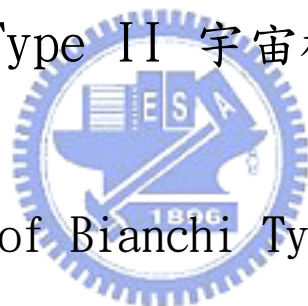


國立交通大學

物理學研究所

碩士論文

Bianchi Type II 宇宙模型之研究



The study of Bianchi Type II model

研究生：林君睿 (Jiun-Rei Lin)

指導教授：高文芳 教授 (W. F. Kao)

中華民國九十六年七月

摘要

這篇論文主要研究, 在 Einstein-Hilbert 以及 Induce gravity 模型, Bianchi 第二型度規下場方程式以及解的行爲, 我們將用變分方式得到場方程式, 用愛因斯坦方程式來檢驗我們變分的結果是否正確, 在此過程中, 我們主要討論 Bianchi type II, 並且詳盡地推導每一個步驟, 在試著將情況推廣成所有 Bianchi 模型通式。接下來對場方程式微擾, 檢驗哈伯常數 $H_i(t)$ 的穩定性, 且驗證 Bianchi 模型會從不均向性趨向於均向。在此論文中, 我們亦用數值模擬的方式, 探討在不同時期, 尺度因子的膨脹情況。另外我們也針對早期宇宙的暴脹情形做了計算, 利用純量場的誘發重力理論, 探討宇宙在大霹靂後, 10^{-44} 秒 到 10^{-36} 秒, 模擬尺度因子的暴脹情形。



Abstract

In this thesis we study one of the Bianchi type spaces, type II, which is a homogeneous and anisotropic space. We follow the procedure to calculate the Chrystoffel symbols and curvature tensors and obtain the field equations with the variational method. We first consider the Einstein-Hilbert model with perfect fluid and the induced gravity model at early universe. . We gain the numerical solution and test that the scale factor indeed expands. And we also check the induced gravity model that will indeed inflate the space within the 10^{-44} to 10^{-36} seconds that can solve the flatness problem. The anisotropy to isotropy is also checked in these models.



致謝辭

首先感謝我生命中最重要的人，我的家人，他們不但給了經濟上的支持，更給了我精神上的幫忙，總是問我何時能畢業，雖然聽久了很煩，但卻也是一種助力督促我。另外要感謝我哥，給了我一些寫論文的想法，另外也給了我一些報告上的技巧。在來就是要感謝我的指導教授，高文芳老師，老師讓我兼了幾個不忙的助教，多了一些零用金可用，也教導了我們廣義相對論，與天文學的概論。老師另外給我們這些碩二的同學研究方向，研究宇宙模型，雖然我總是進度緩慢，但是同學之間的討論，一起尋找資料，發現問題，在這些過程中，我們總會互相提供一些新的想法，訓練了自己去找相關資料的能耐。另外也感謝在交大教過我的老師，研究所的課程比起大學來的重，老師的教學讓我們對物理有更深一層的了解。

感謝交大的碩二同學與博班學長們，我們這幾個總是會去打球，一起去吃飯聊天，雖然看似是浪費時間，但實際上卻是一種抒發心理鬱悶的最佳時光，也提供了所上的一些資訊，讓我明瞭互助合作的重要性，兩個人總比一個人好，研究真的是需要夥伴。另外也要感謝所上、老師，所提供的舒適的研究環境，碩一、碩二、科學一館的研究生室，讓我們多了很多硬體上面的支援。另外交大的活動中心也讓我覺得是一個重要的地方，我常常使用那裡的撞球設施，讓我從大學時迷撞球可以有個延續，也在這裡交到了幾個好球友。

再來感謝我的女朋友，在這兩年裡，我們一起度過的時間雖然不像大學時那麼長，但妳還是給了我很多鼓勵與支持，我們還是安然的過來了，我們都成長了。另外就是我在新竹的室友們，雖然其實大家見面時間不多，總是十一、二點才全部到齊，但是我們總是會問彼此正在做些什麼，什麼時候畢業，或者是論文寫的怎樣，這些噓寒問暖總是對心情的調適有很大的幫助。最後謝謝交大，這裡的硬體設施相當完善，籃球場、體育館、游泳池應有盡有，是個做研究和運動的好地方。

目錄

1	導論	1
1.1	廣義相對論簡介	1
1.2	標準大霹靂模型以及暴脹理論	2
1.3	Friedmann-Robertson-Walker 度規與標準宇宙模型	3
2	Bianchi 第二型度規下的 E-H 模型	5
2.1	基本計算	5
2.1.1	度規	5
2.1.2	Christoffel符號與曲率張量	6
2.1.3	Ricci張量與 Ricci 純量	9
2.1.4	高階修正項的計算	10
2.2	場方程式	12
2.2.1	Friedmann場方程式	12
2.2.2	g_{11} 場方程式通式	13
2.2.3	帶入 g_{11} 場方程式通式所得到的場方程式	14
2.2.4	與愛因斯坦場方程式做比較	15
2.2.5	直接對 $a(t)$ 做變分	16
2.3	Bianchi恆等式所給出場方程式的連結	17
2.4	場方程式的解的討論	18
2.4.1	趨向均向性(isotropy) 的討論與模擬	18
2.4.2	穩定性的分析	19
2.4.3	數值模擬	20

2.5	考慮理想流體下的場方程式	21
2.5.1	數值模擬	23
3	Induced Gravity 模型	25
3.1	原新暴脹與渾沌暴脹	26
3.2	場方程式及近似解	26
3.3	數值模擬	30
A	所使用的單位	32
B	Bianchi Type Space 簡介	33
B.1	黎曼流形與偽黎曼流形	33
B.2	運動群	33
B.3	Killing 方程式	34
B.4	群的種類	35
B.4.1	可有 G_1 群的空間	35
B.4.2	九種運動類型	37
C	較廣義化的度規	39



List of Figures

2.1	以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。尺度因子 $a(t)$ 以及 $a_z(t)$ 的演化, $\Lambda = 0.3, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$	20
2.2	以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。尺度因子變化率 $H_1(t), H_z(t)$ 隨時間的變化, $\Lambda = 0.3, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$	21
2.3	以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。非均向因子 $\Delta = H_1(t) - H_z(t)$ 隨時間的差異	21
2.4	以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。尺度因子 $a(t)$ 在三種不同時期中演化的比較, 初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$	23
2.5	以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。尺度因子 $a_z(t)$ 在三種不同時期中演化的比較, 初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$	23
2.6	以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。非均向性因子在三種不同時期中演化的比較, 初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$	24
3.1	$V(\phi)$, 僅是圖示位能井, 圖中數字沒有任何意義	26
3.2	以(3.2.12)、(3.2.13)、(3.2.14) 作圖, $\phi(t)$ 隨時間變化。初始條件以及參數設定為: $\lambda = 4 \times 10^{-17}, \epsilon = 0.026, \phi_0 = 1/\sqrt{\epsilon}, \phi(0) = 0.02, \phi'(0) = 0. \Delta t = 1 = 10^{-43} s, \phi$ 的單位則是 $\sqrt[4]{(8\pi)^{-2}\rho_{PL}}$	30
3.3	$\ln a_i(t)$ 隨時間變化, $\Delta t = 1 = 10^{-43} s$, 初始條件設定為: $a_z(0) = 1, a(0) = 1, a'(0) = 1, a'_z(0) = 1$	30

- 3.4 以(3.2.12)、(3.2.13)、(3.2.14) 作圖, $\phi(t)$ 隨時間變化。初始條件以及
 參數設定為: $\lambda = 10^{-12}, \epsilon = 0.03, \phi_0 = 1/\sqrt{\epsilon}, \phi(0) = 3.7/\sqrt{\epsilon},$
 $\phi'(0) = -0.001, \Delta t = 1 = 10^{-43} s, \phi$ 在這裡的單位則是 $\sqrt[4]{(8\pi)^{-2}\rho_{PL}}$ 31
- 3.5 $\ln a_i(t)$ 隨時間變化, $\Delta t = 1 = 10^{-43} s,$ 初始條件設定為: $a_z(0) =$
 $10, a(0) = 10, a'(0) = 0.289, a'_z(0) = 0.289$ 31



Chapter 1

導論

1.1 廣義相對論簡介

在此我們將略為簡介廣義相對論(General Relativity)^{[1][2]}, 根據最小作用量原理, 給定一個 Lagrangian L , 對其作用量做變分, 就可以得到場方程式。給定一個作用量:

$$S = \int d^4x \sqrt{g} L \quad (1.1.1)$$

其中 \sqrt{g} 是度規張量 $g_{\mu\nu}$ 在映射到矩陣型式($g_{\mu\nu}$)後的行列式值取負號。在含有宇宙常數的 Einstein-Hilbert 模型下, $L = R - 2\Lambda$ 。對 $g^{\mu\nu}$ 變分, 並且考慮 能動張量 $T^{\mu\nu} = 0$ 的情況下後, 可以得到場方程式:

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.1.2)$$

其中 $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$, R 為 Ricci 純量, $R^{\mu\nu}$ 為 Ricci 張量。

另外 L 也可以是某個純量場 ϕ 的函數, 例如:

$$L = -\frac{1}{2}\partial^a\phi\partial_a\phi - V(\phi) \quad (1.1.3)$$

對作用量做變分:

$$\delta S = \int \delta(\sqrt{g}L)d^4x = \int d^4x \sqrt{g} [D^a\partial_a\phi - \frac{\delta V}{\delta\phi}] \delta\phi \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} &+ \int d^4x \sqrt{g} [\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\frac{1}{2}\partial_\beta\phi\partial^\beta\phi + V(\phi))] \delta g_{\mu\nu} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

即可得到對 ϕ 以及 $g_{\mu\nu}$ 的 E.M.O 為

$$D^a \partial_a \phi - \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0$$

$$\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\beta \phi \partial^\beta \phi + V(\phi) \right) = 0$$

給定適當的初始條件，即可解得純量場 $\phi(t)$ 以及 $g_{\mu\nu}$ 的場方程式的解。

1.2 標準大霹靂模型以及暴脹理論

在過去一、二十年間，標準大霹靂宇宙模型出現了一些缺失及問題，導致了暴脹理論的誕生。根據暴脹理論 預測，宇宙在大霹靂後極短暫的時間裡，發生了極難想像的快速膨脹。如果這個新模型是正確無誤的，那麼我們現在所觀測的宇宙將會只是整個宇宙的一小部分。暴脹模型與標準模型有許多類同之處，兩個模型皆預測宇宙年齡為100億年到150億年，也預測了遙遠星系正遠離我們所產生的紅位移以及宇宙背景輻射。

當我們用標準大霹靂宇宙模型要去描述早期宇宙時，會需要一些無法解釋的假定，並且預測出過多至今仍尚未找到的磁單極。而暴脹模型所給出的方程式卻可以提供一個，符合觀察並且合理的解。基本粒子理論的進展也似乎指出，暴脹理論^{[3][4]}是標準大霹靂圖像所產生問題的自然解答。

大霹靂模型預測了三個實驗可觀察的事件。一、宇宙正在膨脹，星系間以哈伯定律正遠離彼此。二、宇宙在大霹靂百億年後所留下來的背景輻射，在各個方向都為2.7K。三、成功地預測了原子核是由質子以及中子形成。雖然大霹靂模型給了這些預測，卻也伴隨著問題。首先，根據宇宙背景輻射，為何宇宙在大尺度下還能保持如此的均勻。在這個模型中，宇宙演化的速度遠比它要達到熱平衡的速度來的快上許多，因為所有的物理訊息不能傳遞的比光速還快，在宇宙演化到今天的時間間隔，根本還不夠讓在兩個相反方向的光子做訊息交換。訊息無法交換，但卻有如此高的均勻性，這就是有名的視界問題。這個問題可以被假定宇宙演化的初始條件而排除，但如此重要的宇宙訊息，卻無法用大霹靂模型解釋。

大霹靂模型的另一個問題是所謂的平坦問題。宇宙的能量密度與臨界能量密度的比值記為 Ω 。當 $\Omega = 1$ 時，指的是平坦的宇宙，但是是處於非穩定的平衡狀態。如果從古至今， Ω 均等於1，則它會繼續等於1直到永遠。但若稍稍偏離1，則會越來越遠離1。而現今的觀察告訴我們 Ω 幾乎等於1，這表示在大霹靂後的1秒鐘誤差範圍必須非常的小，但大霹靂模型卻僅將此問題歸因於初始條件，並未解釋宇宙初期時 Ω 為何只會等於1，而非其他值。

