

國立交通大學

工業工程與管理學系

碩士論文

以資料包絡模型分析專案管理中時間成本權衡



**A data envelopment analysis model to select time-cost trade-offs in
project management**

研究生：張仁碩

指導教授：劉復華 教授

中華民國九十六年六月

以資料包絡模型分析專案管理中時間成本權衡之選擇

**A data envelopment analysis model to select time-cost
trade-offs in project management**

研 究 生：張仁碩

Student : Jen-Shou Chang

指 導 教 授：劉復華

Advisor : Fuh-Hwa F. Liu



A Thesis

Submitted to Department of Industrial Engineering & Management

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of

Master

in

Industrial Engineering & Management

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

以資料包絡模型分析專案管理中時間成本權衡之選擇

學生：張仁碩

指導教授：劉復華 博士

國立交通大學工業工程與管理學系碩士班

中文摘要

在專案管理的文獻概分為專案排程與專案控管兩個各自發展之領域，連結這兩個領域之相關研究較少。本研究首先求得專案排程中時間與成本權衡之各種方案與其要徑。我們提出六項充分代表專案排程與控管中對於管理層面上各種不同之特性與意義的指標：網路敏感度、專案期程、專案總成本、要徑價值比、淨現值與閒置時間價值。我們建立一資料包絡模型對各方案做綜合性的績效評選，此模型以差額模式加入虛擬權重限制以符合指標之特性與管理涵義。

關鍵字：資料包絡法；要徑法

A data envelopment analysis model to select time-cost trade-offs in project management

Abstract

The literature on project management mainly deals with either project scheduling or project monitoring/controlling. The relationships between these two issues, however, are rarely studied. In this study, we first generate all the possible time-cost trade-off alternatives and obtain their critical paths. Then for each alternative, we collect the values of the six indices: network sensitivity, project duration, project total cost, critical path value ratio, net present value, and slack time value. These six values reveal the property of the alternative in scheduling and the managerial tasks such as monitoring and controlling. The aim of this research is to assess those alternatives with the six indices. A data envelopment analysis (DEA) model is developed. The model is a slack-based measure with some side constraints for the virtual weights of the indices.

Keywords: Data envelopment analysis ; Critical path method



誌謝

自入學就讀交大，學生就決定要向劉復華教授學習。在學的兩年期間，學生從零到現在，一點一滴皆由劉老師慢慢指導而成。不只在學業上或是待人處事上，老師皆為學生的良師與益友。在這畢業時刻，學生要再次感謝劉老師與學生打拼的點點滴滴，想起當時挑燈夜戰，早上10點到晚上12點辛苦的日子，雖然累，但卻是值得的。學生很高興也很自豪的在這畢業時刻跟大家說，當初選擇跟劉老師是正確的抉擇，能在這人生重要的學習階段，與劉老師共事與學習。

而在口試期間，更承蒙中興大學應用數學系王國雄教授及逢甲大學工業工程與系統管理學系劉浚明教授提供寶貴的意見。

其次要感謝的是諸位同窗和學長姐的協助與鼓勵，也要感謝我的父母親的教誨與支持。最後願將這份論文完成的喜悅，與所有幫助過我的人一起分享。

學生張仁碩 謹誌

于交通大學工業工程與管理學系

目錄

中文摘要	iii
Abstract	iv
誌謝	v
圖目錄	viii
表目錄	ix
一 前言	1
二 趕工問題文獻回顧	2
三 績效指標與綜合績效分數	4
3.1 網路敏感度(x_{1j}).....	4
3.2 專案期程(x_{2j}).....	4
3.3 專案總成本(x_{3j}).....	5
3.4 淨現值(x_{4j}).....	5
3.5 要徑價值比(y_{1j}).....	5
3.6 閒置時間價值(y_{2j}).....	5
3.7 綜合績效分數 P_j	5
四 例子	6
五 資料包絡法相關文獻	8
5.1 CCR模式.....	9
5.2 差額模式(slacks-based measurement, SBM).....	10
5.3 虛擬權重確定區域限制.....	12
六 我們的方法	13
七 結果與分析	14
八 未來研究	18

文献 19



圖目錄

圖一：專案網路圖	2
圖二：時間成本權衡曲線	4
圖三： PSA_{19} 之專案網路圖	6
圖四： PSA_{19} 之細部資料	7



表目錄

表一：專案管理例子的數據	2
表二：各PSA與其要徑	8
表三：各PSA之績效指標數據	8
表四：計算結果	15
表五：PSAs之投影點數據	16
表六：PSAs之權重與虛擬權重比	17



一 前言

專案管理包含了專案規劃與專案控管兩部分。要徑法 (Critical Path Method, CPM) 是一種將專案結構轉化成網路圖以排程規劃專案的手法 (Hillier & Lieberman, 2001)。利用要徑法，專案經理人可以事先將專案拆成各個較細小的活動，並且定義各活動所需時程、各活動先後順序以及各活動所需耗費之資源。將整體專案以網路方式呈現其結構，則可分析各活動之最早開始、最早結束、最晚開始、最晚結束等之時間以及專案總時程以及專案要徑。要徑法則存在另一個趕工問題，此問題假設各活動皆可投入更多的成本以縮短時程。有一種趕工問題研究目標是以最小成本在特定之完工期限內，分配各活動所需時程。

另一種趕工問題研究目標是求得此專案所有的可行完工期限內之最小成本，專案管理者將之進行時間與成本的權衡分析。由於此問題在文獻大多是探討如何打破其假設或者是改進演算之效率，並未對趕工之後的專案結構作分析與討論 (Khang & Myint, 1999)。實務上管理者對於做專案排程之分析時，除時間與成本的考量之外，仍有多方面的考量。

在專案控管部分，實獲值管理系統 (Earned value management system, EVMS) 是一個較常見的手法 (Nicholas, 2001)。在 Kim et al. (2003) 中提到使用 EVM 做專案控管，CPM 是一個互補的排程手法，CPM 提供了專案在規劃時期的一種排程工具，而 EVM 則是提供了專案在控管時期的管理工具，但是其中存在著某些值得討論的問題。

Brown (1985) 討論 CPM 的閒置時間 (slack time) 與 EVM 中 Schedule Performance Index (SPI) 和 Cost Performance Index (CPI) 在不同的狀況下，對於管理上有著不同的涵義。Kim & Ballard (2002) 則是討論到對於使用 EVM 做專案控管，如果專案結構層級越複雜，也就是活動之間相互影響層級越大，評估結果容易出現缺失。鍾智安 (2004) 則討論到對於不同條件下之 CPM 網路圖，使用 EVM 是否會造成評估上的缺失，而他們提出了三項指標，要徑比例、要徑價值比與活動風險，使用模擬程式模擬不同指標下之網路圖，再以變異數分析討論哪項指標會影響專案的控管評估結果。

由上述文獻中我們可發現，使用 EVM 做專案控管時會因專案結構的不同，而造成評估上的缺失，因此對於趕工問題所產生的時間成本最佳權衡解時，是否應該考量到專案網路結構上的不同，對於專案控管上的影響。

Ahuja & Thiruvengadam (2004) 在回顧專案管理的文獻時，將其文獻分成數類，其中專案排程與專案控管各是一大類，對於此兩類的連結較無深入探討。因此本研究也希望藉此分析，將專案排程與控管做一結合。我們首先求得專案排程中時間成本權衡之各種最佳方案與其要徑。我們提出六項充分代表專案排程與控管中對於管理層面上各種不同之特性與意義的指標：網路敏感度、專案期程、專案總成本、要徑價值比、淨現值與閒置時間價值。

針對這六項指標做綜合性的績效評估，使專案規劃管理者對各方案進行評選與分析，本研究構建一資料包絡法 (Data Envelopment Analysis, DEA) 模型作為分析之工具，在模型中我們加入了虛擬權重限制結合差額模式以符合指標特性與問題背景。

