雙層規劃 Stackelberg Game
模型在交通路網中之應用

學生：劉文豪　　　　　　　　　　　　　指導教授：卓訓榮

摘要

本文回顧靜態路網指派模式(Static Traffic Assignment Model)的發展，自 Wardrop 提出旅行者行為假設後，所發展出來一系列靜態路網指派之數學模式；由 Beckmann 對成本函數做假設,所發展的數學模式(Mathematical Programming Problem，簡稱 MPP)，經 Aashitiani 放鬆 Beckmann 成本函數之假設後所提出之非線性互補問題(Nonlinear Complementarity Problem，簡稱 NCP)，和 Smith、Dafermos 所提出之變分不等式(Variational Inequality Problem，簡稱 VIP)和 Kuhn 所提出不動點問題(Fixed Point Problem，簡稱 FPP)。

首先，藉由前面理論發展為基礎，透過變分不等式條件方程式，構建為双層規劃等價模型。並討論在其交通路網中的應用，決策系統分成兩個層次:上層為系統最佳化問題，以系統總旅行成本最小為目標；下層為限制式，包含用路人均衡路徑選擇限制式，使同時對同一時區出發之用路人均利用最短路徑到達目的地。

又依據 Fisk(1984)認為系統最佳化與動態用路人選擇問題，屬於賽局理論之 Stackelberg 賽局。本研究針對 Stackelberg 賽局問題，其中局中人(相當於用路人)行為進行深入探討，並經過嚴謹的數學論証，更證實其所提出模型與用路人的均衡條件之間的等價性。因此，提出了一類符合常理的交通分配流組合決策模式，它是主從 Stackelberg 問題；我們可以透過變分不等式技巧將此問題轉化成 MPEC 問題，再透過 MPEC 的 KKT 架構，求解這個二層最適組合模式的最佳化條件。

最後，本研究將針對用路人行為的特性，建構成双層規劃 Stakelberg 賽局模型。再進一步研究如何結合變分不等式敏感度分析，應用於路網規劃和路網設計過程。並透過敏感度分析資訊，應用於二階層數學規劃問題的演算法求解程序中，期望能實際發展並求得模型最佳解的演算法。

關鍵字：Stackelberg 問題；雙層規劃；變分不等式;MPEC 問題;交通指派。

The Application of Bi-level Programming Stackelberg Game in Transportation Network

Student: Wen-Hao Liu Advisor: Hsun-Jung Cho

Abstract

Under Wardrop's first driver behavior principle, network user equilibrium assignment problem can be formulated as Mathematical Programming Problem (MPP), Nonlinear Complementarity Problem (NCP), Variational Inequality Problem (VIP), and Fixed Point Problem (FPP). Under certain conditions, in this research, we introduce the application of Bi-Level Stackelberg problems in transportation.

We want to deal our problems with variational inequality techniques, by transforming our problems into the MPEC (Mathematical Programming with Equalibrium Constraints) Problems.

Key Words: Traffic assignment, Stackelberg problem, variational Inequality, Bi-Level programming, MPEC problem.

誌謝

感謝指導教授卓老師提供論文研讀資料，以利本研究之完成。

感謝運管所學妹吳如君幫忙論文打字。

感謝科管所教授洪志洋老同學協助及虞所長的幫忙。

感謝一切該感謝的人。

學生　劉文豪

目錄

圖目錄

第一章　緒論

1.1 研究背景

在運輸規劃與分析的過程中，交通量指派乃扮演著一個重要的角色。當在進行運輸規劃時，為了分析、評估各種交通措施與路網之設計，我們必須先求得路網中各路段及路徑的運輸需求量，而為了求得路網中各路段及路徑的運輸需求量，我們必須先對道路使用者的路徑選擇(Route Choice)行為做一適當之假設，再根據這些假設建立分析的模式，利用旅次起迄需求量預測未來之各路段及路徑的交通量，這個過程即稱為交通量指派。交通量指派問題即在探討道路使用者如何選擇其起迄點間最佳路徑的行為，並進行分析及預測路網均衡(Network Equilibrium)時，各路段及路徑的交通量。