而暴脹模型可以很直接的解決視界問題。在暴脹模型中，宇宙是從一個較小的區域(比起大霹靂模型小)開始演化。在暴脹開始之前，這個區域遠小於視界距離，所以會

有足夠時間達到熱平衡且均勻。這個小而均勻的區域暴脹到足夠涵蓋現在所觀測到的宇宙。因此現在我們在各個方向上所量測到的背景輻射曾經是有過一次的熱平衡，在暴脹後溫度仍維持各方均向。

平坦問題在暴脹模型下也顯得相當自然。在暴脹期間，暴脹模型的方程式與大霹靂模型所得到的方程式相當不同。它指出，不論在暴脹之前的起始值是多少， Ω 皆會快速的趨向於1。此種情況與吹氣球相當，當氣球被吹的越大則它會越平坦，最後趨近於平坦。現今大部分的天文學家，也認同1與實際觀察相符合。

1.3 Friedmann-Robertson-Walker 度規與標準宇宙模型

在現今所觀察到的宇宙，物質與輻射的分部有相當高程度的均勻性與均向性。這至少告訴了我們在現在所觀察到的哈伯體積 (Hubble volume) 裡，宇宙是平滑的 (smooth)。因此，為了要可以描述這區域性的體積，我們便假定整個宇宙是均勻且均向的 (Homogeneous and Isotropic)。而描述這樣宇宙的度規正是擁有最大對稱性的 FRW 度規^{[1][2][3]}:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (1.3.1)$$

$R(t)$ 是宇宙尺度因子， k 在 $(+1, 0, -1)$ 分別代表著正，零，負的空間曲率。在這裡， r 是沒有單位的 (dimensionless)，而 $R(t)$ 的單位為長度，且在 $k = +1$ 是， r 座標的上下限為零到一。而在 $k = +1$ 且 $\phi = const$ 的情況下，一維球的周長為 $2\pi R(t)r$ ，二維球的面積為 $4\pi R^2(t)r^2$ ；但當我們在考慮物理的 (實際測量得到的) 半徑時，為 $R(t) \int_0^r dr / (1 - kr^2)^{1/2}$ 。而上式的時間座標，就是觀察者在同運動座標下 (comoving frame) 所量測到的原時 (proper time)。而不為零的 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ 與 Ricci 張量為：

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} \left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} h_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i \quad (1.3.2)$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{R}}{R}, \quad R_{ij} = - \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right) g_{ij} \quad (1.3.3)$$

Ricci 純量為：

$$R = -6 \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right) \quad (1.3.4)$$

其中 $i, j = 1, 2, 3$ 利用 FRW 度規, 以及作用量原理, 假定作用量為 $S = S_{E-H} + S_M$, S_{E-H} 代表的是 Einstein-Hilbert 作用量, 而 S_M 代表著物質作用量:

$$S_{E-H} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1.3.5)$$

$$S_M = \sum_{fields} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{fields} \quad (1.3.6)$$

變分上兩個作用量後即可得到愛因斯坦場方程式:

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \quad (1.3.7)$$

當我們考慮一理想流體, $T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$, 在 $k = 0$ 以及真空狀態下 $\rho_\Lambda = \text{常數}$, 可以得到 Friedmann 場方程式為:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda} \quad (1.3.8)$$

就得到在真空的情況下, Hubble 常數 $H(t)$ 是一個定值, 且尺度因子 $R(t) = Ae^{\Delta t}$ 。其中 $A = R(0)$, $\Delta = \sqrt{8\pi G \rho_\Lambda / 3}$ 。這雖然並非宇宙完整的情況, 但給了我們一個約略的圖像, 在宇宙僅是真空主導時, 尺度因子是以 exponential 方式膨脹 (de Sitter universe)。



Chapter 2

Bianchi 第二型度規下的 E-H 模型

在這一章中, 我們將對 Bianchi 第二型度規^{[5][6]}下的 Einstein-Hilbert 模型做研究, 探討它的解, 以及穩定性等問題。

2.1 基本計算

2.1.1 度規

Bianchi II, VIII, IX 的度規有下面這一個通式^{[5][6]}:

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a^2(t)[dy^2 + f(y)^2dz^2] + a_z(t)^2[dx - h(y)dz]^2 \quad (2.1.1)$$

其中 $f(y) = (y, \sinh y, \sin y)$, $h(y) = (-y^2/2, -\cosh y, \cos y)$ 分別為 (II, VIII, IX) 的情況。為了使這個通式能夠類似於 Friedmann-Robertson-Walker 度規的形式, 我們做這樣的座標轉換: $(x, f(y), z) \rightarrow (z, r, \theta)$ 則可以將 VIII, IX 表示成這樣的形式:

$$ds^2 = -b^2(t)dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2d\theta^2 \right] + a_z^2(t) \left[dz - k\sqrt{1 - kr^2}d\theta \right]^2 \quad (2.1.2)$$

其中 $k = (-1, 1) = (VIII, XI)$, 第二型的度規為:

$$ds^2 = -b^2dt^2 + a_z^2(dz^2 + \frac{r^4}{4}d\theta^2) + a^2(dr^2 + r^2d\theta^2) + a_z^2r^2dzd\theta \quad (2.1.3)$$

則 (0,2) 型的度規張量 $g_{\mu\nu}$ 在矩陣 $(g_{\mu\nu})$ 中的表示式為:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(a^2 r^2 + \frac{a_z^2 r^4}{4}\right) & \frac{a_z^2 r^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a_z^2 r^2}{2} & a_z^2 \end{pmatrix}$$

(2,0) 型的度規張量 $g^{\mu\nu}$ 在矩陣中的表示式:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{a}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{ar}\right)^2 & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2 & \left(\frac{1}{a_z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \end{pmatrix}$$

在矩陣表示中, 他們互為反矩陣, 既 $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$ 。

2.1.2 Christoffel符號與曲率張量

接下來, 我們經由定義計算 Christoffel 符號 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 以及曲率張量 $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ 。我們會用下列的代換: $H_z = \dot{a}_z/a_z, H_1 = \dot{a}/a = H_2, 1/b^2 = B = 1$ 。根據定義:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\beta\nu,\gamma} + g_{\gamma\nu,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu}) \quad (2.1.4)$$

非零的 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 為:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{\dot{B}}{2B} \quad (2.1.5)$$

$$\Gamma^0_{33} = B a_z^2 H_z \quad (2.1.6)$$

$$\Gamma^0_{11} = B a^2 H_1 \quad (2.1.7)$$

$$\Gamma^0_{22} = B r^2 \left(a^2 H_1 + \frac{a_z^2 r^2}{4} H_z \right) \quad (2.1.8)$$

$$\Gamma^0_{32} = \frac{r^2}{2} B a_z^2 H_z \quad (2.1.9)$$

$$\Gamma^3_{03} = H_z \quad (2.1.10)$$

$$\Gamma^3_{02} = \frac{r^2}{2}(H_z - H_1) \quad (2.1.11)$$

$$\Gamma^3_{31} = -\frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.12)$$

$$\Gamma^3_{21} = -\frac{r^3}{8} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.13)$$

$$\Gamma^1_{01} = H_1 \quad (2.1.14)$$

$$\Gamma^1_{32} = -\frac{r}{2} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.15)$$

$$\Gamma^1_{22} = -r - \frac{r^3}{2} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.16)$$

$$\Gamma^2_{02} = H_1 \quad (2.1.17)$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{1}{2r} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.18)$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} + \frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \quad (2.1.19)$$

我們可以用矩陣稍微整理一下上面的 Γ :

$$(\Gamma^0_{ij}) = \begin{pmatrix} Ba^2 H_1 & 0 & 0 \\ 0 & Br^2(a^2 H_1 + \frac{a_z^2 r^2}{4} H_z) & \frac{r^2}{2} Ba_z^2 H_z \\ 0 & \frac{r^2}{2} Ba_z^2 H_z & Ba_z^2 H_z \end{pmatrix}$$

$$(\Gamma^i_{0j}) = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{2}(H_z - H_1) & H_z \end{pmatrix}$$

$$(\Gamma^i_{1j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} + \frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 & \frac{1}{2r} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \\ 0 & -\frac{r^3}{8} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 & -\frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$(i, j) = (\text{列}, \text{行})$, 從1到3, 其餘的 Γ 為 $\Gamma^1_{22}, \Gamma^1_{32}, \Gamma^0_{00}$ 。根據曲率張量的定義:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\gamma_{\beta\nu} \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (2.1.20)$$

$$R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = g^{\beta\gamma} R^\alpha_{\gamma\mu\nu} \quad (2.1.21)$$

非零的 $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ 爲:

$$R^{03}_{03} = \frac{\dot{B}H_z}{2} + B(\dot{H}_z + H_z^2) \quad (2.1.22)$$

$$R^{03}_{31} = \frac{Br}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 (H_z - H_1) \quad (2.1.23)$$

$$R^{03}_{20} = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\dot{B}H_1}{2} + B(\dot{H}_1 + H_1^2) \right] - (1 \leftrightarrow z) \quad (2.1.24)$$

$$R^{03}_{21} = \frac{rB}{8} \left[\left(\frac{ra_z}{a}\right)^2 - 8 \right] (H_z - H_1) \quad (2.1.25)$$

$$R^{01}_{01} = \frac{\dot{B}H_1}{2} + B(\dot{H}_1 + H_1^2) \quad (2.1.26)$$

$$R^{01}_{32} = \frac{Br}{2} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 (H_z - H_1) \quad (2.1.27)$$

$$R^{02}_{02} = \frac{\dot{B}H_1}{2} + B(\dot{H}_1 + H_1^2) \quad (2.1.28)$$

$$R^{02}_{31} = \frac{B}{2r} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 (H_z - H_1) \quad (2.1.29)$$

$$R^{02}_{12} = \frac{Br}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 (H_z - H_1) \quad (2.1.30)$$

$$R^{13}_{03} = \frac{r}{2} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 (H_z - H_1) \quad (2.1.31)$$

$$R^{13}_{02} = \frac{r}{4a^2} \left[-2 + \left(\frac{ra_z}{a}\right)^2 \right] (H_z - H_1) \quad (2.1.32)$$

$$R^{13}_{13} = \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + BH_1 H_z \quad (2.1.33)$$

$$R^{13}_{12} = \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + BH_1 (H_z - H_1) \right] \quad (2.1.34)$$

$$R^{32}_{01} = \frac{1}{2ra^2} (H_1 - H_z) \quad (2.1.35)$$

$$R^{23}_{23} = \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + BH_z H_1 \quad (2.1.36)$$

$$R^{12}_{03} = \frac{1}{r} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 (H_1 - H_z) \quad (2.1.37)$$

$$R^{12}_{02} = \frac{r}{2} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 (H_1 - H_z) \quad (2.1.38)$$

$$R^{12}_{12} = -\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + BH_1^2 \quad (2.1.39)$$

用矩陣表示非零的 $R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$:

$$R^{0i}_{0i} = \frac{\dot{B}H_i}{2} + B(\dot{H}_i + H_i^2) \quad (2.1.40)$$

$$R^{23}_{23} = \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + BH_z H_1 \quad (2.1.41)$$

$$(R^{0m}_{1n}) = B(H_1 - H_z) \begin{pmatrix} -\frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a} \right)^2 & \frac{1}{2r} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \\ \frac{r}{8} \left[\left(\frac{ra_z}{a} \right)^2 - 8 \right] & \frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.1.42)$$

$$(R^{1m}_{0n}) = (H_1 - H_z) \begin{pmatrix} \frac{r}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 & \frac{1}{r} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \\ \frac{r}{4a^2} \left[2 - \left(\frac{ra_z}{a} \right)^2 \right] & -\frac{r}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.1.43)$$

$$(R^{1m}_{1n}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + BH_1^2 & 0 \\ \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + BH_1(H_z - H_1) \right] & \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + BH_1 H_z \end{pmatrix} \quad (2.1.44)$$

$$\begin{pmatrix} R^{03}_{02} & R^{32}_{01} \\ R^{01}_{32} & R^{23}_{23} \end{pmatrix} = \quad (2.1.45)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{r^2}{2} \left[\frac{\dot{B}H_1}{2} + B(\dot{H}_1 + H_1^2) \right] + (1 \leftrightarrow z) & \frac{1}{2ra^2}(H_1 - H_z) \\ \frac{Br}{2} \left(\frac{a_z}{a} \right)^2 (H_z - H_1) & \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + BH_z H_1 \end{pmatrix} \quad (2.1.46)$$

