

國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

非線性造波水槽數值穩定性研究

Numerical Stability Study of Nonlinear Numerical WaveTank

研究生：吳維珉

指導教授：吳永照

中華民國九十六年六月

非線性造波水槽數值穩定性研究

Numerical Stability Study of Nonlinear Numerical WaveTank

研究生：吳維珉

Student : Wei-Ming Wu

指導教授：吳永照

Advisor : Yung-Chao Wu



A Thesis Submitted to Department of Civil Engineering, National Chiao Tung University, in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Civil Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

非線性造波水槽數值穩定性研究

學生:吳維珉 指導教授:吳永照 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘要

本研究主要為以邊界元素法模擬有限振幅(finite amplitude) Stokes wave 及 cnoidal wave(橢圓波簡稱 cn wave)二種非線性數值水槽的造波模式，而造波方式分別採用虛擬直推式造波板及點源造波二種，當以直推式造波板模擬非線性波時，將會產生一因造波板有限位移所造成的高階自由波，而此自由波將使水槽內波形成非固定因此必需加以消除，在 Stokes wave 的情形中，可由解析解找出直推式造波板速度公式中的自由波成份並加以消除，然而在模擬 cn wave 的造波板公式由於是隱函式的緣故，目前並無解析解可以求得其自由波的函式，為了解決此問題，本研究另以點源造波的方式模擬數值水槽，點源造波不用造波板因此不會產生高階自由波。當以二種造波方式模擬 Stokes wave 時，所模擬的數值結果非常相近，但模擬 cn wave 時，數值結果有相當差異，因此本研究分別採用了四種速度公式來模擬 cn wave，它們所模擬出來的結果有些不同，當以 Wiegell 水平速度公式為點源造波造波函數模擬 cn wave 時發生了平均水位下降的問題，本研究以試誤法找出了一個簡單的修正關係，改善了水位下降的問題，作法是在理論波谷高度加一修正高度，如此可以有效改善平均水位高度下降的情況。

Numerical Stability Study of Nonlinear Numerical WaveTank

Student : Wei-Ming Wu Advisor : Yung-Chao Wu

Institute of Civil Engineering National Chiao Tung University

Abstract

In present study the fluid is assumed to be incompressible , inviscid and its motion irrotational. A fully nonlinear numerical wave tank (NWT) has been simulated by use of a boundary element method (BEM) in the time domain. The BEM is repeatedly solved at each time step and the fully nonlinear free surface boundary condition are integrated with time to update its position and boundary values. Two kinds of nonlinear waves, Stokes wave and cnoidal wave, are simulated in the NWT.

The incident nonlinear waves are performed by simulating a piston motion wave maker at one end of the NWT and by aligning a series of internal point sources vertically in the middle of the NWT. In order to avoid the reflection of outgoing nonlinear waves, a numerical wave-absorption filter has been developed for open-boundary treatment by combining a so called sponge layer with a linearly distributed damping factor and a sommerfeld radiation condition.

The numerical result show that the nonlinear Stokes wave NWT simulated by the present approaches agree favorably with the corresponding analytical solution. But, the agreement is less favorable for the simulation of cnoidal wave NWT.

誌謝

研究所論文的完成，首先要感謝我的指導老師吳永照博士的耐心指導，沒有老師的指導，我沒法完成複雜的數值模擬程式，也是因為老師的幫助讓我打開數值模擬這門學問的觀念，如果沒有嘗試去完成一個題目，光是閱讀是無法真正進入所謂的數值模擬領域的，這也是研究所跟大學部的不同，大學部的課程只有基礎的概念，所謂的數值方法的程式也不過短短的數百列程式碼，完成了研究所的題目，讓我的觀念又前進了一步，在研究所的生涯中，感謝那些曾經在課業上協助我的人，海洋工程組的老師除了吳永照老師外，我最感謝的是張憲國老師，他總是在一些研究所課程中，支援我一些研究室的資源，即便我不是他研究室的學生，海工組博士班的立青學長，總是為我打氣，同是研究海洋的學生，這點讓我十分感動，還有 118A 室張良正老師的研究生群，不管是學長或是學弟，都是使我研究生生涯更加有趣的同伴，感謝他們一路上的陪伴，沒有他們我無法順利畢業。

目錄

中文摘要	I
英文摘要	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
符號.....	VIII
第一章 緒論	1
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	1
1.3 研究目的.....	3
1.4 研究方法.....	3
第二章 基本理論.....	5
2.1 水槽範圍界定.....	5
2.2 控制方程式.....	5
2.3 邊界條件.....	6
第三章 數值方法.....	12
3.1 BEM 之引用	12
3.2 控制方程 Governing Equation	12
3.3 各邊界之初始條件($t=0$).....	16
3.4 自由水面之模擬.....	17

3.5 自由波(free wave).....	21
第四章 結果與討論.....	22
4.1 stokes wave.....	22
4.2 橢圓函數波 cn wave.....	24
第五章 結論與建議.....	27
5.1 結論.....	27
5.2 建議.....	29
參考文獻.....	31
附錄 A 二階自由波之關係式.....	51
附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline).....	55
附錄 C 轉角處的合適條件.....	59
附錄 D 平滑技巧.....	61
附錄 E 質量的定義與推算.....	62
附錄 F 能量的定義與推算.....	63
附錄 G Fenton 級數解的係數項.....	65

圖目錄

圖 2-1 直推式造波板設置圖	34
圖 2-2 點源造波水槽設置圖	34
圖 3-1 P 點為在邊界上之一點時的積分示意圖	35
圖 3-2 P 點為內部點時的積分示意圖	35
圖 3-3 計算流程圖	36
圖 3-4 以直推式造波板造波未消除自由波的波形	37
圖 3-5 以直推式造波板造波消除自由波的波形	37
圖 4-1 Stokes wave 不同造波方法波形與理論比較圖 $H=0.1$	38
圖 4-2 Stokes wave 不同造波方法波形與理論比較圖 $H=0.2$	38
圖 4-3 Stokes wave 水槽質量隨時間變化圖	39
圖 4-4 點源造 Stokes wave 點源處的速度斷面圖	39
圖 4-5 直推式造 Stokes wave 水位斷面時序圖 15~23 週期	40
圖 4-6 以點源造 Stokes wave 的水位斷面時序圖 15~23 週期	40
圖 4-7 造波板造 Stokes wave 不同位置水位時序圖	41
圖 4-8 點源造 Stokes wave 不同位置水位時序圖	41
圖 4-9 不同造波公式造 Stokes wave 的頻譜圖	42
圖 4-10 不同造波方式造 Stokes wave 的能量-時間圖	43
圖 4-11 y_i 的修正參數圖	43
圖 4-12 修正前後的 y_i 比較	43

圖 4-13 第 25 週期數值水槽 cn wave 與理論波形比較圖.....	44
圖 4-14 不同 cn wave 造波公式之質量-時間圖.....	45
圖 4-15 cn wave 水位資料斷面圖.....	46
圖 4-16 探針位置距離原點 1~1.75 波長的水位圖.....	47
圖 4-17 時間水位資料經由傅利葉轉換所得之頻譜圖.....	48
圖 4-18 不同造波公式的能量-時間圖.....	49
圖 4-19 以點源造 cn wave 的速度斷面圖.....	50



符號表

c : 前進波之相位速度

G : 自由空間之 Green 函數

g : 重力加速度

h : 水深

k : stoke wave 代表週波數

κ : cn wave 公式代表模數

L : 波長

p : 大氣壓力

s_0 : 造波板之衝程

s_f : 消除二階自由波所需之衝程

\bar{s} : 自由水面單位切線向量

\bar{n} : 單位法線向量

t : 時間

u : 水平速度

w : 垂直速度

x : 卡式座標水平方向

x_0 : 造波板初始 x 座標值

x_1 : 海綿層之起始 x 座標值



x_2 : 海綿層之末端 x 座標值

z : 卡式座標垂直方向

α : 固定沒水板的中心點且轉動之角度

β : \bar{s} 和 \bar{x} 間的夾角

ω : 造波板的週頻率

μ : 海綿層之阻滯係數

φ : 一階 Stokes 波與二階自由波之相位差

ξ : 自由水面之水粒子 x 方向座標

ζ : 自由水面之水粒子 z 方向座標

Ω : 分析領域

Γ : 分析領域之邊界

Φ : 速度勢能

Φ_n : 法線速度

y_t : 為底床到波谷的高度

K : 第一類橢圓函數積分

E : 第二類橢圓函數積分



第一章 緒論

1-1 前言

數值模擬海洋波浪在海洋工程中是一門結合電腦應用的領域，隨著個人電腦的快速發展，以往需由大型計算機所運算的問題已可由一般的個人電腦進行模擬，數值水槽所提供的數據可以用來與實驗結果進行比較，而數值水槽的建構，在經濟成本上，較實體水槽便宜，目前模擬數值水槽的數值方法可以分成有限元素法，有限差分法，邊界元素法，而在造波模式上，有點源造波及造波板造波二種，本文在數值方法方面採用邊界元素法，分別以造波板及點源二種造波方法造波，並加以比較探討其間波形、質量守恆、能量守恆及頻譜分析的差異。



1-2 文獻回顧

Madsen (1970) 以直推式造波板模擬非線性長波，Longuet-Higgins and Cokelet (1976) 首先利用數值方法並以 Eulerian-Lagrangian 混合模式來模擬二維無限水深非線性水波的碎波過程，並用平滑技巧(smoothing technique)消除數值模擬過程自由水面所產生的鋸齒狀，此鋸齒狀為造成數值模擬不穩定的重要因素，而 Nakayama (1983) 以邊界元素法模擬非線性波浪，用底床造波的方式模擬出地震所產生的海嘯，並以直推式造波板模擬出孤立波。對於非線性之自由水面邊界條件的處理有許多方法，例如：Kim 等人 (1983) 使用了 Crank-Nicolson 方法來描述水面點在特定方向的運

動，並將此法應用在波浪的溯升問題上；Dold and Peregrine (1984) 提出 Eulerian-Lagrangian 混和數值模式，並利用 Taylor 級數展開式來求得下一時刻水面點的位置及其速度勢，其中水面各節點的速度、加速度及其對時間的高階微分值則是由一系列的關係式來推得 (Grill et al. 1989)。Borsen and Larsen 於 1987 提出點源造非線性重力波的方法，並以邊界積分方程作數值模擬，他們在數值水槽二尾端設置輻射邊界條件，藉以消除波浪反射的問題。有關在末端邊界的處理上過去的研究顯示有許多種方式，最簡單的處理方式是假設其為不透水邊界，如 Chou 和 Shih (1996) 以造波板模擬孤立波的溯升問題，在該研究中其末端為一直立不透水牆，然而此種水槽設定往往只能用在分析單一波峰的孤立波，如果要分析週期性的波浪則有其困難，因為當以造波板造波時，週期性波浪要達到一穩定的波形需要一定之時間，而當波形穩定時對直立牆的反射已產生，如要避免反射波的影響，則需增加水槽之長度及模擬時間，換言之需增加節點，如此數值計算的時間長度相對的增加，因此本文將引用 Brosen and Larsen (1987) 以 Sommerfeld-type 的輻射邊界條件來處理；Larsen and Dancy (1983) 與 Ohshima and Nadaoka (1991) 則是結合海綿邊界及輻射邊界兩種方式來做處理，在輻射邊界前先放置一海綿層，如此在波浪穿越輻射邊界透射出去之前，可將波浪降到一類似線性波的條件，如此除了可有效減低反射，也可適當減少計算空間，此種模式已可被應用於任何非線性數值模擬。關於 cn wave 的速度公式方面 Wiegel (1960) 導出 cn wave 水粒子的速度的偏微分函數，及一些相關的波長，週期關係式，Fenton (1978) 以級數解導出水粒子的速度勢函數，並整理出級數解所需的相關係數達到九階，但是基本上當級數到

達五階之後，其精度已沒有明顯的提升 Goring and Raichlen(1980) 使用水深積分技巧及萊布尼茲法則，得一直推式造波板的速度公式，Isobe and Kraus (1983)提出 cn wave 的水粒子速度的一階公式，並用來計算波浪能量。

1-3 研究目的

在本論文中，先以 Stokes wave 來驗證數值造波的可行性，分別使用了造波板及點源的方式來模擬波浪數值水槽並將數值結果與理論波形相比較，証實數值水槽的可行性，對於 cn wave 的數值造波，我們需要點源處的水平速度來進行模擬，關於這些水平速度公式，不論是解析解，或是級數解，利用這些公式模擬數值水槽的結果，我們有興趣加以了解，利用造波板於數值水槽模擬 cn wave 的困難，在於如何消除造波板所引起的 free wave，由於目前無人導出消除 free wave 的公式，所以對於以直推式造波板造 cn wave 無法得到一穩定的波形，為了解決這個問題，本文試著改用點源造波模擬 cn wave，然而以點源造 cn wave 所需要的 cn wave 速度公式，因為公式中有隱函式部份，故不易導出更高階解，在本研究中我們試著以直推式及點源造波兩種造波方式模擬 cn wave 數值水槽、而點源造波方面更以四種水平速度公式來模擬 cn wave，並將各種數值模擬結果整理比較，期望對未來更精確的 cn wave 模擬能有所幫助。

1-4 研究方法

本研究以線性元素的邊界元素法模擬波浪數值水槽，於時間領域

計算直推式(piston type)造波板及點源造波(source generation)引起的非線性自由水面變動。所謂的線性元素法是將整個計算領域的邊界分成有限個直線元素，假設所有的物理量在各個元素內做線性變化，本研究使用 Eulerian-Lagrangian 混合模式來描述自由水面 (free surface) 水粒子在每個時刻的非線性運動，為了求得新的時刻的新節點位置，我們必需求得切線方向之一、二階微分值，在此我們採用曲線近似法(cubic spline)來推得所需的微分項，而且在直推式造波水槽末端使用一海綿邊界來吸收前進波，緊接著在海綿層之後設一輻射邊界條件，如此可消除反射波，根據 Nadaoka(1991)研究如此的配置可以得到一較好的效果，在點源造波水槽方面因為點源的水槽設置是波浪朝兩邊傳遞，故在點源水槽的另一末端一樣要加一海綿層與輻射邊界條件的混合方式消波，本研究首先模擬以造波板及點源造波方法造 Stokes wave，之後以 Goring and Raichlen(1980)所提出的直推式造波板速度函數公式來模擬 cn wave，接著是點源造 cn wave 部份，本文嘗試了三種 cn wave 水粒子水平速度公式來模擬 cn wave，分別是 Wiegel(1960)所提出的速度公式，Isobe and Kraus (1983)的一階 cn wave 公式，最後是採用 Fenton(1978)的五階級數解公式，利用以上各種造波方式模擬非線性數值水槽於波形穩定的情形下取四個週期的水位波形資料，利用頻譜分析找出波的成分，並將數值模擬穩定後的波形與理論波形比較，藉此了解數值模擬的精確度，同時也檢查了計算過程中水槽的質量及能量守恆情形，以確定數值模擬結果符合實際物理現象。

第二章 基本理論

2-1 數值水槽範圍界定

本文分別採用造波板造波及點源造波兩種數值造波模式，造波板造波的水槽設定，設一數值水槽固定水深 h ，如圖 2-1 所示數值水槽之左邊界為一虛擬活塞式造波板邊界，上邊界為自由水面，右邊界有一假想海綿層用來吸收入射波，並於其後設置輻射條件，而下邊界則為不透水底床邊界。在左邊界之初始位置與自由水面交界處定義為卡氏座標系之原點， x 軸以水平向右為正， z 軸以垂直向上為正。整個數值計算的領域乃是由虛擬造波邊界 Γ_m ，自由水面邊界 Γ_f ，輻射邊界 Γ_R 及不透水邊界底床 Γ_w ，所圍成之區間。

點源造波方面，如圖 2-2 所示，假設水槽左右兩端各設置海綿層，在二海綿層尾端各為輻射邊界條件，虛擬點源造波位置位於數值水槽中間一共取十點，模擬中將右側的水槽長度設為較左側大，以做為資料的取樣區，並將點源造波的初始位置定為卡氏座標系之原點， x 軸、 z 軸的設定同造波板模式。

2-2 基本假設與控制方程式

首先假設水槽中的流體為非黏滯性，不可壓縮性，且其運動為非旋性流場，則存在一速度勢函數 $\Phi(x, z, t)$ ，依據位勢理論，整個數值研究領域之控制方程式則會滿足拉普拉斯方程式 (Laplace equation)：

$$\nabla^2\Phi(x, z, t) = 0 \quad (2-1)$$

2-3 邊界條件

沿著自由液面點，給予一區域座標 (\bar{n}, \bar{s}) ，如圖 2-1，其中 \bar{s} 為延著自由液面之單位切線向量， \bar{n} 為延著自由液面之單位法線向量，以整個控制方程之區域為準向外為正，另可將速度表示成：

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos\beta - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sin\beta \quad (2-2)$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \cos\beta \quad (2-3)$$

其中 β 為 \bar{s} 和正 x 軸間的夾角，並以逆時鐘方向為正。

1. 底床不透水邊界 Γ_w ：底床表面，其法線方向的速度為零，即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (2-4)$$

2. 自由表面邊界條件(Γ_f)分為兩種：運動邊界條件(KFSBC)，動力邊界條件(DFSBC)。

(1) 自由表面運動邊界條件：在水表面的水粒子運動速度等於表面運動速度，並給予表面水粒子一座標為：

$$x = \xi(t, x_0); \quad z = \eta(t, z_0) \quad (2-5)$$

其中 $x_0 = \xi(0, x_0)$ ， $z_0 = \eta(0, z_0)$ ，則

$$\frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = w \quad (2-6)$$

(2) 自由表面動力邊界條件：由白努利方程式(Bernoulli's

equation)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (2-7)$$

其中 η 為水面之高程，並令自由表面大氣壓力 p 為零， $f(t)$ 項為常數且假設為零，配合假想自由表面海綿邊界(Ohyama and Nadaoka, 1991)。

$$\mu \Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx = 0 \quad (2-8)$$

如圖 2-1 所示， x_1 為海綿層之起始 x 座標值， μ 為海綿層之人造阻滯係數(artificial damping factor)，假設在海綿層中成一線性分佈，在最右端與輻射邊界交接處為最大值(μ_{max})，在起始端 x_1 及無海綿之區域則為零，結合 (2-7) 與 (2-8) 式得。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on \Gamma_f} dx = 0 \quad (2-9)$$

3. 虛擬造波板邊界：則為一運動邊界條件，即虛擬造波板邊界面之水平運動速度與水分子之水平速度必須相等，現給予造波板上水分子的位移為

(1) Stokes wave:

$$x = \hat{S}(t; x_0) = \frac{s_0}{2} \sin \omega t + \frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi) + x_0 \quad (2-10)$$

則造波板之 KBC 為：

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (2-11)$$

其中 x_0 為造波板初始 x 座標值， s_0 為造波板之衝程， ω 為造波板的頻率， s_f 為消除二階自由波所需之衝程， φ 為一階 Stokes wave 與二階自由波之相位差(附錄 A)。

(2)cn wave:

為了模擬 cn wave 我們依 cn wave 相關理論(黃等, 2004)求得所需要的相關參數公式如下, 依據 cn wave 的理論可得以下公式,

$$y_t = \frac{16h^3}{3L^2} \{K(\kappa)[K(\kappa) - E(\kappa)]\} + (h - H) \quad (2-12)$$

$$L = \sqrt{\frac{16h^3}{H} [\kappa \cdot K(\kappa)]^2} \quad (2-13)$$

$$T = \sqrt{\frac{16h^2}{3Hg}} \cdot \left\{ \frac{\kappa \cdot K(\kappa)}{\sqrt{1 + \frac{H}{h\kappa^2} \left(2 - \kappa^2 - \frac{3E(\kappa)}{K(\kappa)}\right)}} \right\} \quad (2-14)$$

$$\eta(t) = y_t - h + Hcn^2(\theta, \kappa) \quad (2-15)$$

$$\theta = \left[2K\left(\frac{X}{L} - \frac{t}{T}\right), \kappa \right] \quad (2-16)$$

$$u(t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{c\eta(t)}{h + \eta(t)} \quad (2-17)$$

$$x = u(t)dt \quad (2-18)$$

其中 y_t 為底床到波谷的高度, h 為水深, L 為波長, T 為週期, K 為第一類橢圓函數積分, E 為第二類橢圓函數積分, 小寫 κ 為模數, $\eta(t)$ 為水位函數, $u(t)$ 為造波板速度(Goring and Raichlen, 1980), c 為行進波的波速。

4. 虛擬點源: 在點源造波方面, 首先需要得知點源分佈位置各水粒子的水平速度式。

(1) Stokes wave:

點源造波方面於點源位置代入水粒子的速度(Sarpkaya, 1981)

$$u = -\frac{H\omega \cosh(k(h+\eta))}{2 \sinh kh} \sin \omega t + \omega \frac{3\pi H^2 \cosh(2k(h+\eta))}{8L \sinh^4 kh} \sin(1.5\pi - 2\omega t) \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{H\omega \cosh(k(h+\eta))}{2 \sinh kh} \omega \cos \omega t - \frac{3\pi H^2 \cosh(2k(h+\eta))}{4L \sinh^4 kh} \omega^2 \cos(1.5\pi - 2\omega t) \quad (2-20)$$

(2) cn wave:

在本研究中使用了 Wiegel(1960)的解析解速度公式，及一階橢圓函數波理論解(Isobe, 1983)之速度公式，最後我們並以 Fenton(1978)五階級數解展開法求得水粒子速度公式。

a. Wiegel(1960)所提出的水粒子速度公式:

$$u = \sqrt{(gh)} \left[-\frac{5}{4} + \frac{3y_t}{2h} - \frac{y_t^2}{4h^2} + \left(\frac{3H}{2h} - \frac{y_t H}{2h^2} \right) cn^2 \theta - \frac{H^2}{4d^2} cn^4 \theta - \frac{8HK^2(k)}{L^2} \left(\frac{h}{3} - \frac{\eta^2}{2h} \right) (-k^2 sn^2 \theta cn^2 \theta + cn^2 \theta dn^2 \theta - sn^2 \theta dn^2 \theta) \right] \quad (2-21)$$

b. Isobe and Kraus (1983) 一階 cn wave 水粒子速度公式:

$$\overline{cn^2} \equiv \frac{1}{2K} \int_0^{2K} cn^2(\theta; \kappa) d\theta = \frac{E}{\kappa^2 K} - \frac{1-\kappa^2}{\kappa^2} \quad (2-22)$$

$$\eta = H[\overline{cn^2}(\theta, \kappa) - \overline{cn^2}] \quad (2-23)$$

$$u = \sqrt{(g/h)} \cdot \eta \quad (2-24)$$

$\overline{cn^2}$ 代表的是一個週期間 cn^2 的平均值，先求出(2-22)式的結

果，再代入(2-23)求得振幅，再以(2-24)求得水粒子速度，在一階公式中，所得的水粒子速度並沒有隨水深變化，因為 cn wave 為淺水波，其速度對水深的變化沒有如 Stokes wave 明顯，故可以採用此做法，得一較簡單的速度值。

c. Feton(1978)的高階 cn wave 級數解水粒子速度公式：

$$\alpha = \left(\frac{3\varepsilon}{4m}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^4 \frac{\varepsilon^i}{m} \sum_{j=0}^i m^j \alpha_{ij} \quad (2-25)$$

$$\eta = y_t \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^i \sum_{j=1}^i m^j \sum_{k=1}^j cn^{2k}(\alpha X_* | m) \eta_{ijk}\right) \quad (2-26)$$

$$u = \sqrt{gy_t} \left(-1 - \sum_{i=1}^5 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^i \sum_{j=0}^i m^j \sum_{k=0}^i cn^{2k}(\alpha X_* | m) \sum_{l=0}^{i-1} \left(\frac{z+h}{\eta}\right)^{2l} \phi_{ijkl}\right) + C \quad (2-27)$$

以上各式中， $\varepsilon = H / y_t$ ， $m = \kappa^2$ 為模數的平方， z 為點源座標，

$X_* = X / y_t$ ， C 為波速，本研究中展開級數到達五階來表示點源的水粒子速度，係數值部份參考附錄 G。

5. 輻射邊界條件：在造波板水槽之右側，點源造波為左右各有一輻射邊界。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2-28)$$

由於所給的輻射邊界條件為線性，若是入射波為非線性波會有些微的反射產生，故採混合邊界(Ohyama and Nadaoka, 1991)，於輻射邊界前放置海綿層，先將入射波消滅至較接近線性波的程度，再由輻射邊

界透射出去，(2-28)式中加入 $\mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial X} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx$ ，以表現海綿層的

消能作用。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (2-29)$$

x_1 為海綿層起始位置之 x 軸座標值， x_2 為海綿層末端座標值。



第三章 數值方法

3-1 BEM 之引用

對於一非線性之自由水面邊界問題，本研究採用了在時間領域裡以邊界元素法為數值模式的計算方式來處理此問題；而在自由水面點運動的模擬方面，則使用 Dold 及 Perpgrine(1984)所建議的 Eulerian-Lagrangian 混合式數值技巧，其水面點在下一時刻的新位置及其速度勢是由 Taylor 級數展開式來求得。

3-2 控制方程 Governing Equation

在數值方法中模擬本研究之邊界值問題，可以採用有限元素法或有限差分法然而其在數值計算領域皆是二維，因此在計算上首先必需處理計算領域內的網格處理問題，加上波浪模擬時自由液面是一個不停變動的邊界，這對於網格的產生是困難的挑戰，相反的邊界元素法可以避開煩瑣的網格計算，對一邊界值問題而言，如果其控制方程式自由空間之 Green 函數 (free space Green function) 已知，既可應用 BEM 來計算，使用 BEM 可使我們所探討的問題數值計算減少一維，如二維面積分，可簡化為一維線積分，因此可以避免領域內網格之計算問題，此外邊界元素法在數值模式的建立方面也比其它方法簡便。

應用 BEM 解位勢問題，首先要將待解邊界值問題轉換為積分方程式，BEM 之積分方程式可由 Green 第二恆等式推導而得，

$$\int_{\Omega} (\Phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \Phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\Phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n}) d\Gamma \quad (3-1)$$

其中 Ω 為積分之領域(domain)， Γ 為分析領域 Ω 之邊界， Φ 滿足

Laplace equation，即

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3-2)$$

G 必需滿足以下方程式

$$\nabla^2 G = \delta(x - x_i, z - z_i) \quad (3-3)$$

G 為自由空間之 Green 函數， δ 為 Dirac Delta function，在 2-D

Laplace 方程式的問題中 G 可表示為(Greenberg, 1971):

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (3-4)$$

上式中 $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$ 代表二維區域一點 $P(x_i, z_i)$ 到邊界上另一點 $Q(x, z)$ 之距離，如圖 3-1 及圖 3-2, 若是我們令 P 點在積分時正好位在二維區域的邊界上，如圖 3-1，可由式(3-1)推得：

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \Phi(p) = \int_{\Gamma} (\Phi(Q) \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n}) \cdot ds \quad (3-5)$$

α 為 p 點之內角，(3-5) 式為邊界元素法所應用之積分方程式，將邊界分割成 N 段元素，每一個元素的兩端稱為節點(node)，並假定未知值在節點之間作線性變化，就是線性元素(linear element)的定義，所以可將(3-5)式離散化成：

$$\frac{\alpha_i}{2\pi} \Phi_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} G \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma \quad i=1, \dots, N \quad (3-6)$$

依線性元素的分析， Φ 和 Φ_n 在各元素做線性變化，所以定義邊界上的速度勢為

$$\Phi_{\Gamma_j}(\varepsilon) = u_1\Phi_j + u_2\Phi_{j+1} = [u_1 \ u_2] \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \Phi_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

$$\Phi_{n,\Gamma_j}(\varepsilon) = u_1\Phi_{n,2j-1} + u_2\Phi_{n,2j} = [u_1 \ u_2] \begin{Bmatrix} \Phi_{n,2j-1} \\ \Phi_{n,2j} \end{Bmatrix} \quad (3-8)$$

式中 u_1 、 u_2 是形狀函數(shape function)。

$$u_1 = \frac{1}{2}(1-\varepsilon), \quad u_2 = \frac{1}{2}(1+\varepsilon) \quad (3-9)$$

ε 表示在一線性元素上的區域座標系統， ε 範圍為-1到1， u 下標1代表元素 j 的第1個節點，下標2代表元素 j 的第2個節點，所以(3-6)各積分項可以化為下式

$$\int_{\Gamma_j} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u_1 u_2] \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \Phi_{j+1} \end{Bmatrix} = [h_{ij}^1 \ h_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \Phi_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

$$\begin{cases} h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} u_1 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \\ h_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} u_2 \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma_j} \Phi_n G d\Gamma = \int_{\Gamma_j} [u_1 u_2] G d\Gamma \begin{Bmatrix} \Phi_{n,2j-1} \\ \Phi_{n,2j} \end{Bmatrix} = [g_{ij}^1 \ g_{ij}^2] \begin{Bmatrix} \Phi_{n,2j-1} \\ \Phi_{n,2j} \end{Bmatrix} \quad (3-11)$$

$$\begin{cases} g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} u_1 G d\Gamma \\ g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} u_2 G d\Gamma \end{cases}$$

將(3-10)，(3-11)式代入(3-6)式中，整理可得

式，並將未知項移項至左邊，而未知項移項至右邊則(3-13)可一聯立方程式：

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (3-14)$$

式中 $\{X\}$ 為未知向量， $\{F\}$ 為已知向量， $[A]$ 是係數矩陣，再利用高斯消去法便可解得未知項之 Φ 或 Φ_n 。

3-3 各邊界之初始條件(t=0)

於起始造波時間 $t=0$ 時，各邊界之起始值邊界條件分別如下所示：

1. 虛擬造波板邊界面 Γ_m 於 $t=0$ 時，可由(2-11)式得到下列之關係：

$$\text{Stokes wave: } \Phi_n = - \frac{d\hat{S}}{dt} \Big|_{t=0} = - \left(\frac{s_0}{2} \omega + s_f \omega \sin(-\varphi - \pi) \right) \quad (3-15)$$

$$\text{cn wave: } \Phi_n = -u(t) = - \frac{c\eta(t)}{h + \eta(t)} \Big|_{t=0} \quad (3-16)$$

2. 自由水面邊界面 Γ_f 在最初始 $t=0$ 為完全靜止之液面，其速度勢為零：

$$\Phi = 0 \quad (3-17)$$

3. 在不透水邊界(底床) Γ_w ，其法線方向之流速於任何時刻均為零，即：

$$\Phi_n = 0 \quad (3-18)$$

4. 幅射邊界條件：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu_{\max} \Phi - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \Phi \Big|_{\text{on } \Gamma_f} dx \right) \quad (3-19)$$

5. 點源造波之水粒子速度，點源造波之 Green 第二恆等式需加一修正項，修正後之公式如下。

$$\frac{\alpha}{2\pi} \Phi(p) = \int_{\Gamma} (\Phi(Q) \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n}) \cdot ds + \iint_{\Omega} q^* G d\Omega \quad (3-20)$$

q^* 除了點源該點以外，皆為零，我們以 Dirac's delta function 表示為

$$q^*(x, z, t) = U^*(z, t) \delta(x - x_s) \quad (3-21)$$

x_s 為點源之 x 軸作標， U^* 為該點源流量密度 (flux density) 與水深有關 (Brorsen and Larsen, 1987)，流量密度與水粒子速度的關係為 $U^* = 2U(z, t)$ ，因為點源的波浪是朝二方向對稱擴散，所以必需乘以二倍才是真的流量密度，其中 $U(z, t)$ 為水粒子水平速度與點源的水深有關，在此要注意的是，在點源造波時，若是波浪產生反射，其所產生的反射波到達點源的坐標時，會對原先的造波條件產影響，必需要對此加以修正 (Nadaoka, 1991)，修正之關係式如下：

$$U^*(z, t) = 2U(z, t)(\eta_0 + h) / (\eta_s + h) \quad (3-22)$$

其中 η_0 是所要模擬波浪的設定波高， η_s 是波浪反射至點源處的實際波高。

3-4 自由水面之模擬

利用上述之已知初始值條件，配合(3-14)式求得同一時刻虛擬造波板邊界之速度勢 Φ 、自由水面之法線方向導函數 Φ_n 以及不透水邊界面或幅射邊界上之速度勢 Φ 。然而對於下一個時刻之各個邊界面之值，只有自由水面之邊界值無法直接得知，故需利用一適當之數值方法來計算求得，本文採用 Eulerian-Lagrangian 方式來描述自由水

面之波形，對於二維波浪模擬 Dold 及 Peregrine(1984)利用 Taylor 級數展開式來追蹤在自由水面上水粒子的移動軌跡，且此方法可被利用到尖銳度較大的波上。

在本文中，若採用的時間間隔 δt 夠小的話，則任一水粒子從時間 t 的位置 (ξ, ζ) 移動至下一時刻 $t + \delta t$ 的位置 (ξ', ζ') 及其新速度勢 Φ' 可以 Taylor 級數展開式來表示成：

$$\xi' = \xi + \frac{d\xi}{dt} \delta t + \frac{d^2\xi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-23)$$

$$\eta' = \eta + \frac{d\eta}{dt} \delta t + \frac{d^2\eta}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-24)$$

$$\Phi' = \Phi + \frac{d\Phi}{dt} \delta t + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{(\delta t)^2}{2} + O(\delta t)^3 \quad (3-25)$$

等號之右邊為 t 時刻的各微分項，在此需推求一階及二階微分項，則新的位置及速度勢即可求得，以下將介紹其計算流程，首先為一階項的求得，由自由水面邊界條件配合(2-2)、(2-3)式，可得：

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sin \beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-26)$$

$$w = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \cos \beta \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3-27)$$

其中法線速度 Φ_n 可由(3-14)式求得，所以只須進一步的去計算出切線速度 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 及水面波形之角度 β ，便可求得上兩式之值，而在這我們採用曲線近似法(cubic spline)的方法去計算其值，其方法詳如附錄

B。

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \quad (3-28)$$

式中的 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 可由(2-7)及(2-9)式求得，我們可以將水槽的自由液面分為二種情形，一為自由液面未進入海綿層內，二為在海綿層內的狀況，公式差異如下：

(1)若是自由表面為在海綿層內的情形則配合(2-9)及(3-28)式得

$$\frac{d\Phi}{dt} = -g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] - \mu\Phi - \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi \Big|_{on\Gamma_f} dx \quad (3-29)$$

(2)另一情形為自由表面位純水區未與海綿層內接觸則配合(2-7)及(3-28)式得

$$\frac{d\Phi}{dt} = -g\eta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)^2 \right] \quad (3-30)$$

至此已求得對時間之一階全微分項 $\frac{d\xi}{dt}$ 、 $\frac{d\eta}{dt}$ 、 $\frac{d\Phi}{dt}$ ，再來便是進一步地推求出二階全微分 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\phi}{dt^2}$ ，這裡我們採用 Grill et al. 於 1989 年所提出的關係式，即：

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{du}{dt} = & \left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} \right] \cos\beta \\ & + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} - \frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \sin\beta \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \left[\frac{\partial\Phi_t}{\partial n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\beta}{\partial s} (u^2 + w^2) \right] \cos\beta$$

$$+[\frac{\partial\Phi}{\partial s} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial n} \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} + \frac{\partial\Phi_t}{\partial s}] \sin \beta \quad (3-32)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} [-g\eta + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - \mu\Phi + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \Phi|_{\text{on}\Gamma_f} dx]$$

利用萊布尼茲法則(Leibniz rule)可將上式整理為

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} = & -g \frac{d\eta}{dt} + u \frac{d^2\xi}{dt^2} + w \frac{d^2\eta}{dt^2} - \mu \frac{d\Phi}{dt} \\ & + \int_{x_1}^x \frac{\partial\mu}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \Big|_{\text{on}\Gamma_f} dx - \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x_1} + \frac{\partial\mu}{\partial x} u\Phi \Big|_{x=x} \end{aligned} \quad (3-33)$$

因為整個空間區域(domain)在同一個時刻,幾何形狀相同,積分方程式的系數G及H由空間區域的幾何形狀決定,在幾何形狀相同的條件下,系數G及H是相同的,所以 Φ_t , $\frac{\partial\Phi_t}{\partial n}$ 的計算等同於 Φ , Φ_n 的計算過程。 Φ_t 也會滿足拉普拉斯方程式,所以對 Φ 之積分方程式也可利用於 Φ_t ,只要再加入其他適當的邊界條件,也可以由(3-14)式來解得 $\frac{\partial\Phi_t}{\partial n}$ 之值。在(3-31)、(3-32)、(3-33)三個式子中,為了求二階全微分項,欠缺一些在自由液面切線方向之微分項,但是這些微分項可以由曲線近似法求得,這些微分項分別是, $\frac{\partial\Phi_t}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial\Phi_n}{\partial s}$ 、 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}$ 、 $\frac{\partial\beta}{\partial s}$ 及 β 當這些微分項以曲線近似法求得後,式(3-31)、(3-32)及(3-33)內的未知值均已確定下來。在求得各二階的全微分項 $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ 及 $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ 後代入(3-23)、(3-24)、(3-25)得到 ξ' 、 η' 、 Φ' 之值,計算流程參考圖3-3,此流程將不斷重覆直到達到原先設定的計算時間,達到設定時間後程式將終止,並完成整個模擬。

3-5 自由波(Free Wave)

根據二階的非線性造波理論發現若一造波板依正弦曲線移動所造出之波浪除了 2 階的 Stokes 波外還有 2 階的自由波(free wave)存在。然而在自然界的海洋波浪並不包含此自由波，因此模擬海洋波浪時此二階之自由波必須消除掉，以求得模擬之正確性。

在解二階問題時，根據 Madsen(1971)與 Flick and Guza(1981)解二階勢能值時， Φ_2 包含 Φ_2^s 及 Φ_2^f 其中 ϕ_2^s 是 Stokes wave 的成份，而 Φ_2^f 是由 free wave 所造成，而 Φ_2^f 又包含了 evanescent modes，雖然 evanescent modes 與 free wave 皆屬於多餘的波，但是 evanescent modes 會隨著離開造波板的距離而快速衰減因此可忽略，但是 free wave 並不會衰減因此會影響波浪的波形，因此不僅不能忽略而且必需將之消除。在本文中消除自由波的方法是依據 Wu(1987)所提出的公式：

$$S(x=0, z, t) = \frac{s_0}{2} \sin \omega t + \frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi) \quad (3-35)$$

其中 s_f 為造波板的二階衝程， $\varphi = \tan^{-1}$ (二階自由波振幅虛數與實數部分的比值)，兩者未知但都可以由已知的條件去求得。詳細情形參考附錄 A，圖 3-4 及圖 3-5 是消除前後的比較。

