}{dx^\mu dx^\nu}\bigg|_{\mu<\nu}\right]$$

這裡的 V 就是 $\sqrt{-g}$ ，當我們把 $a_i(t,x,y,z)$ 變回 $a_i(t)$ 的時候，意味著我們多塞入的空間部分被拿掉。所以有第一項會變爲零，剩下第二項。

$$\left[-\frac{\partial L}{\partial a_{i,j}}\frac{dV}{dx^j} + \frac{\partial L}{\partial a_{i,\mu\nu}}\frac{d^2V}{dx^\mu dx^\nu}\bigg|_{\mu<\nu}\right] \qquad (2.4.1)$$

結果告訴我們 V 座標，就會對變分有影響，例如在 Bianchi V Model 中，$V = a_1(t)a_2(t)a_3(t)e^{2x}$ ，所以只要加入 x 座標作變分即可，Bianchi VI Model 以及 Bianchi I Model 的 V 都爲 $a_1(t)a_2(t)a_3(t)$ ，所以只對 $a_i(t)$ 作變分即可。

[1] 這樣做雖然會導致時空不均勻，但是我們在變分完後，馬上將多設的座標變爲零

3、場方程式的討論

在這一章，我們主要討論 Bianchi type VI cosmology model 解的特性。因爲在第二章裡頭，我們已經把場方程式正確地找出來，用變分法與愛因斯坦場方程式都可以得到相同的結果。現在我們便一一將這些宇宙膨脹係數給予定性分析，在研究宇宙學的領域，我們唯有將解的特性找出來，方可印證我們的宇宙學理論。

3.1：場方程式的解

在 Eistein-Hibbert model 裡頭我們找到了 4 個場方程式，分別將 H_1 、 H_2 、 H_3 求出來，可以知道 $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $a_3(t)$ ，如此我們便可以知道 Bianchi type model 是如何爲時間演化的。

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^{\ 2} + \dot{H}_2 + H_2^{\ 2} + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^{\ 2} + \dot{H}_3 + H_3^{\ 2} + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2^{\ 2} + \dot{H}_3 + H_3^{\ 2} + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

場方程式的解：

由於在 Bianchi type VI 裡頭存在著 k（有別於其他的模型），爲了簡化我們的計算，這裡我們令 $k = 1$[2]、 $\Lambda = 0.3$ ，此時場方程式爲

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{1}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^{\ 2} + \dot{H}_2 + H_2^{\ 2} + H_1H_2 - \frac{1}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^{\ 2} + \dot{H}_3 + H_3^{\ 2} + H_1H_3 - \frac{1}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2^{\ 2} + \dot{H}_3 + H_3^{\ 2} + H_2H_3 + \frac{1}{a_1^{\ 2}} = \Lambda$$

利用程式的計算可以簡單的先將 $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $a_3(t)$ 定性分析[3]：

---

[2] 根據參考文獻[14]，我們把 k 定義爲非零的常數，在跑模擬的過程中，爲了簡化我們的答案，故令 $k = 1$

[3] 因爲 Bianchi type VI 並沒有 exact solution ，在參考文獻[6]中，Alex Harvey 跟 Dimitri Tosubelis 將 VI 的解用特殊函數表現出來。

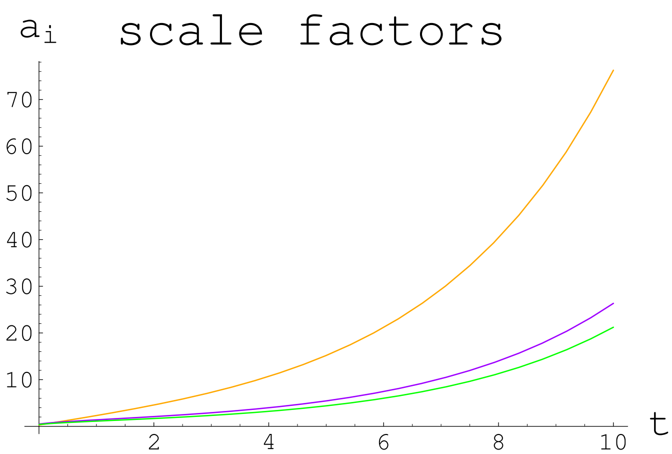


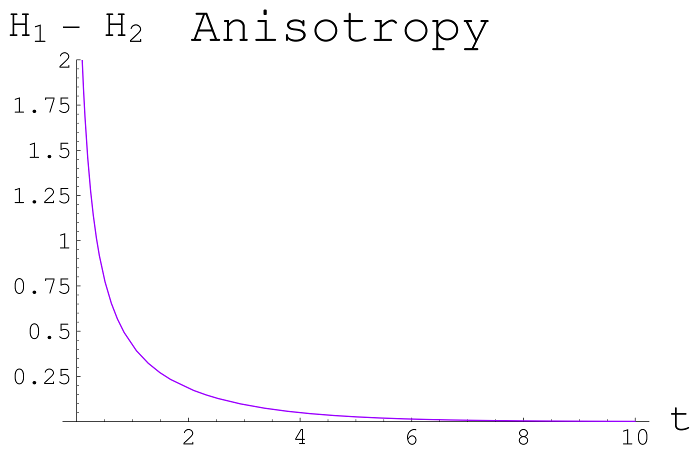
Fig 3.1.1

Scale factor in Bianchi six, we use $\Lambda = 0.3$ to simulate the behavior of the solution[4],

$$a_1(0)=0.3 \text{ 、} a_1'(0)=5 \text{ 、} a_2(0)=0.1 \text{ 、} a_2'(0)=3 \text{ 、} a_3(0)=0.5 \text{ 、} a_3'(0)=2$$

units of both axes are meters

[4]我們在時間單位上都採取 Planck 時間



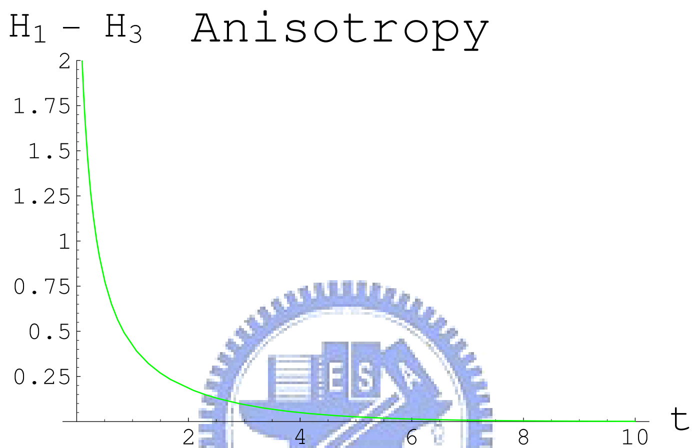


Fig3.1.2

The properties of isotropy in Bianchi type six, units of both axes are meters

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

3.2：由 anisotropy 到 isotropy

由 Einstein field equation 可以得到下列的式子：

$$H_2 = H_3 \tag{3.2.1}$$

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^{\,2}} = \Lambda \tag{3.2.2}$$

$$\dot{H}_1 + H_1^{\,2} + \dot{H}_3 + H_3^{\,2} + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^{\,2}} = \Lambda \tag{3.2.3}$$

$$\dot{H}_2 + H_2^{\,2} + \dot{H}_3 + H_3^{\,2} + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^{\,2}} = \Lambda \tag{3.2.4}$$

定義：

$$\Delta = H_1 - H_i \text{，} i = 2\text{、}3$$

$$V = a_1a_2a_3$$

可以得到：$\dot{\Delta} + \dfrac{\dot{V}}{V} = (\dot{H}_1 + H_1^{\,2} + \dot{H}_i + H_i^{\,2} + H_1H_i) - (2\dot{H}_i + 3H_i^{\,2}) = \dfrac{2k^2}{a_1^{\,2}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\Delta V) = 2k^2\frac{a_2a_3}{a_1}$$

$$\Rightarrow \Delta(t) = \frac{\Delta(0)V(0)}{V(t)} + \frac{2k^2}{a_1^2}\frac{\int_0^t \frac{a_2a_3}{a_1}dt}{\frac{a_2a_3}{a_1}} \tag{3.2.5}$$

令：$\dfrac{\int_0^t \frac{a_2a_3}{a_1}dt}{\frac{a_2a_3}{a_1}} = K$

如果 $\dfrac{a_2a_3}{a_1}$ 在 $t \to \infty$ 時，會正比於 exp[$\Lambda_0 t$][註：Λ_0 是一個正值的數]，我們可以證明 $K \to \dfrac{1}{\Lambda_0}$

$\Rightarrow$ 這意味著：在時間的演化理頭 $(t \to \infty)$，原本是 anisotropy 的宇宙模型（Bianchi type model：in our case is type VI）會演變爲 isotropy 的宇宙模型

接下來，我們對於一個簡單的例子很有興趣：究竟我們使用的模型在時間的演化之下會穩定嗎？如果給予一個小小的微擾項，會給予我們的模型任何影響嗎？

3.3：穩定性

首先，我們先回到之前的場方程式：

$$H_2 = H_3$$

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^2} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^2} = \Lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^2} = \Lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^2} = \Lambda$$

由之前的推論我們知道在時間演化之下整個空間會成爲 isotropic，也就是說 $H_1 = H_2 = H_3 \to H_0 (as\, t \to \infty)$

我們可以假設： $H_i = H_0 + \delta H_i$ (3.3.1)

$$i = 1、2、3， H_0 \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

由 $H_2 = H_3$ ，可以知道 $\delta H_2 = \delta H_3 = \delta H$

利用場方程式，並且在第一階修正之下，我們可以得到：

$$\delta H_1 + 2\delta H_2 = 0$$
$$\Rightarrow \delta H_1 = -2\delta H_2 = -2\delta H \qquad (3.3.2)$$

並且帶入： $\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 = \Lambda \Rightarrow \delta\dot{H} + 3H_0\delta H = 0 \Rightarrow \delta H \propto \frac{1}{a^3} \to 0$

由上式可以知道：當 $t \to \infty$ 的時候

$$\delta H_1 = \frac{-2K_0}{a^3} \to 0$$
$$\delta H_2 = \frac{K_0}{a^3} \to 0 \qquad (3.3.3)$$
$$\delta H_3 = \frac{K_0}{a^3} \to 0$$

K_0 是一個常數

在 Bianchi model 裡頭，當時間演化中，即使有微擾項的存在，仍然不會影響空間的 isotropic 與 stabile

3.4：Induced Gravity Model

在 induced gravity model 裡頭，我們的 L 可以表示爲 $L=\sqrt{g}\tilde{L}$

$$\tilde{L}=-\frac{\varepsilon}{2}\phi^2 R-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi) \tag{3.4.1}$$

$$V(\phi)=\frac{\lambda}{4}(\phi^2-{v_0}^2)^2$$

其中我們已經知道在 Bianchi type VI 裡頭：

$$-R=\dot{B}(H_1+H_2+H_3)+2B(\dot{H}_1+{H_1}^2+\dot{H}_2+{H_2}^2+\dot{H}_3+{H_3}^2)-\frac{2k^2}{{a_1}^2}$$