其中 $(m, n) = (\text{列}, \text{行}) = 2, 3; i = 1 \text{到} 3$ 。

2.1.3 Ricci張量與 Ricci 純量

根據 Ricci 張量以及 Ricci 純量的定義，我們知道 $R^\mu_\nu = g^{\beta\mu} R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = R^{\alpha\mu}_{\alpha\nu}$ 以及 $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R^{\alpha\nu}_{\alpha\nu}$ 。所以非零的 Ricci 張量為：

$$R^t_t = R^{it}_{it} = \frac{\dot{B}}{2}(3H) + B[2(\dot{H}_1 + H_1^2) + \dot{H}_z + H_z^2] \quad (2.1.47)$$

$$\begin{aligned} R^1_1 &= R^{1t}_{1t} + R^{21}_{21} + R^{31}_{31} \\ &= \frac{\dot{B}H_1}{2} + B(\dot{H}_1 + 2H_1^2 + H_1 H_z) - \frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

$$R^2_2 = R^{t2}_{t2} + R^{12}_{21} + R^{32}_{32} = R^1_1 \quad (2.1.49)$$

$$\begin{aligned} R^3_3 &= R^{t3}_{t3} + R^{13}_{13} + R^{23}_{23} \\ &= \frac{\dot{B}H_z}{2} + B(\dot{H}_z + H_z^2 + 2H_1H_z) + \frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

$$\begin{aligned} R^3_2 &= R^{t3}_{t2} + R^{13}_{12} \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\frac{\dot{B}(H_z - H_1)}{2} + B(\dot{H}_z - \dot{H}_1 - 2H_1^2 + H_z^2 + H_1H_z) + \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

而 Ricci 純量爲:

$$\begin{aligned} R &= 2(R^{0i}_{0i} + R^{12}_{12} + R^{13}_{13} + R^{23}_{23}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + 2B(2\dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_z^2 + 3H_1^2 + 2H_1H_z) + \dot{B}(2H_1 + H_z) \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

其中 i 爲 1 到 3。

2.1.4 高階修正項的計算

在非暴脹子的暴脹理論下, 我們可以將 Einstein-Hilbert 模型做高階修正^{[7][8]}, Lagrangian 會有這樣的形式:

$$L = R + \alpha R^2 + \beta R^\mu_\nu R^\nu_\mu + \gamma R^{\mu\nu}_{\lambda\xi} R^{\lambda\xi}_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}_{\mu\nu} \quad (2.1.53)$$

爲了讓式子看起來會更簡潔, 我們做以下的代換:

$$A = B\dot{H}_1 + H_1^2 \quad (2.1.54)$$

$$B_1 = BH_1^2 \quad (2.1.55)$$

$$C = BH_1H_z \quad (2.1.56)$$

$$D = B\dot{H}_z + H_z^2 \quad (2.1.57)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right) \quad (2.1.58)$$

$$F = BH_z^2 \quad (2.1.59)$$

$$G = \dot{B}H_1 \quad (2.1.60)$$

$$I = \dot{B}H_z \quad (2.1.61)$$

則黎曼張量 R 就可以簡化成:

$$R = 4A + 2B_1 + 2D + 4C + 2G + I - E \quad (2.1.62)$$

這些高階項則可簡化成:

$$\begin{aligned} \alpha R^2 = & 4\alpha(4A^2 + B_1^2 + 4C^2 + D^2 + 4AB_1 + 8AC \\ & + 4AD + 4B_1C + 2B_1D + 4CD) + 2(I + 2G)(4A + 2B_1 \\ & + 2D + 4C - E) + 4GI + 4G^2 + I^2 + E^2 \end{aligned} \quad (2.1.63)$$

$$\begin{aligned} \beta R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu = & 6A^2 + 2B_1^2 + 6C^2 + 3E^2 + 2D^2 + 4AB_1 + 4AC + 4B_1C + 4AD \\ & + 2DE - 4AE - 4B_1E \frac{1}{2}(I^2 + G^2) + G(I + 2B_1 + 2C \\ & - 2E + 2D + 6A) + I(E + 2D + G + 2C + 2A) \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

而在最後的 γ 項中, 可以發覺其對稱性, 任意兩個腳標對調, 其值是不變的。所以共有8種互換值不變, 既為本身不變1種、3組不同腳標任取一組互換3種、3組任取2組互換3種 以及3組全互換1種。整理一下這些非為零的項, 會發覺其實是相當乾淨的僅剩下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \gamma \text{ interaction term} = & R^{03}{}_{03}{}^3 - B \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 (H_1 - H_z)^2 R^{03}{}_{03} + \\ & R^{01}{}_{01}{}^3 - \frac{B}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 (H_1 - H_z)^2 R^{01}{}_{01} + \\ & R^{13}{}_{13}{}^3 - \frac{B}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 (H_1 - H_z)^2 R^{13}{}_{13} + \\ & R^{12}{}_{12}{}^3 - B \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 (H_1 - H_z)^2 R^{12}{}_{12} \end{aligned} \quad (2.1.65)$$

γ 作用項可以寫成:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \gamma R^{\mu\nu}{}_{\beta\gamma} R^{\beta\gamma}{}_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}{}_{\mu\nu} = & 2A^3 + D^3 + 2\left(\frac{E}{2} + C\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}E + B\right)^3 \\ & - 3E(F - 2C + B)\left(A + 2B + C + 2D - \frac{5}{2}E\right) \end{aligned} \quad (2.1.66)$$

我們可以發現在所有的修正項當中, L 並未出現空間座標, 這相當合理, 因為 Bianchi 時空的空間部分本身就是 均勻 (Homogeneous) 的空間。

2.2 場方程式

接下來，我們要用對作用量變分的方式，尋找場方程式。當給定一個作用量 S ，我們對它做變分

$$\delta S = \int \delta(\sqrt{g}L)d^4x \quad (2.2.67)$$

當 $\delta S = 0$ 的時候，所得到的方程式即是場方程式。在 Einstein-Hilbert 的模型中 $L = R - 2\Lambda$ ，其中 Λ 為宇宙常數，在下面的情形中，我們考慮真空情況，既 $T^{\mu\nu} = 0$ 。在 Bianchi II 度規下 L 為：

$$L = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + 2B(2\dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_z^2 + 3H_1^2 + 2H_1H_z) + \dot{B}(2H_1 + H_z) - 2\Lambda \quad (2.2.68)$$

2.2.1 Friedmann場方程式

首先我們會先對 g_{00} 變分，也就是對 $B(t)$ 變分，再把 $B(t)$ 設回1，在II,VIII,IX的情況裡 $\sqrt{g} = a^2(t)a_z(t)f(r)/\sqrt{B}(t)$ ：

$$\delta S = \int \delta(\sqrt{g}L)d^4x = 0 \quad (2.2.69)$$

$$\delta(\sqrt{g}L) = \left\{ \frac{\delta\sqrt{g}}{\delta B}L + \sqrt{g}\frac{\delta L}{\delta B} - \frac{d}{dt} \left[\sqrt{g}\frac{\delta L}{\delta \dot{B}} \right] \right\} \delta B \quad (2.2.70)$$

在上式的第三項中，我們已做分部積分，並在邊界上

$$\left(\sqrt{g}\frac{\delta L}{\delta \dot{B}} \right) \delta B = 0 \quad (2.2.71)$$

經由 (2.268) 式，我們可以看出在最後必須把 $B = 1, \dot{B} = 0$ 令回方程式，但會得到無意義的結果，所以我們必須將對 B 的變分換成等效的對 H_i 以及 \dot{H}_i 變分。檢視 L 裡面所含有的曲率張量形式，可以發覺 B 總是隨著 H_iH_j 和 \dot{H}_i 一起出現，而 $\dot{B}H_i$ 總是隨著 $B\dot{H}_i$ 一起出現，所以可以將對 B 以及 \dot{B} 變分的換成：

$$\frac{\delta L}{\delta B} = \dot{H}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_1} + \frac{H_1}{2} \frac{\partial L}{\partial H_1} + \dot{H}_z \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_z} + \frac{H_z}{2} \frac{\partial L}{\partial H_z} \quad (2.2.72)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{B}} = \frac{1}{2} H_i \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i} \quad (2.2.73)$$

之後即可得到對 B 變分的場方程式, 既 Friedmann 方程式^{[9][10]}:

$$L + H_i \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i} = H_i \frac{\partial L}{\partial H_i} + \dot{H}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i} \quad (2.2.74)$$

其中, $3H = 2H_1 + H_z$ 且 i 為加 1、z。如此一來, 對於不同模型下的 L , 就可以在不用令回 B 的情況下得到 Friedmann 場方程式。將 BianchiII 的 Lagrangian 帶入上式後, 即可得到 Friedmann 場方程式:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 - H_1^2 - 2H_1 H_z = -\Lambda \quad (2.2.75)$$

上式是我們利用變分法求得的場方程式, 必須和愛因斯坦場方程式 $G^0_0 + \Lambda = 0$ 結果一致。而 $G^0_0 = R^0_0 - 1/2R$ 。果真

$$R^0_0 - 1/2R + \Lambda = \frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 - H_1^2 - 2H_1 H_z + \Lambda = 0 \quad (2.2.76)$$

與我們用變分得到的場方程式相同。

2.2.2 g_{11} 場方程式通式

接下來我們將度規 ds^2 廣義化成, 以便用來同時計算 $II, VIII, IX$ 的情況:

$$ds^2 = -dt^2 + A_1^2(r, t) dr^2 + A_2^2(r, t) d\theta^2 + 2A_4^2(r, t) dz d\theta + A_3^2(t) dz^2 \quad (2.2.77)$$

則我們對上式中的 A_1 變分就是對 g_{11} 變分。則 $\sqrt{g} = A_1 \sqrt{(A_2 A_3)^2 - A_4^4}$, 對 A_1 變分後得到:

$$\frac{\sqrt{g}}{A_1} L + \sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta A_1} - \frac{d}{dt} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_1} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta \ddot{A}_1} \right) + (t \longleftrightarrow r) = 0 \quad (2.2.78)$$

其中 $(t \longleftrightarrow r)$ 指的是將時間微分改成對 r 微分。所以我們可以將上式的每一項都算出來, 在此之前 我們先規定以下的代換:

$$I_1 = \dot{A}_1/A_1; \quad K_1 = A'_1/A_1 \quad G = \dot{g}/2g; \quad F = g'/2g \quad (2.2.79)$$

而在 (2.2.74) 中我們可以看到, 時間微分與空間微分對稱, 所以僅須先計算出時間部分, 在將空間部分複製上。

$$\frac{\delta L}{\delta A_1} = \frac{\partial L}{\partial A_1} + \frac{\partial L}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial A_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{I}_1} \frac{\partial \dot{I}_1}{\partial A_1} + \frac{\partial L}{\partial K_1} \frac{\partial K_1}{\partial A_1} + \frac{\partial L}{\partial K'_1} \frac{\partial K'_1}{\partial A_1} \quad (2.2.80)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_1} = \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial L}{\partial I_1} - 2I_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{I}_1} \right) \quad (2.2.81)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \ddot{A}_1} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{I}_1} \quad (2.2.82)$$

在 L 對 A'_1 與 A''_1 變分中, 僅需將 I_1, \dot{I}_1 改成 K_1, K'_1 。最後可以整理成:

$$\begin{aligned} L + 2A_1^2 \frac{\partial L}{\partial A_1^2} + \left(G + \frac{d}{dt} \right)^2 \frac{\partial L}{\partial \dot{I}_1} + \left(F + \frac{d}{dr} \right)^2 \frac{\partial L}{\partial K'_1} \\ = \left(G + \frac{d}{dt} \right) \frac{\partial L}{\partial I_1} + \left(F + \frac{d}{dr} \right) \frac{\partial L}{\partial K_1} \end{aligned} \quad (2.2.83)$$