第四章 結果與討論

本研究試著用點源及造波板造波模擬非線性數值水槽並比較其間差異及分析其優缺點，並探討其可行性，分別以 Stokes wave 及 cn wave 來討論，在本研究的數值水槽實驗，取平均每一波長分做三十等份來描繪一個波形($L/30$)，時間間隔(time step)取每個週期 256 個時間間隔(cn wave 造波板造波取 1024 個時間間隔)，其庫倫數取在 0.0292~0.1172 之間，並使用數值平滑技巧，每 32 個時間間隔進行一次平滑化(附錄 D)，以消除鋸齒狀。

4-1 Stokes wave 模擬之數值結果



在此我們取水深 $h=1\text{m}$, $kh=1.0$ ，波高為 $H=0.1\text{m}$ 及 0.2m ，分別以點源造波及造波板造波方式模擬，所得之波浪剖面分別與 Stokes 五階理論解(Fenton, 1985)比較，波形與理論波形相當吻合，如圖 4-1、4-2 為利用不同造波方式造 Stokes wave 之波形與理論解波形的比較圖。圖 4-3 為數值計算過程中數值水槽總體質量隨著計算時間的變化圖，縱軸為任意時刻質量對初始質量的比 m_0 為初始質量， m_t 為任意時刻質量，圖 4-3(a)、(c)為造波板的造波水槽，質量的增加在一可以接受的範圍，圖 4-3(b)、(d)為用點源造波水槽所得的質量-時間圖，到第十週期前為一上升的趨勢，可能的情形是，因為點源處有一水平速度輸入而造成質量增加，所以總體質量在波前到達輻射邊界會慢慢的上升，此一現象與圖上所示吻合，在此的點源造波水槽右

側為 8 倍波長，故其在 8 週期後變為一平坦的趨勢是一合理的解釋。圖 4-5 為整個數值水槽自由液面的剖面圖，取了 15~23 週期的斷面資料，以觀察不同時刻的剖面變化情形，末端為海綿層長度為二倍波長，人工阻滯係數 μ_{\max} 為 0.2-0.3 左右，依據 Nadaoka(1991)的研究結果顯示可以得到最佳的消波效果。圖 4-5 與 4-6 除水槽長度及造波方式不同外其餘的條件相同，在圖 4-6 的情形是點源造波，點源造波的波浪是朝二邊移動，右側是設定的取樣區，在以後的實驗中若是要加入消波的構造物將置於此區，左側末端也是採用了海綿及輻射混合邊界，以防反射波反射到達原點時影響設定的造波條件，因為反射到達原點時會改變設定波高，而波高會影響整個斷面的水粒子水平速度分佈。圖 4-7 為造波板水槽水位時序的波高圖，所取樣的探針位置距離原點 1~1.75 波長，在此選取時間在 25~30 週期時的水位資料，以確定水槽已達穩定狀態，圖示上以不同的線型標示不同的探針位置所取得的水位資料，實線是距離原點位置正好一個波長的探針，即 $x/L=1$ 的線段。圖 4-8 為點源造波的水位時序圖，設 $H=0.1\text{m}$ 與造波板水槽相同，此處的取樣是取原點右側位置距離 1~1.75 波長，其所得結果與造波板的結果類似，所以似乎在相同條件下，點源與造波板造出的非線性波形是相同的。圖 4-9 為 Stokes wave 水位資料在穩定週期後經由傅利葉轉換所得之振幅-頻譜圖，圖 4-9(a)、(c) 為造波板造波的結果，圖 4-9(b)、(d) 為點源造波的情形，圖 4-9(a)、(b) 為 $H=0.1\text{m}$ ，圖 4-9(c)、(d) 為 $H=0.2\text{m}$ ，點源造波除了主頻之外，第二頻率的振幅值為 0.00263，理論上在 $H=0.2\text{m}$ 時，二階振幅推算為 0.01369，造波板造波在 $H=0.2\text{m}$ 的情形下，其二階振幅量為 0.01374，所以造波板在二階量上是較準確的，但大體上二種方式的總波高在波形斷面圖大

體相同。圖 4-10 為 Stokes wave 的能量時間變化圖，能量的推算方式參考附錄 F，圖 4-10(a)、(c)為造波板水槽，圖 4-10(b)、(d)為點源造波水槽，在理論中，水槽的能量有動能及位能，合起來即為整個水槽的總能，理論上，動能及位能的值皆是總能的二分之一，因為動能及位能的值相等，故在圖中彼此重疊，圖 4-10(b)、(d)的能量值較圖 4-10(a)、(c)造波板造波的能量值大，其原因為點源造波的水槽在本例中是較造波板水槽長的，本研究所設定的造波板水槽為十個波長的長度，而點源造波水槽的長度為十二個波長，故點源水槽的整體能量也要較大。

4-2 橢圓函數波 cn wave

在本研究中，當使用 Wiegel 公式造波時，發生了水位隨時間下降的情形，為了解決此情形，需對原來的公式做一些修正，當修正 cn wave 的波谷高度時，可以減少它水位下降的情形，故試著找出波高對 y_t 的修正量關係，在此以試誤法找出了一關係，修正波谷到底床的高度，能使質量守恆，在此固定模數 $\kappa=0.95$ 以改變波高 H 的方式，得到了一些簡單的結論，發現當 H 提高時，所需加入的修正項也提高了，就已知五個測試，大致上是線性的增加如圖 4-11 所示，圖 4-12 表示了修正前跟修正後的 y_t 值，三角形的線是修正後的波谷高度，菱形的線是未修正前的波谷高度 y_t 。圖 4-13(a)、(b)為各公式與理論解的比較，本模擬參數設定為 $H=0.1\text{m}$ ，橢圓函數之模數 $K=0.95$ ，Ursell Number $Ur=32.258$ ，圖(c)、(d)為 $H=0.2\text{m}$ 、 $K=0.95$ 、 $Ur=32.288$ ，實線為五階理論解，資料取樣位置為 0~2 波長位置的斷面圖，取樣的時間是 25 週期，水槽的波形已達穩定狀態，所有的公式大體上吻合理

論解，基本上當 $H=0.2\text{m}$ 時與理論解有較大的差異，可能的原因為隨 H 增大非線性的情形也提高的原因，在此要說明的是未修正前的 Wiegel 公式解，圖 4-13(b)、(d) 中的虛線部份，在經過 25 週期後，明顯的有水位下降的問題，而修正過後的圖 4-13(b)、(d) 十字線的圖形，才又再次的吻合理論波形。圖 4-14 為各不同造波方式所模擬過程中的水槽總質量對時間圖，其中 4-14 左列的五個小圖為 $H=0.1\text{m}$ 、 $K=0.95$ 的參數條件，4-14 右列的五個小圖為 $H=0.2\text{m}$ 、 $K=0.95$ 的參數條件，4-14(a)、(b) 是以造波板造波所產生的結果，4-14(c)、(d) 是以 Fenton 級數解所得的情形，4-14(e)、(f) 是一階公式的結果，4-14(g)、(h) 是修正前的 Wiegel 公式，4-14(i)、(j) 是修正後的 Wiegel 結果，以造波板造波在質量守恆上明顯的與點源造波的有些不同，造波板造波的總質量隨時間變化較小也較穩定，而其它以點源造波的方式似乎質量雖然最後也是趨於穩定，但是不停的在一平均位置上下振盪，推測其原因是因為點源造波是不停的從點源位置產生一水平速度，故總體的水槽質量是隨點源的速度變化，若是速度為正則質量上升，為負則質量下降，唯一有問題的是 Weigel 公式所模擬的水槽質量不停下降，如圖 4-15 所示，此為第 24 週期時的水位資料，可以發現當 cn wave 傳遞出去時，它的波谷形狀似乎有隨位置變化的情形，不同的波長位置，其波谷形狀也有些不同，波谷形狀比較一致的為用 Fenton 級數解所模擬的結果，圖 4-15 的水位資料為不同的造波公式所截取的水位資料，其所設定的探針位置在距離原點 $1\sim 1.75$ 波長的點，參數設定為 $h=1\text{m}$ 、 $H=0.1\text{m}$ 、 $K=0.95$ ，在水槽 $1\sim 1.75$ 波長的區間內放置了五根探針，各探針的間隔相同，資料的選取時間為 25~30 週期，以確保水槽已達穩定狀態，圖 4-17 為時間對水位的資料經由傅利葉轉換所得到的振幅-頻譜圖，圖上列出了本研究所用到

的五種公式的結果，頻譜基本上到 4 階以上就很小了，大致上頻譜的分佈是類似的，圖 4-18 為不同的造波方式造 cn wave 的能量變化圖，付合理論上動能及位能皆為總能的二分之一，值得注意的是在 Feton 級數解的部份，能量的變化振幅有加大的情形，尤其是在 Feton 公式的情形特別明顯，主要的關係是動能的變化振幅加大了。



第五章 結論與建議

5-1 結論

本文以邊界元素法探討二種造波模式所模擬之非線性數值水槽表面波形，比較以直推式造波水槽及點源造波模式下所產生的非線性波形，在此次研究分別模擬了 Stokes wave 及 cn wave，得到了以下的結論：

1. 在 Stokes wave 的模擬方面，直推式造波板造波，可以用解析解求得消除 free wave 的公式，所以可得跟點源造波時的結果一樣，不受 free wave 的影響，直推式造波板跟點源水槽的結果加以比較，發現二種造波模式所產生的非線性波形是吻合的，我們並以 Stokes wave 理論上的五階解加以比對，所得的結果也是吻合，故在模擬 Stokes wave 方面，二種模式皆可以採用。
2. 在模擬 cn wave 方面，由於無法求得消 free wave 所需要的公式，故若以直推式造波板模擬 cn wave，目前無法消除其自由波 (free wave)，故其波形會隨水槽位置而有所差異，無法產生永久性的穩定波形，但是若以文獻所提及的公式去造波，發現所設定的波形只存在於離造波源較近距離，約一到二個波長距離的波形，不論是點源造波或是以直推式造波，隨著波浪的傳遞，均會漸漸的產生跟設定的 cn wave 波谷形狀不同，而在此所參考的文獻中，往往作者所呈現的波形，只有一、二個波形的斷面，而沒有更長的波形斷面做比較，故很難得知其它文獻的作者是否也遇到相同的問題。

3. 當以 Wiegel(1960)所提出的水粒子水平速度公式以點源模式模擬 cn wave，發現其自由水面會隨時間下降，經過了三十個週期後，其數值水槽總質量減少了 2%，而且其總質量隨模擬時間呈現一持續下降的區勢，雖然質量不能守恆，但是整體來說，波形斷面的趨勢仍是符合的，故以試誤法，將波谷高度加入一修正高度，如此可得到一質量守恆的 cn wave 波形斷面，之後並以試誤法找出波高 H 與所需修正量的一線性關係。
4. 當以 Isobe and Kraus 一階 cn wave 公式所模擬出來的結果，發現減低了 Wiegel(1960)所提出的水粒子速度公式所產生的質量不守恆的問題，在經過了三十週期的模擬之後，水槽的質量只增加了 0.1%，效果明顯的改善了，而以一階理論解所得的結果與 Raichlen 公式造波及 Wiegel 公式造波都有隨波浪傳遞出去後，波形發生改變的現象，由於一階解太過於簡化，整個點源的水粒子速度是視為一相同的速度，依照 cn wave 理論，水粒子水平速度會隨水深不同而有所差異，因為 cn wave 是淺水波，故可能可以簡化水粒子速度公式，視為整個斷面都是同一速度，但是如此必需犧牲準確性跟精度。
5. 最後以五階級數解求得的水粒子速度，帶入點源造波模式，我們發現改善了波形傳遞出去而產生了變形的情形，波浪傳遞出去後，波谷的形狀大致上沒有隨距離而漸漸發生變化，基本上可以視為是一樣的波形，檢查了它的質量-時間圖，發現了在經過了三十個週期的模擬，其質量增加了約 0.2%，故其所模擬的結果較上述公式所模擬的結果要好。

5-2 建議

本文對以上的結論作出以下幾點建議：

1. cn wave 在以直推式造波時，無法得知它的消除 free wave 公式，故其自由波的效應存在於水槽中，希望未來的研究能夠有所突破，在 cn wave 所產生的 free wave 函數的推導方面，期望後進能有所發展，以改善以直推式模擬 cn wave 的問題。
2. 在本次數值水槽實驗以點源造波以避免造波板造波所產生的 free wave 效應影響，以目前所知的一些水平水粒子速度公式帶入點源公式造波，效果並不理想，關於 cn wave 的解析解研究，並不如 Stokes wave 那麼豐富，故在選擇公式進行模擬時，能找的材料有限，cn wave 的一些解析解也較 Stokes wave 複雜，期望未來能夠發現更佳的 cn wave 公式，以進行模擬。
3. 當用 Wiegel 公式做為水粒子速度公式時，發現水槽質量隨時間減少，加大 cn wave 的波谷 y_t 值，意外發現質量可以守恆，得到一個隨著波高增大而所需要的修正波谷高度也增大的情形，而且從圖得知，該趨勢是一線性的增大情形，但是由於是以試誤法求得這個關係式，在本質上，無法解釋為何需要加上此一修正項，也無法解釋為何以 Wiegel 的解析公式會得到一下降的趨勢，這些問題有待後進的研究，若是能有一客觀的數學解析來說明修正的方法，將是必要的，基本上修正過後的波形斷面，其趨勢與理論解大致相符，但是在波谷的位置上，仍有肉眼可以分辨出來的隨位置不同而有的差異。而為何在加大 y_t 之

後可以得到一穩定的質量守恆狀態，本文沒有詳細探討，期待後進可以在這方面加以深入研究。

4. Fenton 級數級求得水粒子速度函數, 在參考文獻中謹得知速度公式 u ， $\frac{\partial u}{\partial t}$ 只能以差分法求得，為了往後能夠求得更精確的模擬，期待未來能夠有人導出二階項 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 之級數解，而級數解的展開項高達二百項，在使用上並不方便，若是能有最佳的解析函數，也許可以簡化模擬的不便。



参考文献

1. Brebbia, C. A. and J. Dominguzo, Boundary elements: An introductory course, Computational Mechanics Publication, 1989.
2. Brorsen, M. and Larsen, J., “Source generation of nonlinear gravity waves with the boundary integral equation method”, Coastal Eng., Vol 11, pp. 93-113, 1987.
3. Chou, C. R., and Shin, R. S., “Generation and deformation of solitary waves”, China Ocean Eng., Vol. 10, No. 4, pp. 419-432, 1996.
4. Chou, C. R., and Shin, R. S., “Numerical generation and propagation of periodical waves in time domain”, Coastal Eng. in Japan, Vol. 39, No. 2, pp. 111-127, 1996.
5. Cho Y.-S., “A note on estimation of the Jacobian elliptic parameter in cnoidal wave theory”, Ocean Engineering 30, pp.1915-1922, 2003.
6. Dalrymple, R. A. and Dean, R. G. Water wave mechanics for engineers and scientists, World Scientific Publishing, 1980.
7. Dold, J. W., and Perpgrine D. H., “Steep Unsteady Water Waves : An efficient computational scheme”, Proc. 19th Intl. Conf. On Coastal Eng., pp. 955-967, 1984.
8. Goring, D. and F. Raichlen “The Generation of Long Waves in the Laboratory”, 17th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 763-783, 1980.
9. Greenberg, M. D., Application of Green’s functions in science and engineering, Prentice-Hall, 1971.
10. Grilli S.T., Skourup J. and Svendsen I. A., “An Efficient Boundary Element Method for Nonlinear Water Waves”, Eng. Analysis with Boundary Element, Vol. 6, pp.97-107, 1989.
11. Isobe, M and Kraus, N. C., “Derivation of a second-order cnoidal

- wave theory".Hydraulics Lab. Report No. YNU-HY-83-2,Dept. of Civil Eng.,Yokohama National Univ., pp.43, 1983.
12. Isobe, M., "Calculation and application of first-order cnoidal wave theory". Coastal Engineering, 9 ,pp. 309-925,
 13. Kim, S. K., Liu, P. L.-F., and Liggett, J. A., "Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, propagation and run-up", Coastal Eng., Vol. 7, pp. 299-317, 1983.
 14. Larsen, J. and Dancy, H., "Open boundaries in short wave simulations — A new approach", Coastal Eng., Vol. 7., pp. 258-297, 1983
 15. Lennod, G. P., Lin, P. L.-F., and Liggrtt, J. A., "Boundary integral solutions of water waves problems", J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 108, pp. 921-931, 1984.
 16. Longuet-Higgins, M. S., and Cokelet, E. D., "The deformation of steep surface waves on water; I, A numerical method of computation", Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 350, pp. 1-26, 1976.
 17. Madsen, O. S., "Waves generated by a piston-type wavemaker", Proc. 12th Coastal Eng. Conf., pp. 589-607, 1970.
 18. Madsen,O.S.,"On the Generation of Long Waves",J. of Geophys. Res., Vol.44 , No. 1, pp.8672-8683, 1971.
 19. Nakayama, T., "Boundary element analysis of nonlinear water wave problem", Int. J. for Numerical Method in Eng., No. 19, pp. 953-970, 1983.
 20. Ohyama, T., and Nadaoka, K., "Development of a numerical wave tank for analysis of nonlinear and irregular wave field", Fluid Dynamics Research, 8, pp . 231-251, 1991.