而且由於之前提到的：$\Delta=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=\frac{2(\alpha_2+\alpha_3)}{{a_1}^2}\left[\frac{\alpha_2+\alpha_3}{a_1}\delta a_1-\frac{\alpha_2}{a_1}\delta a_2-\frac{\alpha_2}{a_1}\delta a_3\right]\neq 0$

因爲在 Bianchi type VI 裡頭：$\alpha_2=-2k$ 、$\alpha_3=2k$

$\Rightarrow$導致$\Delta=0$

所以我們可以放心的使用變分法(對 B 、a_i 直接變分)

首先我們整理一下：

$$L=\frac{a_1a_2a_3}{\sqrt{B}}\left\{\left[\frac{1}{2}\dot{B}(H_1+H_2+H_3)+B(\dot{H}_1+{H_1}^2+\dot{H}_2+{H_2}^2+\dot{H}_3+{H_3}^2)-\frac{k^2}{{a_1}^2}\right]-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)\right\}$$

1、對 B 對變分：

$$\Rightarrow\frac{\delta L}{\delta B}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{B}}=0$$

$$\frac{\delta L}{\delta B}=-\frac{1}{2}a_1a_2a_3\tilde{L}+a_1a_2a_3\left[H_1+{H_1}^2+H_2+{H_2}^2+H_3+{H_3}^2+H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{B}}=a_1a_2a_3\varepsilon\phi\dot{\phi}(H_1+H_2+H_3)+$$
$$a_1a_2a_3\frac{\varepsilon\phi^2}{2}(H_1+{H_1}^2+H_2+{H_2}^2+H_3+{H_3}^2+2H_1H_2+2H_2H_3+2H_3H_1)$$

$$\frac{\delta L}{\delta B}-\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{B}}=0\Rightarrow\varepsilon\phi^2\left[H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{k^2}{{a_1}^2}+2\dot{H}_\phi(H_1+H_2+H_3)\right]=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+V(\phi)$$

2、對a_1對變分：

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta a_1}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_1})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_1})=0$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_1}=a_2a_3\left[\varepsilon\phi^2(-\dot{H}_1-H_1^{\ 2}-H_1H_2-H_1H_3+\frac{2k^2}{a_1^{\ 2}})+\tilde{L}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_1})=2\varepsilon\phi\dot{\phi}\frac{d}{dt}a_2a_3+\varepsilon\phi^2\frac{d^2}{dt^2}a_2a_3$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_1})=\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_1})+a_2a_3\varepsilon\phi^2\left[2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\ 2}+2H_\phi(H_2+H_3)\right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_1}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_1})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_1})=0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi^2\left[\dot{H}_2+H_2^{\ 2}+\dot{H}_3+H_3^{\ 2}+H_2H_3+\frac{k^2}{a_1^{\ 2}}+2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\ 2}+2H_\phi(H_2+H_3)\right]=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+V(\phi)$$

3、對a_2對變分：

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta a_2}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_2})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_2})=0$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_2}=a_1a_3\left[\varepsilon\phi^2(-\dot{H}_2-H_2^{\ 2}-H_2H_1-H_2H_3)+\tilde{L}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_2})=2\varepsilon\phi\dot{\phi}\frac{d}{dt}a_1a_3+\varepsilon\phi^2\frac{d^2}{dt^2}a_1a_3$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_2})=\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_2})+a_1a_3\varepsilon\phi^2\left[2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\ 2}+2H_\phi(H_1+H_3)\right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_2}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_2})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_2})=0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi^2\left[\dot{H}_1+H_1^{\ 2}+\dot{H}_3+H_3^{\ 2}+H_1H_3-\frac{k^2}{a_1^{\ 2}}+2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\ 2}+2H_\phi(H_1+H_3)\right]=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+V(\phi)$$

4、對a_3對變分：

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta a_3}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_3})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_3})=0$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_3}=a_1a_2\left[\varepsilon\phi^2(-\dot{H}_3-H_3^{\ 2}-H_3H_1-H_3H_2)+\tilde{L}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_3})=2\varepsilon\phi\dot{\phi}\frac{d}{dt}a_1a_2+\varepsilon\phi^2\frac{d^2}{dt^2}a_1a_2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_3}) = \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_3}) + a_1 a_2 \varepsilon\phi^2 \left[2\dot{H}_\phi + 4H_\phi{}^2 + 2H_\phi(H_1 + H_2)\right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta a_3} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{a}_3}) + \frac{d^2}{dt^2}(\frac{\delta L}{\delta \ddot{a}_3}) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi^2 \left[\dot{H}_1 + H_1{}^2 + \dot{H}_2 + H_2{}^2 + H_1 H_2 - \frac{k^2}{a_1{}^2} + 2\dot{H}_\phi + 4H_\phi{}^2 + 2H_\phi(H_1 + H_2)\right] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi)$$

5、對ϕ對變分：

$$\delta L = \delta(\sqrt{g}\tilde{L})$$

$$= -\sqrt{g}\varepsilon\phi R\delta\phi - \delta(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \sqrt{g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi$$

考慮$\delta(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)$這項：

$$\delta(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) = \sqrt{g}\partial^\mu\phi\partial_\mu\delta\phi$$

$$= -\partial_\mu(\sqrt{g}\partial^\mu\phi)\delta\phi$$

$$= -\sqrt{g}D_\mu\partial^\mu\phi\delta\phi$$

$$\Rightarrow \delta L = -\sqrt{g}\varepsilon\phi R\delta\phi - \delta(\frac{\sqrt{g}}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \sqrt{g}\frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi$$

$$= \sqrt{g}\left[-\varepsilon\phi R + D_\mu\partial^\mu\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi}\right]\delta\phi = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon\phi R + D_\mu\partial^\mu\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

為了簡單起見，假設$\phi \to \phi(t)$：

$$D_\mu\partial^\mu\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi + \Gamma^\mu{}_{\nu\mu}g^{\nu\alpha}\partial_\alpha\phi = -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} \qquad (3.4.2)$$

ϕ的運動方程式：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \varepsilon\phi R + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \qquad (3.4.3)$$

Induced Gravity 的場方程式：

$$\varepsilon\phi^2\left[H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}+2\dot{H}_\phi(H_1+H_2+H_3)\right]=-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi) \tag{3.4.4}$$

$$\varepsilon\phi^2\left[\dot{H}_2+H_2^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_2H_3+\frac{k^2}{a_1^{\,2}}+2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\,2}+2H_\phi(H_2+H_3)\right]=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi) \tag{3.4.5}$$

$$\varepsilon\phi^2\left[\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_1H_3-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}+2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\,2}+2H_\phi(H_1+H_3)\right]=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi) \tag{3.4.6}$$

$$\varepsilon\phi^2\left[\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_2+H_2^{\,2}+H_1H_2-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}+2\dot{H}_\phi+4H_\phi^{\,2}+2H_\phi(H_1+H_2)\right]=\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi) \tag{3.4.7}$$

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+\varepsilon\phi R+\frac{\partial V}{\partial\phi}=0 \tag{3.4.8}$$

考慮一個簡單的想法：如果我們將ϕ視爲一個常數，也就是$\phi(t)\rightarrow\overline{\phi}$ is const

$$H_\phi=\frac{\dot{\phi}}{\phi}\rightarrow 0$$

$$H_1H_2+H_2H_3+H_3H_1-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}=\frac{V(\phi)}{\varepsilon\phi^2}$$

$$\dot{H}_2+H_2^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_2H_3+\frac{k^2}{a_1^{\,2}}=\frac{V(\phi)}{\varepsilon\phi^2}$$

$$\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_3+H_3^{\,2}+H_1H_3-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}=\frac{V(\phi)}{\varepsilon\phi^2}$$

$$\dot{H}_1+H_1^{\,2}+\dot{H}_2+H_2^{\,2}+H_1H_2-\frac{k^2}{a_1^{\,2}}=\frac{V(\phi)}{\varepsilon\phi^2}$$

很明顯的，又回到場方程式。在這裡$\dfrac{V(\phi)}{\varepsilon\phi^2}$扮演的角色，就如同之前$\Lambda$的角色

將上面(3.4.4)到(3.4.7)同除以ϕ後，(3.4.4)到(3.4.8)全部相加，我們可以得到[5]：

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+\frac{\dot{\phi}^2}{\phi}+\left[\frac{\partial V}{\partial\phi}-\frac{4V(\phi)}{\phi}\right]/(1+6\varepsilon)=0 \tag{3.4.9}$$

而在 isotropic 底下，當$H_1\rightarrow H_2\rightarrow H_3=H$ ，可以由方程式(3.4.1)得到：

$$H^2\left[1+\frac{2\dot{\phi}/\phi}{H}\right]=\frac{1}{3\varepsilon\phi^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\phi)\right]-k/a(t)^2 \tag{3.4.10}$$

[5]參考[19]，Turner 是用 FRW Model 作爆漲

1、Slow-rolling： (對於λ 、$\varepsilon << 1$)
三個極限必須存在：

$$\left|\dot{\phi}/\phi\right| << H$$

$$\dot{\phi}^2 << V(\phi)$$
$$\ddot{\phi} << 3H\phi$$

所以我們可以將(3.5.6)以及(3.5.7)兩個式子簡化爲：

$$3H\dot{\phi} = \left[\frac{4V(\phi)}{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \phi}\right]/(1+6\varepsilon) \quad (3.4.11)$$

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3\varepsilon\phi^2} - \frac{k}{a(t)^2} \quad (3.4.12)$$

在(3.4.12)中，我們將$\frac{k}{a(t)^2}$忽略掉，原因是因爲在做 inflation 時，這項會很快趨近於零(scale factor 很大)

利用(3.4.11)以及(3.4.12)可以得到$\phi(t)$：

$$\phi(t) = \phi_0 \pm (\frac{2}{3}\lambda\varepsilon)^{1/2} {v_0}^2 t \quad (3.4.13)$$

其中，ϕ_0：initial condition value of ϕ (i.e., at t=0)
"+" ：代表$\phi_0 \prec v_0$，也就是往左邊掉下去的情形
"-" ：代表$\phi_0 \succ v_0$，也就是往右邊掉下去的情形

進一步可以求得$a(t)$ (cosmic scale factor)

$$H \equiv \dot{a}(t)/a(t) = \left[\frac{\lambda/\varepsilon}{24}\right]^{1/2} \frac{\left|{v_0}^2 - \phi\right|}{\phi} \quad (3.4.14)$$

利用(3.4.13)以及(3.4.14) 的關係可以求得：

$$a(t)/a_0 = (\phi/\phi_0)^{\varepsilon - 1/4} exp\left[\varepsilon^{-1}({\phi_0}^2 - \phi^2)/(8{v_0}^2)\right] \quad (3.4.15)$$