上式即為對 g_{11} 變分的通式, 因此我們僅需將要算的度規與廣義化的度規做比較, 即可帶入通式求得 g_{11} 的場方程式。

2.2.3 帶入 g_{11} 場方程式通式所得到的場方程式

最後我們將 II, VIII, IX 的通式 (2.1.1) 在座標轉換 $(x, y, z) \rightarrow (z, r, \theta)$ 下的度規 ($ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dr^2 + [a^2(t)f^2(r) + a_z^2(t)h^2(r)]d\theta^2 - 2a_z^2(t)h(r)dzd\theta + a_z^2(t)dz^2$) 與 (2.2.79) 式做比較。代換的關係就變為:

$$G = \dot{g}/2g = 2H_1 + H_z = 3H ; F = f(r)' / f(r) \quad (2.2.84)$$

$$A_1^2(r, t) = a^2(t) ; K_1 = 0 ; I_1 = H_1 \quad (2.2.85)$$

$$A_2^2(r, t) = a^2(t)f^2(r) + a_z^2(t)h^2(r) \quad (2.2.86)$$

$$A_3^2(r, t) = a_z^2(t) \quad (2.2.87)$$

$$A_4^2(r, t) = -a_z^2(t)h(r) \quad (2.2.88)$$

$$(2.2.89)$$

在這裡有一點我們必須要注意, 在對 A_1 變分的過程之中, 我們是將 A_2 看成不同的函數做變分, 因此在代換過程中, L 僅能對 A_1 裡的 $a(t)$ 作用, 不能對 A_2 裡的 $a(t)$ 作用。所以為了區分 此不同點, 將 A_2 裡的 $a(t)$ 寫成 $\tilde{a}(t)$, 並且在最後將 $\tilde{a} \rightarrow a$ 。在這樣的情況

下,II,VIII,IX 度規在 Einstein-Hilbert 模型下的 $L = R - 2\Lambda$ 即為:

$$L = 2(H_1^2 + \tilde{H}_1^2) + 2H_1\tilde{H}_1 + 2(H_1 + \tilde{H}_1)H_z + 2H_z^2 - \frac{a_z^2 h'(r)^2}{2a^2 \tilde{a}^2 f^2(r)} + 2\dot{H}_1 + 2\dot{\tilde{H}}_1 + 2\dot{H}_z - 2\frac{f''(r)}{a^2 f(r)} - 2\Lambda \quad (2.2.90)$$

在上式中 $\tilde{H}_1 = \tilde{a}/a$ 。另外除了最後 $-2f''/a^2 f - 2\Lambda$ 項 我們可以看到 $\tilde{H}_1, H_1; a, \tilde{a}$ 總是一起出現。在此當我們將 $A(r, t)$ 換成 $a(t)$ 時, 表示通式中的"K"部分消失, 所以我們要帶入的式子為:

$$L + 2a^2 \frac{\partial L}{\partial a^2} + \left(3H + \frac{d}{dt}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial H_1} = \left(3H + \frac{d}{dt}\right) \frac{\partial L}{\partial H_1} \quad (2.2.91)$$

並令回 a 後就得到場方程式為:

$$2H_1^2 + 2H_z^2 + 2H_1H_z + 2\dot{H}_1 + 2\dot{H}_z + \frac{a_z^2 h'^2}{2a^4 f^2} + 2\frac{f''}{a^2 f} - 2\Lambda = 0 \quad (2.2.92)$$

2.2.4 與愛因斯坦場方程式做比較

在上一節中, 我們利用變分的方法導出了 g_{11} 場方式, 但我們不知道是否正確無誤, 因此我們用愛因斯坦場方程式 來做驗證。愛因斯坦場方程式在含有宇宙常數下為 $G^\mu_\nu + \Lambda\delta^\mu_\nu = \chi T^\mu_\nu$ 在 $T^\mu_\nu = 0$ 的真空情況下, 帶入後可以得到場方程式為:

$$2H_1^2 + 2H_z^2 + 2H_1H_z + 2\dot{H}_1 + 2\dot{H}_z + \frac{a_z^2}{2a^4} - 2\Lambda = 0 \quad (2.2.93)$$

與 (2.2.87) 式比較後發相差了最後一項, 也就是 $2f''/a^2 f$ 。在(II, VIII, IX)中

$$f(r) \rightarrow (r, \sin hr, \sin r) \quad (2.2.94)$$

因此最後一項的差異就變為 $2(0, 1, -1)/a^2$ 。結果顯示上面一節的變分方法, 必定出現了某些問題。其原因在於, 度規本身 被過度簡化, 原本存在的座標因為被座標轉換後看不見了, 在變分時就少了那一個應該出現但未出現的資訊, 所以我們將 $a(t)$, 改寫成 $a(t, r, \theta, z)$, 所以變分後的場方程式就應該為:

$$\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta a} - \frac{d}{dx^\alpha} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta a_{,\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^\alpha dx^\beta} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta a_{,\alpha\beta}} \right) = 0 \quad (2.2.95)$$

其中 α, β 為0到3。但可以發覺的是我們並不需要將所有的座標都塞入 a ，因為在最後的步驟中，我們必須令 $a_{,i}, a_{,ij}$ 為零，才能回到 a 只是時間的函數，其中 $i, j = 1, 2, 3$ 。觀察 \sqrt{g} ，可以看到它除了是 a 的函數也是 $f(r)$ 以及 $h(r)$ 的函數，所以我們預期僅需要將 g_{11} 中出現的 $a(t)$ 塞入 r 變成 $a(t, r)$ 即可。方程式中有貢獻的部分其實為：

$$\frac{\delta\sqrt{g}L}{\delta a} - \frac{d}{dr} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta a'} \right) - \frac{d}{dt} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta \dot{a}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\sqrt{g} \frac{\delta L}{\delta \ddot{a}} \right) = 0 \quad (2.2.96)$$

上式其實就是 (2.2.74) 式少掉對 r 微分兩次的項。補回對 r 一次微分的部分，其實等同於加回：

$$- \left(F + \frac{d}{dr} \right) \frac{\partial L}{\partial K_1} \quad (2.2.97)$$

其中 $F = g'/g = K_1 + f'/f$ 。所以我們僅需在找出 L 裡面有 K_1 的項，經由計算， L 僅會比 $L_{a(t)}$ 多出 $2f'(r)K_1/a^2(r, t)f$ ，帶入上式後可得

$$- \left(K_1 + \frac{f'}{f} + \frac{d}{dr} \right) \frac{2f'}{a^2(r, t)f} = \frac{2K_1 f'}{fa^2(r, t)} - \frac{2f''}{fa^2(r, t)} \quad (2.2.98)$$

最後令回 $a(r, t) \rightarrow a(t), K_1 \rightarrow 0$ 就可以得到 $-2f''/a^2f$ 。所以將此項加回原來變分得到的場方程式 (2.2.90)，就可以發現原本出現的項 $2f''/a^2f$ 可以被消掉，回到正確的愛因斯坦場方程式。在上面的變分過程中我們了解到，當度規在簡化的過分厲害時，利用變分方法所求得的場方程式並不一定會正確，唯一可以確定的方式，就是先確認在 Einstein-Hilbert 模型的情況中，直接變分與代場方程式是否會得到相同結果，如果會得到相同結果，則度規就不必更改；反之，在尺度因子 (scale factor) 上就必須把空間座標令回去，最後在將空間座標去除，如此一來才能夠得到正確的場方程式。

2.2.5 直接對 $a(t)$ 做變分

在上面的幾節中，因為我們只要對 g_{11} 變分，所以區分了在 g_{22} 裡的 $a(t)$ 成 $\tilde{a}(t)$ ，並且必須把 g_{11} 裡的 $a(t)$ 令為 $a(r, t)$ 後做計算，在這裡我們問一個問題，如果直接對 $a(t)$ 做變分會得到什麼？其實要做的只是將 $\sqrt{g} = a(t)\tilde{a}(t)f(r)a_z(t)$ 以及 L 裡有 $\tilde{a}(t)$ 的貢獻加回來，所以可以得到：

$$\begin{aligned} 2L + 2a^2 \left(\frac{\partial L}{\partial a^2} \right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} + \left(3H + \frac{d}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{H}_1} \right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} \\ = \left(3H + \frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial H_1} \right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} \end{aligned} \quad (2.2.99)$$

上式中的下標 $a(t) + \tilde{a}(t)$ 指的是加回 $\tilde{a}(t)$ 的貢獻。根據 Lagrangian 的型式

$$L = 2(H_1^2 + \tilde{H}_1^2) + 2H_1\tilde{H}_1 + 2(H_1 + \tilde{H}_1)H_z + 2H_z^2 - \frac{a_z^2 h'(r)^2}{2a^2 \tilde{a}^2 f^2(r)} + 2\dot{H}_1 + 2\dot{\tilde{H}}_1 + 2\dot{H}_z - 2\frac{f''(r)}{a^2 f(r)} - 2\Lambda \quad (2.2.100)$$

我們很容易看出 \tilde{a} 與 a 都是成對出現，除了最後一項 $-2f''/a^2 f$ ，所以在 $R - 2\Lambda$ 的模型中

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a^2}\right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} = 2\left(\frac{\partial L}{\partial a^2}\right)_{a(t)} \quad (2.2.101)$$

$$\left(3H + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial H_1}\right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} = 2\left(3H + \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial H_1}\right)_{a(t)} \quad (2.2.102)$$

$$2a^2\left(\frac{\partial L}{\partial a^2}\right)_{a(t)+\tilde{a}(t)} = 2\frac{a_z^2 h'^2}{a^4 f^2} + 4\frac{f''}{a^2 f} \quad (2.2.103)$$

且 (2.2.98) 式中 $2L$ 所貢獻的 $-4f''/a^2 f$ 正好與上式中的 $4\frac{f''}{a^2 f}$ 消去，此種情況正好類似在上一節中的計算。所以最後的貢獻正好是2倍對 g_{11} 變分所得到的場方程式。因此我們可以得到一個結論，在 $L = R - 2\Lambda$ 的情況中，直接對 $a(t)$ 變分，就可以得到2倍對 $a(r, t)$ 變分的場方程式，其中會相等的關鍵在於 \tilde{a} 與 a 沒有成對出現的項在計算到最後會消掉。雖然在上面的兩種情況中消掉的機制不相同，一個是藉由加入 (2.2.96) 式、 L 、以及 L 對 $a^2(r, t)$ 微分項消去，一個是用 $2L$ 以及 L 對 $a^2(t)$ 微分項消去，還是可以得到場方程式，中間那些“好的”項其實只是相差兩倍。如果在高階的修正項中，還是有這種非成對出現項的消去情況，且在這兩個機制下都是消去的，則我們可以說對 $a(t)$ 變分等同於2倍的場方程式。

2.3 Bianchi恆等式所給出場方程式的連結

愛因斯坦張量 $G^{\mu\nu}$ 彼此之間是有某些關聯性的，而找出來的方法既是利用 Bianchi 恆等式。Bianchi 恆等式的定義為 $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ ，另外能動張量 $T^{\mu\nu}$ 也必須符合能動量守恆，所以 $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 。定義 $H^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}$ ，則 $D_\mu H^{\mu\nu} = 0$ 。在目前處理真空的情況中 $T^{\mu\nu} = 0$ 。寫開 $\nu = 0, 1, 2, 3$ 後，我們可以發覺

$$\begin{aligned}
D_\mu H^\mu_t &= H^t_{t,t} + \Gamma^\mu_{t\mu} H^t_t - \Gamma^\nu_{t\mu} H^\mu_\nu \\
&= (\partial_t + 3H)H^t_t - 2H_1 H^1_1 + H_z H^z_z = 0
\end{aligned} \tag{2.3.104}$$

$$\begin{aligned}
D_\mu H^\mu_1 &= \Gamma^\mu_{\mu\nu} H^\nu_1 - \Gamma^\nu_{\mu 1} H^\mu_\nu \\
&= \frac{1}{r} H^1_1 - \frac{1}{2r} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 H^3_2 - \left[\frac{1}{r} + \frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2\right] H^2_2 + \frac{r}{4} \left(\frac{a_z}{a}\right)^2 H^3_3 - \Gamma^3_{21} H^2_3 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.3.105}$$

而 $D_\mu H^\mu_2 = 0$ 以及 $D_\mu H^\mu_3 = 0$ 並未給出限制。且 (2.3.104) 式中，最後可以計算出： $-\Gamma^3_{21} H^2_3 = 0$ ，所以也告訴了我們 $H^2_3 = 0$ 。

2.4 場方程式的解的討論

2.4.1 趨向均向性(isotropy) 的討論與模擬

在 Bianchi 的模型中，尺度因子在各個方向是不相同的，但在隨著時間趨向無窮大時，我們可以證明尺度因子的變化率 $H_i = \dot{a}/a$ ，會趨向於同向性，這也是為什麼 Bianchi 空間也是宇宙暴脹模型之一的原因[5]。在 2.21 與 2.24 節中，我們得到了對 g_{00} 與 g_{11} 變分的場方程式。另外我們也可以帶入愛因斯坦方程式 $G^3_3 + \Lambda = 0$ 求得

$$\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 - (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) + \Lambda = 0 \tag{2.4.106}$$