第二章介紹趕工問題之相關文獻，第三章為績效指標說明與綜合績效分數，第四章是例子說明，第五章是 DEA 相關文獻，第六章是方法論，第七章是結果與分析，最後則是討論與未來研究。

二 趕工問題文獻回顧

De et al. (1997) 證明趕工問題為 NP hard，大部份相關之研究在探討改進演算效率與變更原始假設 (Burns et al., 1996; Demeulemeester et al., 1996; Demeulemeester et al., 1998)。De et al. (1995) 有完整的文獻回顧，後續相關文獻也皆為討論演算方法，對於專案結構之研究並未受到重視。

以圖一之專案網路圖為例說明，各活動之資料列在表一，先定義下列符號：

N_k : 活動 $k, k=1, \dots, K$ (K 為活動總數),

T_k : 活動 k 開始時間,

N_k^{nt} : 活動 k 正常作業時間,

N_k^{ct} : 活動 k 趕工作業時間,

N_k^{nc} : 活動 k 正常作業成本,

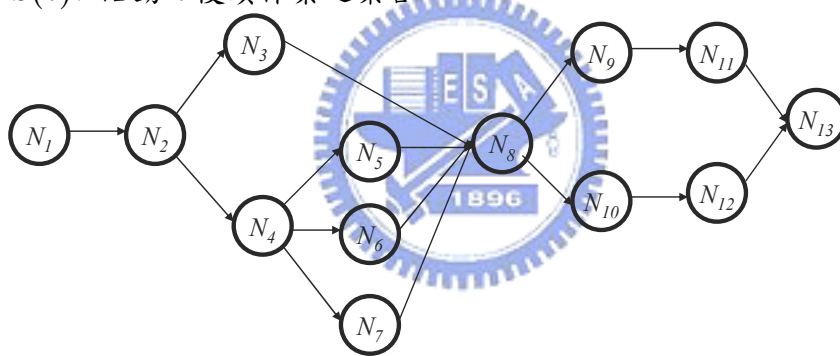
N_k^{cc} : 活動 k 趕工作業成本,

v_k^{cd} : 活動 k 趕工天數,

N_k^{cs} : 活動 k 之每日趕工成本, $N_k^{cs} = (N_k^{cc} - N_k^{nc}) / (N_k^{nt} - N_k^{ct})$

D_j : 對於第 j 個權衡解之專案交期

$S(k)$: 活動 k 後續作業之集合



圖一：專案網路圖

表一：專案管理例子的數據

Node N_k	Data						
	Normal Time N_k^{nt}	Normal Cost N_k^{nc}	Crash Time N_k^{ct}	Crash Cost N_k^{cc}	Allowable Crash $N_k^{nt} - N_k^{ct}$	Crash Cost/day N_k^{cs}	Successors $S(k)$
N_1	3	\$5,000	2	\$6,000	1	\$1,000	N_2
N_2	4	\$12,000	3	\$15,000	1	\$3,000	$N_3 N_4$
N_3	3	\$3,000	2	\$3,500	1	\$500	N_8
N_4	10	\$20,000	6	\$25,000	4	\$1,250	$N_5 N_6 N_7$
N_5	8	\$8,000	5	\$10,000	3	\$667	N_8
N_6	4	\$11,000	3	\$12,000	1	\$1,000	N_8
N_7	6	\$3,500	4	\$4,500	2	\$500	N_8
N_8	8	\$5,000	5	\$6,500	3	\$500	$N_9 N_{10}$
N_9	5	\$8,000	3	\$9,500	2	\$750	N_{11}
N_{10}	5	\$4,000	2	\$5,500	3	\$500	N_{12}
N_{11}	4	\$7,000	2	\$8,500	2	\$750	N_{13}
N_{12}	2	\$2,000	1	\$2,500	1	\$500	N_{13}
N_{13}	4	\$10,000	2	\$12,000	2	\$1,000	

以活動 1, N_1 為例, 其正常所需耗費時間為 3 天, 而必須花費 5000 仟元成本, 但是可以選擇趕工, 將此活動壓縮到 2 天, 而必需花費 6000 仟元成本, 並且活動 1 執行完畢必需緊接著執行活動 2, 以此類推。

當研究目標是求得此專案各種可行的完工期限之方案及其所需之最小成本, 專案管理者再進行各種方案時間與成本的權衡分析。

我們必須先求得有多少種可行的完工期限之方案, 即最大可能期程與最小可能期程。以 (M1) 進行求解, 若要求得最小可能期程 D^{min} , 則 (M1) 中之 N_k^l 以 N_k^{cl} 之值帶入; 若要求得最大可能期程 D^{max} , 則 N_k^l 以 N_k^{ml} 之值帶入。

(M1)

$$D^* = \text{Minimum } T_K + N_K^l - T_1 \quad (1)$$

$$s.t \quad T_{S(k)} - T_k \geq N_k^l, \quad k=1, \dots, K, \quad \forall S(k), \quad (1.1)$$

$$T_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K. \quad (1.2)$$

目標式(1)為專案最後一個活動之結束時間扣掉第一個活動之開始時間, 也就代表著最短之專案總期程。限制式(1.1)代表著每個活動 k 之各項後續活動之開始時間 $T_{S(k)}$ 必須大於活動 k 之完成時間, 即活動 k 開始時間加上活動 k 之所需時間。

若以表一 N_k^{cl} N_k^{ml} 及 $S(k)$ 三欄之數據代入(M1), 可得 D^{min} 為 28 天, D^{max} 為 46 天。即此專案可能最短 28 天到最長 46 天之間完成, 共有 19 個可能方案。我們以下列(M2) (Ragsdale, 2004)線性規劃模型求解, 求出各方案 j 之最小趕工成本 (TCC) $_j$ 條件下此專案的排程, 其中 $j=1, 2, \dots, 19$ 。目標式(2)為極小化總趕工成本, 第一條限制式(2.1)為專案活動之先後順序限制, 第二條(2.2)為最後一個活動必須在專案交期前結束, 第三條(2.3)為可趕工之範圍限制。

(M2)

$$\text{Min } (TCC)_j = \sum_{k=1}^K v_k^{cd} N_k^{cs} \quad (2)$$

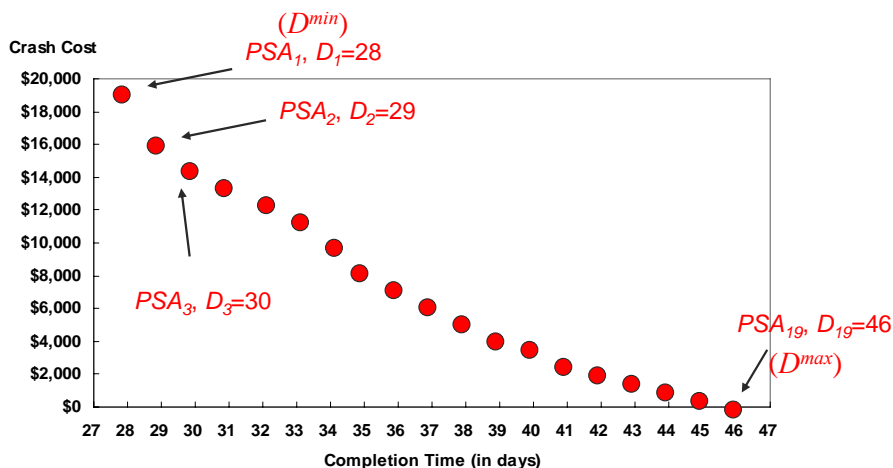
$$s.t \quad T_{S(k)} - T_k \geq N_k^{ml} - v_k^{cd}, \quad k=1, \dots, K, \quad \forall S(k), \quad (2.1)$$

$$T_K + N_K^{ml} - v_K^{cd} \leq D_j, \quad (2.2)$$

$$v_k^{cd} \leq N_k^{ml} - N_k^{cl}, \quad k=1, \dots, K, \quad (2.3)$$

$$v_k^{cd}, T_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K. \quad (2.4)$$