2、Damped oscillations
我們利用圖形模擬得到$\phi(t)$的演化是一個 Damped oscillation
假設我們令$\phi(t) = v_0 + \varphi(t)$[6]，代入(3.5.6)，取到 first order of $\varphi(t)$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \left[\frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{4V(\phi)}{\phi}\right]/(1+6\varepsilon) = 0$$

Take： $\phi(t) = v_0 + \varphi(t)$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{\lambda {v_0}^2}{(1+6\varepsilon)}\varphi = 0 \quad (3.4.16)$$

[6] V_0是平衡點，$\varphi(t)$是指 oscillation 的振幅微小變化

給了我們的解爲[7]：

$$\varphi = e^{-\frac{3}{2}Ht} Sin(\sqrt{\frac{\lambda {v_0}^2}{1+6\varepsilon}}t) \tag{3.4.17}$$

完整的 $\phi(t)$ 可以表示爲：

$$\phi(t) = \phi_0 \pm (\frac{2}{3}\lambda\varepsilon)^{1/2} t \text{ (Slow-rolling)}$$

$$\phi(t) = V_0 + e^{-\frac{3}{2}Ht} Sin(\sqrt{\frac{\lambda {v_0}^2}{1+6\varepsilon}}t)$$

下面我們用程式跑出的圖形，並進一步把 $\phi(t)$ 的近似解與數值解做一個比較

(1) $V(\phi)$

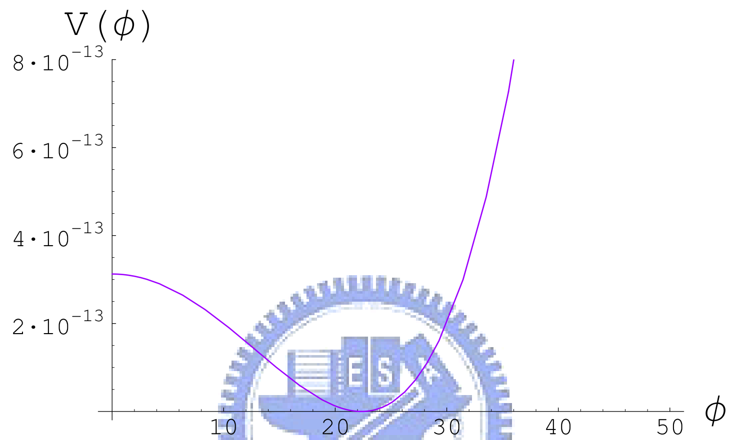


Fig 3.4.1

$V(\phi)$ 的圖形

取 $\varepsilon = 0.002$ 、 $\lambda = 10^{-17}$ 。初始條件爲： $a_1(0) = 0.3$、 $a_1(0) = 0.1$、 $a_1(0) = 0.5$、

$a_1'(0) = 1.3$、 $a_1'(0) = 1.4$、 $a_1'(0) = 2$、 $\phi'(0) = 0.001$。時間單位我們選用 Plank 時間

[7] 在 Damped oscillation 時期，H 已經很小大約是 10^{-8} order

(2) $a_i(t)$

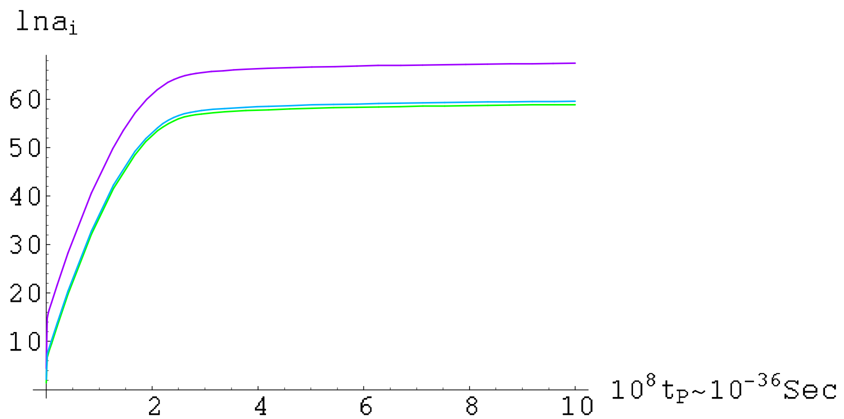


Fig 3.4.2

$a_i(t)$ 暴漲的圖形，其中可以知道當爆漲的時候，很快的時間就會趨近於 60 倍

units of both axes are meters

取 $\varepsilon = 0.002$、$\lambda = 10^{-17}$。初始條件爲：$a_1(0) = 0.3$、$a_1(0) = 0.1$、$a_1(0) = 0.5$、$a_1'(0) = 1.3$、$a_1'(0) = 1.4$、$a_1'(0) = 2$、$\phi'(0) = 0.001$。時間單位我們選用 Plank 時間

$$H\Delta t \sim 2\times 10^{8} \Rightarrow H \sim 10^{-8}$$

由 $H \equiv \dot{a}(t)/a(t) = \left[\dfrac{\lambda/\varepsilon}{24}\right]^{1/2} \dfrac{\left|V_0{}^2 - \phi\right|}{\phi}$

$\Rightarrow \lambda \sim 10^{-17}$(這就是模擬所採用的數值)

(3) $\phi(t)$

下面我們針對不同的 $\phi(0)$ ，畫出 $\phi(t)$

1、 $\phi(0)$ =0

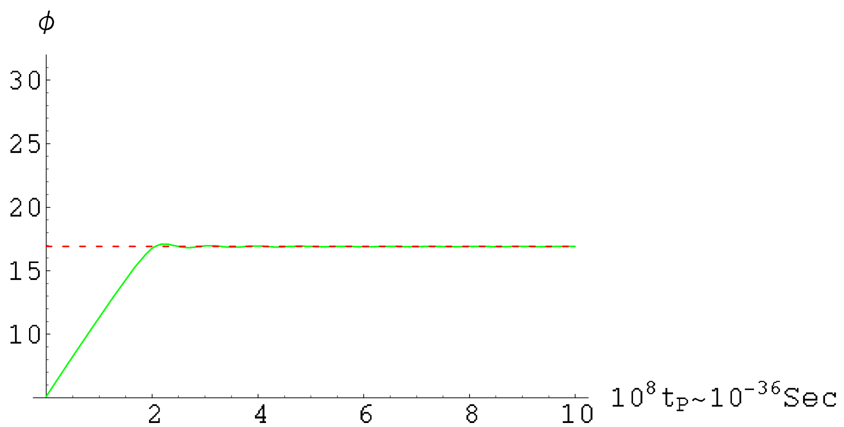


Fig 3.4.3

ϕ 由下面跑上來

取 $\varepsilon = 0.002$ 、$\lambda = 10^{-17}$ 。初始條件爲：$a_1(0) = 0.3$、$a_1(0) = 0.1$、$a_1(0) = 0.5$、$a_1'(0) = 1.3$、 $a_1'(0) = 1.4$、 $a_1'(0) = 2$、$\phi'(0) = 0.001$、 $\phi(0) = 0$。時間單位我們選用 Plank 時間

2、 $\phi(0)$ =30

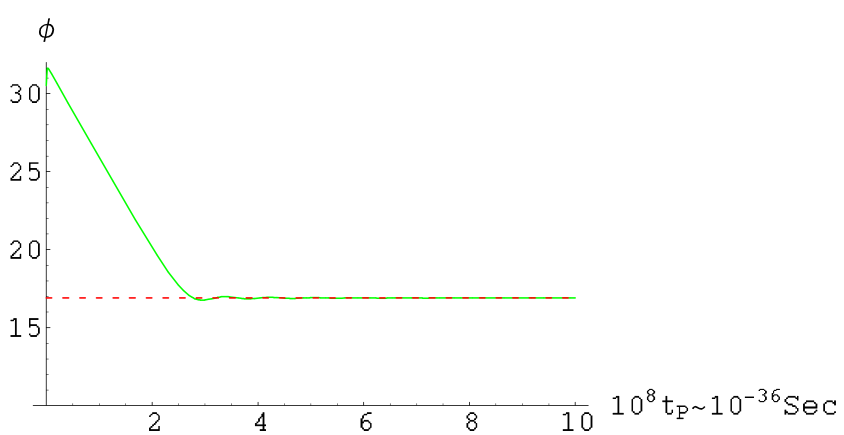


Fig 3.5.4

ϕ 由上面跑去下

取 $\varepsilon = 0.002$、$\lambda = 10^{-17}$。初始條件爲：$a_1(0) = 0.3$、$a_1(0) = 0.1$、$a_1(0) = 0.5$、$a_1'(0) =$ 1.3、$a_1'(0) = 1.4$、$a_1'(0) = 2$、$\phi'(0) = 0.001$、$\phi(0)$=30。時間單位我們選用 Plank 時間

我們選用的V_0=22.3，也因此$\phi(t)$隨著時間越大，會震盪到 22.35 地方

因爲$H^2 \prec\prec \lambda V_0^{\,2}$，由(3.5.11)可以得到 Damped oscillation 震盪的頻率爲$\lambda^{1/2}V_0$，我們可以得到時間周期($T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$)的數量級爲$10^8$左右($\lambda = 10^{-17}$、$V_0$=22.3)