將上式的方程式與 (2.2.93) 式相加消去 Λ 後，可以得到：

$$\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 - (\dot{H}_1 - \dot{H}_z) - (H_1 - H_z)(2H_1 + H_z) = 0 \tag{2.4.107}$$

接下來我們做下面的替換

$$V = a^2 a_z \tag{2.4.108}$$

$$\Delta \equiv (H_1 - H_z) \tag{2.4.109}$$

$$3H = 2H_1 + H_z = \frac{\dot{V}}{V} \tag{2.4.110}$$

Δ 指的就是變化率的差值，則 (2.4.106) 就可以改寫成

$$\dot{\Delta} + 3H\Delta = \left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 \tag{2.4.111}$$

$$\frac{d}{dt}(V\Delta) = \frac{a_z^3}{a^2} \tag{2.4.112}$$

積分後就可以得到

$$\Delta = \frac{\Delta(0)V(0)}{V} + \frac{\int_0^t a_z^3/a^2 dt'}{a^2 a_z} \quad (2.4.113)$$

由上式可看出, 如果 $a(t)$ 、 $a_z(t)$ 以 $\exp[at]$ 的形式膨脹, 則在 t 趨向於 ∞ 時, 第一項就會趨近於零, 在第二項裡亦然。因此我們就可以說在時間趨近無窮大時, H 在各個方向是 趨向相等的。上圖為數值模擬的情況, 可看出 H_1, H_z 在很短的時間內趨近於相等。另外我們也可以將 H_1, H_z 分開做圖, 分別為圖 2.1 以及 2.2

2.4.2 穩定性的分析

在上一節中, 我們得到在時間很久之後, 尺度因子的變化率 H 會趨於相同, 那假設現在我們對 H 作微擾, 是否會導致原本均向的特性消失, 或者是繼續維持均向的特性呢? 假定我們給下面這樣的微擾

$$H_1 = H_0 + \delta H_1 \quad (2.4.114)$$

$$H_z = H_0 + \delta H_z \quad (2.4.115)$$

其中 H_0 代表的是在時間很久後, 趨近於均向時的尺度因子變化率, δH_i 則代表著對兩個方向的 微擾。我們先將場方程式列出:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 - H_1^2 - 2H_1 H_z = -\Lambda \quad (2.4.116)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + (\dot{H}_1 + \dot{H}_z) + (H_1^2 + H_z^2) + H_1 H_z = \Lambda \quad (2.4.117)$$

$$-\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) = \Lambda \quad (2.4.118)$$

第一、二、三式分別為 (2.2.75)、(2.2.93)、(2.4.105)。第二式乘二後把三條方程式相加, 就可得到

$$2\dot{H}_1 + \dot{H}_z + 2H_1^2 + H_z^2 = \Lambda \quad (2.4.119)$$

之後將微擾後的 H_1 以及 H_z 代如上式, 取第一階的微擾項, 就可以得到

$$(2\delta\dot{H}_1 + \delta\dot{H}_z) + 2H_0(2\delta H_1 + \delta H_z) = 0 \quad (2.4.120)$$

將上式積分之後就可得到

$$2\delta H_1 + \delta H_z = \frac{\text{constant}}{a^2} \quad (2.4.121)$$

此式會趨近於零, 因為再時間趨近無窮大時, a^2 也會趨近於無窮大, 因此將 $2\delta H_1 = -\delta H_z$ 帶回 (2.4.119) 積分後就可得到:

$$\delta H_1 = \frac{\text{constant}}{a^2} \rightarrow 0 \quad (2.4.122)$$

當 $t \rightarrow \infty$ 。因此我們得知, 當 H 已是均向時, 儘管給不均向的微擾, 此微擾項再時間夠久後依然會為零^[11]。

2.4.3 數值模擬

我們將場方程式, 以數值模擬的方式求 $a(t), a_z(t)$ 以及 H_1, H_z , 我們也驗證了最後會趨近於同向。我們可清楚看到尺度因子 $a(t)$ 以及 $a_z(t)$ 在時間約在 330 左右時, 就暴脹

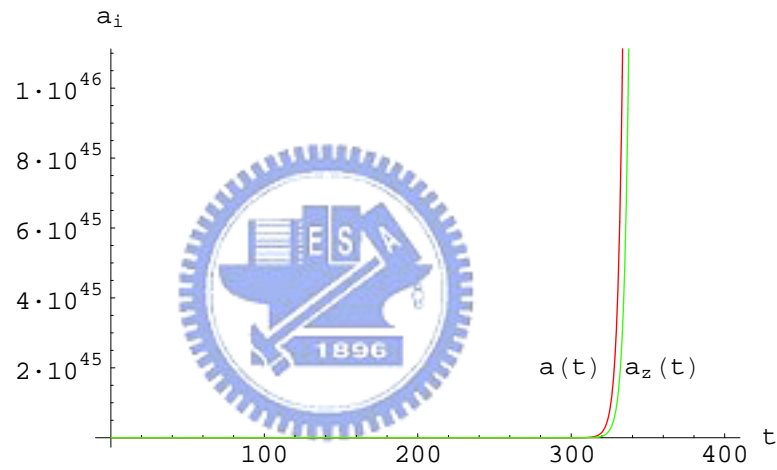


Figure 2.1: 以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。尺度因子 $a(t)$ 以及 $a_z(t)$ 的演化, $\Lambda = 0.3, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi} t_{PL}$

到 10^{46} , 且 $a(t)$ 暴脹的時間要比 $a_z(t)$ 早。

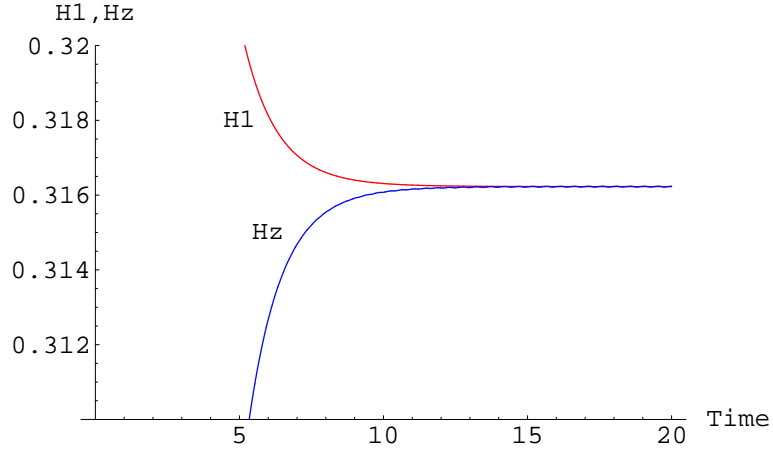


Figure 2.2: 以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。尺度因子變化率 $H_1(t), H_z(t)$ 隨時間的變化, $\Lambda = 0.3, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$

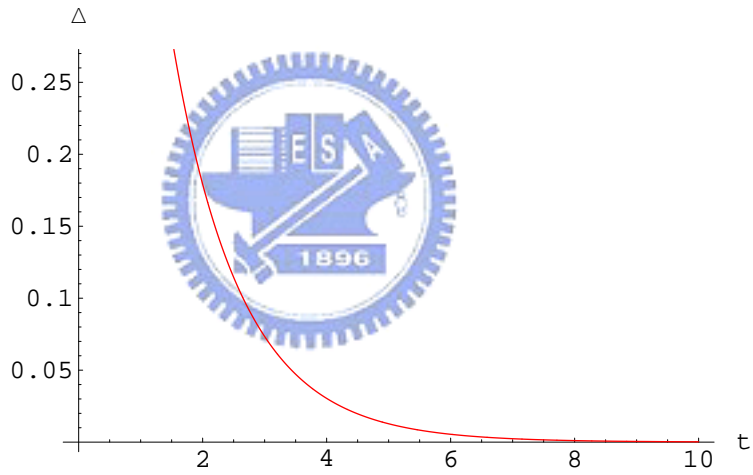


Figure 2.3: 以(2.4.117) 及 (2.4.118) 作圖。非均向因子 $\Delta = H_1(t) - H_z(t)$ 隨時間的差異

2.5 考慮理想流體下的場方程式

一般在討論宇宙模型時，我們常常把重力場的來源，也就是物質分部，考慮成理想流體。其能動張量(energy momentum tensor) T^μ_ν 在理想流體的情況下為：

$$T^0_0 = \rho(t) \tag{2.5.123}$$

$$T^i_i = -p(t) \quad (\text{no sum over } i) \tag{2.5.124}$$

場方程式爲：

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + H_1^2 + 2H_1H_z - \Lambda = \rho(t) \quad (2.5.125)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + (\dot{H}_1 + \dot{H}_z) + (H_1^2 + H_z^2) + H_1H_z - \Lambda = -p(t) \quad (2.5.126)$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) - \Lambda = -p(t) \quad (2.5.127)$$

狀態方程式爲：

$$p(t) = \omega\rho(t) \quad (2.5.128)$$

且由 $D_\mu T^\mu_\nu = 0$ 可以知道：

$$D_\mu T^\mu_\nu = T^\mu_{\nu,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T^\mu_\alpha = 0 \quad (2.5.129)$$

考慮 $\nu = 0$ 的分量則：

$$\dot{\rho}(t) + 3H(1 + \omega)\rho(t) = 0 \quad (2.5.130)$$

可解得

$$\rho(t) = \rho_0 V(t)^{-(1+\omega)} \quad (2.5.131)$$

其中 $V(t) = a^2 a_z, \rho_0$ 爲時間等於零的初始值。場方程式則變爲：

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + H_1^2 + 2H_1H_z - \Lambda = \rho_0 V(t)^{-(1+\omega)} \quad (2.5.132)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + (\dot{H}_1 + \dot{H}_z) + (H_1^2 + H_z^2) + H_1H_z - \Lambda = -\omega\rho_0 V(t)^{-(1+\omega)} \quad (2.5.133)$$

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{a_z}{a^2}\right)^2 + (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) - \Lambda = -\omega\rho_0 V(t)^{-(1+\omega)} \quad (2.5.134)$$

其中當 $\omega = 0 \rightarrow$ 物質主控時期, $\omega = 1/3 \rightarrow$ 輻射主控時期, $\omega = -1 \rightarrow$ 真空主控時期。經由數值模擬畫圖, 我們可以發現, 當宇宙是真空主控時其實, 尺度因子的暴脹速度是最快的。但是不均向性因子 Δ 卻也 遞減最快。其次是輻射主控時期, 再來才是物質時期。另外也可以發現 $a(t), a_z(t)$ 的暴脹速度有顯著的差別。但暴脹率 $H_1(t), H_z(t)$ 卻在短時間內趨向相同。

2.5.1 數值模擬

接下來我們運用數值模擬的方式去比較三種不同時其中, $a(t)$ 與 $a_z(t)$ 的暴脹情形, 以及非均向因子 Δ 的變化狀況。尺度因子在此則是沒有單位的。

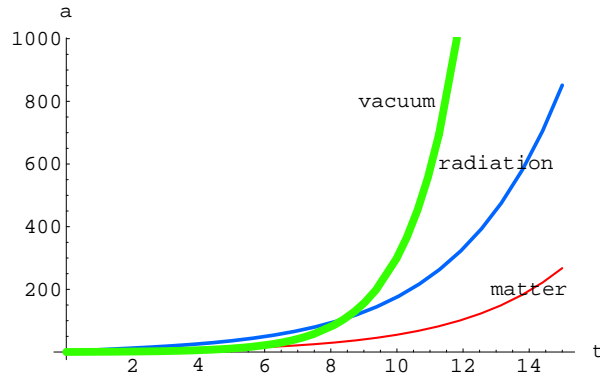


Figure 2.4: 以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。尺度因子 $a(t)$ 在三種不同時期中演化的比較, 初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$