將表一之相關數據代入(M2), 並將 D_1, D_2, \dots, D_{19} , 分別以 28、29、30、...、46 代入(M2), 求解可得完整的時間成本權衡曲線描繪出來, 如圖二。



圖二：時間成本權衡曲線

對於每個時間成本最佳權衡解，我們以Project Schedule Alternatives (PSA) 作為名稱，假設有 n 個方案，則定 PSA_j ， j 的範圍從 $1, \dots, n$ 並且 $n = D^{max} - D^{min} + 1$ 。因此依序第 28 天之方案為 PSA_1 ，第 29 天為 PSA_2 ，以此類推，到第 46 天為 PSA_{19} 。

三 績效指標與綜合績效分數

我們將介紹下列六項指標：網路敏感度、專案期程、專案總成本、要徑價值比、淨現值與閒置時間價值。對每一個 PSA_j 我們都可以求得此六項指標的值，求得這些指標之後，我們將介紹綜合性的績效衡量公式，以整合成單一績效分數。下列為指標說明與定義。

3.1 網路敏感度(x_{1j})

即是指 PSA_j 的要徑活動的總個數，定義如下。

$$x_{1j} = r_j \quad (3)$$

其中： $r_j = PSA_j$ 要徑上活動之個數。

假設我們定單一活動延遲機率為 p ，而整個專案會延遲的機率為 P ，可推導出 $P=1-(1-p)^{r_j}$ 也就是表示要徑中越多活動，整個專案延遲風險就會越大。管理上也是如此，要徑上的活動為管理者所注重之活動。若有兩個方案，一個有三個要徑另一個有七個要徑，相較之下管理三個要徑將會容易許多。

3.2 專案期程(x_{2j})

即是指 PSA_j 所需要的總時間，在一般狀況而言，專案所需時間是越小越好。因此定義此指標為 PSA_j 最後一個活動之開始時間加上所需時間。

$$x_{2j} = T_{Kj} + N_{Kj}^{time} \quad (4)$$

其中： $N_{kj}^{time} = PSA_j$ 中活動 k 之作業時間

$T_{kj} = PSA_j$ 中活動 k 之開始作業時間

3.3 專案總成本(x_{3j})

即是指 PSA_j 所需要的總成本，在一般狀況而言，專案所需成本是越短越好。

$$x_{3j} = \sum_{k=1}^K N_{kj}^{cost} \quad (5)$$

其中： N_{kj}^{cost} = PSA_j 中活動 k 之成本

3.4 淨現值(x_{4j})

Elmaghraby & Herroelen (1990) 和 Grinold (1972) 討論過以最大淨現值為目標之專案排程問題。在本研究中我們假設成本皆在各活動開始動工之日借取貸款，因此此項指標對各方案來說是越小越好。

$$x_{4j} = \sum_{k=1}^K N_{kj}^{cost} * \beta^{T_{kj}}, \quad \frac{1}{(1+\zeta)} = \beta \quad (6)$$

其中： β =折扣變數、 ζ =代表利率

3.5 要徑價值比(y_{1j})

每個專案中都會有“不能延遲”的要徑，管理人員須對要徑嚴加控管防止日程延誤，雖然要徑是不能延遲的，但並非就一定是重要活動。例如新款機車須取得政府發放之安全審驗合格證明後才可量產，新機種評價則為其平行作業，假若合格證之申請平均須時 90 天，實際成本為文件往來費用 6000 元，但評價工作須 50 天，總成本約 30 萬元，依傳統觀點合格證申請為要徑活動，但其價值卻遠低於非要徑的評價活動，故傳統要徑嚴格控管有時會造成管理上的盲點。萬一只顧要徑而忽略了其他非要徑上的活動，反而會造成多餘的損失。以此項指標代表專案的重要程度，定義如下：

$$y_{1j} = \frac{\sum_{k \in R_j} N_{kj}^{time} N_{kj}^{cost}}{\sum_{k=1}^K N_{kj}^{time} N_{kj}^{cost}} \quad (7)$$

其中： R_j = PSA_j 中要徑上活動之集合。

鍾智安 (2004) 中提到，此項指標為望大特性。

3.6 閒置時間價值(y_{2j})

我們將閒置時間乘上其活動每日所需成本，並加總代表此項指標之公式。閒置時間係指某專案活動可以有限度的延遲而不會影響次工作的開始時間。但是卻無法看出其閒置時間的價值如何，而每日所需成本可以代表此項活動資源調度上的多寡，越高表示資源耗用越多調度越不易。若有兩方案相比，此項指標數值越高表示方案越有資源調度上的彈性，若指標數值越低表示此方案之活動皆為緊繃狀態，只要稍有延遲對整個專案影響甚大，定義如下：

$$y_{2j} = \sum_{k=1}^K N_{kj}^{slack} \frac{N_{kj}^{cost}}{N_{kj}^{time}} \quad (8)$$

其中： N_{kj}^{slack} = PSA_j 中活動 k 之閒置時間

3.7 綜合績效分數 P_j

以上述六項指標作為評估 PSA_j 綜合性的評比，令 $v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2$ 代表著各指

標的權重。以下列績效公式求得綜合績效分數 P_j :

$$P_j = \frac{u_1 y_{1j} + u_2 y_{2j}}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + v_3 x_{3j} + v_4 x_{4j}}, j=1, \dots, n. \quad (9)$$

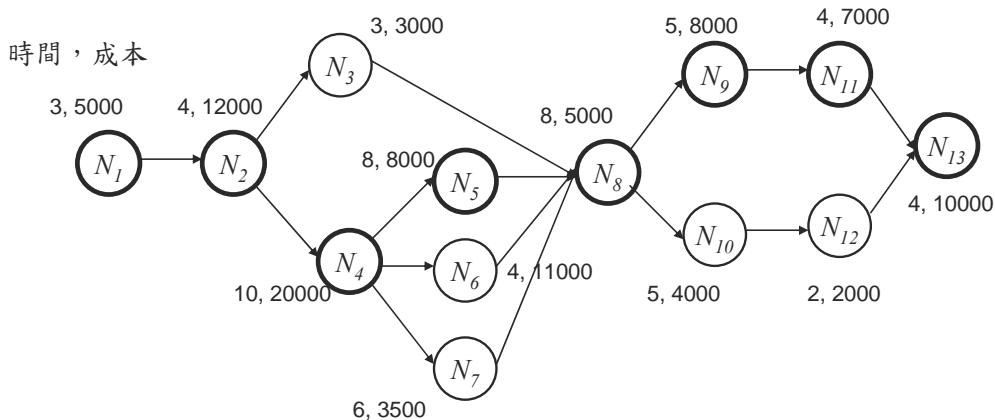
由於績效分數越大越好，而指標性質望大的乘上權重後放在分子項，指標性質望小的乘上權重後放在分母項。望大指標值越大 P_j 值越大，望小指標值越小 P_j 值越大。

四 例子

以(M2)計算 PSA_{19} ， $D_{19}=46$ 之最小趕工成本，其線性規劃模式(M3)如下:
(M3)