運輸的路網設計或規劃，如道路的興建、拓寬或號誌控制等，若有很多替代方案(Alternatives)，透過路網的敏感度分析(Network Sensitivity Analysis)的方法，不需要每次都要計算路網均衡，直接可得到分析結果。路網的敏感性分析，是指路網上的流量因些微的路網容量改變(例如號誌的時制些為變動或是路段容量的稍微改變)，或旅次起迄需求量的改變，對整個路網流量的影響程度。另外，敏感性分析可視為用路人受外在決策變數改變(如號誌時制改變)所產生的行為反應(如選擇另外路徑等)。因此，在二階層路網設計時，一般我們無法掌握的下階層用路人對上階層決策變數所產生的反應數(Reaction Function)，可以應用敏感性分析產生的結果，建立反應函數的近似函數(Approximation Function)。

1.2 研究目的

隨著都市規模日益擴大，人口集中所造成的交通擁擠問題也越加嚴重，在有限的都市空間中，鮮少能靠不斷增加道路容量來改善交通問題，因此透過適當的交通控制手段提高道路使用率已成為交通部門所追求的目標。而在所有交通控制策略中，又以交通控制系統影響車流為最，良好的系統控制除了可提高道路服務績效、維持交通秩序、促進

交通安全之外,並可進一步結合先進用路人資訊系統,將用路人指派至最適當之路段上,達成系統最佳化之目標。

鑒於前述動機,本研究將針對動態用路人之行為特性,建構系統最佳化之雙層規劃模型。上層為公部門所扮演的領導者角色,控制決策系統,並掌握用路人的反應,以達到系統最佳化的目標;下層為用路人則扮演追隨者的角色,在既定的控制決策系統下,選擇符合自己最大效益的路徑,達到路徑旅行成本最小的目標。依此觀念,建構 Stackelberg 賽局模型。

1.3 研究方法

本研究研究方法大致如下:

(1)文獻回顧:

回顧目前已發展的均衡路網流量模式,瞭解其理論架構的發展,並研究其相關的理論基礎。包括:均衡路網流量模式、變分不等式、敏感性分析、線性規劃方法、不動點定理、非線性互補問題、Stackelberg 賽局問題(N 人非合作局)等文獻。

(2)模式間相關性之研究

主從 Stackelberg 問題是雙層決策規劃問題。我們又透過變分不等式的技巧將此問題轉化成 MPEC 問題。我們透過 MPEC 的 KKT 架構來建立二層最適模式的最適條件。變分不等式與數學規劃之間的聯繫。非線性互補公式與變分不等式的相關性。

(3)模型建構

經過上述之整理及整合之後,本研究將提出 Stackelberg 賽局模式,並經過數學論証 Stackelberg 均衡的存在性,並推導出 Stackelberg 均衡點上,領導者和跟隨者的解析解。

(4)Stackelberg Game 模型理論基礎與求解分析

傳統的優化模型只考慮單一決策者在一定約束條件下的目標最優問題,將對策論與數學規劃的特點結合起來形成多決策者參與的競爭優化模型。Nash 均衡、Minmax 解及

Stackelberg 模型是最基本的對策規劃模型。我們建立變分不等式與對策規劃之間的聯繫，有利於建立模型及求解分析。變分不等式與 NASH 均衡及不動點之間有著深刻的聯繫;任意一個 NASH 的均衡問題均可表為一個變分不等式;NASH 均衡與鞍點之間的關係。

1.4 研究流程

以下為本研究的流程圖:

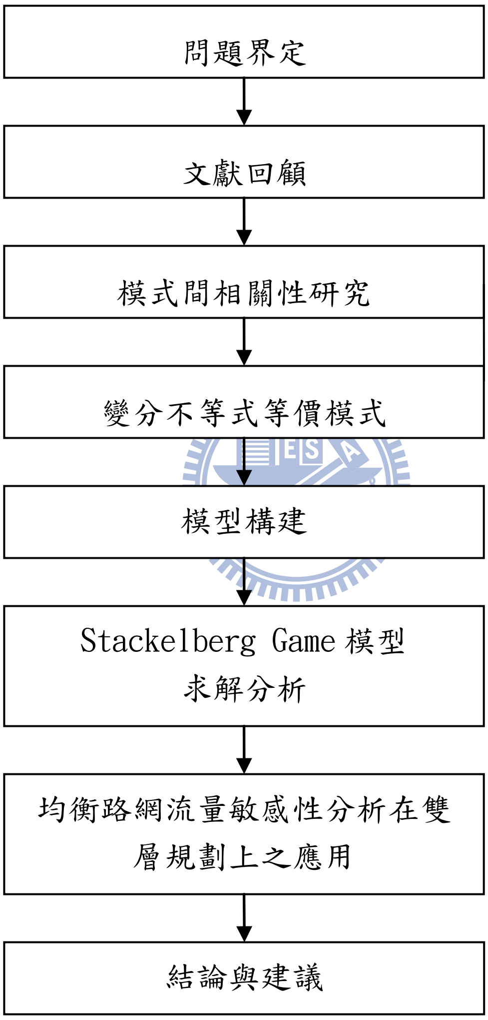


圖 1-1 研究流程圖

1.5 研究內容

第二章的文獻回顧包括路網流量模式的發展過程以及變分不等式敏感性分析的相關定理；第三章介紹變分不等式雙層規劃等價表示及其在交通路網中的應用；第四章描

述 Stackelberg Game 問題，並提出符合動態用路人的均衡路徑選擇模型，多人非合作局 Stackelberg Game 模型。第五章 Stackelberg Game 模型理論基礎及求解分析；第六章為均衡路網流量敏感性分析在雙層規劃上之應用；第七章則為本研究的結論與建議。

第二章 路網流量模式及敏感性分析之文獻回顧

在本章節中，我們引述自卓訓榮等〔20,21,22,23,24〕之研究，首先將針對道路使用者行為的假設做一文獻回顧，其次回顧依使用者的均衡行為準則所建立的模式。最後再針對變分不等式問題作詳細介紹。

2.1 數學符號與定義

以下是本研究將使用到的一些數學符號，在此先定義:

a：表示路網中的路段 a

i, j： 表示路網節點 i 或節點 j

p ： 表示路網中的路徑 p

P_{ij} ： 表示路網中起點為 i，迄點為 j 之所有路徑之集合

C_a ： 表示路網中路段 a 的成本

C_p ： 表示路網中路徑 p 的成本

f_a ： 表示路網中路段 a 的交通流量

f ： $(f_1, f_2,..., f_a,...)$，表示路網中所有路段交通流量的向量

h_p ： 表示路網中路徑 p 的交通流量

h ： $(h_1, h_2,..., h_p,...)$，表示路網中所有路徑交通流量的向量

u_{ij} ： 表示路網中起點為 i，迄點為 j 的最小旅行成本

u： $(u_{11},..., u_{ij},...)$，表示路網中所有不同起迄點最低旅行成本的向量

T_{ij} ： 表示路網中起點為 i，迄點為 j 的需求量

T ： $(T_{11},..., T_{ij},...)$表示路網中所有不同起迄點的需求量向量

δ_{ap} ：路徑與路段指標，當路網中的路段a屬於路徑p時為1，否則為0

Δ：(…δ_{ap}…)，路徑與路段指標矩陣，或稱為路段與路徑投引矩陣(Incidence Matrix)

Λ：起迄點與路徑投引矩陣，當路網中的路徑屬於某一起迄點則為1，否則為0

R^n ：n度空間所有實數的集合

2.2 道路使用者行為準則

所謂路網到達均衡狀態，是指各路段及路徑上的交通流量不具有變動傾向的狀態。Wardrop(1952)在道路使用者有路網的完全資訊(Full Information)的假設下，首先提出道路使用者均衡(User Equilibrium)之行為準則。路網使用者的兩種行為準則如下:

(1) Wardrop 第一使用準則(Wardrop's First Principle)

又可稱為使用者均衡準則(User Equilibrium Principle)。對任一起迄點而言，當路網達到使用者均衡時，所有被使用的路徑，其旅行成本皆相同，而且最小或等於其他未被使用路徑的旅行成本。使用者均衡，假設每一道路使用者皆以降低自己的旅行成本為目標來選擇路徑，而不與其他人協調合作。當路網達到均衡時，道路使用者無法經由單獨改變路徑降低其旅行時間。此準則較符合實際之使用者行為，適用於公路路網上之小客車指派課題，在對真實世界之觀察廣泛地被接受。

(2) Wardrop 第二使用準則(Wardrop's Second Principle)

又可稱為系統最佳準則(System Optimum principle)。當路網達到最佳時，系統總旅行成本最小。系統最佳僅在所有道路使用者經由全體協調合作，來選擇旅行路徑時，才有可能達成。所以，系統最佳不適合真實的都市路網，通常用於其他交通工具，如鐵路、海運及空運等系統。本研究僅以Wardrop第一準則為依據，探討交通流型態。

由於各路段旅行成本為路段交通量之函數，以致道路使用者之間的選擇將有交互影響之效果，所以上述的準則亦可以遊戲理論(Game Theory)中的Cournot-Nash均（Cournot　Nash Equilibrium)來說明，也就是把道路使用者之間對路徑的選擇行為看

作是一種不合作的競賽(Non-cooperative Game)，當達到均衡狀態時即稱為 Cournot-Nash 均衡，其假設包括下列幾點（李治綱，1989）：

1.每個道路使用者的起迄點已知，其可行策略即為其起點至其迄點之間所有可行之路徑。

2.每個道路使用者均追求其旅行成本最小，而其所選擇的路徑旅行成本為其所經過路段成本的總和。

3.每個道路使用者獨立完成其選擇的行為。

4.每個道路使用者有完全資訊，因此可以預期使用者所選擇路徑的旅行成本。

Cournot-Nash 的均衡條件(Equilibrium Condition；簡稱 EC)，可以以下列數學式表示：

$$h_p > 0,\quad p \in P_{ij} \rightarrow c_p = u_{ij},\quad \forall i, j \tag{2-1}$$

$$c_p > u_{ij},\quad p \in P_{ij} \rightarrow h_p = 0,\quad \forall i, j \tag{2-2}$$

$$\sum_{p \in P_{ij}} h_p = T_{ij},\quad \forall i, j \tag{2-3}$$

$$h_p \geq 0,\quad \forall i, j \tag{2-4}$$

式(2-1)說明對起迄點間以使用的路徑(即路徑流量大於零)，其旅行成本為最小或等於該組起迄點間最小的旅行成本。式(2-2)說明若路徑的旅行成本大於該組起迄點間的最小旅行成本，則該路徑不會被使用(即路徑流量為零)。式(2-1)加上式(2-2)即表示上述的 Wardrop 使用者均衡準則。式(2-3)為流量守恆，及每組起迄點間所有路徑的流量和等於該組起迄點間的運輸需求量。式(2-4)則表示所有路徑流量有非負的限制。

2.3 使用者均衡路網流量模式

2.3.1 數學規劃法

在 Wardrop 提出使用者均衡之行為假設後，Beckmann(1956)首先構建出第一準則之數學規劃模式(Mathematical Programming，簡稱ＭＰ)，假設路段的成本函數是可分

離的(Separable)，就是說路段(Arc)的使用成本只受到路段車流量的影響。在這個模式中，成功地將原本所求解的路網均衡問題，轉換為一求解極值的數學規劃問題，其模式如下：

$$\min_f Z(f) \qquad (2\text{-}5)$$

$$= \min_f \sum_a \int_0^{f_a} C_a(x)dx \qquad (2\text{-}6)$$

$$s.t. \qquad f \in \Omega \qquad (2\text{-}7)$$

其中

$$\Omega = \{ f \mid f = \Delta h, \Lambda h = T, h \geq 0\}. \qquad (2\text{-}8)$$