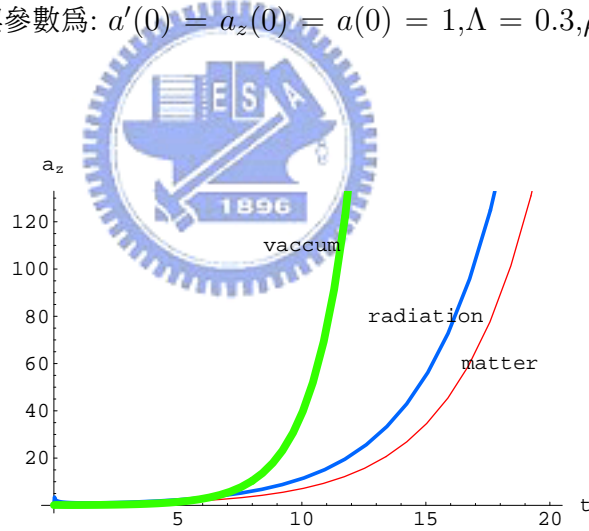


Figure 2.5: 以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。尺度因子 $a_z(t)$ 在三種不同時期中演化的比較, 初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$

下圖為非均向因子在三個時期中，趨向於零速度比較，可看出真空最快，其次為輻射時期，再來為物質時期。

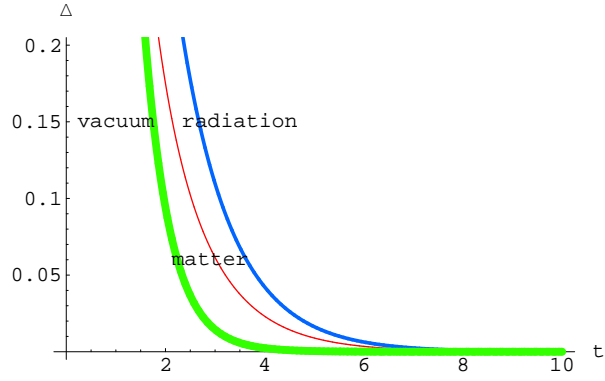


Figure 2.6: 以(2.5.133) 及 (2.5.134) 作圖。非均向性因子在三種不同時期中演化的比較，初使條件與參數為: $a'(0) = a_z(0) = a(0) = 1, \Lambda = 0.3, \rho_0 = 1, \Delta t = 1 = \sqrt{8\pi t_{PL}}$



Chapter 3

Induced Gravity 模型

接下來，我們討論另一種模型，叫做誘發重力 (induced gravity) 模型^{[3][12][13]}。誘發重力源自於量子重力 (quantum gravity)，主要是考慮時空背景的浮現就像是微觀自由度下的平均場近似，類似在 BEC 中的流體力學近似。而在宇宙學中，在大霹靂後當宇宙溫度低於某一臨界溫度時，宇宙發生相變 (phase transition)，且伴隨著自發性的對稱破壞 (spontaneous symmetry breaking)。當溫度遠大於某一零界溫度時，具有對稱性 $V(-\phi) = V(\phi)$ ，且場的真空期望值 $\langle \phi \rangle = 0$ ，一但溫度降至於臨界溫度時， $V(\phi) = -1/2m^2\phi^2 + 1/4\lambda\phi^4$ ，且場的真空期望值變為 $\langle \phi \rangle_{\pm} = \pm(m^2/\lambda)^{1/2}$ ，即發生對稱破壞。此時真正的真空態 (true vacuum) 的場期望值變從原本的 $\langle \phi \rangle = 0$ (False vacuum) 變成 $\langle \phi \rangle_{\pm} = \pm(m^2/\lambda)^{1/2}$ (True vacuum)，我們即是研究在此一情況下，尺度因子的暴脹情形。考慮一較簡單的 Lagrangian 有下面的形式為

$$L = \frac{\epsilon}{2}\phi^2 R - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi) \quad (3.0.1)$$

其中 $V(\phi)$ 為

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \phi_0^2)^2 \quad (3.0.2)$$

λ, ϵ 為無單位的常數，以及 ϕ_0 為常數。在這個模型中，我們引入了 $\phi(x_i, t)$ 這個純量場。但在此我們僅考慮 $\phi(x_i, t) = \phi(t)$ 。

3.1 原新暴脹與渾沌暴脹

考慮上一小節中的位能型式，我們可以做一簡單的圖形，如下圖。圖中的數字並不代表任何意義，僅是要呈現圖形的樣貌。現在我們分析其有可能的動力學性質，可以看到有極值的部分有三個點， $\phi = 0$ 的點即為上節中所提到的假真空態的期望值，而剩下的兩點則為真真空態的期望值。在此模型中，如果假設初始條件 $\phi(0) \rightarrow 0$ ，指的就是宇宙正在發生對稱破壞，溫度正要從臨界溫度 往下降時，暴脹子 ϕ 從假真空態滑落到真真空態，此一機制則稱為原新暴脹 (Ordinary New Inflation)。另一個可能的情形 則為 $\phi(0) >$ 真真空態期望值，亦即從位能的右邊往下落，此一機制稱為渾沌暴脹 (Chaotic Infaltion)。而這兩個機制比較 有趣的地方為，他們的動力學初始狀態均為”緩慢滾動”(slow-rolling)。以半古典的想法就是在初始時，受到很大的摩擦力，導致其滾動的很緩慢，且滾動到最低點時會超過平衡點 (True vacuum)，在此點附近做震盪。在下面幾節中，我們會以數值模擬以及 其近似解看到此一情形。

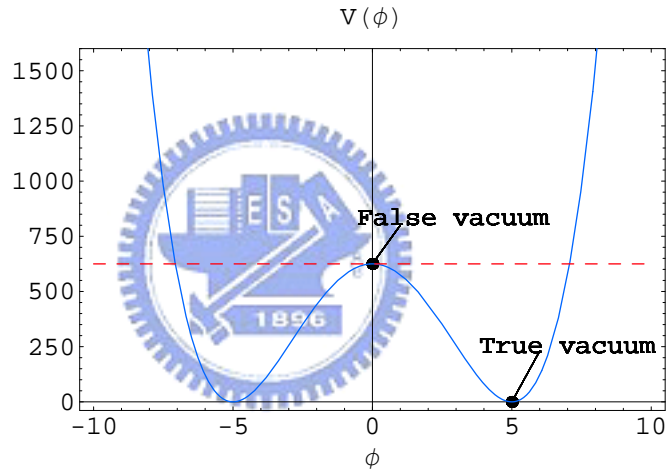


Figure 3.1: $V(\phi)$, 僅是圖示位能井，圖中數字沒有任何意義

3.2 場方程式及近似解

接下來代入我們在(2.2.1) 節中對 g_{00} 變分得到的場方程式通式:

$$L + H_i \left(\frac{d}{dt} + 3H \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i} = H_i \frac{\partial L}{\partial H_i} + \dot{H}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{H}_i} \quad (3.2.3)$$

就可得到場方程式:

$$\varepsilon\phi^2 \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + H_1^2 + 2H_1H_z \right] + 2\varepsilon\phi\dot{\phi}3H + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = V(\phi) \quad (3.2.4)$$

直接對 $a(t)$ 做變分, 則可以得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + H_1^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_z^2 + H_1H_z \right. \\ \left. + 2H_\phi(H_1 + H_z + 2H_\phi) + 2\dot{H}_\phi \right] + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = V(\phi) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

對 ϕ 做變分:

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{g} [\varepsilon\phi R \delta\phi - \partial^a \phi \partial_a \delta\phi - \delta V(\phi)] \quad (3.2.6)$$

上式中的第二項在做分部積分時, 我們用到 $\partial_a(\sqrt{g}\partial^a\phi) = \sqrt{g}(D_a\partial^a\phi)$ 。因此 最後變分得到的方程式為:

$$D_a\partial^a\phi + \varepsilon\phi R - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (3.2.7)$$

因為 ϕ 僅為時間的函數, 所以方程式變為:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \varepsilon\phi R + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (3.2.8)$$

代入黎曼張量張量後:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \varepsilon\phi \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + 2(2\dot{H}_1 + \dot{H}_z + H_z^2 + 3H_1^2 + 2H_1H_z) \right) \\ + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

另外, 我們將作用量對 $a_z(t)$ 做變分, 則可以得到下面這一個方程式:

$$\varepsilon\phi^2 \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) \right] + \dot{\phi}^2 \left(2\varepsilon + \frac{1}{2} \right) + 2\varepsilon\phi(2H_1\dot{\phi} + \ddot{\phi}) = V(\phi) \quad (3.2.10)$$

將方程式 (3.1.5) 稍做改寫, 並且把我們得到的四個方程式整理一下:

$$\epsilon\phi^2 \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + H_1^2 + 2H_1H_z \right] + 2\epsilon\phi\dot{\phi}3H - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = V(\phi) \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon\phi^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + 2H_1^2 + 2\dot{H}_1 + 2\dot{H}_z + 2H_z^2 + 2H_1H_z \right] \\ + \dot{\phi}^2(4\epsilon + 1) + 4\epsilon\phi(\ddot{\phi} + H_1\dot{\phi} + H_z\dot{\phi}) = 2V(\phi) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\epsilon\phi^2 \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 + (2\dot{H}_1 + 3H_1^2) \right] + \dot{\phi}^2 \left(2\epsilon + \frac{1}{2} \right) + 2\epsilon\phi(2H_1\dot{\phi} + \ddot{\phi}) = V(\phi) \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} \epsilon\phi^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a_z}{a^2} \right)^2 - 4\dot{H}_1 - 2\dot{H}_z - 2H_z^2 - 6H_1^2 - 4H_1H_z \right] + \\ (3H)\dot{\phi}\phi + \ddot{\phi}\phi = -\phi \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

四式分別為對 $b, a(t), a_z(t), \phi$ 變分所得到的方程式, 將上面四式直接相加之後, 就可以得到:

$$\frac{(6\epsilon + 1)}{2}(\phi^2)_{,tt} + 3H\frac{(6\epsilon + 1)}{2}(\phi^2)_{,t} = 4V(\phi) - \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.2.15)$$

考慮緩慢滾動的情況, 其實我們指的是下面三式的情況:

$$|\dot{\phi}/\phi| \ll H_i, \quad (3.2.16)$$

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (3.2.17)$$

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \quad (3.2.18)$$

上面的第一個式子告訴意指純量場 ϕ 的變化率遠小於哈伯常數。第二式則是說明動能部分遠小於位能, 因為此處考慮的是 "緩慢" 滾動。第三項則是告訴我們阻尼遠大於加速度。且在求其近似解時, 我們假設 $H_1 \approx H_z$, 因為其不均向因子 $\Delta = H_1 - H_z$ 在很短的時間之內就趨近於零, 因此在這些假設及近似的狀況之下, 我們將 (3.2.11) 與 (3.2.15) 寫成:

$$3H\dot{\phi} = [4V(\phi)/\phi - V'(\phi)]/(1 + 6\epsilon) \quad (3.2.19)$$

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3\epsilon\phi^2} + \frac{a_z^2}{12a^4} \quad (3.2.20)$$

在這邊我們忽略 ϵ 以及 $a_z^2/12a^4$ 比起 $V(\phi)/3\epsilon\phi^2$, 因為其貢獻都相當小, 因此將 H^2 帶成 ϕ 的函數後, 上兩式就可以寫成:

$$\pm \sqrt{\frac{3\lambda}{4\epsilon}} |\phi^2 - \phi_0^2| \dot{\phi} = \lambda(\phi^2 - \phi_0^2)^2 - \lambda\phi^2(\phi^2 - \phi_0^2) \quad (3.2.21)$$

考慮 $\phi(t) > \phi_0$ 也就是 Chaotic Inflation, 方程式變為

$$\pm \sqrt{\frac{3}{4\lambda\epsilon}} \dot{\phi} = -\phi_0^2 \quad (3.2.22)$$

即可解得 $\phi(t) = \phi(0) \mp \sqrt{4\lambda\epsilon/3} \phi_0^2 t$, 在這裡取“-”值, 因為由前述的機制, 渾沌暴脹是隨時間增加而往 ϕ_0 滾動, 因此負的解才符合物理需求。由樣方法, 我們也可解得 Ordinary New inflation 的解為 $\phi(t) = \phi(0) + \sqrt{4\lambda\epsilon/3} \phi_0^2 t$ 。由上面的正負號選取, 可知我們僅選取 $H > 0$ 的部分, 因此:

$$H_i = \frac{d(\ln a_i)}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{12\epsilon}} \frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi} \quad (3.2.23)$$

其中“+”代表的是 $\phi > \phi_0$, “-”代表的是 $\phi < \phi_0$ 。將上式積分之後即可以得到:

$$\frac{a_i(t)}{a_i(0)} = \left(\frac{\phi}{\phi(0)} \right)^{(\epsilon^{-1})/4} \exp \left[\frac{(\phi(0)^2 - \phi^2)}{8\epsilon\phi_0^2} \right] \quad (3.2.24)$$