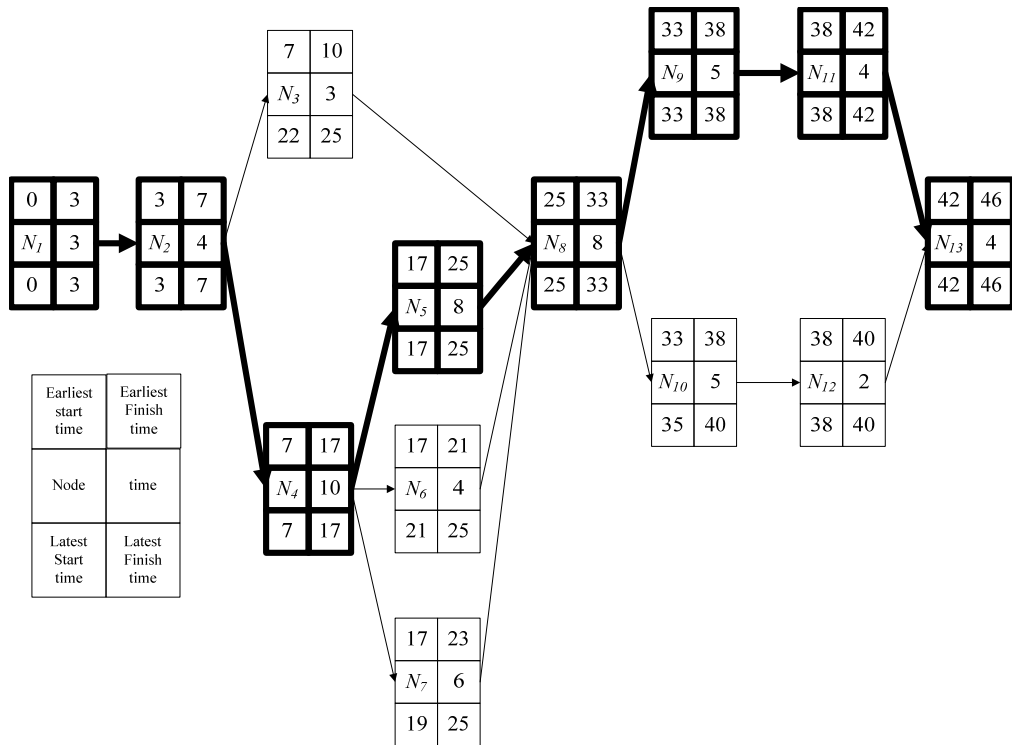
$$\begin{aligned} (TCC)_{19} = \text{Min } & 1000v_1^{cd} + 3000v_2^{cd} + 500v_3^{cd} + 1250v_4^{cd} + 667v_5^{cd} + 1000v_6^{cd} \\ & + 500v_7^{cd} + 500v_8^{cd} + 750v_9^{cd} + 500v_{10}^{cd} + 750v_{11}^{cd} + 500v_{12}^{cd} + 1000v_{13}^{cd} \quad (10) \\ \text{s.t. } & T_2 - T_1 \geq 3 - v_1^{cd}, \quad (10.1) \quad T_8 - T_5 \geq 8 - v_5^{cd}, \quad (10.8) \quad T_{13} - T_{11} \geq 4 - v_{11}^{cd}, \quad (10.15) \\ & T_3 - T_2 \geq 4 - v_2^{cd}, \quad (10.2) \quad T_8 - T_6 \geq 4 - v_6^{cd}, \quad (10.9) \quad T_{13} - T_{12} \geq 2 - v_{12}^{cd}, \quad (10.16) \\ & T_4 - T_2 \geq 4 - v_2^{cd}, \quad (10.3) \quad T_8 - T_7 \geq 6 - v_7^{cd}, \quad (10.10) \quad T_{13} + 4 - v_{13}^{cd} \leq 46, \quad (10.17) \\ & T_8 - T_3 \geq 3 - v_3^{cd}, \quad (10.4) \quad T_9 - T_8 \geq 8 - v_8^{cd}, \quad (10.11) \\ & T_5 - T_4 \geq 10 - v_4^{cd}, \quad (10.5) \quad T_{10} - T_8 \geq 8 - v_8^{cd}, \quad (10.12) \\ & T_6 - T_4 \geq 10 - v_4^{cd}, \quad (10.6) \quad T_{11} - T_9 \geq 5 - v_9^{cd}, \quad (10.13) \\ & T_7 - T_4 \geq 10 - v_4^{cd}, \quad (10.7) \quad T_{12} - T_{10} \geq 5 - v_{10}^{cd}, \quad (10.14) \\ & v_1^{cd} \leq 1, \quad (10.18) \quad v_2^{cd} \leq 1, \quad (10.19) \quad v_3^{cd} \leq 1, \quad (10.20) \quad v_4^{cd} \leq 4, \quad (10.21) \quad v_5^{cd} \leq 3, \quad (10.22) \quad v_6^{cd} \leq 1, \quad (10.23) \\ & v_7^{cd} \leq 2, \quad (10.24) \quad v_8^{cd} \leq 3, \quad (10.25) \quad v_9^{cd} \leq 2, \quad (10.26) \quad v_{10}^{cd} \leq 3, \quad (10.27) \quad v_{11}^{cd} \leq 2, \quad (10.28) \quad v_{12}^{cd} \leq 1, \quad (10.29) \\ & v_{13}^{cd} \leq 2, \quad (10.30) \quad \forall v_k^{cd}, \forall T_k \geq 0. \quad (10.31) \end{aligned}$$

利用Microsoft Office Excel的Solver計算，得到活動 N_k 的最佳趕工天數為 v_k^{cd*} ， $k=1, \dots, 19$ 。我們可以得到下列資訊，以 N_1 為例，其活動時間 $N_1^{nt} - v_1^{cd*} = 3$ 天，而所需成本 $N_1^{nc} + v_1^{cd*} * N_1^{cs} = 5$ 仟元。以此類推， PSA_{19} 中所有活動之時間與成本標示在下圖三之各節點上。



圖三: PSA_{19} 之專案網路圖

可以將所有活動之成本相加，計算出總成本為 98500。並可由前推法及後推法算得到圖四與粗體線所表示之要徑，有 8 個活動在要徑上。



圖四: PSA_{19} 之細部資料

PSA_{19} 之資料整理於表二之底列。以相同方法可以得到 $PSA_1 \sim PSA_{18}$ 之資料，詳見表二各列。

PSA_{19} 之另外三項之指標值計算如下列算式(11)、(12)與(13)。所得結果列於表三 PSA_{19} 之列中。

$$x_{4,19} = 5000 + 12000 * (1 + \zeta)^{-3} + 23000 * (1 + \zeta)^{-7} + 22500 * (1 + \zeta)^{-17} + 5000 * (1 + \zeta)^{-25} + 12000 * (1 + \zeta)^{-33} + 9000 * (1 + \zeta)^{-38} + 10000 * (1 + \zeta)^{-42} \quad (11)$$

，其中 ζ 設為 0.0274

$$y_{1,19} = (3 * 5000 + 4 * 12000 + 10 * 20000 + 10 * 20000 + 8 * 8000 + 8 * 5000 + 5 * 8000 + 4 * 7000 + 4 * 10000) / (3 * 5000 + 4 * 12000 + 3 * 3000 + 10 * 12000 + 8 * 8000 + 4 * 11000 + 6 * 3500 + 8 * 5000 + 5 * 8000 + 5 * 4000 + 4 * 7000 + 2 * 2000 + 4 * 10000) = 0.829. \quad (12)$$

$$y_{2,19} = 3000 / 3 * 15 + 11000 / 4 * 4 + 3500 / 6 * 2 + 4000 / 5 * 2 + 2000 / 2 * 2 = 30766.6. \quad (13)$$

以相同方法可以得到 $PSA_1 \sim PSA_{18}$ 之資料，整理於表三各列中。

表二：各 PSA 與其要徑

PSA_j	Time(x_{2j})	Cost(x_{3j})	Critical Paths	Critical Nodes(x_{1j})
PSA_1	28	117500	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_2	29	114500	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_3	30	113250	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_4	31	112000	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_5	32	110750	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_6	33	109500	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_7	34	108250	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_8	35	107000	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_9	36	105833.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_{10}	37	104833.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_{11}	38	103833.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_{12}	39	102833.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$
PSA_{13}	40	102083.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{14}	41	101333.3	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$ $N_1-N_2-N_4-N_7-N_8-N_{10}-N_{12}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_7, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{15}	42	100666.7	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{16}	43	100000	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{17}	44	99500	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{18}	45	99000	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$
PSA_{19}	46	98500	$N_1-N_2-N_4-N_5-N_8-N_9-N_{11}-N_{13}$	$N_1, N_2, N_4, N_5, N_8, N_9, N_{11}, N_{13}$