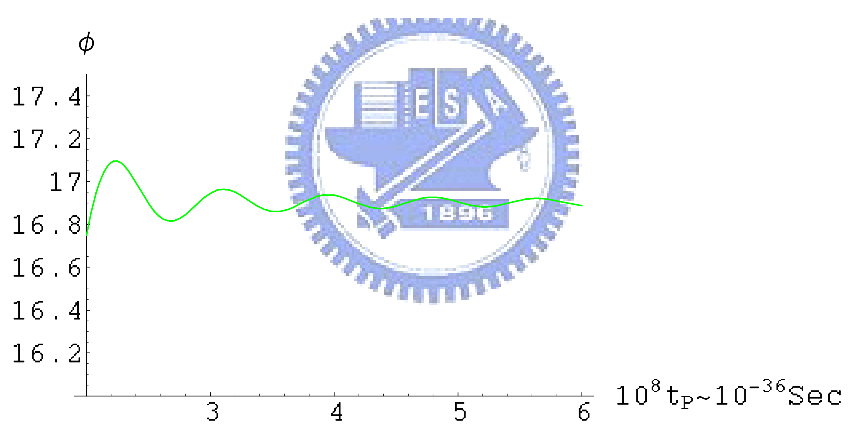


Fig 3.4.5

找尋周期的數量級

由圖(3.5.5)可以看出我們計算出來的週期跟實際上用數值解所得到的周期在數量級方面是一致的

(3) Anisotropic

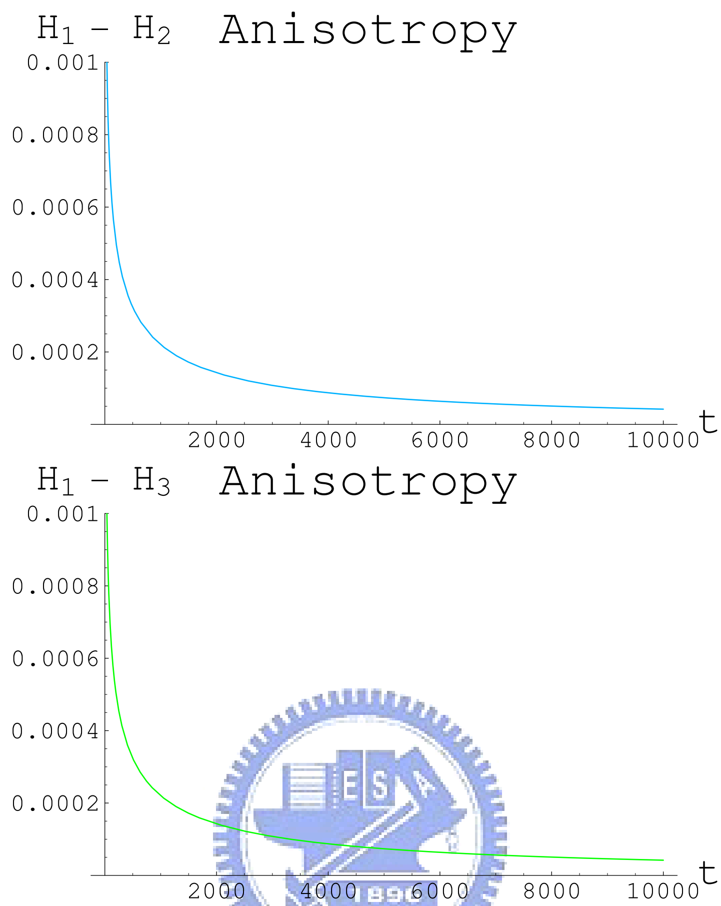


Fig 3.4.6

The property of isotropy at inflation

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

由圖形可以知道在 inflation 未完成的時候，系統已經由 anisotropic 到達 isotropic

取$\varepsilon = 0.002$、$\lambda = 10^{-17}$。初始條件爲：$a_1(0) = 0.3$、$a_1(0) = 0.1$、$a_1(0) = 0.5$、$a_1'(0) = 1.3$、$a_1'(0) = 1.4$、$a_1'(0) = 2$、$\phi'(0) = 0.001$、$\phi(0) = 30$。時間單位我們選用 Plank 時間

(4) $\phi(t)$ 數值解與近似解

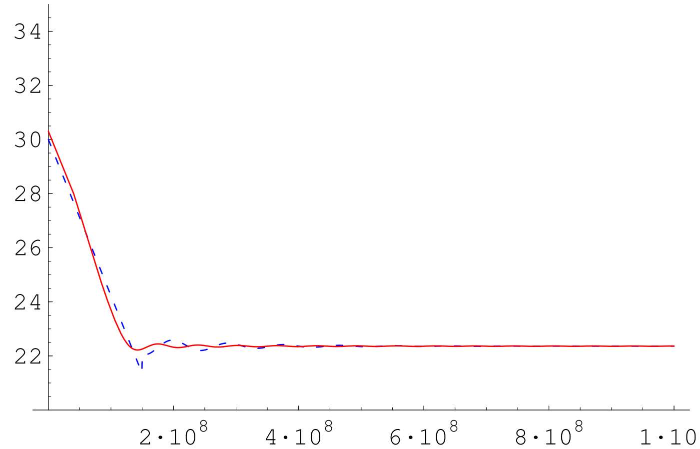


Fig 3.5.7

…虛線爲近似解

---實線爲數值解

3.5：E-H Model 下不同狀態的數值解

對於我們的宇宙可以想像成一個完美的流體系統(如同有很多物理系統都可以這樣做，像是黑體輻射、電漿物理等等)。流體系統的狀態方程式可以表示為：

$$p = \omega\rho \tag{3.5.1}$$

其中 $\omega = 0, 1/3, -1$ 分別代表宇宙處在物質(matter)、輻射(radiation)與真空(vacuum)狀態

我們考慮簡單的理想流體，他的能量動量張量可以寫成：

$$T^{\mu}_{\ \nu} = diag(\rho, -p, -p, -p) \tag{3.5.2}$$

則在 Bianchi VI 的場方程式：

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^2} = \rho(t) + \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^2} = -p(t) + \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^2} = -p(t) + \lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2{}^2 + \dot{H}_3 + H_3{}^2 + H_2 H_3 + \frac{k^2}{a_1{}^2} = -p(t) + \lambda$$

由能量守恆 $D_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ 我們推得：

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\mu a} T^a{}_0 - \Gamma^a{}_{\mu 0} T^\mu{}_a = 0 \tag{3.5.3}$$

根據我們的 Bianchi VI Model 裡頭的 spin connection

$$\dot{\rho}(t) + (3H)\rho + (3H)p = 0$$

解出這個微分方程的解：

$$\rho = \rho_0 V^{-(1+\omega)} \tag{3.5.4}$$

其中 ρ_0 是某個初始值，$V = a_1 a_2 a_3$。

當 $\omega = 0$ ：能量密度跟體積成反比，這是所謂物質的宇宙
當 $\omega = 1/3$ ： $\rho \approx V^{-4/3}$ ，輻射的能量跟波長成反比，所謂的真空宇宙
當 $\omega = 0$ ： ρ =const，隨著宇宙膨脹能量密度維持定值，這是黑暗能量有的性質

將上述得到的結果帶進去之前的場方程式：

$$H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1 - \frac{k^2}{a_1{}^2} = \rho_0 V^{-(1+\omega)} + \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1{}^2 + \dot{H}_2 + H_2{}^2 + H_1 H_2 - \frac{k^2}{a_1{}^2} = -\omega\rho_0 V^{-(1+\omega)} + \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1{}^2 + \dot{H}_3 + H_3{}^2 + H_1 H_3 - \frac{k^2}{a_1{}^2} = -\omega\rho_0 V^{-(1+\omega)} + \lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2{}^2 + \dot{H}_3 + H_3{}^2 + H_2 H_3 + \frac{k^2}{a_1{}^2} = -\omega\rho_0 V^{-(1+\omega)} + \lambda$$

(1)物質時期 $\omega = 0$

$$\rho = \rho_0 V^{-(1+\omega)} = V^{-1}$$

$$p = \omega\rho = 0$$

場方程式：

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^2} = V^{-1} + \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^2} = \lambda$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^2} = \lambda$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^2} = \lambda$$

(1)物質時期，但是不包括宇宙常數

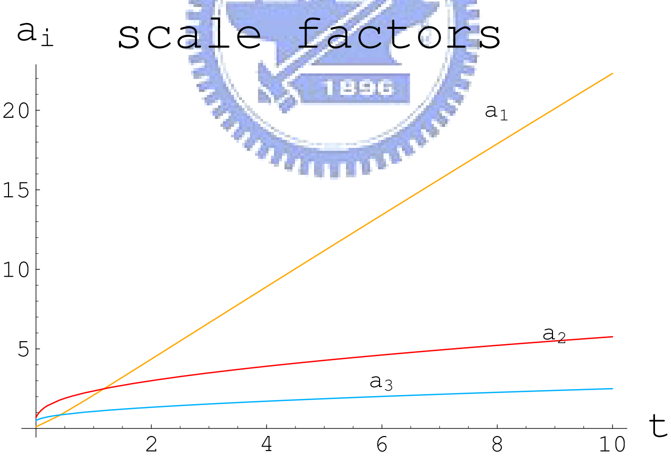


Fig 3.5.1

The property of scale factor in perfect fluid with $\lambda = 0$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

units of both axes are meters

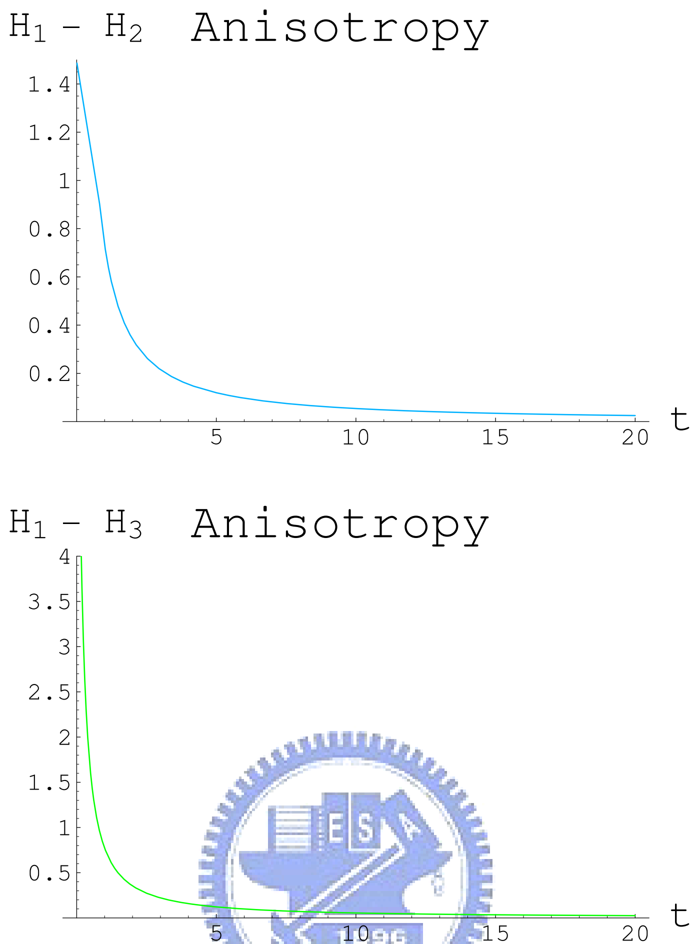


Fig 3.5.2

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0$

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

(2)物質時期，包括宇宙常數(我們令$\lambda = 0.3$)

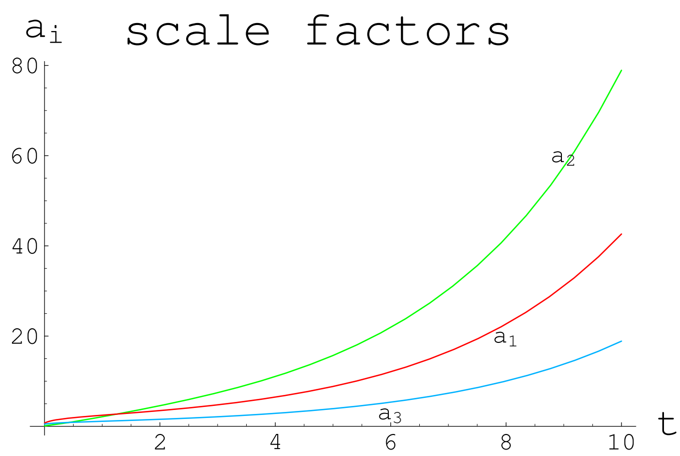
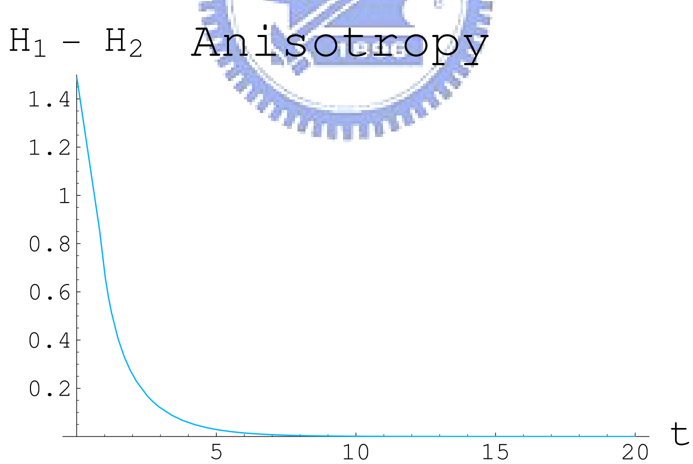