21. Raichlen, F., and Lee, J. J., "An inclined Plate wave generator", Proc. 16th Coastal Eng. Conf., ASCE, pp. 388-399, 1978.
22. R. L. Wiegel "A presentation of cnoidal wave theory for practical application", J. Fluid Mech., 7 pp. 273-286, 1960
23. Salmon, J. R., Liu, P. L.-F., and Liggett, J. A., "An integral equation method for linear water waves", J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 106, pp. 1995-2010, 1980.
24. Sugino, R. and Tosaka, N., "Large amplitude sloshing analysis in a container with multi-sloped wall by boundary element method", Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA, pp. 307-316 1990.
25. Wu Y.-C., "Water generated by a plunger-type wavemaker", J. Hydraulic Research, Vol. 29, pp. 851-860, 1991.
26. 吳永照, "Constant wave form generated by a hinged wavemaker of finite draft in water of constant depth.", 第9屆全國海洋工程會議, 第552-569頁, 1987。
27. 蔡文彬, 「非線性波與不透水潛堤的交互作用」, 國立交通大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國89年。
28. 黃信發, 「非線性波與固定式結構物的交互作用」, 國立交通大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國90年。
29. 游宛真, 「非線性波與透水潛堤的交互作用」, 國立交通大學土木工程研究所, 碩士論文, 民國90年。
30. 黃惠欽, 董志明, 黃清哲, 「橢圓餘弦造波理論所生波浪特性及傳遞現象之數值模擬」, 第26屆海洋工程研討會論文集, 77-84頁, November, 民國93年。

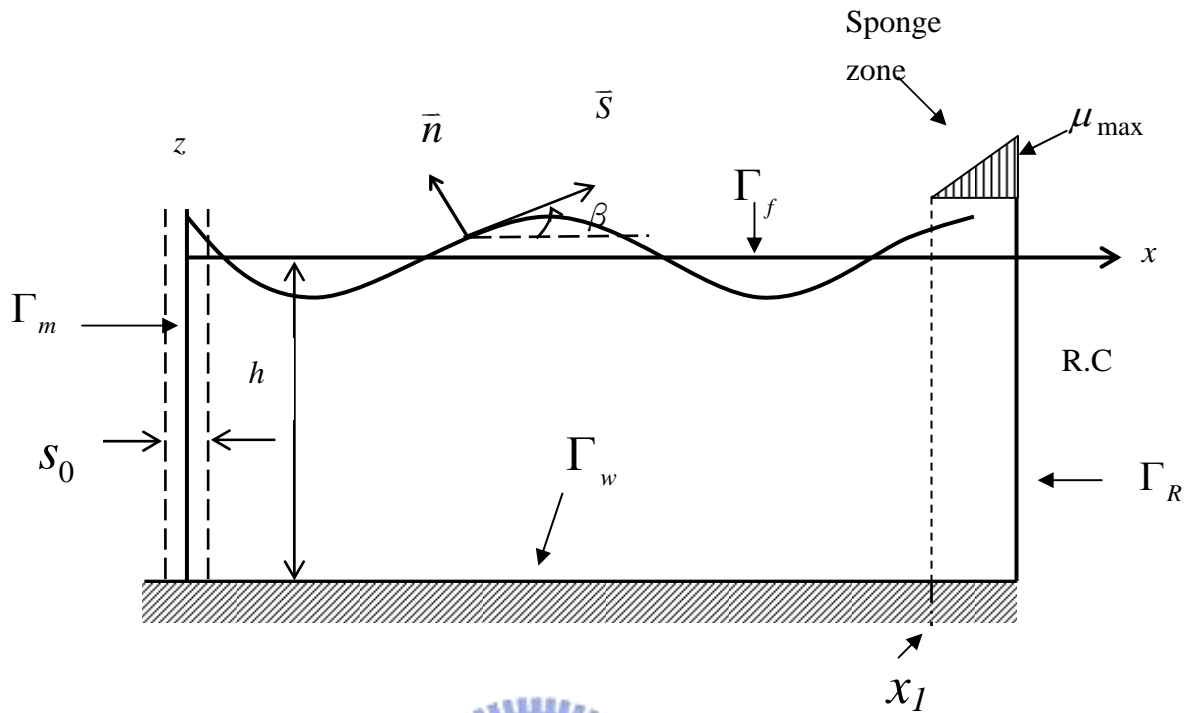


圖 2-1 直推式造波板設置圖

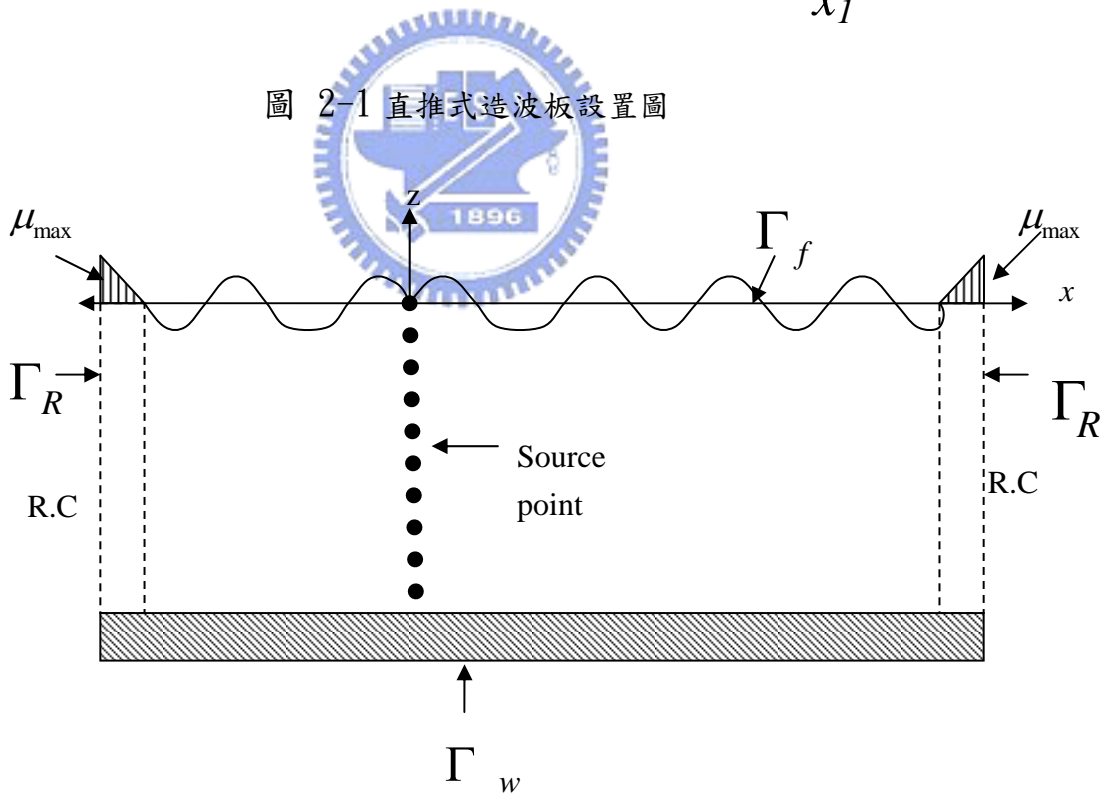


圖 2-2 點源造波水槽設置圖

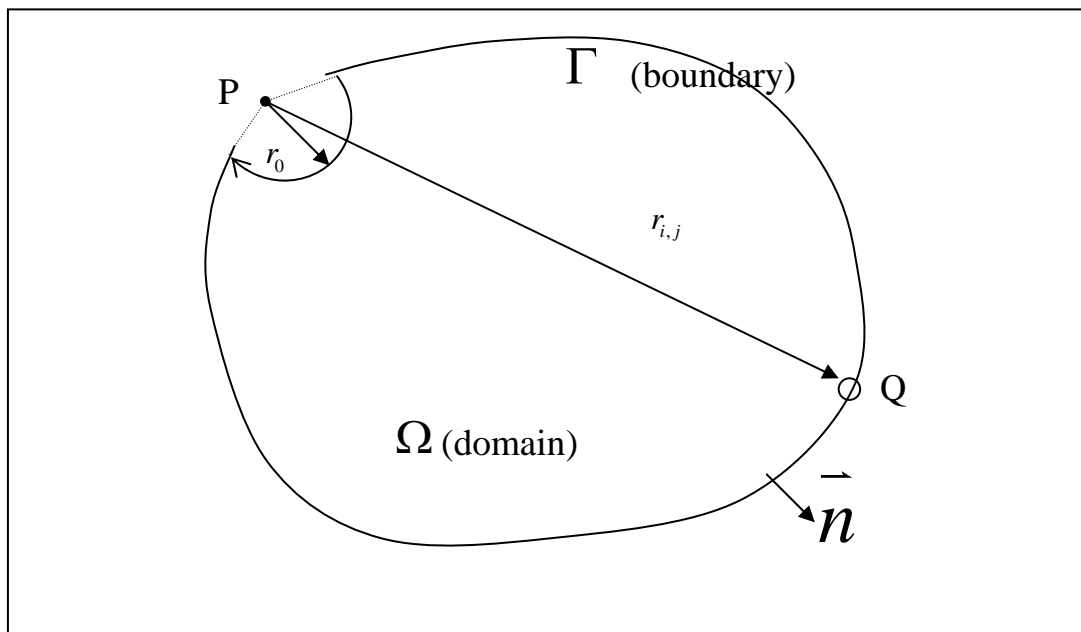


圖 3-1 P 點為在邊界上之一點時的積分示意圖

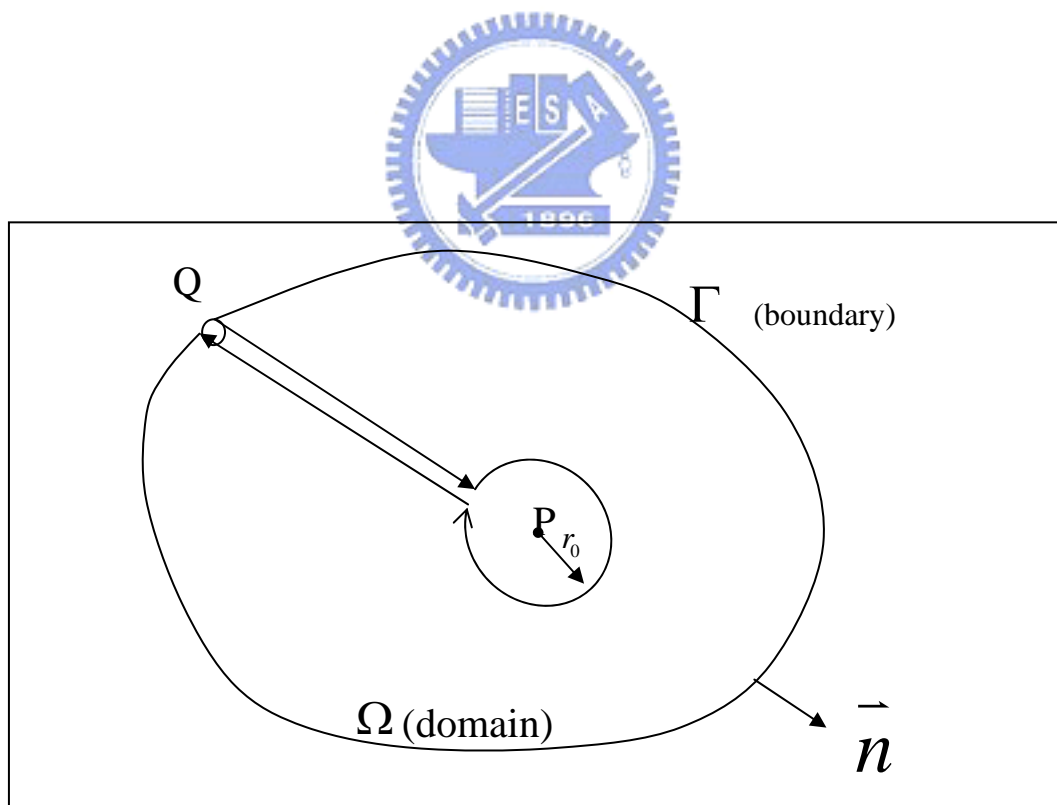


圖 3-2 P 點為內部點時的積分示意圖

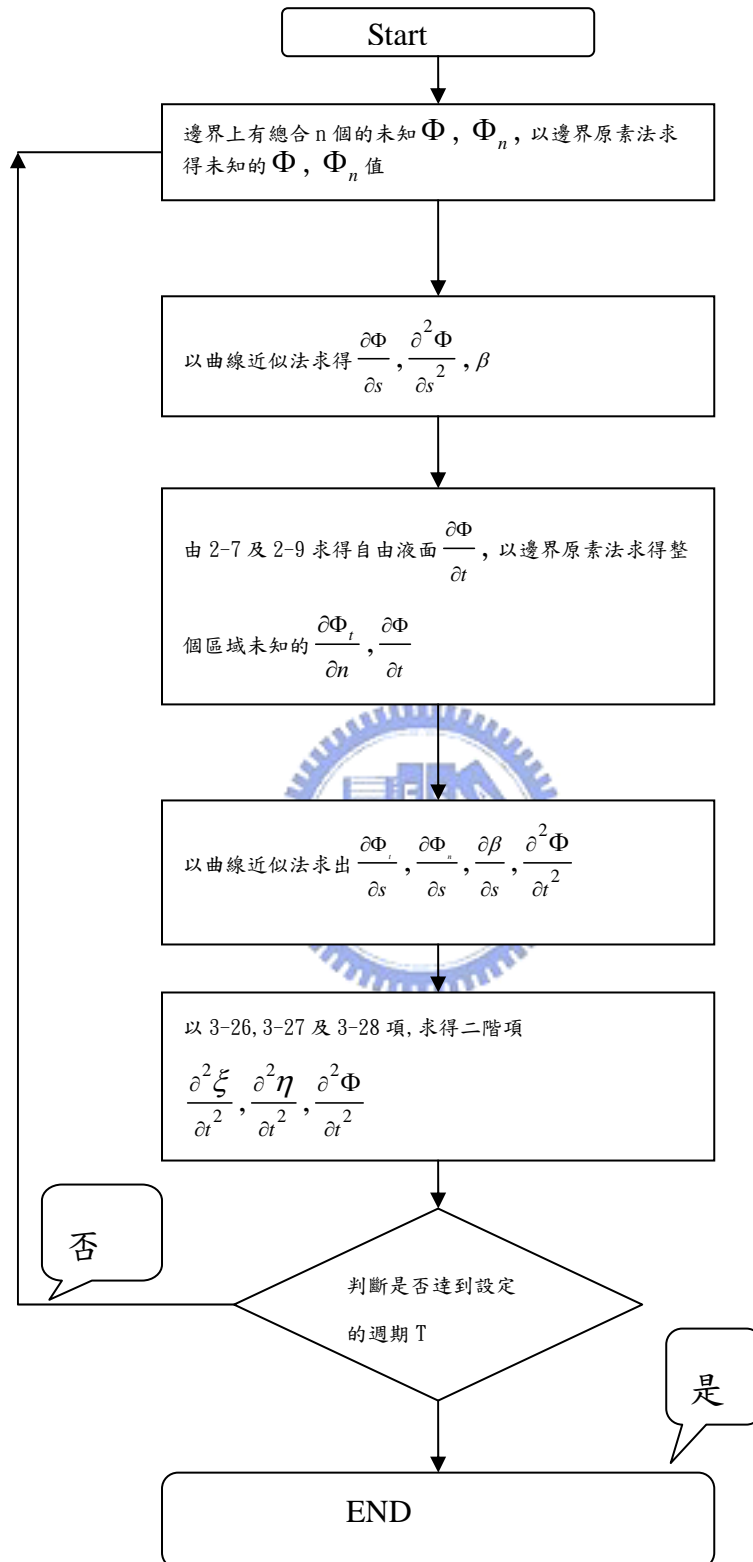


圖 3-3 計算流程圖

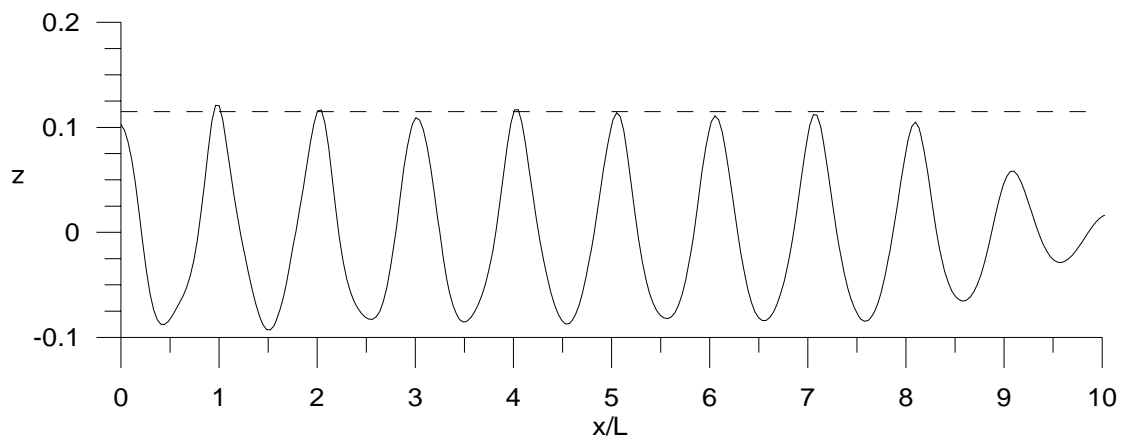


圖 3-4 以直推式造波板造波未消除自由波的波形

($h=1.0\text{m}$ 、 $kh=0.8$ 、 $H/L=0.02546$)

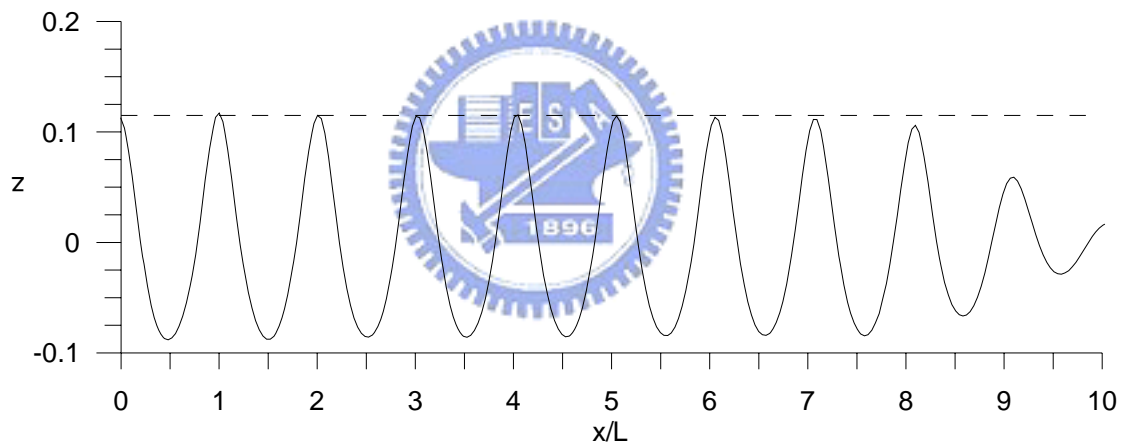


圖 3-5 以直推式造波板造波消除自由波的波形

($h=1.0\text{m}$ 、 $kh=0.8$ 、 $H/L=0.02546$)

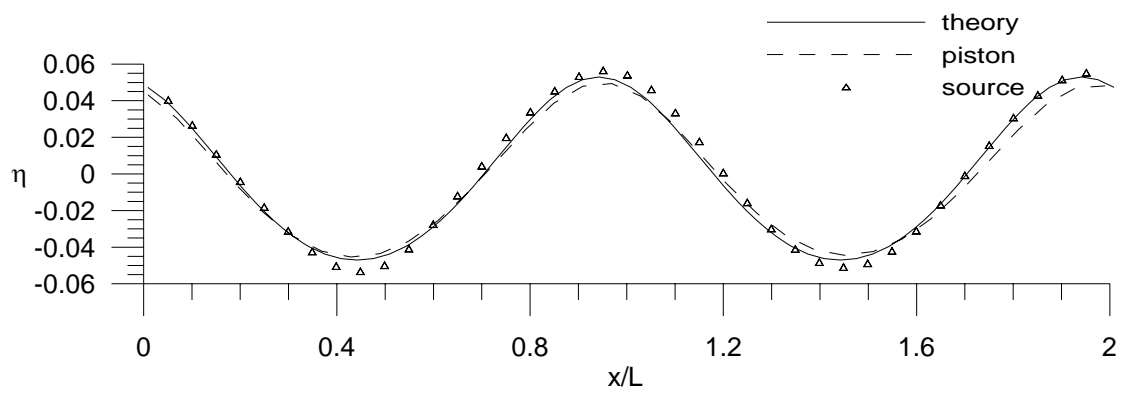


圖 4-1 Stokes wave 不同造波方法波形與理論解比較圖

($h=1\text{m}$ 、 $kh=1$ 、 $H=0.1\text{m}$ 、 $H/L=0.015915$)