表三：各 PSA 之績效指標數據

PSA_j	Index						PSA_j	Index					
	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	y_{1j}	y_{2j}		x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	y_{1j}	y_{2j}
1	11	28	117500	117111	0.883	10750	11	11	38	103833	103336	0.902	18500
2	11	29	114500	114086	0.884	10750	12	11	39	102833	102346	0.903	18500
3	11	30	113250	112821	0.887	11750	13	9	40	102083	101600	0.861	20300
4	11	31	112000	111574	0.890	11750	14	9	41	101333	100854	0.862	22100
5	11	32	110750	110324	0.891	11750	15	8	42	100666	100180	0.826	26433
6	11	33	109500	109058	0.894	12750	16	8	43	100000	99506	0.827	30766
7	11	34	108250	107792	0.896	13750	17	8	44	99500	99001	0.828	30766
8	11	35	107000	106527	0.898	14750	18	8	45	99000	98496	0.829	30766
9	11	36	105833	105354	0.900	18500	19	8	46	98500	97991	0.829	30766
10	11	37	104833	104363	0.901	18500							

若知權重 $v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2$ 以 (9) P_j 之公式就可衡量 PSA_j 之綜合績效。下一章介紹求取權重的方法。

五 資料包絡法相關文獻

資料包絡法相關文獻可分為三類，依序以下列三節做回顧。

5.1 CCR 模式

Charnes et al. (1978) 提出CCR模式(M4)，其目的在於以 m 個投入指標和 s 個產出指標評量 n 個決策單位 (Decision Making Unit, DMU) 的方法。當某一決策單位被評量時，稱之為主角，一般以 DMU_o 表示。其中 u_r 、 v_i 分別代表第 r 個產出項與第 i 個投入項之權重， x_{ij} 、 y_{rj} 分別代表第 j 個決策單位之第 i 個投入項與第 r 個產出項。對於評量 DMU_o 的績效，以下列模式(M4)表示之，其中 $o = 1, \dots, n$ ，亦即此模式需進行 n 次：

(M4)

$$E_o^* = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s y_{ro} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{io} v_i} \quad (14)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (14.1)$$

$$u_r \geq \varepsilon > 0 \quad r = 1, \dots, s, \quad (14.2)$$

$$v_i \geq \varepsilon > 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (14.3)$$

$$\varepsilon : \text{non - Archimedean small number.} \quad (14.4)$$

其目標式之值 $\frac{\sum_{r=1}^s y_{ro} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{io} v_i}$ 為 DMU_o 的績效公式，即決定一組權重，以使績效值為最大。當績效值為1時，稱為相對其他決策單位有效率，小於1時稱為相對無效率。限制式(14.1)表示各決策單位之績效值不超出1， ε 為一極小之正值，稱之為非阿基米德數 (non-Archimedean small number)。其中投入與產出指標，可藉由目標式了解投入指標為望小性指標，指標數值越小績效越高，而產出指標為望大性指標，指標數值越大績效越高，符合我們所提出之 P_j 之公式(9)。

由於(M4)為分數型數學規劃無法求解，需轉成線性規劃問題，如(M5)。

(M5)

$$\text{Max} \quad \sum_{r=1}^s y_{ro} u_r \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^m x_{io} v_i = 1, \quad (15.1)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15.2)$$

$$u_r \geq \varepsilon > 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad (15.3)$$

$$v_i \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (15.4)$$

(M5)轉對偶模式，即(M6)。

(M6)

$$\text{Max } \theta_o - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (16)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{io} \theta_o - s_i^-, \quad i = 1, \dots, m, \quad (16.1)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_{ro} + s_r^+, \quad r = 1, \dots, s, \quad (16.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \geq 0, \quad (16.3)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (16.4)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s. \quad (16.5)$$

(M6)模式之目標式(16)為主角 DMU_o 以投入為導向時投影至生產前緣之射線係數。限制式(16.1)、(16.2)代表主角 DMU_o 之投入產出皆受限於所有DMUs之生產集中， s_r^+ 代表第 r 項產出之短缺， s_i^- 則代表第 i 項投入之超額。當 $\theta_o^* = 1$ 與 $s_r^+ = s_i^- = 0$ 時，我們就稱此 DMU_o 為高效率，若 $\theta_o^* < 1$ 或者 $\theta_o^* = 1$ 但 s_r^+ 或 s_i^- 有值時，則此 DMU_o 則為非高效。

5.2 差額模式(slacks-based measurement, SBM)

不同於傳統CCR模式，Tone (2001)提出主要以產出短缺 s_r^+ 及投入超額 s_i^- 作為衡量績效之主要目標，如公式(17)。

$$\omega_o = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\frac{x_{io} - s_i^-}{x_{io}} \right)}{m} \bigg/ \frac{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{ro} + s_r^+}{y_{ro}} \right)}{s} \quad (17)$$

公式(17)之分母項為主角 DMU_o 補上產出短缺之平均比例(產出需再增加之值)，分子為減除投入超額之投入平均比例(投入需再減少之值)。分子與分母之比例值為每一單位之產出量須消耗之投入量。(M7)目標式(18)為求此比例值之最小，第一組限制式(18.1)為主角 DMU_o 與每一項投入指標 i 之值減除投入超額將落

在全部DMU所形成之線性組合上，即 $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{io} - s_i^-$ 。第二組限制式(18.2)為主

角 DMU_o 與每一項產出指標 r 之值補上產出短缺將落在全DMU所形成之線性組合上，即 $\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_{ro} + s_r^+$ 。

符號 λ_j 為 DMU_j 在評量 DMU_o 時所賦予之權重。若求出之解 λ_j^* 為正值，則 DMU_j 為高效率，且為 DMU_o 改善時的參考對象之一。

(M7)

$$\omega_o^* = \text{Min} \frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}} / m}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{y_{ro}} / s} \quad (18)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{io} - s_i^-, \quad i = 1, \dots, m, \quad (18.1)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j = y_{ro} + s_r^+, \quad r = 1, \dots, s, \quad (18.2)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (18.3)$$

$$s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad (18.4)$$

$$s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s. \quad (18.5)$$

由於(M7)為非線性模式，故先將目標式(18)之分母部分乘上變數 t ，並固定為 1 而轉換成(M8)：

(M8)

$$\text{Min} \quad t - \sum_{i=1}^m \frac{ts_i^-}{x_{io}} / m \quad (19)$$

$$s.t. \quad t + \sum_{r=1}^s \frac{ts_r^+}{y_{ro}} / s = 1, \quad (19.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} t \lambda_j = tx_{io} - ts_i^-, \quad i = 1, \dots, m, \quad (19.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} t \lambda_j = ty_{ro} + ts_r^+, \quad r = 1, \dots, s, \quad (19.3)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (19.4)$$

$$s_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad (19.5)$$

$$s_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s, \quad (19.6)$$

$$t > 0. \quad (19.7)$$

再將(M8)中指定

$$S_i^- = s_i^- t \quad (20)$$

$$S_r^+ = s_r^+ t \quad (21)$$

$$\Lambda_j = t \lambda_j \quad (22)$$

則可改寫如下列線性數學模型(M9)：

(M9)

$$\text{Min } t - \sum_{i=1}^m \frac{S_i^-}{x_{io}} / m \quad (23)$$

$$\text{s.t. } t + \sum_{r=1}^s \frac{S_r^+}{y_{ro}} / s = 1, \quad (23.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \Lambda_j = t x_{io} - S_i^-, \quad i = 1, \dots, m, \quad (23.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \Lambda_j = t y_{ro} + S_r^+, \quad r = 1, \dots, s, \quad (23.3)$$

$$\Lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad (23.4)$$

$$S_i^- \geq 0, i = 1, \dots, m, \quad (23.5)$$

$$S_r^+ \geq 0, r = 1, \dots, s, \quad (23.6)$$

$$t > 0. \quad (23.7)$$

以(M9)為依據所轉換之對偶數學模型如下。

(M10)

$$\text{Max } \xi_o \quad (24)$$

$$\text{s.t. } \xi_o + \sum_{i=1}^m v_i x_{io} - \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \quad (24.1)$$

$$- \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (24.2)$$

$$v_i \geq \frac{1}{m x_{io}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (24.3)$$

$$u_r \geq \frac{\xi_o}{s y_{ro}}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (24.4)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (24.5)$$