Fig 3.5.3

The property of scale factor in perfect fluid with $\lambda = 0.3$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

units of both axes are meters



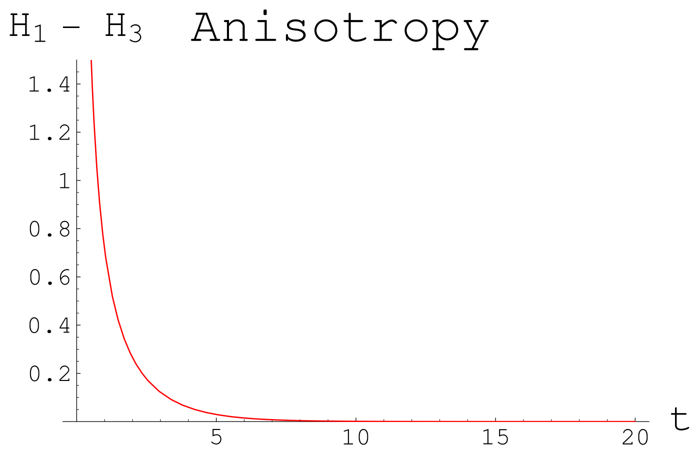


Fig 3.5.4

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0.3$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

二、輻射時期 $\omega = \frac{1}{3}$

$$\rho = \rho_0 V^{-(1+\omega)} = V^{-\frac{4}{3}}$$

$$p = \omega\rho = \frac{1}{3} V^{-\frac{4}{3}}$$

場方程式：

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^2} = V^{-\frac{4}{3}}$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^2} = -\frac{1}{3}V^{-\frac{4}{3}}$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^2} = -\frac{1}{3}V^{-\frac{4}{3}}$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^2} = -\frac{1}{3}V^{-\frac{4}{3}}$$

(1) 輻射時期，但是不包括宇宙常數

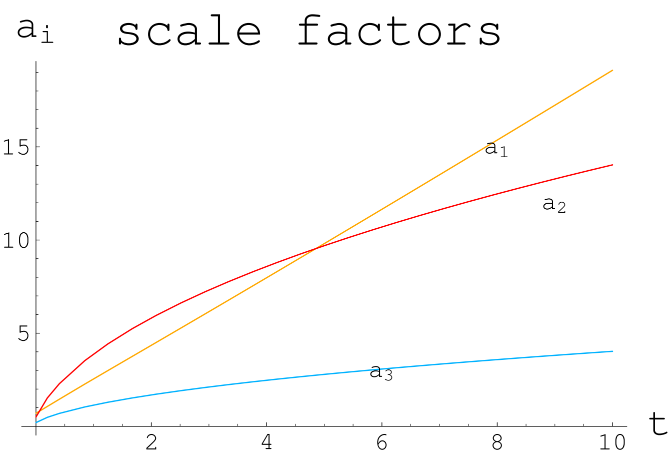


Fig 3.5.5

The property of scale factor in perfect fluid with $\lambda = 0$

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

units of both axes are meters

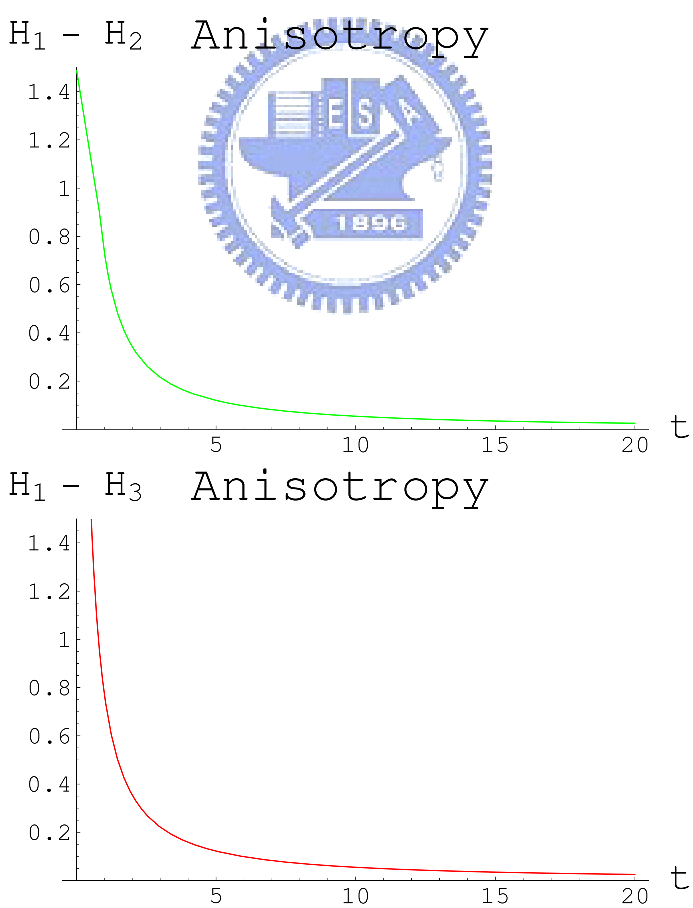


Fig 3.5.6

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0$

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

(2) 輻射時期，包括宇宙常數(我們令 $\lambda=0.3$)

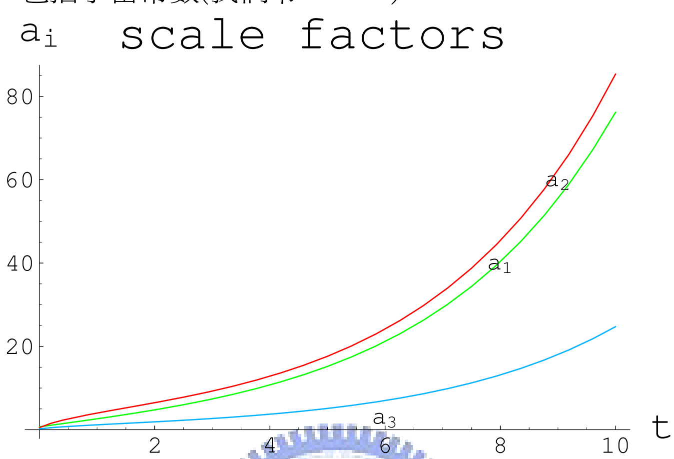
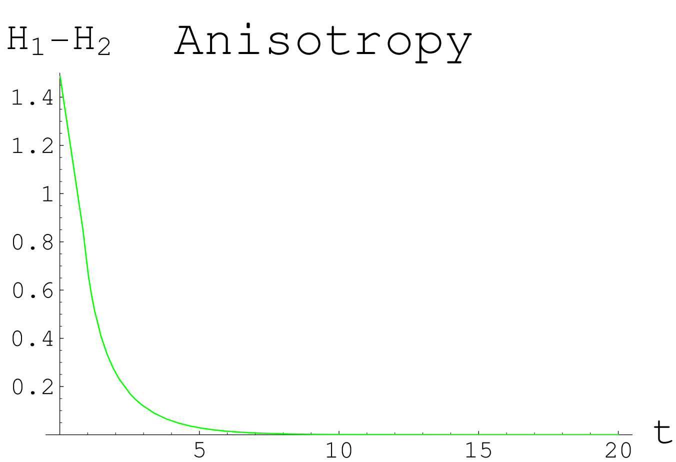


Fig 3.5.7

The property of scale factor in perfect fluid with $\lambda=0.3$

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

units of both axes are meters



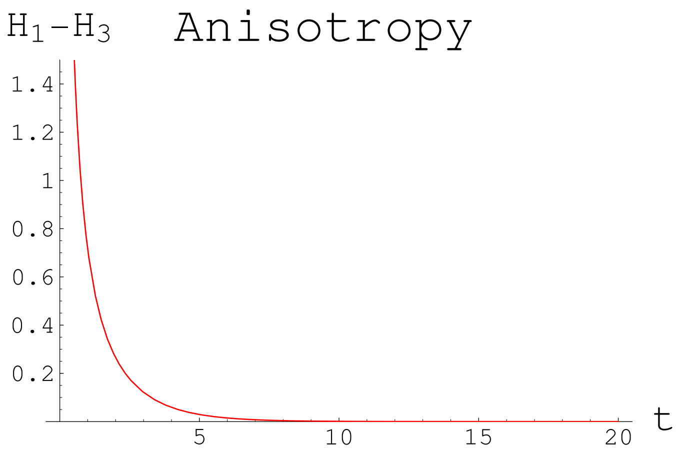


Fig 3.5.8

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0.3$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