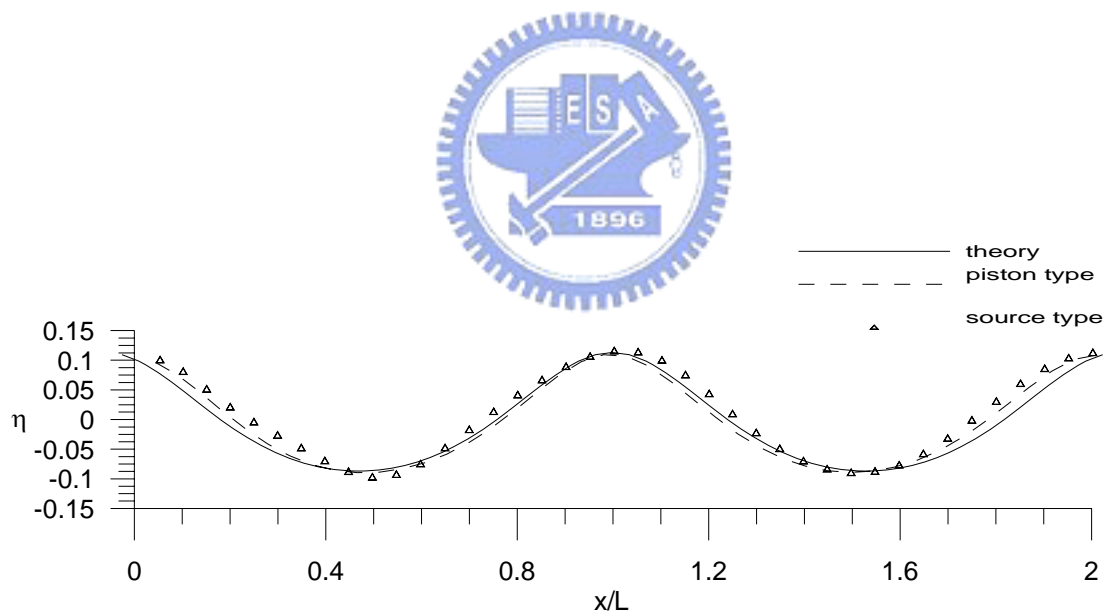


圖 4-2 Stokes wave 不同造波方法波形與理論解比較圖

($h=1\text{m}$ 、 $kh=1$ 、 $H=0.2\text{m}$ 、 $H/L=0.031831$)

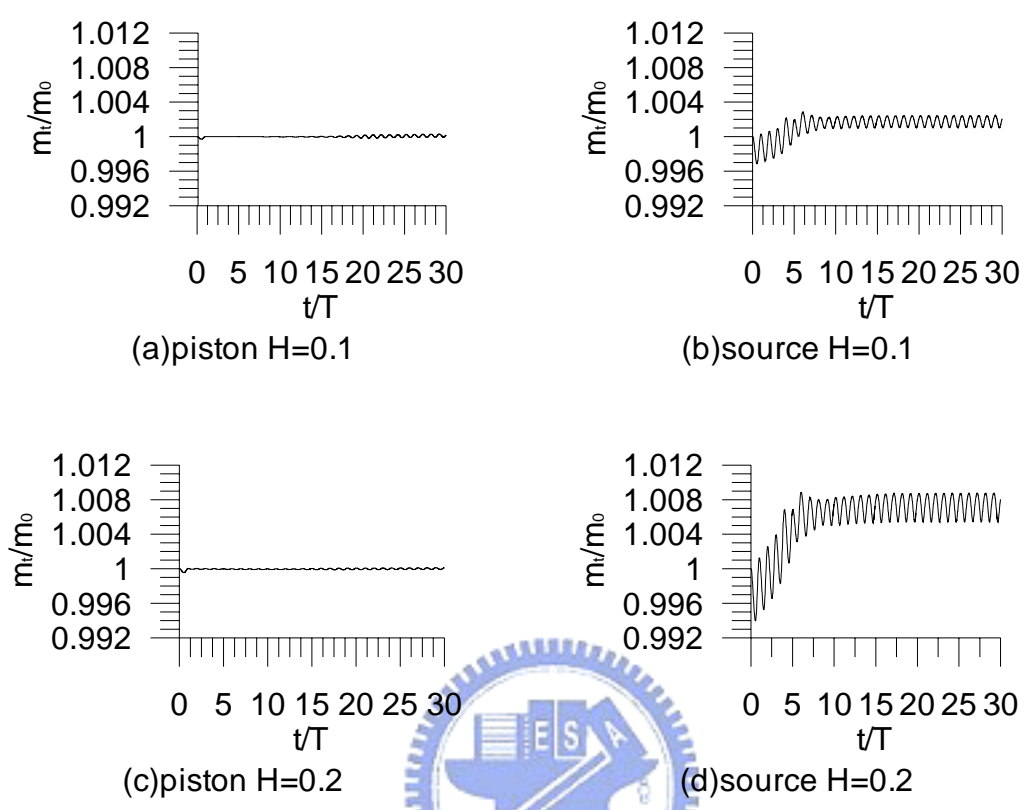


圖 4-3 Stokes wave 水槽質量隨時間變化圖
($h=1\text{m}$ 、 $kh=1$)

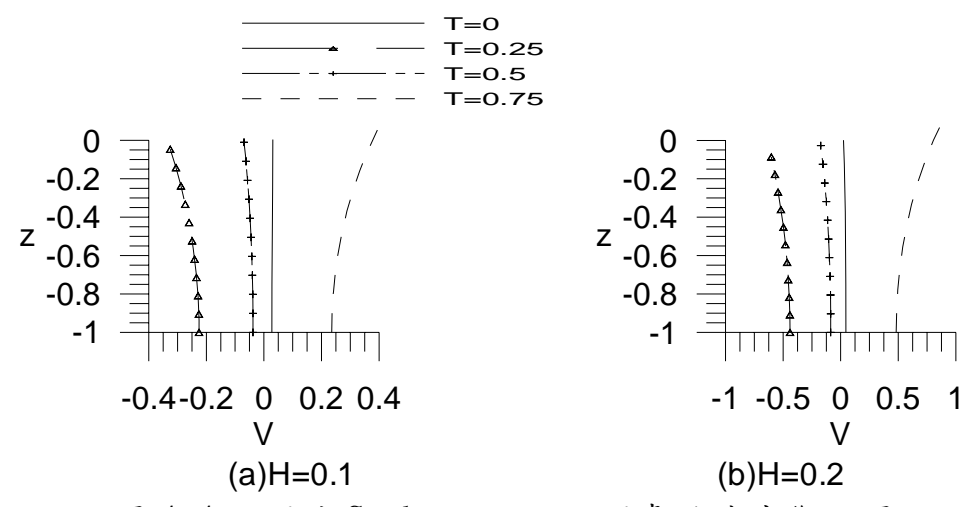


圖 4-4 點源造 Stokes wave 點源處的速度斷面圖
($h=1\text{m}$ 、 $kh=1$)

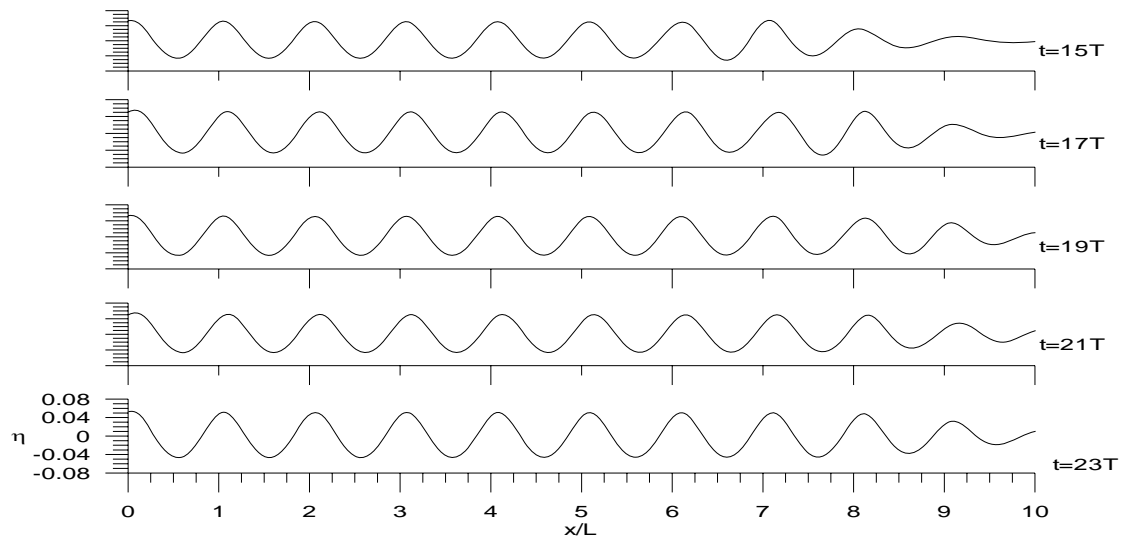


圖 4-5 直推式造 Stokes wave 水位斷面時序圖 15~23 週期
($h=1.0\text{m}$, $kh=1.0$, $H=0.1\text{m}$)

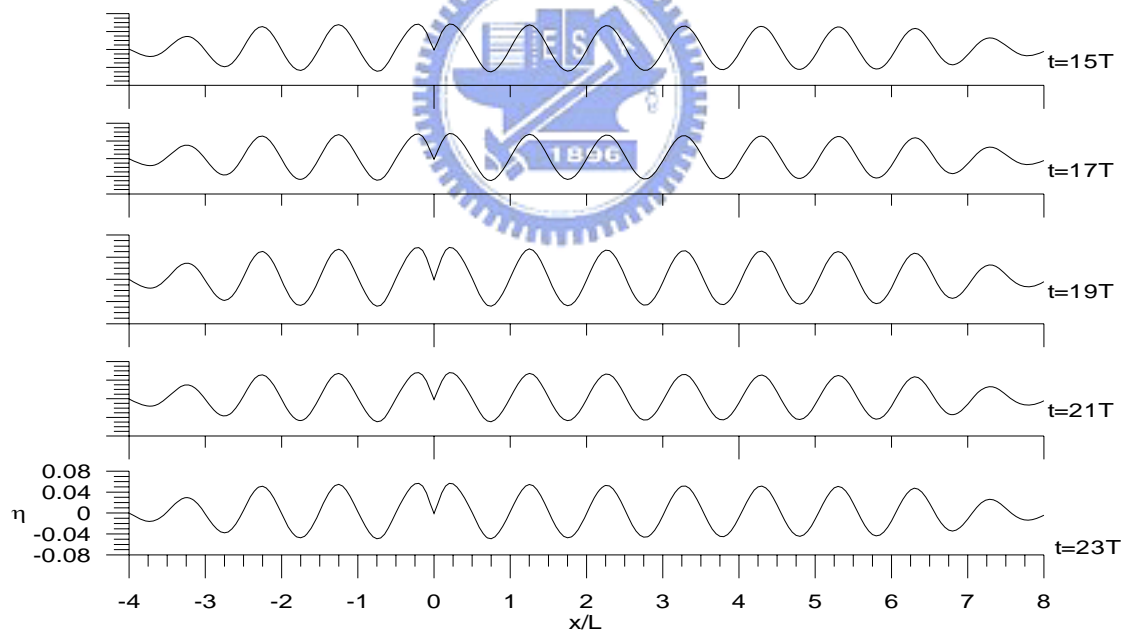


圖 4-6 以點源造 Stokes wave 的水位斷面時序圖 15~23 週期
($h=1.0\text{m}$, $kh=1.0$, $H=0.1\text{m}$)

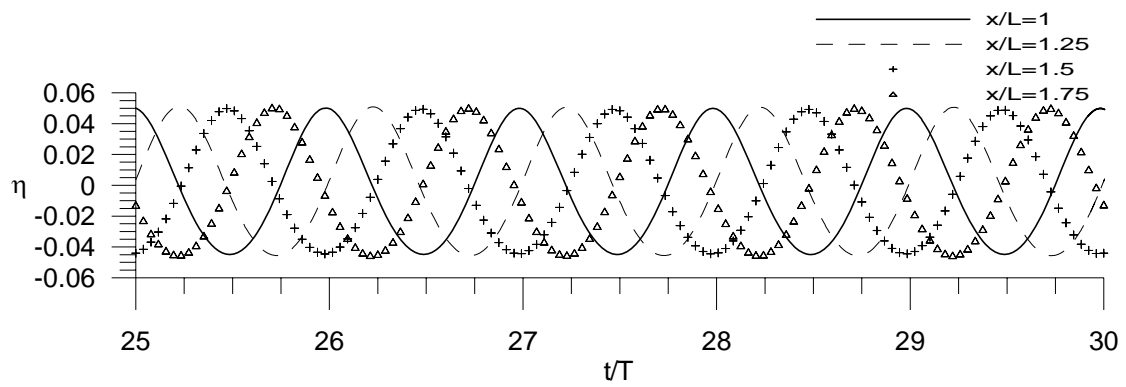


圖 4-7 造波板造 Stokes wave 不同位置水位時序圖

($kh=1$, $H=0.1\text{m}$ 、 $H/L=0.015915$)

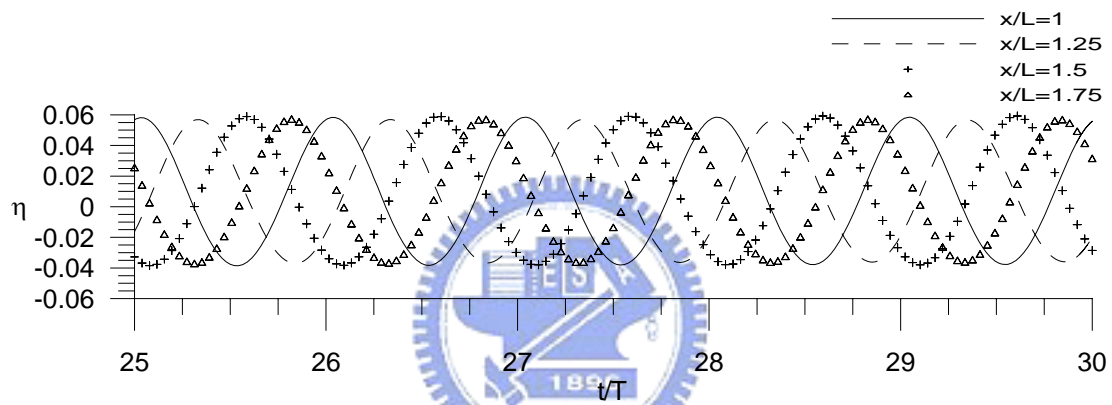
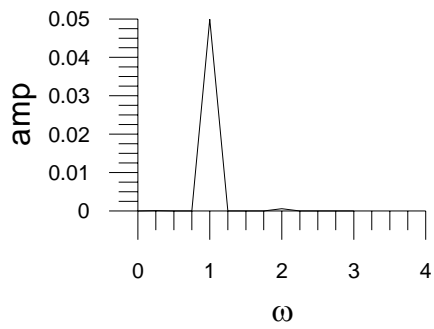
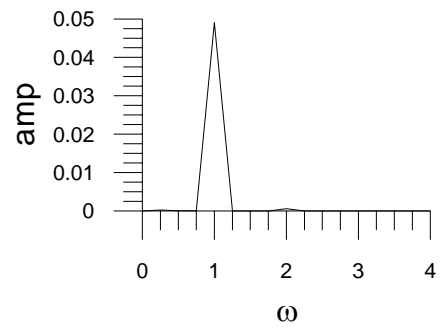


圖 4-8 點源造 Stokes wave 不同位置水位時序圖

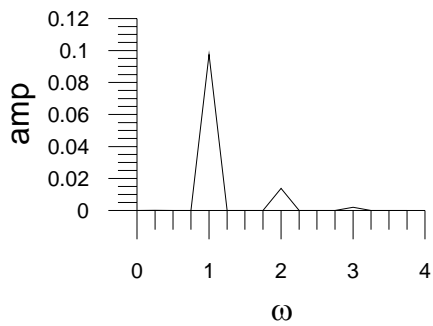
($kh=1$, $H=0.1\text{m}$ 、 $H/L=0.015915$)



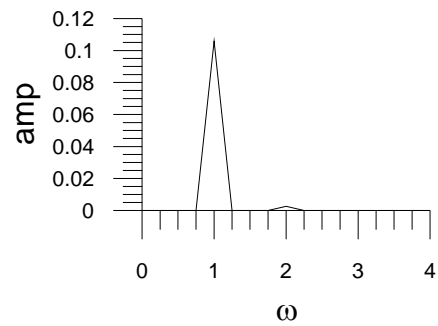
(a)piston $H=0.1$



(b)source $H=0.1$



(c)piston $H=0.2$



(d)source $H=0.2$

圖 4-9 不同造波公式造 Stokes wave 的頻譜圖
($h=1\text{m}$, $kh=1.0$)



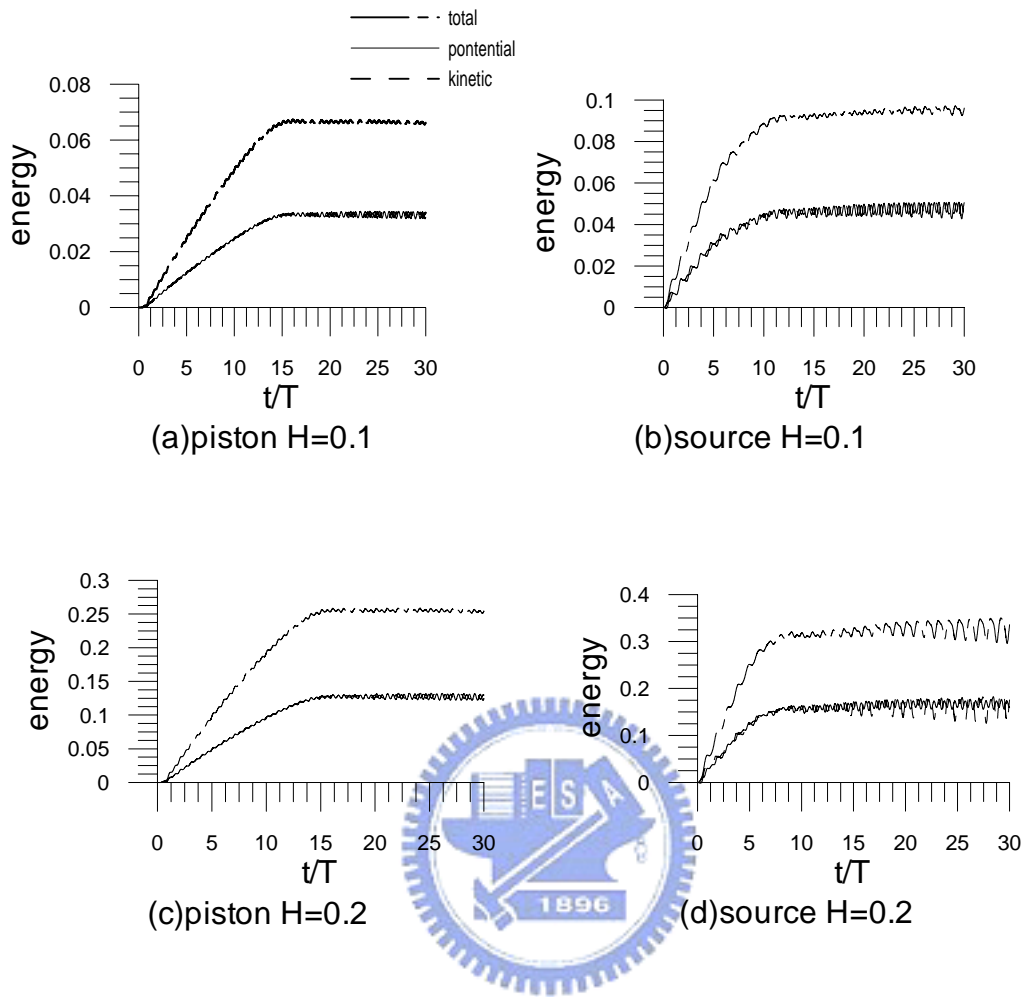


圖 4-10 不同造波方式造 Stokes wave 的能量-時間圖

($h=1\text{m}$ 、 $kh=1$)