因為 CCR 模式會使用水平/垂直射線來假設效率前緣曲線，有時就會發生投入/產出不同的 DMU 但產生相同績效值的衝突情形。SBM 直接以差額方式避除此一衝突，使績效值更準確的被評估及相對比較。一般而言，以上述 SBM 模式衡量績效時，所求得之績效值不會大於 CCR 模式所求得之績效值。

5.3 虛擬權重確定區域限制

Wong & Beasley (1990)最早提出此方法，而 Sarrico & Dyson (2004) 改良此方法提出虛擬權重確定區域限制。對於決策者上對下之評估時，若使用原始 CCR 模式，評估結果可能違反決策者之評估理念，對於某些投入或產出指標所賦予之權重不合決策者所偏好。因此在 DEA 模式中，我們可加入下列限制，依照決策者之理念，設定不同參數以符合其決策理念之評估結果。

$$\sum_{i=1}^m a_{iw} x_{ij} v_i + \sum_{r=1}^s b_{rw} y_{rj} u_r \geq k_w, \quad w = 1, \dots, W, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25)$$

上述(25)為通式，依照決策者不同之決策理念，則可再細分成三種類型。

六 我們的方法

我們所使用的DEA模型是綜合上述相關文獻之方法，首先我們將SBM之對偶(M10)加入虛擬權重限制(25)。如下列模式，在評量主角 o 的績效時，以下列模式(M11)表示之，其中 $o = 1, \dots, n$ ，亦即此模式需進行 n 次：

(M11)

$$\text{Max } \xi_o \quad (26)$$

$$\text{s.t. } \xi_o + \sum_{i=1}^m v_i x_{io} - \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \quad (26.1)$$

$$- \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (26.2)$$

$$v_i \geq \frac{1}{mx_{io}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (26.3)$$

$$u_r \geq \frac{\xi_o}{sy_{ro}}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (26.4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{iw} x_{ij} v_i + \sum_{r=1}^s b_{rw} y_{rj} u_r \geq k_w, \quad w = 1, \dots, W, \quad j = 1, \dots, n, \quad (26.5)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (26.6)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s. \quad (26.7)$$

再將此(M11)轉對偶，模式如下：

(M12)

$$\Phi_o^* = \text{Min } t - \sum_{i=1}^m \frac{S_i^-}{x_{io}} \Big/ m - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W k_w \rho_{wj} \quad (27)$$

$$\text{s.t. } t + \sum_{r=1}^s \frac{S_r^+}{y_{ro}} \Big/ s = 1, \quad (27.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \Lambda_j = tx_{io} - S_i^- - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W a_{iw} x_{ij} \rho_{wj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (27.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \Lambda_j = ty_{ro} + S_r^+ + \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W b_{rw} y_{rj} \rho_{wj}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (27.3)$$

$$\Lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (27.4)$$

$$S_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (27.5)$$

$$S_r^+ \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad (27.6)$$

$$\rho_{wj} \geq 0, \quad w = 1, \dots, W, \quad j = 1, \dots, n, \quad (27.7)$$

$$t > 0. \quad (27.8)$$

(M12)為最終我們使用評估 PSA_j 之模式。計算模式(M12)我們可以求得 Λ_j^* 、 S_r^{+*} 、 S_i^{-*} 、 t^* 與 ρ_{wj}^* 。必須要將 Λ_j^* 、 S_r^{+*} 、 S_i^{-*} 與 ρ_{wj}^* 除以 t^* 以還原原始變數 λ_j^* 、 s_r^{+*} 、 s_i^{-*} 與 η_{wj}^* 。

七 結果與分析

而本研究對於虛擬權重限制也提出解釋力較強之模式，模式如下：

$$\frac{1}{s}(1-\delta_r^l) \leq \frac{y_{rj}u_r}{\sum_{r=1}^s y_{rj}u_r} \leq \frac{1}{s}(1+\delta_r^u), \quad r=1,\dots,s, \quad j=1,\dots,n, \quad (28)$$

$$\frac{1}{m}(1-\delta_i^l) \leq \frac{x_{ij}v_i}{\sum_{i=1}^m x_{ij}v_i} \leq \frac{1}{m}(1+\delta_i^u), \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n \quad (29)$$

對於決策者只需決定各指標佔投入或產出的上下限範圍如何，調整 δ_r^l 、 δ_r^u 、 δ_i^l 與 δ_i^u 即可。

而本研究數據假設如下：

$\delta_i^u=2.2$ 、 $\delta_i^l=0.2$ 、 $\delta_r^u=0.4$ 、 $\delta_r^l=0.4$ 與 $W=12$ ，可將限制式(28)與(29)改寫成

$$0.3 \leq \frac{y_{rj}u_r}{\sum_{r=1}^s y_{rj}u_r} \leq 0.7, \quad r=1,\dots,s, \quad j=1,\dots,n, \quad (30)$$

$$0.2 \leq \frac{x_{ij}v_i}{\sum_{i=1}^m x_{ij}v_i} \leq 0.8, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n, \quad (31)$$

並可將(30)與(31)改寫成虛擬權重限制(25)之形式。若以 $r=1$ 項為例，由於 $s=2$ 可以改寫如下：

$$\Rightarrow \begin{cases} -0.3y_{1j}u_1 + 0.7y_{2j}u_2 \geq 0 \\ 0.7y_{1j}u_1 - 0.3y_{2j}u_2 \geq 0 \end{cases} \quad (32)$$

可依此推導出 a_{iw} 、 b_{rw} 與 k_w 矩陣如下：

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & \overbrace{1 & 2 & 3 & 4}^i \\ a_{iw} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 12 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ 0.8 & -0.2 & 0.8 & 0.8 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & -0.2 \\ 0.8 & 0.8 & -0.2 & 0.8 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} & & \overbrace{1 & 2}^r \\ b_{rw} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 12 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.3 & 0.7 \\ 0.7 & -0.3 \\ 0.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{matrix} & k_w = 0 \end{array} \quad (33)$$

以此 a_{iw} 與 b_{rw} 數據與表三 x_{ij} 與 y_{rj} 數據代入(M12)，求解得到 Λ_j^* 、 S_r^{+*} 、 S_i^{-*} 、 t^* 與 ρ_{wj}^* ，並可獲得(M12)對偶模型(M11)各變數最佳值 u_r^* ， $r=1,\dots,s$ ； v_i^* ， $i=1,\dots,m$ 。

將 Λ_j^* 、 S_r^{+*} 、與 S_i^{-*} 除以 t^* 以還原(20)~(22)原始變數 λ_j^* 、 s_r^{+*} 、與 s_i^{-*} 。 ρ_{wj}^* 除以 t^* 以 η_{wj}^* 表示之。以各 PSA_j 分別作為主角 o 時，計算各項數據整理於表四之各列。