上面此式即為近似解析解。接下來我們略為估計 λ 以及 ϵ 的值約為多少。當 $\phi = \phi(0)$ 到 $\phi = \phi_0$ 時,

$$\ln \left(\frac{a_*}{a_0} \right) = \frac{\epsilon^{-1}}{4} \ln \left(\frac{\phi_0}{\phi(0)} \right) + \frac{\epsilon^{-1}}{8} (\phi^2(0)/\phi_0^2 - 1)$$

在這裡*表示滑落到低點時, 且我們爲了要解決平坦問題, 必須要求尺度因子在 ϕ 滑落位能低點時, 至少有exp 60倍以上的膨脹, 因此

$$\frac{\epsilon^{-1}}{4} [\ln(\phi_0/\phi(0)) - 1/2] > 60 \quad (3.2.25)$$

在這裡忽略 $\phi^2(0)/\phi_0^2$, 因為僅考慮 $\phi_0 \gg \phi(0)$, 且 $\phi_0 = \epsilon^{-1/2}$, 所以可得到

$$-\frac{1}{240} \ln \phi(0) - \frac{1}{480} > \epsilon + \frac{1}{480} \ln \epsilon \quad (3.2.26)$$

上式即為 ϵ 的限制。另外由 $\phi(t) = \phi(0) + \sqrt{4\lambda\epsilon/3} \phi_0^2 t$ 可知, 當 $\phi(t) = \phi_0$ 時, 且 $\phi_0 = \epsilon^{-1/2}$, 忽略 $\phi(0)$ 不計, 則我們可得到

$$1 = \sqrt{4/3\lambda} t_* \quad (3.2.27)$$

在 Planck 單位下, 暴脹時間維持了大約 $10^8 \sim 10^9$ 個Planck 時間, 因此

$$\lambda \sim 10^{-16} \quad (3.2.28)$$

3.3 數值模擬

我們利用數值模擬的方式，來解出純量場 $\phi(t)$ ，以及尺度因子 $a(t), a_z(t)$ 。在這裡所用的單位為 Planck 單位，時間 $\Delta t = 1$ 對應到 10^{-43} 秒。下面的圖為 Ordinary New inflation 的結果。由這兩張圖中，我們發現純量場 $\phi(t)$ 在時間約到 2×10^8 時開始有

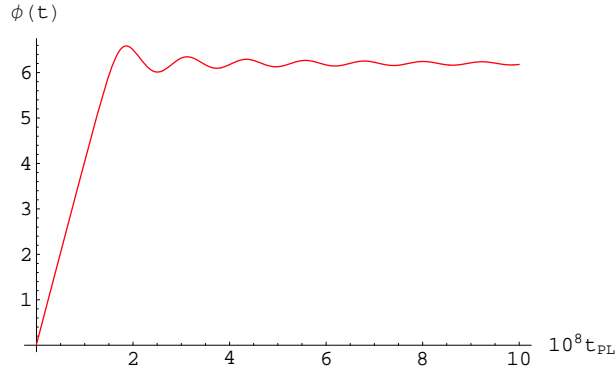


Figure 3.2: 以(3.2.12)、(3.2.13)、(3.2.14) 作圖, $\phi(t)$ 隨時間變化。初始條件以及參數設定為: $\lambda = 4 \times 10^{-17}, \epsilon = 0.026, \phi_0 = 1/\sqrt{\epsilon}, \phi(0) = 0.02, \phi'(0) = 0, \Delta t = 1 = 10^{-43}s, \phi$ 的單位則是 $\sqrt[4]{(8\pi)^{-2}\rho_{PL}}$ 。

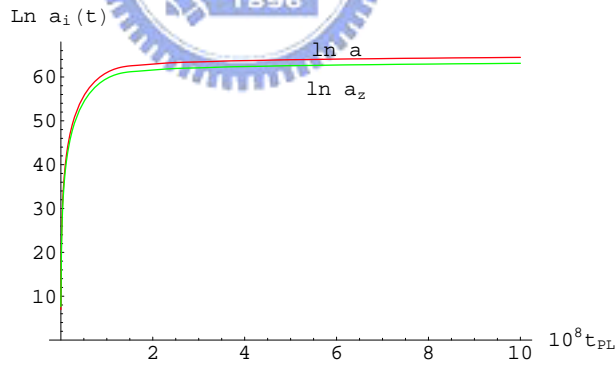


Figure 3.3: $\ln a_i(t)$ 隨時間變化, $\Delta t = 1 = 10^{-43}s$, 初始條件設定為: $a_z(0) = 1, a(0) = 1, a'(0) = 1, a'_z(0) = 1$

震盪，並且趨近於一特定值，此時 $a(t), a_z(t)$ 也由初始值爆脹到 10^{40} 左右，由此可知，純量場的存在，提供了尺度因子爆脹的機制，一旦純量場有震盪產生且趨向一穩定值

時，暴脹隨即趨於穩定成長，此時即表示暴脹場也就是純量場 ϕ 已經從原來所處的假真空態 (False vacuum) 釋放 能量滑落到真空態 (True vacuum)。Chaotic inflation 的結果如圖。類似於 Ordinary New inflation, 比較其暴脹的時間要來 的短一些。

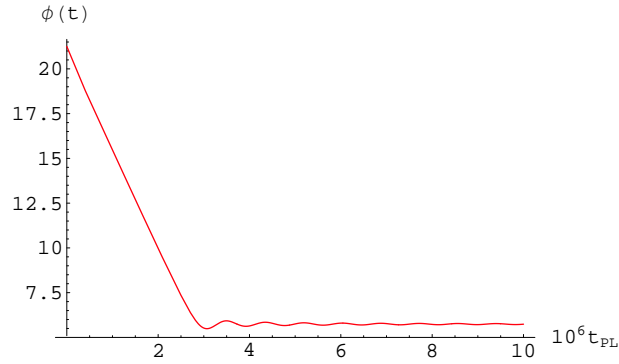


Figure 3.4: 以(3.2.12)、(3.2.13)、(3.2.14) 作圖, $\phi(t)$ 隨時間變化。初始條件以及參數設定為: $\lambda = 10^{-12}, \epsilon = 0.03, \phi_0 = 1/\sqrt{\epsilon}, \phi(0) = 3.7/\sqrt{\epsilon}, \phi'(0) = -0.001, \Delta t = 1 = 10^{-43}s, \phi$ 在這裡的單位則是 $\sqrt[4]{(8\pi)^{-2}\rho_{PL}}$

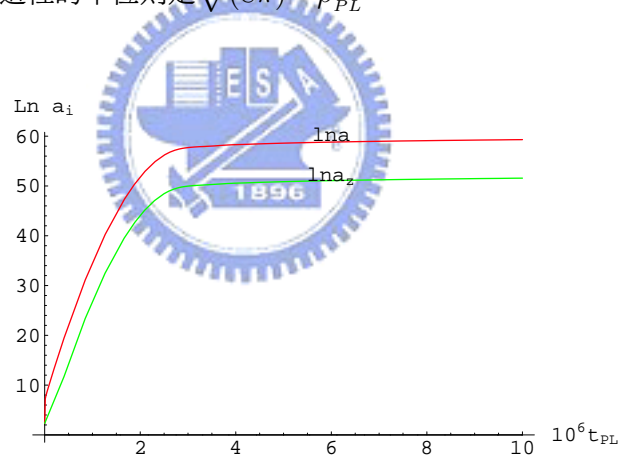


Figure 3.5: $\ln a_i(t)$ 隨時間變化, $\Delta t = 1 = 10^{-43}s$, 初始條件設定為: $a_z(0) = 10, a(0) = 10, a'(0) = 0.289, a'_z(0) = 0.289$

附錄 A

所使用的單位

在這篇論文中, 我們所用的度規正負號為 $(-, +, +, +)$ 。在第一章的簡介中, 我們所設的單位為

$$c = 1 \tag{A.0.1}$$

而在第二章之後的計算, 我們則是取 Planck 單位, 其中

$$8\pi G = c = \hbar = k_B = 1 \tag{A.0.2}$$

其中 G 為牛頓常數, c 為光速, \hbar 為浦朗克常數除上 2π , k_B 為波茲曼常數。下面的表格為 Planck 基本單位



Planck長度	l_{PL}	$(\hbar G/c^3)^{1/2}$	1.6160×10^{-33} cm
Planck質量	m_{PL}	$(\hbar c/G)^{1/2}$	2.1768×10^{-5} g
Planck能量	E_{PL}	$(\hbar c^5/G)^{1/2}$	1.2211×10^{19} GeV
Planck時間	t_{PL}	$(\hbar G/c^5)^{1/2}$	5.3904×10^{-44} s
Planck密度	ρ_{PL}	$c^5/\hbar G^2$	5.1584×10^{93} g/cm ³

注意: 上面的表格僅是將牛頓常數 G 取成1, 必須要乘上 8π 後才是我們這篇論文所使用的單位。

附錄 B

Bianchi Type Space 簡介

B.1 黎曼流形與偽黎曼流形

在黎曼幾何(Riemannian geometry)中,黎曼流形 (M,g) (Riemannian manifold) 是可微分,且空間中每一個點,都有一個度規張量 g ,將其切空間的兩個向量,映射到實數,此即為點積的定義,且隨每一個點平滑地變化。如此一來就可以定義角度,長度,面積,函數的梯度,向量場的散度等等的量。而偽黎曼流形則是黎曼流形的廣義化,其度規張量不一定恆正。廣義相對論就是偽黎曼流形在四維情況下中的一個例子。

B.2 運動群

利用黎曼空間的定義方式,給定一個線段元素(line element),定義一個 n 維空間的度規:

$$ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik} dx_i dx_k \quad (\text{B.2.1})$$

如此一來就可在 S_n 空間中測量弧長。考慮 n 個實數變數 x_1, x_2, \dots, x_n 並且假定這些係數 a_{ik} 第一階與第二階導數都為實數,且是 x 的連續函數,且 ds^2 恆非零,且係數使得微分型式總是正有限。

假使兩個空間 S_n, S'_n 可以一對一的對應,使得線段元素相等,則這兩個空間就被稱為是等距同構的(isometric),幾何性質是全等的。當他們的線段元素僅是差一個倍數,或者是可經由座標轉換而簡化成差一個倍數,則這兩個空間稱做相似的。基本上這兩個空間的幾何性質是相同的,僅是在線性度量單位上的差別。

如果一個空間的等距同構 (isometry) 映射到自己本身 $f : N \rightarrow N$, 則稱做是這個空間的一個運動 (motion)。接下來我們就考慮可連續運動到自己本身的空間, 其轉換的對應方程式會出現任意的參數。而一個空間 S_n 中所有這些運動的集合則成爲一個群 (group)。如果 r 是運動的完備群中的參數數目, 則在每一種情況下, 這個群就會構成一個有限維度連續李群 (finite-dimensional continuous Lie group) G_r , 是由 r 個無限小的轉換所產生的 $(X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f)$ 。而如何決定哪些空間會有運動的連續群, 基本上是經由檢驗所有 ds^2 的形式, 看看是哪一個會具有李群 $G_r \equiv (X_1 f, \dots, X_n f)$ 轉換 ds^2 到它自己。

對於任意的 n , 所有的情形受限於在 S_n 空間中那些數字可以被傳輸, 而帶有最多的自由度: 那麼這個空間就有固定的曲率, 且這個群就會有 $r = n(n+1)/2$ 個參數。只有在 $n = 2$ 時, 也是一般的面 (surface), 我們知道這個問題完整的答案, 且參數的數目也僅能是 1 或 3。第一族的面是唯一一對循環面 (surface of revolution) 是等距同構的; 而第二族的面則是有固定的曲率。

而當我們要指出 $n = 2$ 與 $n = 3$ 的主要差別時, 必須注意到一個要有運動的傳遞群的面, 必定要有固定的曲率, 意指如果一個點可以被到處傳輸, 它必定也要可以在每個點附近被轉動。而另一方面, 在三維空間中, 我們也可用轉換, 傳輸空間中的任何一點, 但是這個空間並不是有固定的曲率, 這些空間允許轉換的傳遞群, 且含有 3 或 4 個參數。而在這些空間中, 哪一種空間只可有一個 G_3 群, 如果我們固定一單一點, 整個空間就會被固定。而允許一個 G_4 群的空間中, 在任一點 P 附近仍有可能有一個連續轉動 G_1 ; 然而, 包含 P 以及在通過 P 的某一條短程線上的所有點維持固定, 因此這些 G_4 群屬於 systatic 群。然後這個空間用一個完全填滿整個空間的短程軸的雙無限大標示, 此外允許一個圖上的一個點可以被傳輸到任何地方的轉換, 仍有可能有繞著這些軸的旋轉。以下就會有一些數學規則的介紹, 當 $n = 4$ 時, 情況就會更複雜許多。