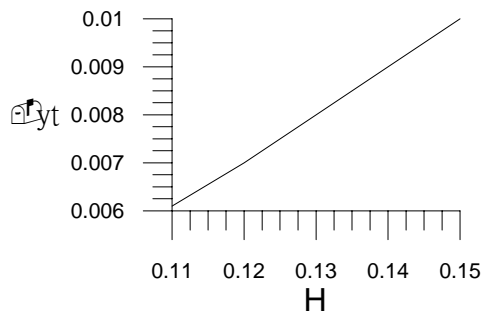


圖 4-11 y_t 的修正參數圖

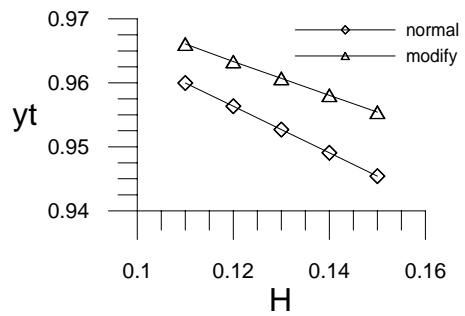
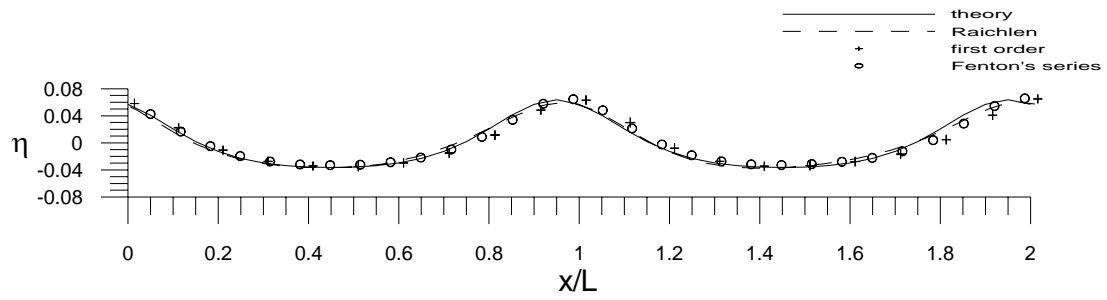
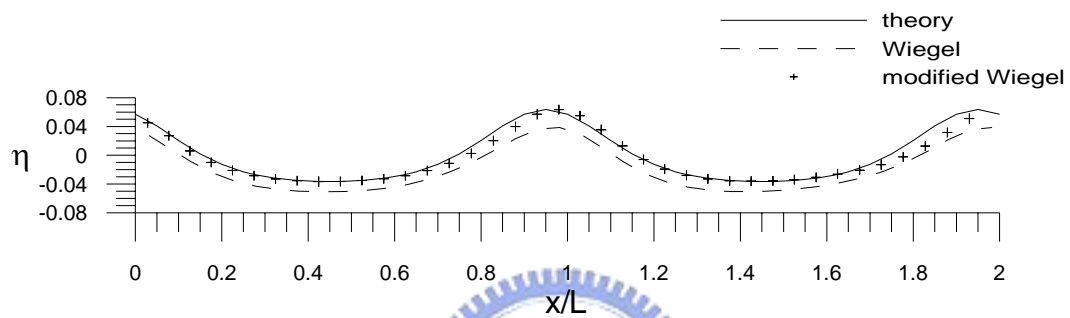


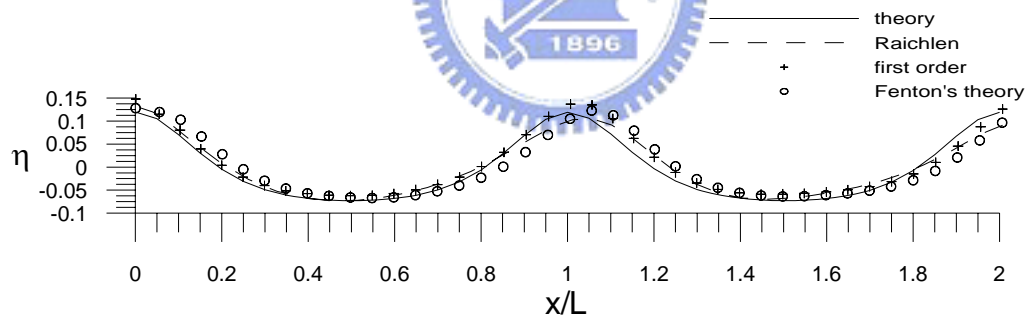
圖 4-12 修正前後的 y_t 比較



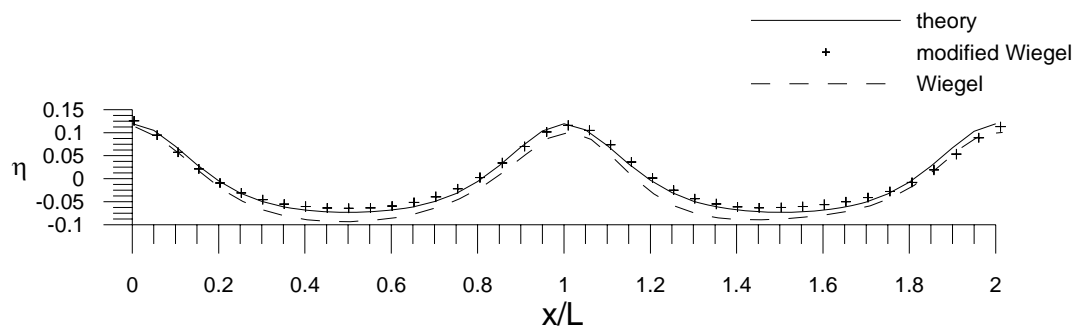
(a) $H=0.1$, Raichlen, 1st order, Fenton



(b) $H=0.1$ Wiegel, modified Wiegel

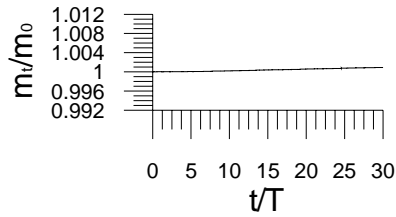


(c) $H=0.2$ Raichlen, 1st order, Fenton

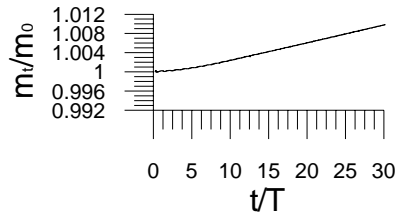


(d) $H=0.2$ Wiegel, modified Wiegel

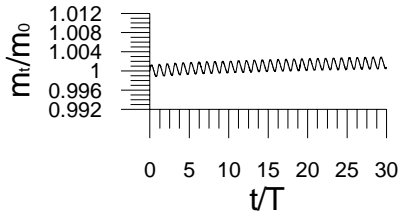
圖 4-13 第 25 週期數值水槽 cn wave 與理論波形比較圖。



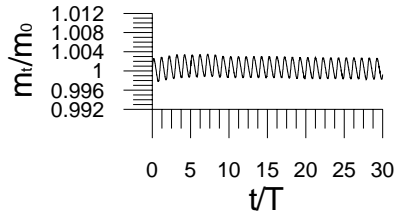
(a)Raichlen H=0.1 piston



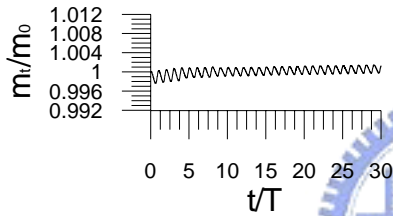
(b)Raichlen H=0.2 piston



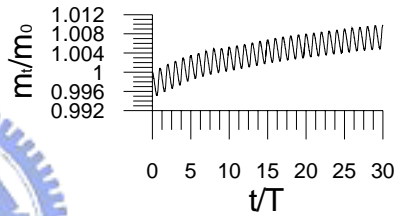
(c)Fenton H=0.1 source



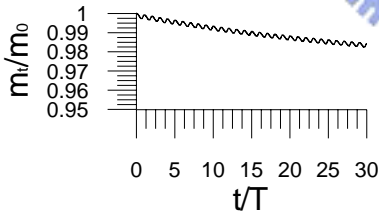
(d)Fenton H=0.2 source



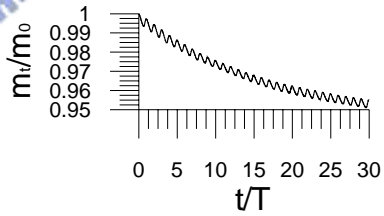
(e)1st order H=0.1 source



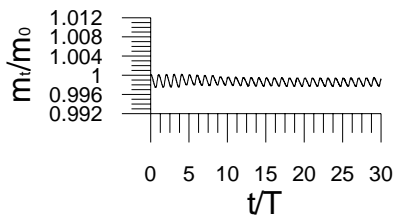
(f)1st order H=0.2 source



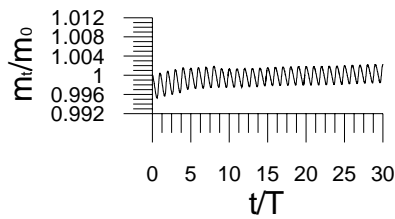
(g)Wiegel H=0.1 source



(h)Wiegel H=0.2 source

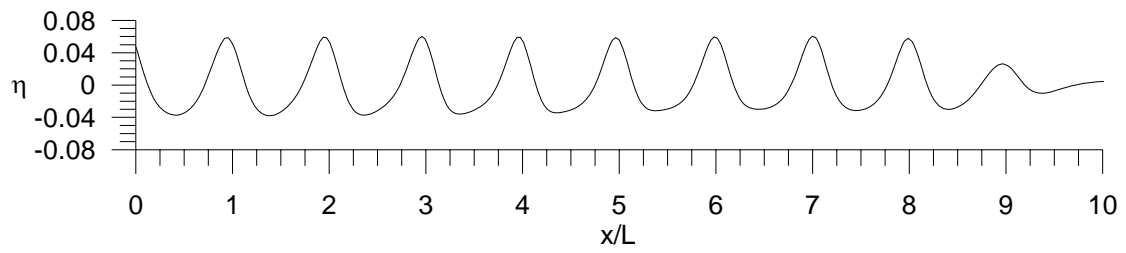


(i)modified Wiegel H=0.1 source

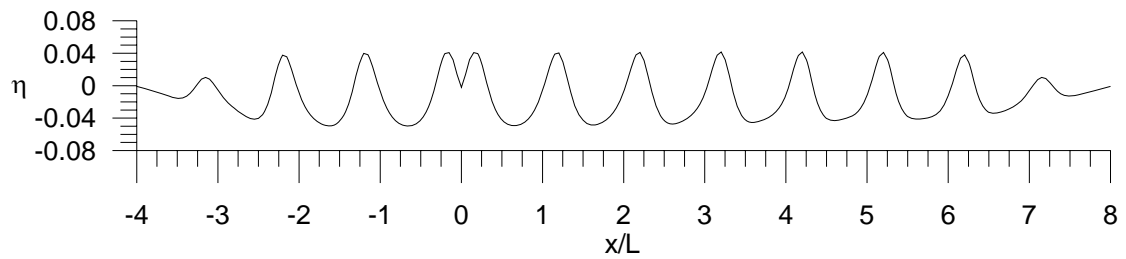


(j)modified Wiegel H=0.2 source

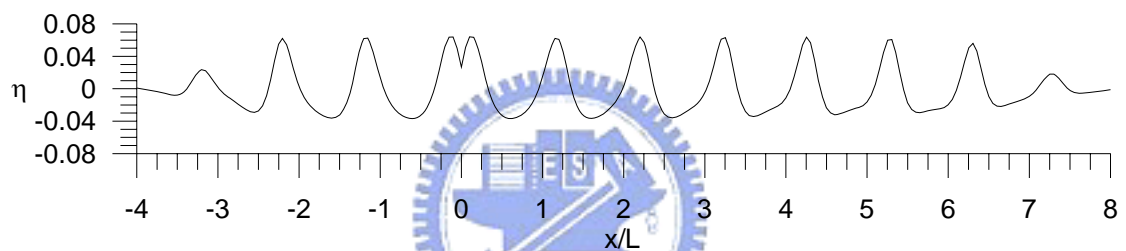
圖 4-14 不同 cn wave 造波公式之質量-時間圖



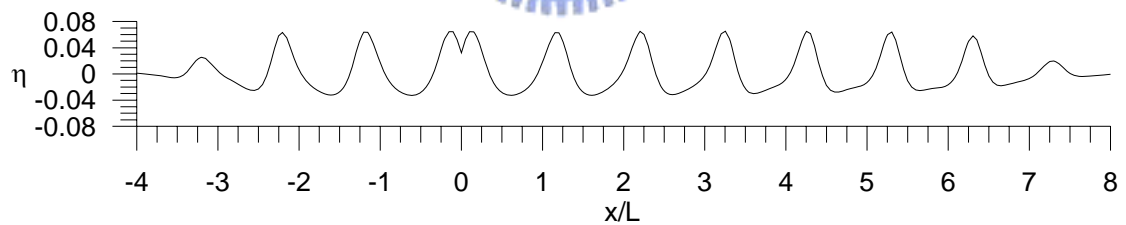
(a)Raichlen



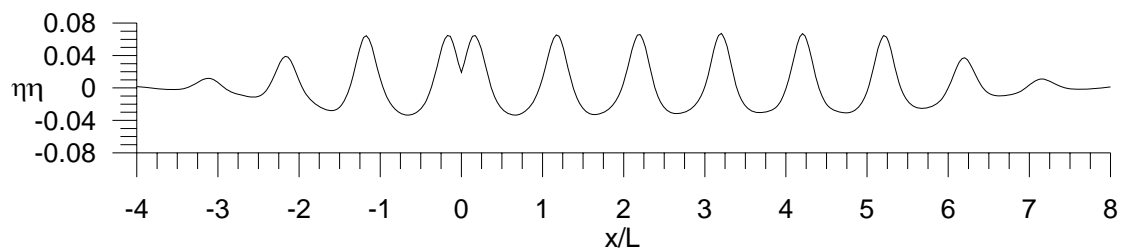
(b)Wiegel



(c)modified Wiegel



(d)1st order



(e)Fenton series

圖 4-15 cn wave 水位資料斷面圖 ($h=1\text{m}$ 、 $K=0.95$ 、 $H=0.1\text{m}$)

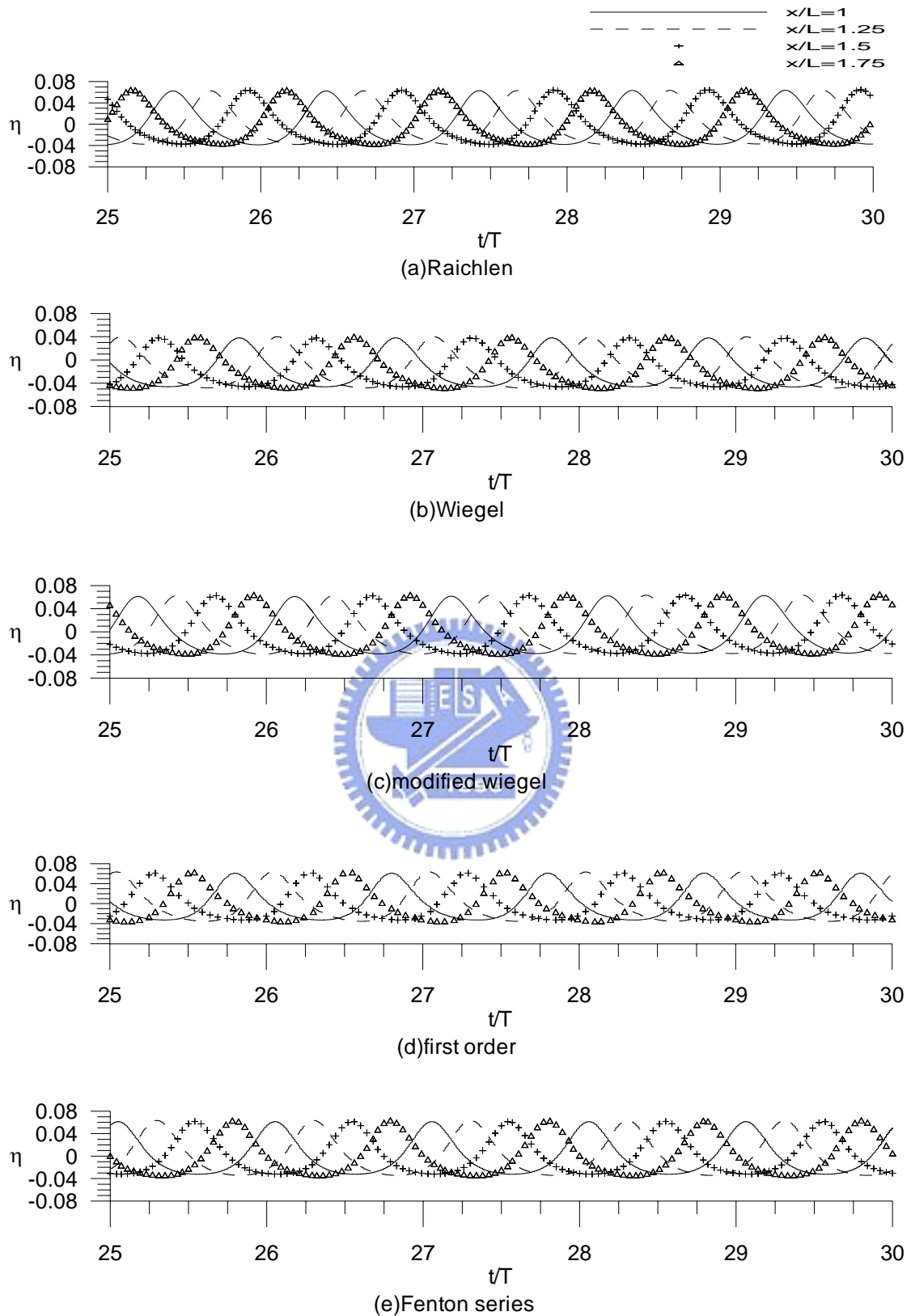


圖 4-16 探針位置距離原點 1~1.75 波長的水位圖

($h=1\text{m}$ 、 $K=0.95$ 、 $H=0.1\text{m}$)