表四：計算結果

PSA_j	Variables													
	λ_{16}^*	$\eta_{2,19}^*$	$\eta_{4,1}^*$	$\eta_{6,19}^*$	$\eta_{8,19}^*$	$\eta_{9,2}^*$	$\eta_{12,2}^*$	s_1^{-*}	s_3^{-*}	s_4^{-*}	s_1^{+*}	s_2^{+*}	t^*	Φ_o^*
1	1.016	0.70	0	0.50	0.50	0.16	0	0	0	0	0	19309	0.527	0.527
2	1.013	0.68	0	0.45	0.45	0.18	0	0	0	0	0	19090	0.530	0.530
3	1.016	0.66	0	0.42	0.42	0	0.18	0	0	0	0	18184	0.564	0.564
4	1.020	0.63	0	0.38	0.38	0.17	0	0	0	0	0	18319	0.562	0.562
5	1.024	0.61	0	0.35	0.35	0.17	0	0	0	0	0	18475	0.560	0.560
6	1.027	0.59	0	0.31	0.31	0.17	0	0	0	0	0	17588	0.592	0.592
7	1.031	0.57	0	0.28	0.28	0.17	0	0	0	0	0	16720	0.622	0.622
8	1.035	0.55	0	0.24	0.24	0.16	0	0	0	0	0	15868	0.650	0.650
9	0.951	0.53	0	0	0	0.43	0	0	21213	21149	0	7525	0.831	0.751
10	0.969	0.51	0	0	0	0.38	0	0	17927	17883	0	8472	0.814	0.747
11	0.987	0.48	0	0	0	0.32	0	0	14640	14581	0	9452	0.797	0.744
12	1.006	0.46	0	0	0	0.27	0	0	11353	11315	0	10411	0.780	0.741
13	0.930	0	0	0	0	0.35	0	1.558	9060	9036	0	5718	0.877	0.803
14	0.859	0	0.18	0	0	0.57	0	2.532	19752	19682	0	0	1	0.839
15	0.920	0	0.11	0	0	0.25	0	0.885	11290	11249	0	0	1	0.920
16	1	0	0	0	0.00	0.00	0	0.000	0	0	0	0	1	1
17	1.004	0	0.04	0	0	0.02	0	0.052	6	0	0.006	0	0.996	0.995
18	1.007	0	0.07	0	0	0.03	0	0.105	12	0	0.012	0	0.993	0.989
19	1.011	0	0.11	0	0	0.05	0	0.157	18	0	0.019	0	0.989	0.984

*未列出之其他變數值均為 0

以此例子，我們可以了解到假設決策者對於各指標之決策理念符合我們所提出之限制如(30)與(31)，經由DEA模型(M12)分析出來 PSA_{16} 為最符合決策者之方案，由表四最後一行可看出其綜合分數為 1 績效最高。

而 DEA 分析中，可以找到每一個非高效之 PSA 在包絡面上之投影點，各指標之值計算公式如下：

$$\tilde{x}_{1j} = x_{1j} - s_1^{-*} - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W a_{1w} x_{1j} \eta_{wj}^*, \quad (34)$$

$$\tilde{x}_{2j} = x_{2j} - s_2^{-*} - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W a_{2w} x_{2j} \eta_{wj}^*, \quad (35)$$

$$\tilde{x}_{3j} = x_{3j} - s_3^{-*} - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W a_{3w} x_{3j} \eta_{wj}^*, \quad (36)$$

$$\tilde{x}_{4j} = x_{4j} - s_4^{-*} - \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W a_{4w} x_{4j} \eta_{wj}^*, \quad (37)$$

$$\tilde{y}_{1j} = y_{1j} + s_1^{+*} + \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W b_{1w} y_{1j} \eta_{wj}^*, \quad (38)$$

$$\tilde{y}_{2j} = y_{2j} + s_2^{+*} + \sum_{j=1}^n \sum_{w=1}^W b_{2w} y_{2j} \eta_{wj}^*. \quad (39)$$

以 PSA_{19} 中 $r=1$ 項產出為例，由表三與表四可得知 $y_{1j}=0.828$ 、 $s_1^{+*}=0.019$ 、 $\eta_{9,2}^*=0.045$ 、 $b_{1,9}=-0.3$ ，其他變數為 0。其投影點計算式如下：

$$\tilde{y}_{1j} = 0.828 + 0.019 + (-0.3) * 0.045 \cong 0.84 \quad (40)$$

各 PSA_j 之投影點各項指標值整理如表五。由於 PSA_{16} 績效為 1，其參考點數據應等同於原始數據，因電腦進位計算而有些許誤差。

表五 PSAs 之投影點數據

PSA_j	Index						PSA_j	Index					
	\tilde{x}_{1j}	\tilde{x}_{2j}	\tilde{x}_{3j}	\tilde{x}_{4j}	\tilde{y}_{1j}	\tilde{y}_{2j}		\tilde{x}_{1j}	\tilde{x}_{2j}	\tilde{x}_{3j}	\tilde{x}_{4j}	\tilde{y}_{1j}	\tilde{y}_{2j}
1	8.13	43.70	101636	101134	0.84	31270	11	7.90	42.46	98739	98252	0.82	30379
2	8.10	43.55	101271	100772	0.84	31158	12	8.05	43.25	100573	100077	0.83	30943
3	8.13	43.70	101636	101135	0.84	31270	13	7.44	40	93023	92564	0.77	28620
4	8.16	43.86	102005	101502	0.84	31383	14	6.87	36.92	85861	85438	0.71	26417
5	8.19	44.02	102373	101868	0.85	31497	15	7.36	39.54	91956	91503	0.76	28292
6	8.22	44.18	102737	102231	0.85	31609	16	8	43	100000	99507	0.83	30767
7	8.25	44.33	103102	102594	0.85	31721	17	8.03	43.16	100374	99879	0.83	30882
8	8.28	44.49	103467	102956	0.86	31833	18	8.06	43.32	100748	100252	0.83	30997
9	7.61	40.88	95069	94600	0.79	29250	19	8.09	43.48	101123	100624	0.84	31112
10	7.75	41.67	96904	96426	0.80	29814							

而在傳統 CCR 模式中，投影點對應於原始資料可視為改善目標，即為 $\tilde{x}_{ij} \leq x_{ij}$ 投入應減少， $\tilde{y}_{rj} \geq y_{rj}$ 產出應增加。但在本研究中加入了虛擬權重限制(28)與(29)，將使投影點之投入值不一定會比原始投入小，投影點之產出值不一定會比原始產出大。

以公式(38)為例，可參考公式(40)得知 b_{1w} 帶有負值，因此 \tilde{y}_{1j} 不一定恆大於 y_{1j} 。出現此狀況可解釋為主角 DMU_o 為了符合虛擬權重限制之條件，因此投入間、產出間與投入產出之間可能出現權衡互換之狀況，在此條件下找尋其最佳之改善目標。以 PSA_1 為例，其 \tilde{x}_{1j} 、 \tilde{x}_{2j} 、 \tilde{x}_{3j} 與 \tilde{x}_{4j} 為 8.13、43.7、101636 與 101134，但是其原始資料 x_{1j} 、 x_{2j} 、 x_{3j} 與 x_{4j} 為 11、28、117500 與 117111； \tilde{y}_{1j} 與 \tilde{y}_{2j} 為 0.84 與 31270，但是其原始資料 y_{1j} 與 y_{2j} 為 0.8833 與 10750。其投影點之投入並無全部小於原始投入，此虛擬權重限制之下，模式選擇增加 x_{2j} 以改進績效，也選擇減少 y_{1j} 並增加 y_{2j} 以改進績效。

而為了討論其虛擬權重我們定下列變數 H_{ij} 與 G_{rj} 代表各指標之虛擬權重比，並整理於表六。

$$H_{ij} = x_{ij} v_i^* / \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i^*, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n, \quad (41)$$

$$G_{rj} = y_{rj} u_r^* / \sum_{r=1}^s y_{rj} u_r^*, \quad r=1, \dots, s, \quad j=1, \dots, n, \quad (42)$$