三、真空時期 $\omega = -1$

$$\rho = \rho_0 V^{-(1+\omega)} = 1$$

$$p = \omega\rho = -1$$

場方程式：

$$H_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_1 - \frac{k^2}{a_1^2} = 1$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_2 + H_2^2 + H_1H_2 - \frac{k^2}{a_1^2} = 1$$

$$\dot{H}_1 + H_1^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_1H_3 - \frac{k^2}{a_1^2} = 1$$

$$\dot{H}_2 + H_2^2 + \dot{H}_3 + H_3^2 + H_2H_3 + \frac{k^2}{a_1^2} = 1$$

(1) 物質時期，但是不包括宇宙常數

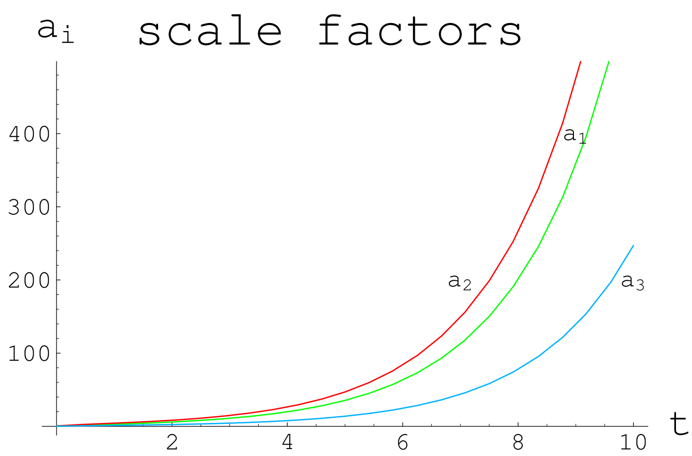


Fig 3.5.9

The property of scale factor in perfect fluid with $\lambda = 0$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

units of both axes are meters

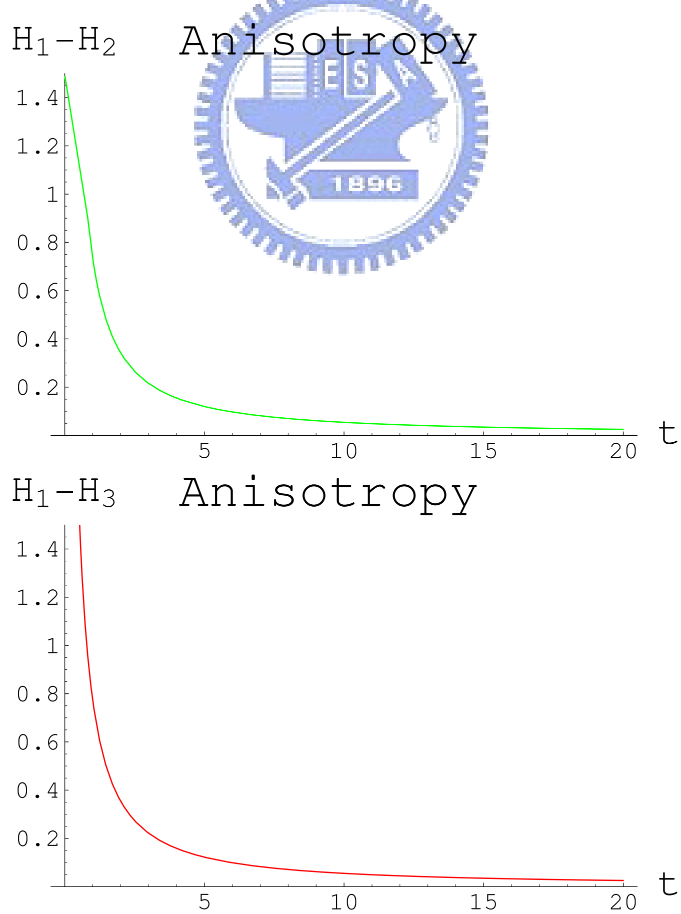


Fig 3.5.10

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

(2)物質時期，包括宇宙常數(我們令$\lambda = 0.3$)

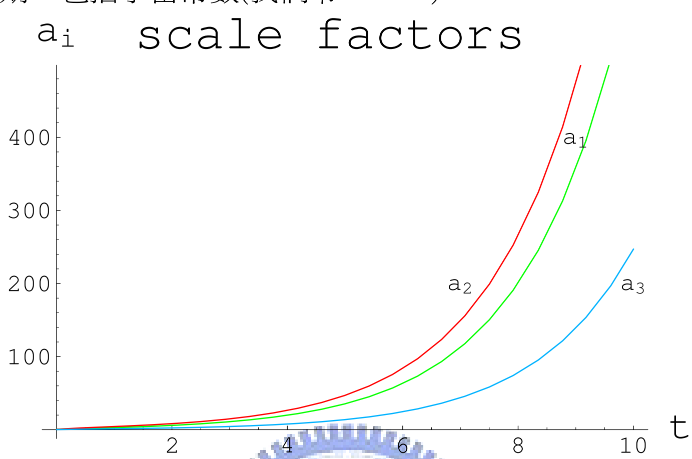
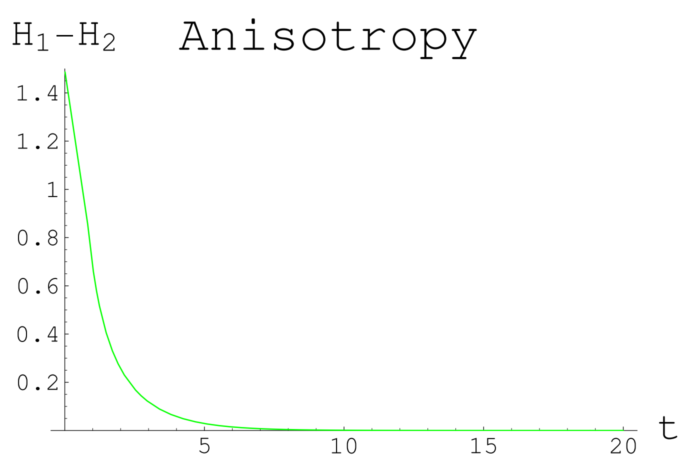


Fig 3.5.11

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0.3$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

units of both axes are meters



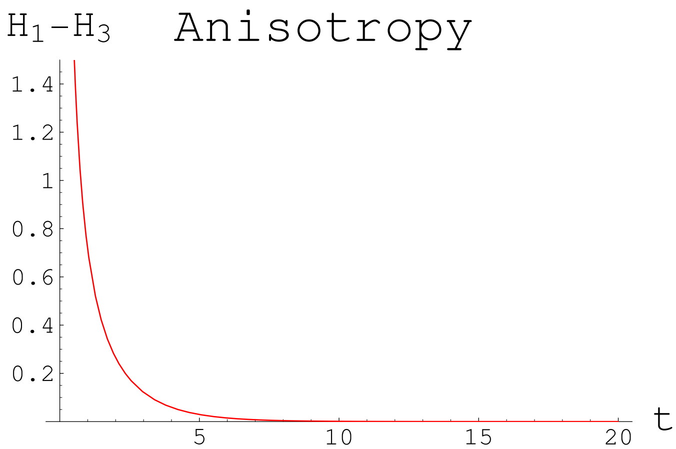


Fig 3.5.12

The property of isotropy in perfect fluid Model with $\lambda = 0.3$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

x-axis:[1/meter]

y-axis:[meter]

我們試著比較不同時期的爆漲結果：

(1)物質時期，但是不包括宇宙常數

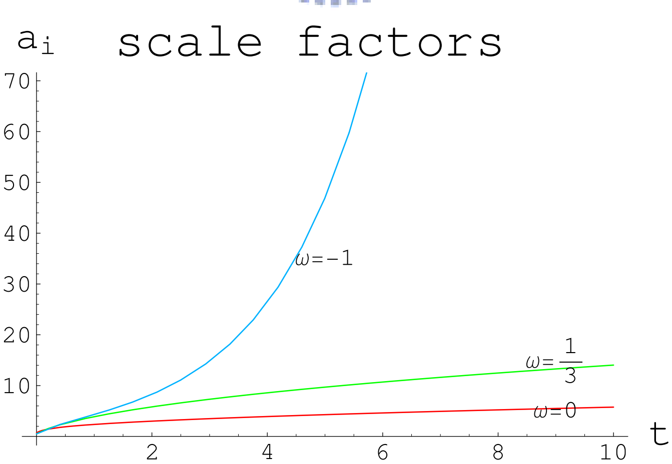


Fig 3.5.13

The properties of scale factor with different cases with $\lambda = 0$

$a_1(0) = 0.3$ 、$a_1'(0) = 5$ 、$a_2(0) = 0.1$ 、$a_2'(0) = 3$ 、$a_3(0) = 0.5$ 、$a_3'(0) = 2$

units of both axes are meters

(2)物質時期，包括宇宙常數(我們令$\lambda=0.3$)

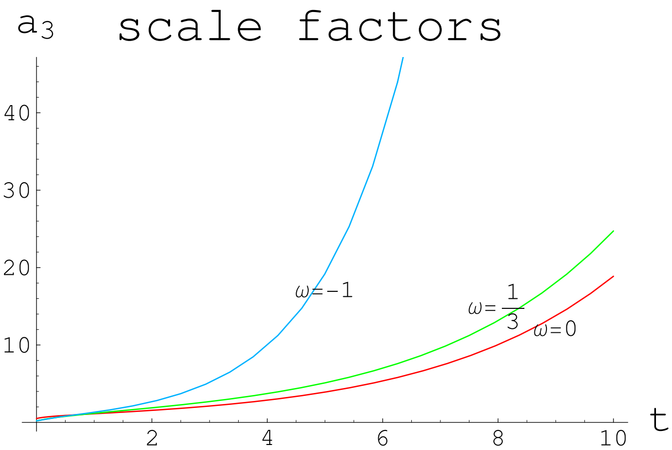


Fig 3.5.14

The properties of scale factor with different cases with $\lambda=0.3$

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

units of both axes are meters

可以發現:在真空時期宇宙膨脹得最快,接下來是輻射時期,最慢的是物質時期,不管是哪一種時期，在最終也是會趨近於 isotropic。

我們把輻射主控(30 萬年)跟物質主控(30 萬年到 150 億年)做一個連接

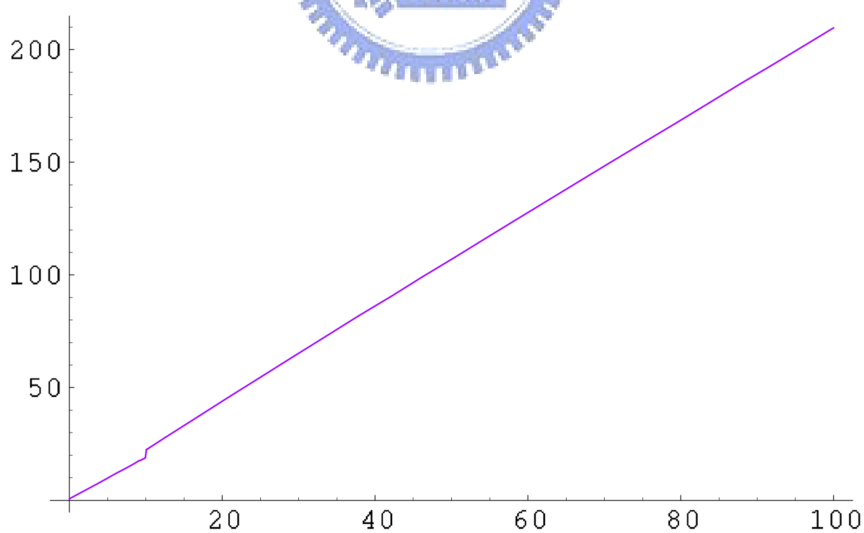


Fig 3.5.15

R.D to M.D with $\rho_0=1$, units of both axes are meters

$a_1(0)=0.3$ 、$a_1'(0)=5$ 、$a_2(0)=0.1$ 、$a_2'(0)=3$ 、$a_3(0)=0.5$ 、$a_3'(0)=2$

附錄

再附錄裡頭，我們簡單的介紹一些關於宇宙學的小知識，它們包括了：

A：Bianchi space 的來源

B：導出 Einstein Field equation

C：關於一些基本物理量不同的求法

首先，因爲我們是選用 Bianchi 模型作爲我們的研究方向，在這裡有必要跟讀者說明 Bianchi space 的來源。

再者，我們在第二章已經介紹了問題的來源，也因此，我們對於 Einstein Field Equation 是很感興趣的，所以在附錄裡頭我們這些 background 給交代一下 。