B.3 Killing 方程式

給定一個度規

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik} dx_i dx_k \quad (\text{B.3.2})$$

首先我們先試著找看看怎樣的形式會給出 G_1 群, 而這個群是由下面的無窮小轉換產生

$$Xf = \sum_r^{1\dots n} \xi \frac{\partial f}{\partial x_r} \quad (\text{B.3.3})$$

可以看出, X 是一個微分的算符, Xf 告訴我們 f 在座標下的變化量。因此我們知道 X 作用在 ds^2 時必定要為零, 因為 ds^2 在空間中是一個不變量。所以

$$X(ds^2) = \sum_{i,k} X(a_{ik})dx_i dx_k + \sum_{r,k} a_{rk} dX(x_r) dx_k + \sum_{i,r} a_{ir} dX(x_r) dx_i \quad (\text{B.3.4})$$

因此

$$\begin{aligned} X(ds^2) &= \sum_{i,k,r} \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + \sum_{r,k} a_{rk} d\xi_r dx_k + \sum_{i,r} a_{ir} d\xi_r dx_i \\ &= \sum_{i,k} \left\{ \sum_r \left(\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{rk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \right) \right\} dx_i dx_k \end{aligned} \quad (\text{B.3.5})$$

可以看到必須有 n 個函數 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 要可以滿足 $n(n+1)/2$ 個線性齊次的一階偏微分方程式:

$$\sum_r \left\{ \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{rk} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} \right\} = 0 \quad (\text{B.3.6})$$

其中 $i, k = 1, 2, \dots, n$ 。上式為 ξ 的線性齊次一次方程式, 它們彼此都是線性獨立的, 因為 a_{ik} 的行列式值不是零。此即為 Killing 方程式。

B.4 群的種類

B.4.1 可有 G_1 群的空間

假定空間 S_n 可有經由無窮小的轉換 $Xf = \sum_i \xi_i \partial f / \partial x_i$ 產生的 G_1 運動群。假定群的軌跡是沿著座標 (x_1) , 那麼我們就會有 $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0$, 也就是說 $Xf = \partial f / \partial x_1$. Killing 方程式就變成

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.4.7})$$

因此 $x'_1 = x_1 + \text{constant}$ 就給出了轉換的連續群 G_1 。只要 a_{ik} 不是 x_1 的函數, G_1 就會是運動的完備群 (complete group)。現在我們要找 Bianchi type II 會是什麼樣子。首先, 它所滿足的運動類型:

$$[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = 0, [X_2, X_3]f = X_1 f \quad (\text{B.4.8})$$

由於 G_3 群會含有 $G_2 \equiv (X_1f, X_2f)$ 的子群, 因此我們在這裡假定它是沿著 $x_1 = constant$ 的面運動, 並且 $X_1f = \partial f/\partial x_2, X_2f = \partial f/\partial x_3$ 。則空間的度規就會變成:

$$ds^2 = dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2 dx_3 + \gamma dx_3^2 \quad (\text{B.4.9})$$

其中 α, β, γ 只是 x_1 的函數。現在假定第三個無限小的轉換為 $X_3f = \xi_1 \partial f/\partial x_1 + \xi_2 \partial f/\partial x_2 + \xi_3 \partial f/\partial x_3$, 那麼所要滿足的 Killing 方程式為:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 0 & \alpha \xi_{2,1} + \beta \xi_{3,1} &= 0 \\ \beta \xi_{2,1} + \gamma \xi_{3,1} &= 0 & \alpha' \xi_1 &= 0 \\ \gamma' \xi_1 + 2\beta &= 0 & \beta' \xi_1 + \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4.10})$$

積分後我們就可以得到 (k, l, m 為常數):

$$\alpha = k^2, \quad \beta = hk^2 x_1 + l, \quad \gamma = h^2 k^2 x_1^2 + 2hlx_1 + m$$

帶入 line element 之後

$$ds^2 = dx_1^2 + k^2 dx_2^2 + 2(hk^2 x_1 + l) dx_2 dx_3 + (h^2 k^2 x_1^2 + 2hlx_1 + m) dx_3^2 \quad (\text{B.4.11})$$

做這樣的代換, $x_i \rightarrow x/k, i = 2, 3$ 與 $n^2 = m/k^2 - l^2/k^4$ 後,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2(hx_1 + l/k^2) dx_2 dx_3 + [(hx_1 + l/k^2)^2 + n^2] dx_3^2 \quad (\text{B.4.12})$$

再做這樣的代換, $hx_1 + l/k^2 = ny_1, x_2 = n/hy_2, x_3 = 1/hy_3$ 則

$$ds^2 = n^2/h^2 [dy_1^2 + dy_2^2 + 2y_1 dy_2 dy_3 + (y_1^2 + 1) dy_3^2] \quad (\text{B.4.13})$$

上就是 Bianchi type II 的 line element, n^2/h^2 可以被吸收掉而得到。

B.4.2 九種運動類型

下面列出九種運動的群的類型:

$$(Type I) \quad [X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = [X_2, X_3]f = 0, \quad (B.4.14)$$

$$(Type II) \quad [X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = 0, \quad [X_2, X_3]f = X_1f, \quad (B.4.15)$$

$$(Type III) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1f, \quad [X_2, X_3]f = 0, \quad (B.4.16)$$

$$(Type IV) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1f, \quad [X_2, X_3]f = X_1f + X_2f, \quad (B.4.17)$$

$$(Type V) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1f, \quad [X_2, X_3]f = X_2f, \quad (B.4.18)$$

$$(Type VI) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1f, \quad [X_2, X_3]f = gX_2f, \quad (h \neq 0, 1) \quad (B.4.19)$$

$$(Type VII) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1f, \quad [X_2, X_3]f = 0, \quad (B.4.20)$$

$$(Type VIII) \quad [X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_2f, \quad [X_2, X_3]f = -X_1f + hX_2f \quad (B.4.21)$$

$$(Type IX) \quad [X_1, X_2]f = X_1f, \quad [X_1, X_3]f = 2X_2f, \quad [X_2, X_3]f = X_3f, \quad (B.4.22)$$

$$(Type X) \quad [X_1, X_2]f = X_3f, \quad [X_2, X_3]f = X_1f, \quad [X_3, X_1]f = X_2f, \quad (B.4.23)$$

Bianchi I 到 IX 的 line element:

$$I.ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (B.4.24)$$

$$II.ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 \quad (B.4.25)$$

$$III.ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + 2ne^{x_1} dx_2 dx_3 + dx_3^2 \quad (B.4.26)$$

$$IV.ds^2 = dx_1^2 + e^{x_1} [dx_2^2 + 2dx_2 dx_3 + (x_1^2 + n^2) dx_3^2] \quad (B.4.27)$$

$$V.ds^2 = dx_1^2 + e^{2hx_1} (dx_2^2 + dx_3^2) \quad (B.4.28)$$

$$VI.ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + 2ne^{(h+1)x_1} + e^{2hx_1} dx_3^2 \quad (B.4.29)$$

$$VII.ds^2 = dx_1^2 + e^{-hx_1} \{ (n + \cos vx_1) dx_2^2 + (h \cos vx_1 + v \sin x_1 + hn) dx_2 dx_3 + \left(\frac{2-v^2}{2} \cos vx_1 + \frac{hv}{2} \sin vx_1 + n \right) dx_3^2 \} \quad (B.4.30)$$

$$VIII.ds^2 = dx_1^2 + \sinh^2 x_1 dx_2^2 + [dx_3 + \cosh x_1 dx_2]^2 \quad (B.4.31)$$

$$IX.ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2 + [dx_3 - \cos x_1 dx_2]^2 \quad (B.4.32)$$

附錄 C

較廣義化的度規

我們可考慮一個較廣義化的度規，定義其尺度因子除了是時間的函數以外，另外還是空間中某一座標的函數，這樣一來 我們在做計算的時候便可以直接帶入下面的式子，得到 Γ 符號，其中 $\Delta = A_2^2 - \frac{A_4^4}{A_3^2}$ ，而曲率張量在此較複雜，所以並沒有列出。

$$ds^2 = -B(t)^{-2}dt^2 + A_1^2(r, t)dr^2 + A_2^2(r, t)d\theta^2 + 2A_4^2(r, t)dzd\theta + A_3^2(r, t)dz^2 \quad (\text{C.0.1})$$



$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{B}}{2B^3} \quad (\text{C.0.2})$$

$$\Gamma_{33}^0 = BA_4^2 I_4 \quad (\text{C.0.3})$$

$$\Gamma_{11}^0 = BA_1^2 I_1 \quad (\text{C.0.4})$$

$$\Gamma_{22}^0 = BA_2^2 I_2 \quad (\text{C.0.5})$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}BA_4^2 I_4 \quad (\text{C.0.6})$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{A_2^2}{\Delta} I_3 - \frac{A_4^4}{4A_3^2 \Delta} I_4 \quad (\text{C.0.7})$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{(A_2 A_4)^2}{2\Delta A_3^2} (I_4 - I_2) \quad (\text{C.0.8})$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{\Delta} \left(A_2^2 K_3 - \frac{A_4^4}{4A_3^2} K_4 \right) \quad (\text{C.0.9})$$

$$\Gamma^3_{21} = \frac{A_2^2 A_4^2}{2A_3^2 \Delta} (K_4 - K_2) \quad (\text{C.0.10})$$

$$\Gamma^1_{01} = I_1 \quad (\text{C.0.11})$$

$$\Gamma^1_{11} = K_1 \quad (\text{C.0.12})$$

$$\Gamma^1_{32} = -\frac{A_4^2}{2A_1^2} K_4 \quad (\text{C.0.13})$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{A_3^2}{A_1^2} K_3 \quad (\text{C.0.14})$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{A_2^2 K_2}{A_1^2} \quad (\text{C.0.15})$$

$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2\Delta} \left(A_2^2 I_2 - \frac{A_4^4}{A_3^2} I_4 \right) \quad (\text{C.0.16})$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{A_4^2}{\Delta} K_4 \quad (\text{C.0.17})$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2\Delta} \left(2A_2^2 K_2 - \frac{A_4^4}{2A_3^2} K_4 \right) \quad (\text{C.0.18})$$



參考文獻

- [1] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Archibald Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company Publishers.
- [2] Steven Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, Inc. (1972)
- [3] Edward W. Kolb and Michael S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley Publishing Company(1990).
- [4] Alan H. Guth *Inflation universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, 1980, Phys. Rev. D, V34 N2.
- [5] SINGH and ANIL K. AGRAWAL, *Bianchi Type-II, VIII, and IX in certain new theories of gravitation*, 1991, Astrophysics and Space Science, V191, N1.
- [6] Oktay Aydogdu *Gravitational Energy-momentum Density in Bianchi Type II Space-times*, arXiv,gr-qc/0509047 v4 18 Jan 2006.
- [7] A.Dobado and A. L. Maroto *inflatonless inflation*, 1995, Phys. Rev. D, V52 N4.
- [8] W.F.Kao *Anisotropic higher derivative gravity and inflation universe*, arXiv:hep-th/0605208 v1, (2006).
- [9] W.F.Kao and Ue-Li Pen, *Generalized Friedmann-Robertson-Walker Metric and Redundancy in Generalized Einstein Equation*, 1991, Phys. Rev. D44, 3974-3977.

- [10] W.F.Kao, Ue-Li Pen, Pengjie Zhang, *Friedmann Equation and Stability of Inflationary Higher Derivative Gravity*, Phys. Rev. D63,(2001) 127301.
- [11] W.F. Kao, *Bianchi type I space and the stability of inflationary Friedmann-Robertson-Walker space*, , hep-/0104166, Phys. Rev. D64(2001) 107301.
- [12] Frank S. Accetta, David J. Zoller, Michael S. Turner, *Induced-gravity inflation*, 1985, Phys. Rev. D, V31 N12T.
- [13] A. Zee *Broken symmetry of gravity*,Physical Review Letters, Volume 42, Number7.
- [14] Michael P. Ryan, Jr Ane Lawrence C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press Published (1975).