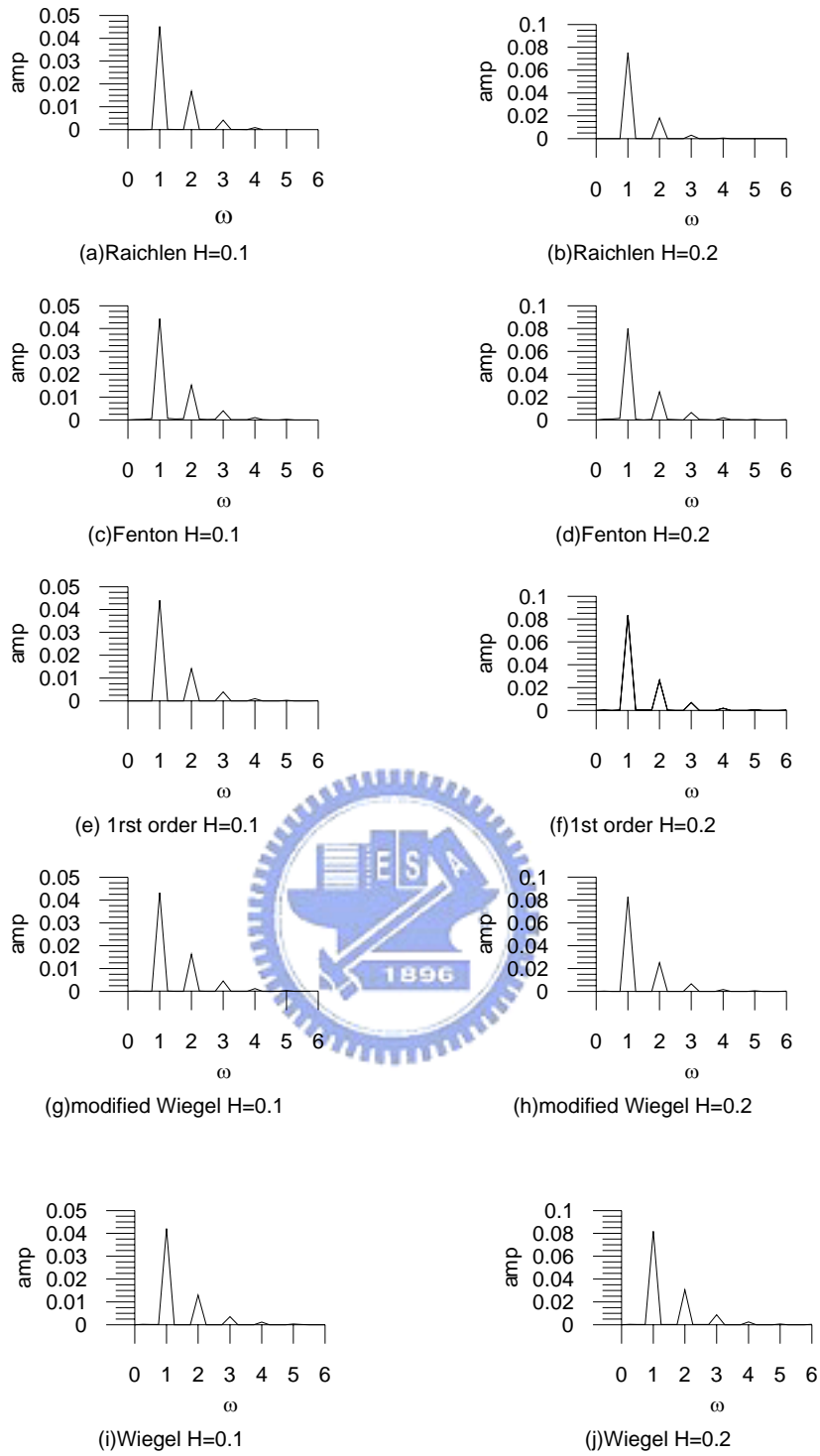


圖 4-17 時間水位資料經由傅利葉轉換所得之頻譜圖($h=1\text{m}$ 、 $K=0.95$)

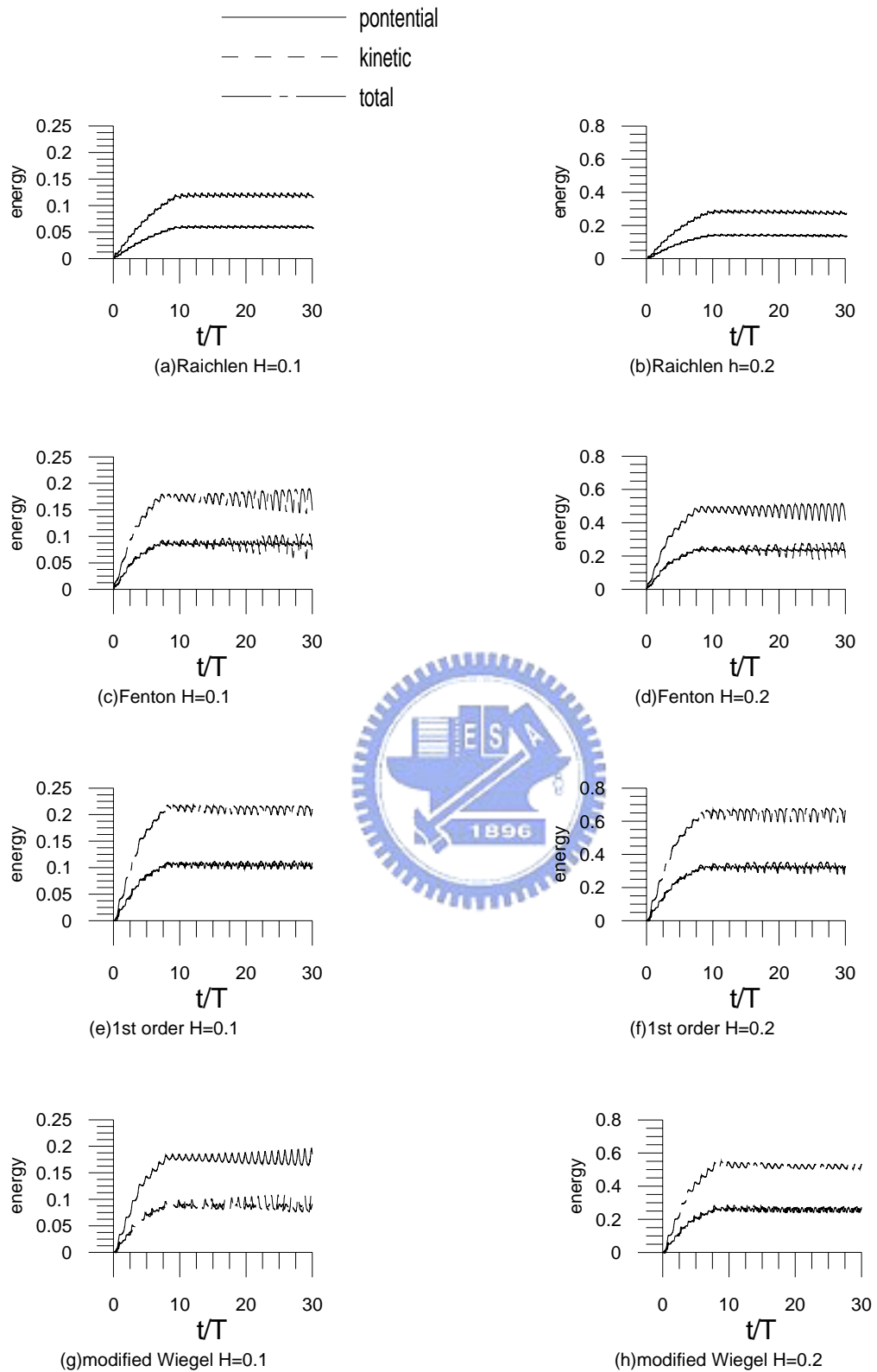
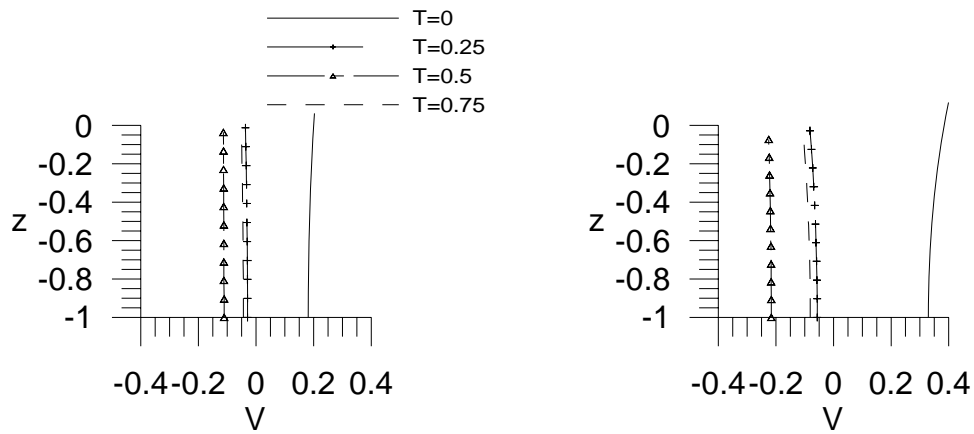
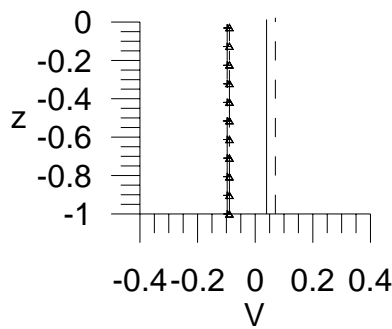


圖 4-18 不同造波公式的能量-時間圖 ($h=1\text{m}$ 、 $K=0.95$)

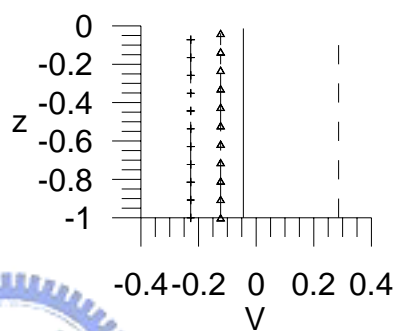


(a) Fenton H=0.1 source

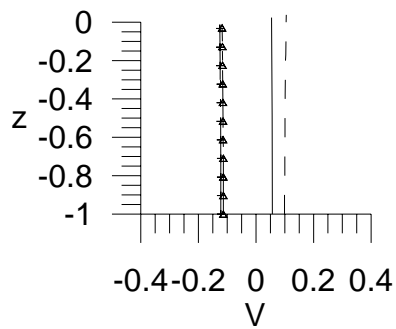
(b) Fenton H=0.2 source



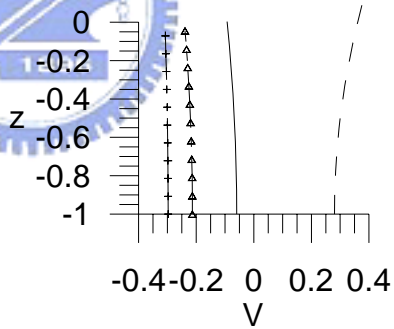
(c) 1st order H=0.1 source



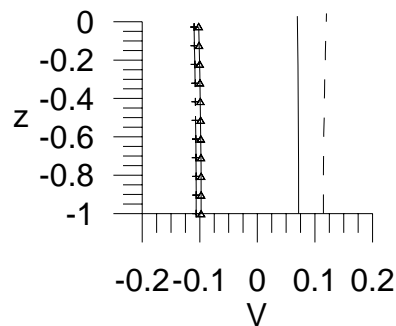
(d) 1st order H=0.2 source



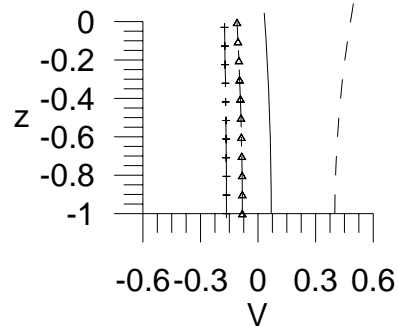
(e) Wiegel H=0.1 source



(f) Wiegel H=0.2 source



(g) modified Wiegel H=0.1



(h) modified Wiegel H=0.2

圖 4-19 以點源造 cn wave 的速度斷面圖

附錄 A 二階自由波之關係式

由於 Stokes 波並不包含自由波，造波板之位移需加上 $\frac{s_f}{2} \sin(2\omega t - \varphi - \pi)$ 項，消除造波板所產生的二階自由波，以確保模擬 Stokes 波之精確度。 s_f 為消除二階自由波所需之衝程， φ 為一階 Stokes 波與二階自由波之相位差，其關係式表示如下：

$$\Phi_2^f = \frac{1}{2} \left[B_p \cosh \beta_p (h+z) e^{i\beta_p x} + \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) (h+z) e^{-\beta_s(j)x} \right] e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-1})$$

$$\eta_2^f = \frac{\Phi_{2t}^f}{g} = -i \frac{\omega}{g} B_p \cosh \beta_p h \cdot e^{i(\beta_p x - 2\omega t)} - \frac{i\omega}{g} \sum_{j=1}^{\infty} B_s(j) \cos \beta_s(j) h \cdot e^{-\beta_s(j)x} e^{-i2\omega t} \quad (\text{A-2})$$

Φ_2^f 為複數，實數部份為 $R_e(\Phi)$ ，虛數部份為 $I_m(\Phi)$ ，一階 Stokes 波與二階自由波之相位差 φ 為：

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{I_m(\Phi)}{R_e(\Phi)} \quad (\text{A-3})$$

消除二階自由波所需造波板之衝程為：

$$s_f = 2 \left| \eta_2^f \right| \frac{\sinh(2\beta_p h) + 2\beta_p h}{2(\cosh 2\beta_p h - 1)} \quad (\text{A-4})$$

可由以下分散關係式計算得 β_p 與 $\beta_s(n)$ ：

$$(2\omega)^2 = g\beta_p \tanh \beta_p h \quad (\text{A-5})$$

$$(2\omega)^2 = -g\beta_s(n) \tan \beta_s(n) h \quad (\text{A-6})$$

以下為 Φ_2^f 及 η_2^f 式中各項係數：

$$B_p = \frac{i}{\beta_p} \frac{s_0 R}{2} \frac{Q_1}{Q_l} - \frac{1}{\beta_p} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{Q_3(n)}{Q_l} - \frac{i}{\beta_p} 4k_p B_1 \frac{Q_5}{Q_l}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{Q_6(n, m)}{Q_I} \\
& - \frac{1}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_7(n)}{Q_I} \\
& - \frac{i}{\beta_p} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{Q_8(n)}{Q_I} \\
B_s(j) = & \frac{s_0 R}{2} \frac{1}{\beta_s(j)} \frac{W_1(j) + W_2(j)}{W_I(j)} + \frac{i}{\beta_s(j)} \frac{s_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{W_3(j, n) + W_4(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{4k_p B_1}{\beta_s(j)} \frac{W_5(j)}{W_I(j)} - \frac{2i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_2(n, m) [k_s(n) + k_s(m)] \frac{W_6(j, n, m)}{W_I(j)} \\
& + \frac{i}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_7(j, n)}{W_I(j)} \\
& - \frac{1}{\beta_s(j)} \sum_{n=1}^{\infty} [k_p + ik_s(n)] \omega RT_n \frac{P_2(n)}{P_1(n)} \frac{W_8(j, n)}{W_I(j)}
\end{aligned}$$

$$Q_I = \int_{-h}^0 \cosh^2 \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_1 = k_p h \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_3(n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_5 = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p (h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

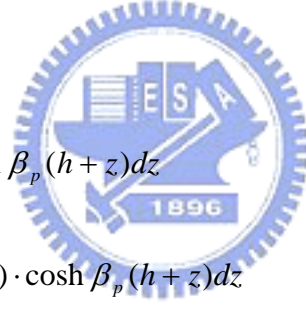
$$Q_6(n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_7(n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$Q_8(n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p (h+z) \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cosh \beta_p (h+z) dz$$

$$W_I(j) = \int_{-h}^0 \cos^2 \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_1(j) = k_p \int_{-h}^0 \cosh k_p (h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$



$$W_3(j, n) = \int_{-h}^0 k_s(n) \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_5(j) = \int_{-h}^0 \cosh 2k_p(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_6(j, n, m) = \int_{-h}^0 \cos[k_s(n) + k_s(m)](h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_7(j, n) = \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) \cdot \cos k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$W_8(j, n) = \int_{-h}^0 \sinh k_p(h+z) \cdot \sin k_s(n)(h+z) \cdot \cos \beta_s(j)(h+z) dz$$

$$P_1(n) = g[k_p + ik_s(n)] [\sinh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \cosh k_p h \cdot \sin k_s(n)h]$$

$$- 4\omega^2 [\cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h + i \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h]$$

$$P_2(n) = \frac{k_s(n)}{k_p} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h - \frac{k_p}{k_s(n)} \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h$$

$$- 6 \sinh k_p h \cdot \sin k_s(n)h - 4i \cosh k_p h \cdot \cos k_s(n)h$$

$$T = \frac{\frac{\omega s_0}{2h} \int_{-h}^0 (h+z) \cos k_s(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_s(h+z) dz}$$

$$R = \frac{\frac{\omega s_0}{2} \int_{-h}^0 \cosh k_p(h+z) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_p(h+z) dz}$$

$$B_1 = \frac{3R^2}{8\omega \sinh^2 k_p h}$$

$$B_2(n, m) =$$

$$\frac{\omega T_n T_m \left[\frac{k_s(m)}{k_s(n)} \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 2 \cos k_s(n)h \cdot \cos k_s(m)h + 3 \sin k_s(n)h \cdot \sin k_s(m)h \right]}{2 \{ g [k_s(n) + k_s(m)] \sin [k_s(n) + k_s(m)] h + 4 \omega^2 \cos [k_s(n) + k_s(m)] h \}}$$



附錄 B 曲線近似法(Cubic Spline)

在本文中，自由水面的波形角度及其他參數在切線方向的微分，皆是藉由 cubic spline 的方法來計算求得。Cubic spline 主要是以三次多項式的方式來將一系列之數據點連接起來，透過其計算將可以得到數據點的切線斜率及其曲率。以下簡單的說明這個模式方法：

若一曲線經過一系列之數據點 (s_i, F_i) ，則可將 F 表示為

$$F = F(s) \quad (\text{B-1})$$

s 為曲線參數，此參數必須選擇一嚴格參數，即：

$$s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$$

在本文對於自由水面移動的問題中，選擇曲線的弧長來當作曲線參數，其值為：

$$s_0 = 0; \quad s_i = s_{i-1} + d_{i-1} \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{B-2})$$

$$d_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta z_i)^2} \quad (i=0, \dots, n-1) \quad (\text{B-3})$$

其中

$$\delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad \delta z_i = z_{i+1} - z_i$$

$(x_i, z_i) (i=0, 1, \dots, n)$ 為自由水面邊界點的座標值。

假設總共有 $n+1$ 個數據點，則會有 n 條小曲線存在。第 i 條小曲線，其會在 (x_i, z_i) 與 (x_{i+1}, z_{i+1}) 之間，可令其曲線方程式為

$$F(s) = a_i(s - s_i)^3 + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i) + d_i \quad (\text{B-4})$$

因為曲線必須經過數據點，所以

$$F_i = d_i \quad (\text{B-5})$$

$$F_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \quad (\text{B-6})$$

其中 $F_i = F(s_i)$, $h_i = (s_{i+1} - s_i)$ 為第 i 段曲線之弧長。而對 s 的一次及二次微分可表示成

$$F'(s) = 3a_i(s - s_i)^2 + 2b_i(s - s_i) + c_i \quad (\text{B-7})$$

$$F''(s) = 6a_i(s - s_i) + 2b_i \quad (\text{B-8})$$

現在再設定一個新參數 S_i ，令 $S_i = F''$ ，故在點 (x_i, z_i) 及點 (x_{i+1}, z_{i+1}) 之曲率為

$$S_i = 2b_{ii} \quad \text{及} \quad S_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i \quad (\text{B-9})$$

由上式可得到

$$b_i = \frac{S_i}{2} \quad \text{及} \quad a_i = \frac{(S_{i+1} - S_i)}{6h_i} \quad (\text{B-10})$$