最後，或許我們用不同的方法去求得一些基本的物理量：spin connection、curvature tensor。

附錄 A

Bianchi space 的來源

A.1：Bianchi space

在序論提到：與其說宇宙從一開始高精確度均勻性、各向同性以及視界的 Friedman model，不如更合理的假設宇宙一開始就是不規則，然後經過一段時間後（$t \to \infty$），演化成最終的 Friedman model。

這就是我們會提出 Bianchi Model 的原因，在本章，我們想對 Bianchi space 作一個比較完整的交代，以說明我們選用 Bianchi Model 作爲我們學習宇宙學的第一步。 Bianchi Model 有九種模型，他是由數學家 Luigi Bianchi 在 1898 年所作：把三維運動群的李代數分類。之後被重力和宇宙學者當做研究的模型。

我們考慮到的是 Riemannian 空間。在 Riemannian 空間 M 中任一點 P 都有一個度規 $g(p)$ 可以將該點的任兩個向量 μ 、ν 送到實數空間，也就是說：

$$g(p) \text{ ： } T_P M \times T_P M \to R \quad \text{or} \quad g(\mu \text{ 、 } \nu)_p \in R \text{ ， } \forall_{\mu,\nu} \in T_p M$$

$\Rightarrow$ 一個空間的幾何性質直接由度規決定，不同的度規代表著不同的 Riemannian 空間。當一個流形(manifold)給定度規以後，就給定了這個流形結構，這時空間裡才有距離的意義，這樣的距離幾何空間稱作 Riemannian 空間

兩個度規空間 X ，Y 之間有一映射(mapping) f ： $X \to Y$ 使得

$$\forall_{\mu,\nu} \in X, g_Y(f(\mu), f(\nu))\big|_{f(P)} = g_X(\mu,\nu)\big|_P$$

這樣的映射叫做保距映射(distance preserving map)，一個保距映射是一對一的。這兩個度規空間叫做同測(isometric)，若此同測映射是從某一個測渡空間映射到他自己，連同合成函數運算(function composition)將會形成一個群，叫做同測群(isometric group)。

從保距映射到自己的映射又稱爲空間的運動(motion)，考慮連續運動的話，群的元素將也是一些連續的參數，也就是他們形成李群(Lie group) G_r 有 r 個 generators：

$$(G_r, o) \text{ ， } r \text{ infinitesimal transformations } \quad X_1 f, X_2 f, \ldots\ldots, X_r f$$

因此，決定哪些空間可以擁有連續運動保測群，就相當於找出所有可能的 ds^2 ，使得在 G_r 的轉換之下，ds^2 不變。後得找出來的九類 ds^2 ，即是 Bianchi Model 的來源。

A.2：the Killing equation

n維的空間度規：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

在某一無窮小轉換之下：

$$Xf = \xi^r \partial_r f$$

當空間允許這樣的運動時，可以表示爲： $X(ds^2) = 0$

$$\begin{aligned} X(ds^2) &= X(g_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + g_{\mu\nu} dX(x^{\mu}) dx^{\nu} + g_{\mu\nu} dx^{\mu} dX(x^{\nu}) \\ &= \xi^r (\partial_r g_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} + g_{r\nu} d\xi^r dx^{\nu} + g_{\mu r} dx^i d\xi^r \\ &= \{\xi^r \partial_r g_{\mu\nu} + g_{r\nu} \partial_{\mu} \xi^r + g_{\mu r} \partial_{\nu} \xi^r\} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此，

$$\xi^r \partial_r g_{\mu\nu} + g_{r\nu} \partial_{\mu} \xi^r + g_{\mu r} \partial_{\nu} \xi^r = 0$$

其中，μ 、ν=1.....n

我們稱爲 Killing equation

A.3：三維運動群的九種李代數

I：$[X_1, X_2] f = [X_1, X_3] f = [X_2, X_3] f$

II：$[X_1, X_2] f = [X_1, X_3] f = 0, [X_2, X_3] f = X_1 f$

III：$[X_1, X_2] f = 0, [X_1, X_3] f = X_1 f, [X_2, X_3] f = 0$

IV：$[X_1, X_2] f = 0, [X_1, X_3] f = X_1 f, [X_2, X_3] f = X_1 f + X_2 f$

V：$[X_1, X_2] f = 0, [X_1, X_3] f = X_1 f, [X_2, X_3] f = X_2 f$

VI：$[X_1, X_2] f = 0, [X_1, X_3] f = X_1 f, [X_2, X_3] f = hX_2 f, (h \neq 0, 1)$

VII：$[X_1, X_2] f = 0, [X_1, X_3] f = X_2 f, [X_2, X_3] f = -X_1 f + hX_2 f, (0 \leq h \prec 2)$

VIII：$[X_1, X_2] f = X_1 f, [X_1, X_3] f = 2X_2 f, [X_2, X_3] f = X_3 f$

IX：$[X_1, X_2] f = X_3 f, [X_3, X_1] f = X_2 f, [X_2, X_3] f = X_1 f$

A.4：$[X_1, X_2]=0$的度規

在這樣的情形之下，$\xi^1=0$且我們的度規可以表示爲：

$$ds^2 = dx_1^{\ 2} + a_{22}dx_2^{\ 2} + 2a_{23}dx_2dx_3 + a_{33}dx_3^{\ 2}$$

由 Killing equation 可以得知：

$$a_{22}\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} + a_{23}\frac{\partial\xi^3}{\partial x_1} = 0$$

$$a_{23}\frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} + a_{33}\frac{\partial\xi^3}{\partial x_1} = 0$$

因爲$a_{22}a_{33}-a_{23}\neq 0$，所以$\partial\xi^2/\partial x_1 = \partial\xi^3/\partial x_1 = 0$

$\Rightarrow$有就是說X_1f與X_2f的係數與x_1座標無關

可以寫成：

$$X_1f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$X_2f = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

我們的度規可以表示爲：

$$ds^2 = dx_1^{\ 2} + \alpha dx_2^{\ 2} + 2\beta dx_2dx_3 + \gamma dx_3^{\ 2}$$

其中α、β、γ都是x_1的函數

A.5：群結構與度規的關係

在三維李群的前七個群結構中，它們都有符合$[X_1, X_2]=0$的子群，根據前面所討論的結果：$ds^2 = dx_1^{\ 2} + \alpha dx_2^{\ 2} + 2\beta dx_2dx_3 + \gamma dx_3^{\ 2}$

我們可以再引入第三個無窮小轉換：

$$X_3f = \xi^r\partial_r f$$

廣義來說，李代數可以寫成：

$$[X_1, X_3] = aX_1f + bX_2f + cX_3$$

$$[X_2, X_3] = a'X_1f + b'X_2f + c'X_3$$

而第一類到第九類分別對應到一組(a,b,c,a',b',c')，故：

$$\partial_{x_2}\xi^1 = c\xi^1, \partial_{x_2}\xi^2 = c\xi^2 + a, \partial_{x_2}\xi^3 = c\xi^3 + b$$
$$\partial_{x_3}\xi^1 = c'\xi^1, \partial_{x_3}\xi^2 = c'\xi^2 + a', \partial_{x_3}\xi^3 = c'\xi^3 + b'$$

因爲(X_1, X_2, X_3)是 transitive，所以$\xi^1 \neq 0$

帶入 Killing equation 可以得到：

$$\partial_{x_1}\xi^1 = 0$$
$$c\xi_1 + \alpha\partial_{x_1}\xi^2 + \beta\partial_{x_1}\xi^3 = 0$$
$$c'\xi^1 + \beta\partial_{x_1}\xi^2 + \gamma\partial_{x_1}\xi^3 = 0$$
$$\frac{1}{2}\alpha'\xi^1 + \alpha(c\xi^2 + a) + \beta(c\xi^3 + b) = 0$$
$$\frac{1}{2}\gamma'\xi^1 + \beta(c'\xi^2 + d') + \gamma(c'\xi^3 + b') = 0$$
$$\beta'\xi^1 + \alpha(c'\xi^2 + a') + \beta(c\xi^2 + c'\xi^3 + a + b') + \gamma(c\xi^3 + b) = 0$$

A.6：Bianchi I 到 Bianchi IX 的度規

利用 A.3 裡頭的性質，我們可以得到九類 Bianchi type Model 的形式：

I： $ds^2 = -dt^2 + a_1(t)^2 dx^2 + a_2(t)^2 dy^2 + a_3(t)^2 dz^2$

II： $ds^2 = -dt^2 + a_1{}^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2{}^2(t)dy^2 + a_3{}^2(t)dz^2$

III： $ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1{}^2(t)(coshzdx + sinhzdy)^2 + a_2{}^2(t)(sinhzdx + coshzdy)^2) + a_3{}^2(t)dz^2$

IV： $ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1{}^2(t)(dx + zdy)^2 + a_2{}^2(t)dy^2) + a_3{}^2(t)dz^2$

V： $ds^2 = -dt^2 + e^{-2z}(a_1{}^2(t)dx^2 + a_2{}^2(t)dy^2) + a_3{}^2(t)dz^2$

VI： $ds^2 = -dt^2 + a_1{}^2(t)(coshzdx + sinhzdy)^2 + a_2{}^2(t)(sinhzdx + coshzdy)^2 + a_3{}^2(t)dz^2$

VII： $ds^2 = -dt^2 + a_1{}^2(t)(coszdx + sinzdy)^2 + a_2{}^2(t)(sinzdx - coszdy)^2$

VIII： $ds^2 = -dt^2 + a_1{}^2(t)(coshzdx - sinhzsinhxdy)^2 + a_2{}^2(t)(sinhzdx - coshzsinhxdy)^2 + a_3{}^2(t)(dz + coshxdy)^2$

IX： $ds^2 = -dt^2 + a_1{}^2(t)(coszdx + sinzsinxdy)^2 + a_2{}^2(t)(-sinzdx + coszsinxdy)^2 + a_3{}^2(t)(dz + cosdy)^2$

附錄 B

Einstein Field equation

最小作用力原理可以建立各種基本的物理理論，在重力理論方面，Einstein Field Equation 也可以由最小作用力原理得到。

一般而言，對於作用量 S 的要求有兩點：

- S 要是一個與座標無關的不變量
- 由最小作用力原理得到的運動方程不能含有廣義座標三階以上的微分[8]

依據上面兩個要求，我們可以先寫出最簡單的真空引力場的作用量 S_g 。

$$S_g = \int \sqrt{-g}\,\tilde{L}dx^4 = \int \sqrt{-g}\,R dx^4$$

其中 R ：scalar curvature

對 S_g 作變分的結果為：

$$\delta S_g = \delta \int \sqrt{-g}\,R d^4x = \int \left[(R_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}) + (R_{ik}g^{ik}\delta\sqrt{-g}) + (g^{ik}\sqrt{-g}_{\ ik}) \right] d^4x$$