表六 PSAs 之權重與虛擬權重比

PSA_j	權重與虛擬權重比					
	v_{1j}^* (H_{1j})	v_{2j}^* (H_{2j})	v_{3j}^* (H_{3j})	v_{4j}^* (H_{4j})	u_{1j}^* (G_{1j})	u_{2j}^* (G_{2j})
1	0.033900 (0.276)	0.011791 (0.244)	0.000003 (0.240)	0.000003 (0.240)	0.695584 (0.700)	0.000025 (0.300)
2	0.034083 (0.277)	0.011855 (0.254)	0.000003 (0.234)	0.000003 (0.235)	0.699344 (0.700)	0.000025 (0.300)
3	0.033189 (0.276)	0.011544 (0.262)	0.000003 (0.231)	0.000003 (0.231)	0.680986 (0.682)	0.000024 (0.318)
4	0.033082 (0.275)	0.011507 (0.270)	0.000003 (0.227)	0.000003 (0.228)	0.678788 (0.682)	0.000024 (0.318)
5	0.032959 (0.274)	0.011464 (0.277)	0.000003 (0.224)	0.000003 (0.224)	0.676264 (0.683)	0.000024 (0.317)
6	0.032107 (0.273)	0.011168 (0.285)	0.000003 (0.221)	0.000003 (0.221)	0.658797 (0.666)	0.000023 (0.334)
7	0.031286 (0.272)	0.010882 (0.293)	0.000003 (0.218)	0.000003 (0.218)	0.641937 (0.649)	0.000023 (0.351)
8	0.030494 (0.271)	0.010607 (0.300)	0.000002 (0.214)	0.000002 (0.214)	0.625689 (0.634)	0.000022 (0.366)
9	0.027917 (0.269)	0.009307 (0.293)	0.000002 (0.219)	0.000002 (0.219)	0.573591 (0.580)	0.000020 (0.420)
10	0.027768 (0.267)	0.009107 (0.295)	0.000002 (0.219)	0.000002 (0.219)	0.570823 (0.580)	0.000020 (0.420)
11	0.027615 (0.266)	0.008901 (0.296)	0.000002 (0.219)	0.000002 (0.219)	0.567993 (0.580)	0.000020 (0.420)
12	0.027487 (0.265)	0.008712 (0.297)	0.000002 (0.219)	0.000002 (0.219)	0.565650 (0.581)	0.000020 (0.419)
13	0.027778 (0.231)	0.008285 (0.306)	0.000002 (0.231)	0.000002 (0.231)	0.559106 (0.546)	0.000020 (0.454)
14	0.027778 (0.233)	0.007908 (0.302)	0.000002 (0.233)	0.000002 (0.233)	0.552536 (0.525)	0.000019 (0.475)
15	0.031250 (0.228)	0.008284 (0.317)	0.000002 (0.228)	0.000002 (0.228)	0.577252 (0.470)	0.000020 (0.530)
16	0.031250 (0.207)	0.010620 (0.378)	0.000003 (0.207)	0.000003 (0.207)	0.631576 (0.433)	0.000022 (0.567)
17	0.031250 (0.217)	0.008610 (0.328)	0.000003 (0.217)	0.000003 (0.238)	0.600826 (0.433)	0.000021 (0.567)
18	0.031250 (0.217)	0.008557 (0.334)	0.000003 (0.217)	0.000003 (0.232)	0.596991 (0.433)	0.000021 (0.567)
19	0.031250 (0.217)	0.008506 (0.340)	0.000003 (0.217)	0.000003 (0.226)	0.593299 (0.433)	0.000021 (0.567)

由上表可看出， H_{1j} 、 H_{2j} 、 H_{3j} 與 H_{4j} 皆未達到原始設定之上限值 0.8，對於設定上限值可依下限值推算出其界限。若已知下限值，可推導第 q 項指標之 H_{qj}

上限，用 1 扣除 $\sum_{i=1, i \neq q}^m \frac{1}{m} (1 - \delta_i^l)$ ，以本研究(31)為例，由於各指標下限皆為 0.2，因此各指標上限即為 $1 - (0.2 + 0.2 + 0.2) = 0.4$ 。

而 G_{1j} 與 G_{2j} 對於 PSA_1 與 PSA_2 則達到下限值 0.3 與上限值 0.7。因此在此問題中，對於制定不同 δ_r^l 與 δ_r^u 則可能出現不同之結果。管理者應對於專案領域之不同，調整 δ_r^l 、 δ_r^u 、 δ_i^l 與 δ_i^u 使限制式(28)與(29)更符合決策者之需求。

八 未來研究

在分析各 PSA 中，還是有數項問題存在：

第一點是績效指標我們只提出六項，對於不同領域之專案或許有其他重要的指標我們並未考慮進去。

第二點是在評估中，若修改不同條件之虛擬權重限制，則有可能會有多組 PSA_j 其綜合績效分數皆為 1，都是最佳方案。而此問題應屬於 DEA 之後續研究範圍，可參考 Angulo-Meza & Lins (2002) 整理出來有關 DEA 分析之排序研究回顧。

第三點是對於本研究所提出之概念，前提假設是專案管理者對於專案資訊可定為確定性資料，因此可以使用 CPM 做規劃手法，當面對不確定性資料時，例如以 PERT 作為專案排程之方法時，可能必須提出不同之 DEA 模型與績效指標來做分析。



文獻

1. 鍾智安, 2004。「專案要徑特性對實獲值影響之研究」, 國防管理學院後勤管理研究所碩士論文。
2. Ahuja, V., Thiruvengadam V., 2004. Project scheduling and monitoring current research status. *Construction Innovation* 4, 19-31.
3. Angulo-Meza, L., Lins, M.P.E., 2002. Review of method for increasing discrimination in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research* 116(1), 225-242.
4. Brown, J.W., 1985. Evaluation of projects using critical path analysis and earned value in combination. *Project Management Journal* 16, 59-63.
5. Burns, S.A., Liu, L., Feng, C.W., 1996. The LP/IP method for construction time-cost trade-off analysis. *Construction Management and Economics* 14, 265-276.
6. Charnes, A.A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
7. De, P., Dunne, E.J., Ghosh, J.B., Wells, C.E., 1995. The discrete time-cost tradeoff problem revisited. *European Journal of Operational Research* 81, 225-238.
8. De, P., Dunne, E.J., Ghosh, J.B., Wells, C.E., 1997. Complexity of the discrete time-cost tradeoff problem for project networks. *Operations Research* 45(2), 302-306.
9. Demeulemeester, E.L., Herroelen, W.S., Elmaghraby, S.E., 1996. Optimal procedures for the discrete time cost trade-off problem in project networks. *European Journal of Operational Research* 88, 50-68.
10. Demeulemeester, E.L., De Reyck, B., Foubert, B., Herroelen, W.S., Vanhoucke, M., 1998. New computational results on the discrete time cost trade-off problem in project networks. *Journal of the Operational Research Society* 49, 1153-1163.
11. Elmaghraby, S.E. Herroelen, W.S., 1990. The scheduling of activities to maximize the net present value of projects. *European Journal of Operational Research* 49, 35-49.
12. Grinold, R.C., 1972. The payment scheduling problem. *Naval Research Logistics Quarterly* 19, 123-136.
13. Hillier, F.S., Lieberman, G.J., 2001. *Introduction to Operations Research*. New York: McGraw Hill.
14. Khang, D.B., Myint, Y.M., 1999. Time, cost and quality tradeoff in project management: a case study. *International Journal of Project Management* 17(4), 249-256.
15. Kim, E.H., Wells, Jr. W.G., Duffey, M.R., 2003. A model for effective implementation of Earned Value Management methodology. *International*

Journal of Project Management 21(5), 375-382.

16. Kim, Y.W., Ballard, G., 2002. Earned value method and customer earned value. Journal of Construction Research 3(1), 55-66.
17. Nicholas, J.M., 2001. Project Management for Business and Technology. Ohio: Prentice Hall.
18. Ragsdale, T.C., 2004. Spreadsheet Modeling & Decision Analysis. Ohio: THOMSON.
19. Sarrico, C.S., Dyson, R.G., 2004. Restricting virtual weights in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 159, 17-34.
20. Tone, K., 2001. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 130, 498-509.
21. Wong, Y.-H.B., Beasley, J.E., 1990. Restricting weight flexibility in data envelopment analysis. Journal of the Operational Research Society 41(9), 829-835.