在此已可得到 a_i 、 b_i 、 d_i ，將已求得 a_i 、 b_i 、 d_i 代入(B-4)式，可以解得

$$c_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \quad (\text{B-11})$$

現在已經可以把 a_i 、 b_i 、 c_i 、 d_i 的值用 S_i 、 h_i 、 F_i 來表示，其中只剩下 S_i 的值是未知數。解 S_i 的值需配合"相鄰曲線間的斜率必須連續"這個條件，所以 $F'_i(s_i) = F'_{i-1}(s_i)$ 。算式如下

$$F'_i(s_i) = 3a_i(s_i - s_i) + 2b_i(s_i - s_i) + c_i = c_i$$

$$\begin{aligned} F'_{i-1}(s_i) &= 3a_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + 2b_{i-1}(s_i - s_{i-1}) + c_{i-1} \\ &= 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} \end{aligned}$$

把 a_i, b_i, c_i, d_i 的值用前面解出來的結果代入，會得到下面的式子：

$$F'_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h_i} \\
&\quad - \frac{2h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6}
\end{aligned} \tag{B-12}$$

再將上式簡化成可得

$$\begin{aligned}
&h_{i-1}S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)S_i + h_iS_{i+1} \\
&= 6\left(\frac{F_{i+1} - F_i}{h_i} - \frac{F_i - F_{i-1}}{h_{i-1}}\right) = 6(f[s_i, s_{i+1}] - f[s_{i-1}, s_i])
\end{aligned} \tag{B-13}$$

其中 $f[s_i, s_{i+1}]$ 指 $f(s_i) \sim f(s_{i+1})$ 間的平均值， $f[s_{i-1}, s_i]$ 指 $f(s_{i-1}) \sim f(s_i)$ 間的平均值。

(B-13)在 $n+1$ 的點中只適合 $i=1$ 到 $i=n-1$ 的點來用，所以在 $n+1$ 個未知數 S_i 中，只可得到 $n-1$ 個方程式，因此還需要兩個方程式。若可利用任何的內插方法來得到在始末點的切線斜率，即 $F'(s_0) = A$ 和 $F'(s_n) = B$ ，則可得到另外兩個方程式，在本文中使用 Lagrangian polynomial 來估算起末端斜率，求得之後可由(B-11)得到

在起始端滿足

$$2h_0S_0 + h_1S_1 = 6(f[s_0, s_1] - A) \tag{B-14}$$

在最末端滿足

$$h_{n-1}S_{n-1} + 2h_nS_n = 6(B - f[s_{n-1}, s_n]) \tag{B-15}$$

最後再將對 S_0, S_1, \dots, S_n 之所有方程式(B-13)、(B-14)、(B-15)寫成矩陣程式，可得

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_1 & & & & & & & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & & & & & & \\ & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & h_{n-2} & 2h_{n-1} & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} f[s_0, s_1] - A \\ f[s_1, s_2] - f[s_0, s_1] \\ f[s_2, s_3] - f[s_1, s_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ B - f[s_{n-1}, s_n] \end{bmatrix} \tag{B-16}$$

在解到所有的 S_i 之後，便可得到任一段小曲線的 a_i ， b_i ， c_i 及 d_i 。從這裡亦可得到水面點之任一物理量的一次微分 F_i' 或二次微分 F_i'' ，所以 $\frac{\partial z}{\partial s}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial s}$ 可以被計算得到，自由水面波形角度即被計算出來，即

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial x}{\partial s}} \right) \tag{B-17}$$

而若將 F 改以 β 代入，即可得到 $\frac{\partial \beta}{\partial s}$ ，所以只要改變 F 的定義，同樣就可以計算出其他的值，如 $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ ， $\frac{\partial \Phi_n}{\partial s}$ ， $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$ 及 $\frac{\partial \Phi_i}{\partial s}$ 。

附錄 C 轉角處的合適條件

在某些例子裡，轉角處(coner points)的 Φ 及 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (或是 $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial n}$)之間的幾何關係(合適條件)是可以知道的。且它們必須隨著時間而自動滿足數值解，否則隨著計算時間的增加，可能會因為誤差的累積造成對數值結果的不確定性。因此必須藉由在每個時刻裡，確定其確切的關係來減少整個誤差。在以下的敘述中，雖然是提出來用在 $(\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \frac{\partial\Phi}{\partial n})$ ，然而其亦可適用在 $(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial s}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial n})$ 。

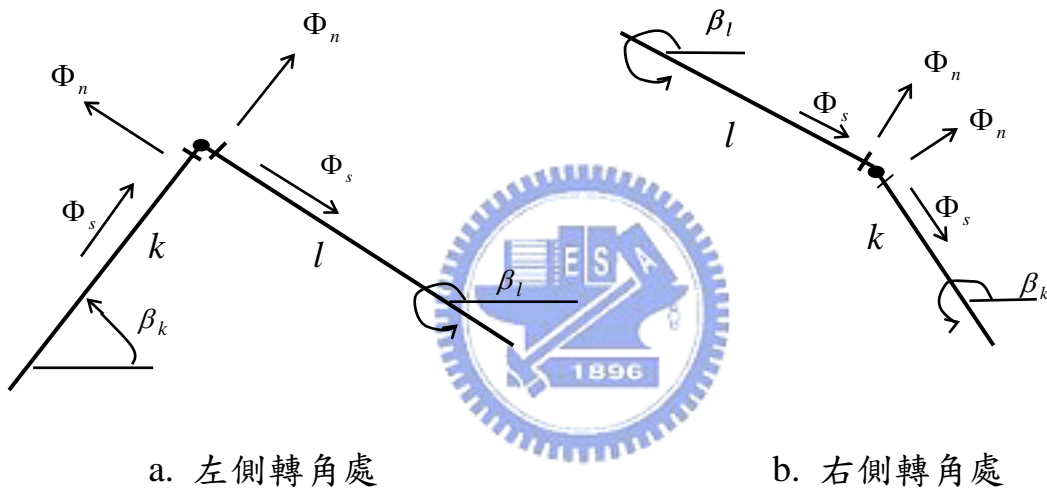


圖 C-1 轉角處合適條件

當部分邊界的速度勢為已知時，則 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 亦可被計算求得，如圖 C-1 假如自由水面與固體邊界交接點在第 k 、 l 段元素之間，當速度勢及 $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ 求得之後，因為在轉角點兩側的速度向量會相等，所以

$$u = (\Phi_s)_l \cos \beta_l - (\Phi_n)_l \sin \beta_l = (\Phi_s)_k \cos \beta_k - (\Phi_n)_k \sin \beta_k \quad (C-1)$$

$$w = (\Phi_s)_l \sin \beta_l + (\Phi_n)_l \cos \beta_l = (\Phi_s)_k \sin \beta_k + (\Phi_n)_k \cos \beta_k \quad (C-2)$$

或寫成

$$(\Phi_s)_l \cos \beta_l - (\Phi_s)_k \cos \beta_k = (\Phi_n)_l \sin \beta_l - (\Phi_n)_k \sin \beta_k \quad (a)$$

$$(\Phi_s)_l \sin \beta_l - (\Phi_s)_k \sin \beta_k = (\Phi_n)_k \cos \beta_k - (\Phi_n)_l \cos \beta_l \quad (b)$$

將 (b) $\times \cos \beta_k - (a) \times \sin \beta_k$ 可得

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \csc(\beta_l - \beta_k) - \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\beta_l - \beta_k) \quad (C-3)$$

在本文中，在造波板與自由水面的交接點， β_k 不會改變，且其值 $\beta_k = \frac{\pi}{2}$ ，因此可得

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \tan \beta_l - \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \csc \beta_l \quad (C-4)$$

而在左右兩端水槽末端處，可得知 $\beta_k = \theta$ 及 $\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} = 0$ ，所以

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\beta_k - \beta_l) = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot(\theta - \beta_l) \quad (C-5)$$

在本文模式中右端 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ ，左端 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ，因此

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n} \cot\left(\frac{3}{2}\pi - \beta_l\right) \quad (C-6)$$

Grill et al. (1990) 將應用此條件在數值計算中，並指出其可以有效地降低每個時刻由於數值誤差所造成的不確定性。

附錄 D 平滑技巧(Smoothing Technique)

幾乎所有的計算中，波形經過一長時間的模擬後，會出現”鋸齒狀”，水面點可能會在平滑曲線的上方或是下方，造成此種不穩定狀態的原因是未知的。經過測試後，顯示出一旦模擬開始，形成不穩定狀態的機率並不會隨著模擬時間而增加，所以其原因不是單純的是由誤差累積所引起的。在實際的狀態中，水的黏滯性可以減低此不穩定的狀態，然而本文中已忽略了黏滯性，故需作適當的處理。

而為了延續長時間穩定的模擬環境，本文將以下述的平滑技巧有效地來除去”鋸齒狀”帶來的不穩定性。即採用 Longuet-Higgins 和 Cokelet(1976)所提出的 5 點平滑公式，其為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{16}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-1})$$

經過測試後，本文在每經過 32 個時間間隔後，利用此公式來修正下一個時刻的 ξ 、 ζ 及 Φ ，然而其無法使用在自由水面與固體邊界交接處的上一點或下一點，因此本文使用 Sugino 及 Tosaka(1990)所提出的模擬公式，在上一點為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1}) \quad (\text{D-2})$$

在下一點為

$$\bar{f}_j = \frac{1}{17}(4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2}) \quad (\text{D-3})$$

套用上述的這些公式，就可以去除鋸齒狀而達到平滑，進而增加模擬環境的穩定性。

附錄 E 模式中質量的定義與推算

由於考慮水槽內的流體為均質不可壓縮流，其流體的密度 ρ 為定值。水槽內的總體積為 V ，總質量即為 $M = \rho V$ 。

當水槽在初始時，整個水槽處於靜止的狀況，其總質量 $M = hw$ ， h 為水深， w 為水槽總長度，如圖 E-1 所示。

當水槽開始造波時，其水槽內的體積 V^* 推算以水面上的 $n+1$ 個節點將水槽分割成 n 個梯形面積 $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_n$ ，水槽之總質量 $M^* = \rho V^* = \rho(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n)$ ，如圖 E-2 所示。

其中， $A_1 = [(y_1 + h) + (y_2 + h)](x_2 - x_1) / 2$

$$A_2 = [(y_2 + h) + (y_3 + h)](x_3 - x_2) / 2$$

⋮

$$A_n = [(y_{n+1} + h) + (y_n + h)](x_{n+1} - x_n) / 2$$

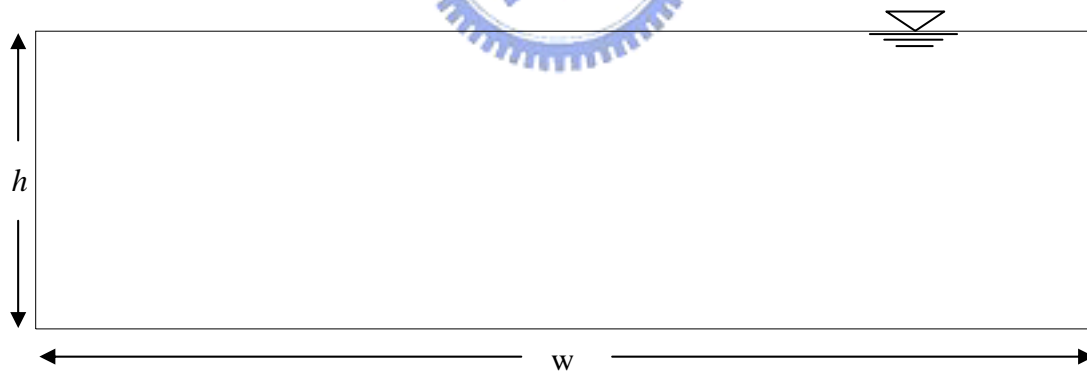


圖 E-1 初始水槽之剖面圖(靜止狀態)

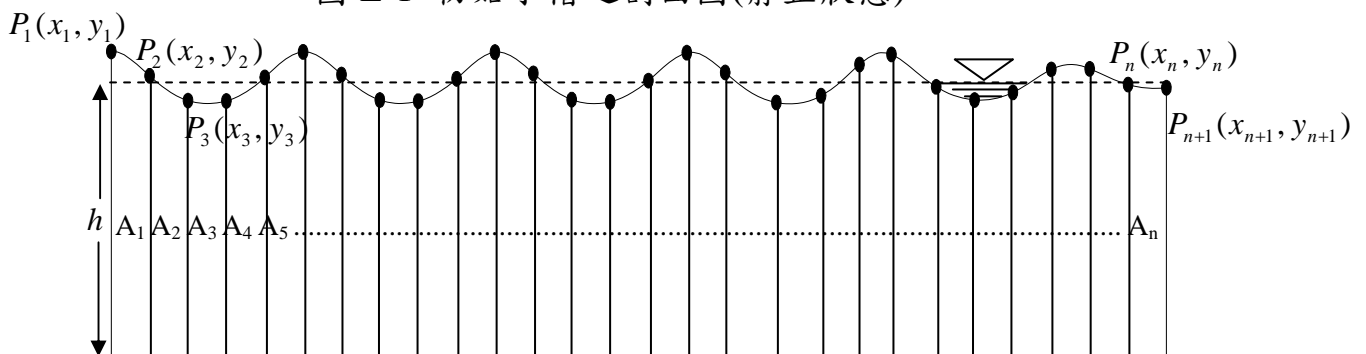


圖 E-2 達穩定水槽之剖面圖

附錄 F 模式中能量的定義與推算

水槽內的總能量(Total Energy)即總動能(Total Kinetic Energy)與總位能(Total Potential Energy)的和，其總動能及總位能的推算分別如下：

總動能為 $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$ ，即計算水槽內所有水粒子的動能。總動能可以簡化成 $\frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$ (即僅由邊界上物理量來計算)，其推導如下：

$$\text{由 Green's 定理 } \iint_{\Omega} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy)$$

$$\text{令 } F_1 = -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad ; \quad F_2 = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (\text{其中 } \nabla^2 \Phi = 0) \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] dx dy$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \oint_{\Gamma} (F_1 dx + F_2 dy) &= \oint_{\Gamma} \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left(-\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\Phi \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) \right] ds \\ &= \oint_{\Gamma} \left[\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} i + \frac{\partial \Phi}{\partial y} j \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds} i - \frac{dx}{ds} j \right) \right] ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

因此，總動能 = $\frac{\rho}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \frac{\rho}{2} \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$

總位能 = $\frac{1}{2} \rho g \int_{\text{free surface}} \eta^2(x,t) dx$ ，即以平均水位為基準，波動時波浪所增加的總位能，其中 $\eta(x,t)$ 表波動時之水位。



附錄 G Fenton 級數解的係數項

$$\alpha = \left(\frac{3\varepsilon}{4m}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^4 \frac{\varepsilon^i}{m} \sum_{j=0}^i m^j \alpha_{ij}$$

$$\eta = y_t \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^i \sum_{j=1}^i m^j \sum_{k=1}^j cn^2 (\alpha X_* | m) \eta_{ijk}\right)$$

$$u = \sqrt{gy_t} \left(-1 - \sum_{i=1}^5 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^i \sum_{j=0}^i m^j \sum_{k=0}^i cn^{2k} (\alpha X_* | m) \sum_{l=0}^{i-1} \left(\frac{z+h}{\eta}\right)^{2l} \phi_{ijkl}\right) + C$$

α_{ij}

	j=0	1	2	3	4
i=1	0.25	-0.875			
2	0.03125	-0.34375	0.86719		
3	-0.37743	0.51146	0.13743	-0.833	
4	0.20322	0.44278	-1.38945	0.54282	0.76773

η_{ijk}

i	j	k=1	2	3	4	5
1	0					
	1	1				
2	0					
	1					
	2					
3	0	-0.75	0.75			
	1					
	2	-0.7625	0.7625			
	3	1.3875	-2.65	1.2625		
4	0					
	1					
	2	-0.80533	0.80533			
	3	2.48904	-4.33146	1.84242		
	4	-3.05188	7.40646	-6.52546	2.17088	
5	0					
	1					
	2	0.43643	-0.43643			
	3	1.9228	-4.66167	2.73888		
	4	-7.04588	17.45561	-15.317	4.90723	
	5	6.54722	-19.8089	25.34187	-16.3271	4.24687

$$\phi_{ijkl}$$

i	l	j	k=0	1	2	3	4	5
1	0	0	-0.5					
		1	1	-1				
2	0	0	0.225					
		1	-0.6	1				
		2	0.225	-1.25	1			
	1	0						
		1	0.75	-1.5				
		2	-0.75	3	-2.25			
3	0	0	-0.07857					
		1	0.14911	-0.4				
		2	0.16161	1.35	-1.7			
		3	-0.17857	-0.475	1.9	-1.2		
	1	0						
		1	-0.375	0.75				
		2		-5.25	7.125			
		3	0.375	3	-10.875	7.5		
	2	0						
		1	0.1875	-0.375				
		2	-0.5625	3.1875	-2.8125			
		3	0.375	-3.1875	5.625	-2.8125		
4	0	0	0.39788					
		1	-0.74576	0.09643				
		2	0.73477	-0.46431	0.81967			
		3	-0.67908	0.55694	-3.04667	2.90133		
		4	0.23701	0.17018	1.03417	-3.10267	1.576	
	1	0						
		1	0.01875	-0.0375				
		2	-0.09375	5.625	-7.25625			
		3	0.66562	-7.55625	29.025	-25.2		
		4	-0.59063	3.0375	-17.07188	33.525	-18.9	
	2	0						
		1						
		2	0.14063	-4.78125	6			
		3	0.14063	9.70312	-33.42187	24.375		
		4	-0.28125	-4.07812	27.09375	-42.42187	19.6875	

i	l	j	k=0	1	2	3	4	5
	3	0						
		1	0.01875	-0.0375				
		2	-0.17813	1.2375	-1.18125			
		3	0.31875	-3.4875	7.0875	-3.9375		
		4	-0.15938	2.325	-7.0875	7.875	-2.95313	
5	0	0	-0.82992					
		1	1.76991	-0.78281				
		2	-0.99629	0.89794	0.49893			
		3	-0.41272	-0.66324	1.2074	-2.26014		
		4	0.83138	0.70429	-2.71917	7.12267	-4.96993	
		5	-0.3425	-0.26144	0.43733	-2.69367	5.21186	
	1	0						
		1	-0.5705	1.141				
		2	1.44569	-4.45837	2.2795			
		3	-1.29006	5.8665	-31.13156	31.778		
		4	-0.38012	-2.12075	42.62962	-110.618	74.07	
		5	0.795	-2.23875	-11.405	61.73675	-91.44	
	2	0						
		1	-0.01875	0.0375				
		2	-0.45	3.84375	-3.91875			
		3	0.96797	-16.09219	63.225	-53.23125		
		4	-1.16016	16.30547	-110.93203	225.6375	-131.90625	
		5	0.66094	-5.39297	47.56406	-162.53203	204.75	
	3	0						
		1	0.00937	-0.01875				
		2	0.11719	-1.59375	1.80938			
		3	-0.25313	9.84375	-31.55625	22.96875		
		4	0.05156	-13.2375	73.18125	-115.5	55.61719	
		5	0.075	4.875	-41.7	103.6875	-102.375	35.4375
	4	0						
		1	0.001	-0.00201				
		2	-0.03415	0.26016	-0.25614			
		3	0.12656	-1.64833	3.70647	-2.21484		
		4	-0.15569	2.77634	-9.58259	11.70703	-4.74609	
		5	0.06228	-1.38817	6.38839	-11.70703	9.49219	-2.84766