第二項中 $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\delta g^{ik}$

第三項在邊界條件之下為零

$$\Rightarrow \delta S_g = \int (R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d^4x = 0$$

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 0$$

這就是在無物質的真空重力方程式

在 Einstein-Hilbert action 中， $\tilde{L} = -R - 2\Lambda$ ，利用同樣的變分法可以得到我們在前面討論的 Einstein Field Equation：

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \Lambda g_{ik}$$

---

[8] 註：一般認為廣義座標即其一階為分已經足夠確定物理狀態，不需要用到二階以上的微分。物理學的基本運動方程只能含二階跟一階微分，不能含三階以上的微分。

附錄 C

關於一些基本物理量不同的求法

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + A_1{}^2(t,x)dx^2 + A_2{}^2(t,x)dy^2 + A_3{}^2(t,x)dz^2$$

根據廣義的形式我們第一步驟先將不為零的 spin connection 算出來
依據測地線公式（equation of geodetic）

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

$$L = -b^2(t)\dot{t}^2 + A_1{}^2(t,x)\dot{x}^2 + A_2{}^2(t,x)\dot{y}^2 + A_3{}^2(t,x)\dot{z}^2$$

（I）由 $\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$

可以得到：

$$\ddot{t} + \frac{\dot{b}}{b}\dot{t}^2 + \frac{A_1}{b^2}\dot{A}_1\dot{x}^2 + \frac{A_2}{b^2}\dot{A}_2\dot{y}^2 + \frac{A_2}{b^2}A_3\dot{z}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma^t_{tt} = \dfrac{\dot{b}}{b} = \dfrac{-\dot{B}}{2B} \\ \Gamma^t_{xx} = BA_1{}^2\dfrac{\dot{A}_1}{A_1} = BA_1{}^2H_1 \\ \Gamma^t_{yy} = BA_2{}^2\dfrac{\dot{A}_2}{A_2} = BA_2{}^2H_2 \\ \Gamma^t_{zz} = BA_3{}^2\dfrac{\dot{A}_3}{A_3} = BA_3{}^2H_3 \end{cases}$$

其中

$$B \equiv \frac{1}{b^2}$$

$$\dot{A}_i \equiv \frac{d}{dt}A_i$$

$$H_i \equiv \frac{\dot{A}_i}{A_i}$$

（II）由 $\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

可以得到：

$$\ddot{x} + 2\frac{\dot{A}_1}{A_1}\dot{t}\dot{x} + \frac{A_1'}{A_1}\dot{x}^2 - \frac{A_2{}^2}{A_1{}^2}\frac{A_2'}{A_2}\dot{y}^2 - \frac{A_3{}^2}{A_1{}^2}\frac{A_3'}{A_3}\dot{z}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma^{x}_{tx} = \dfrac{\dot{A}_1}{A_1} = H_1 \\ \Gamma^{x}_{xx} = \dfrac{A_1'}{A_1} = k_1 \\ \Gamma^{x}_{yy} = -\dfrac{A_2^{\ 2}}{A_1^{\ 2}}\dfrac{A_2'}{A_2} = -\dfrac{A_2^{\ 2}}{A_1^{\ 2}}k_2 \\ \Gamma^{x}_{zz} = -\dfrac{A_3^{\ 2}}{A_1^{\ 2}}\dfrac{A_3'}{A_3} = -\dfrac{A_3^{\ 2}}{A_3^{\ 2}}k_3 \end{cases}$$

其中

$$A_i' = \frac{d}{dx}A_i$$

$$k_i = \frac{A_i'}{A_i}$$

（III）由 $\dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0$

可以得到：

$$\ddot{y} + 2\frac{\dot{A}_2}{A_2}\dot{t}\dot{y} + 2\frac{A_2'}{A_2}\dot{x}\dot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma^{y}_{xy} = \dfrac{A_2'}{A_2} = k_2 \\ \Gamma^{y}_{ty} = \dfrac{\dot{A}_2}{A_2} = H_2 \end{cases}$$

（IV）由 $\dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0$

可以得到：

$$\ddot{z} + 2\frac{\dot{A}_3}{A_3}\dot{t}\dot{z} + 2\frac{A_3'}{A_3}\dot{x}\dot{z} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma^{z}_{xz} = \dfrac{A_3'}{A_3} = k_3 \\ \Gamma^{z}_{tz} = \dfrac{\dot{A}_3}{A_3} = H_3 \end{cases}$$

經過一些整理我們可以簡化為：

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{-B}{2B} = H_0$$

$$\Gamma^i_{ti} = H_i \Rightarrow H_i = \frac{\dot{A}_i}{A_i}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^t_{ii} = BH_i g_{ii}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^i_{xi} = k_i \Rightarrow k_i = \frac{A_i'}{A_i}; i = x, y, z$$

$$\Gamma^x_{ii} = -\frac{A_i^{\,2}}{A_{1^2}} k_i; i = y, z$$

了 spin connection 以後可以計算出 curvature tensor
首先必須定義出一些量：

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \Gamma^t_{tt} & \Gamma^t_{tx} & \Gamma^t_{ty} & \Gamma^t_{tz} \\ \Gamma^x_{tt} & \Gamma^x_{tx} & \Gamma^x_{ty} & \Gamma^x_{tz} \\ \Gamma^y_{tt} & \Gamma^y_{tx} & \Gamma^y_{ty} & \Gamma^y_{tz} \\ \Gamma^z_{tt} & \Gamma^z_{tx} & \Gamma^z_{ty} & \Gamma^z_{tz} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_x = \begin{pmatrix} \Gamma^t_{xt} & \Gamma^t_{xx} & \Gamma^t_{xy} & \Gamma^t_{xz} \\ \Gamma^x_{xt} & \Gamma^x_{xx} & \Gamma^x_{xy} & \Gamma^x_{xz} \\ \Gamma^y_{xt} & \Gamma^y_{xx} & \Gamma^y_{xy} & \Gamma^y_{xz} \\ \Gamma^z_{xt} & \Gamma^z_{xx} & \Gamma^z_{xy} & \Gamma^z_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_y = \begin{pmatrix} \Gamma^t_{yt} & \Gamma^t_{yx} & \Gamma^t_{yy} & \Gamma^t_{yz} \\ \Gamma^x_{yt} & \Gamma^x_{yx} & \Gamma^x_{yy} & \Gamma^x_{yz} \\ \Gamma^y_{yt} & \Gamma^y_{yx} & \Gamma^y_{yy} & \Gamma^y_{yz} \\ \Gamma^z_{yt} & \Gamma^z_{yx} & \Gamma^z_{yy} & \Gamma^z_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_z = \begin{pmatrix} \Gamma^t_{zt} & \Gamma^t_{zx} & \Gamma^t_{zy} & \Gamma^t_{zz} \\ \Gamma^x_{zt} & \Gamma^x_{zx} & \Gamma^x_{zy} & \Gamma^x_{zz} \\ \Gamma^y_{zt} & \Gamma^y_{zx} & \Gamma^y_{zy} & \Gamma^y_{zz} \\ \Gamma^z_{zt} & \Gamma^z_{zx} & \Gamma^z_{zy} & \Gamma^z_{zz} \end{pmatrix}$$

$(B)_{ab} = \partial_a \Gamma_b - \partial_b \Gamma_a + \Gamma_a \Gamma_b - \Gamma_a \Gamma_b$

由此可以得到 curvature tensor：

$$R^{ti}{}_{ti} = \frac{1}{2}\dot{B}H_i + B(\dot{H}_i + H_i{}^2)$$

$$R^{xy}{}_{xy} = BH_1H_2 + \frac{k_1k_2 - k_2{}^2 - k_2{}'}{A_1{}^2}$$

$$R^{xz}{}_{xz} = BH_1H_3 + \frac{k_1k_3 - k_3{}^2 - k_3{}'}{A_1{}^2}$$

$$R^{yz}{}_{yz} = BH_2H_3 - \frac{k_2k_3}{A_1{}^2}$$

$$R^{xy}{}_{ty} = \frac{H_1k_2 - p_2 / A_2}{A_1{}^2}$$

$$R^{xz}{}_{tz} = \frac{H_1k_3 - p_3 / A_3}{A_1{}^2}$$

$$R^{ty}{}_{xy} = B(H_1k_2 - p_2 / A_2)$$

$$R^{tz}{}_{xz} = B(H_1k_3 - p_3 / A_3)$$

參考文獻

[1] W.F. Kao, Anisotropic higher derivative gravity and inflationary universe,Phys. Rev. D74 (2006)

[2] W.F. Kao, Bianchi type I space and the stability of inflationary Friedmann-Robertson-Walker space, hep-th/0104166, Phys. Rev. D64 (2001) 107301

[3] W.F. Kao and Ue-Li Pen, Generalized Friedmann-Robertson-Walker metric and redundancy in the generalized Einstein equation ,Phys. Rev. D44 (1991)

[4] L . Bianchi：”on the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions”

[5] W.F. Kao, Lecture Note On General Relativity

[6] Alex Harvey and Dimitri Tosubelis, exact Bianchi VI cosmological model, Phys. Rev. D15 (1977)

[7] W.F. Kao , Bianchi Type I space and the stability of inflationary FRW solution, Phys.Rev. D64 (2001) 107301

[8] Chiang-Mei-Chen and W.F. Kao, Stability Analysis of Anisotropic Inflationary Cosmology , Phys.Rev. D64 (2001) 124019

[9] W.F. Kao, Kaluza-Klein Induced Gravity Inflation, Phys. Rev. D62 (2000) 084009, hep-th/0003153

[10] W.F. Kao, Inflationary Universe in Higher Derivative Induced Gravity, Phys. Rev. D62 (2000) 087301, hep-th/0003206

[11] Pablo Chauvet,Jorge Cervantes-Cota and H N Nűñez-Yépez,Vacuum-analytic solutions in Bianchi-type universes,class Quantum Grav.9(1992)

[12] K.Shanthi, Bianchi type-VI Vacuum Model in the General Scalar-Tensor Theory of Gravity(1989)

[13] TA-PEI CHENG , Relativity、Gravitation、and Cosmology-a basic introduction：OXFORD
[14] Fakultät für Physik , Tilted electromagnetic Bianchi type VI cosmological Model (1981)

[15] Richard L. Faber , Differential Geometry and Relativity Theory An introduction：

[16] Bernard F. Schutz , "A fist course in general relativity"(cambrige,1985)

[17] Frank S. Accetta , Jeffrey J. Trester , Extended inflation with induced gravity , Phys. Rev. D39 2854 - 2863 (1989)

[18] Frank S. Accetta , David J. Zoller , Michael S. Turner , Induced-gravity inflation , Phys. Rev. D 31, 3046 - 3051 (1985)

[19] Frank S. Accetta , David J . Zoller , Michael S . Turner , Induced-gravity inflation Phys. Rev. D15 (1985)

[20] Z.W. Kolb and M.S Turner,"The Early Universe"(Addison-Wesley,1990)