導出上面所述非線性規劃方程式的 K-K-T（Karush-Kuhn-Tucker）條件，可以得出求解此一數學規劃式的必要條件（Necessary Condition)，其 K-K-T 條件如下：

$$(c_p - u_{ij}) \cdot h_p = 0 \qquad p \in P_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (2\text{-}9)$$

$$c_p - u_{ij} \geq 0 \qquad (2\text{-}10)$$

上述之數學模式符合Wardrop 第一準則。式(2-9)和式（2-10）加上式（2-6）目標式和式(2-8)的限制式，相當於式(2-1)至式(2-4)所描述的，因此我們可以將求解的路網均衡指派問題轉換成求解上述之數學規劃問題。我們也可以將式(2-9)和式(2-10)轉換成：

$$\text{若 } h_p > 0 \Rightarrow c_p = u_{ij} \qquad p \in P_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (2\text{-}11)$$

$$\text{若 } c_p > u_{ij} \Rightarrow h_p = 0 \qquad p \in P_{ij} \qquad \forall i, j \qquad (2\text{-}12)$$

式（2-11）說明若由起點 i 到迄點 j 之路徑 P 如已經被使用(即路徑流量大於零)，則其旅行成本 C_p 等於起點 i 到迄點 j 之最小旅行成本 u_{ij}。式(2-12)則說明路徑 p 的旅行成本大於由起點 i 到迄點 j 最小的路徑旅行成本則路徑 p 不被使用(即路徑流量等於零)。

Beckmann 假設路段成本是可分離的。但事實上，若考慮十字路口不同方向的路段，則路段的使用成本會受到其他路段的車流量影響且影響的程度亦不同，因此成本可分離的假設並不合理。Dafermos（1972）假設路段旅行成本的 Jacobian 矩陣是對稱的，這個對稱的假設准許某路段成本函數可以包含其他路段流量。以 A 和 B 兩路段為例，A 路段增加(或減少)一單位流量對 B 路段的影響，必須等於 B 路段增加(或減少)一單位流量對 A 路段的影響，即:

$$\frac{\partial C_a(f)}{\partial f_b} = \frac{\partial C_b(f)}{\partial f_a}$$

但是，就一個十字路口而言，如果臨近路段道路的路寬不同，則影響的程度必定不同；即使路寬一樣，若成本函數中之其他影響因子使得邊際函數不同，則分別增加一單位流量產生的邊際效果也不同，因此這個假設也不合理。Dafermos(1980)也曾放鬆路段成本是可分離的條件，將使用者均衡路網的模式改成線積分形式:

$$\min_{f,h} \sum_a \oint_0^f C_a(x)dx \qquad (2\text{-}13)$$

在式(2-13)中，影響路段旅行成本的因素，除了本身路段的流量外，也可以受其他相關路段流量的影響。

2.3.2　非線性互補問題

Aashtiani(1979)放鬆路段旅行成本可分離的假設，建立了以路徑為變數的數學模式，稱為非線性互補問題(Nonlinear Complementarity Problem，簡稱 NCP)。在 NCP 模式中，路段成本函數可以是任何的型式，沒有任何的假設條件。其模式構建如下:

$$\left(c_p - u_{ij}\right)\cdot h_p = 0 \qquad p \in P_{ij} \quad \forall i,j \qquad (2\text{-}14)$$

$$c_p - u_{ij} \geq 0 \qquad (2\text{-}15)$$

$$h \in \Omega' \qquad (2\text{-}16)$$

其中

$$\Omega' = \{h \,|\, \Lambda h = T, h \geq 0\} \qquad (2\text{-}17)$$

由方程式可以看出求解非線性互補問題所得到的解亦滿足路網均衡條件。所以，我

們可以藉由非線性互補問題來描述均衡路網交通量指派問題。上述方程式雖然和式(2-9)、式(2-10)類似，但是路段的成本函數卻不需要數學規劃模式中的對稱性假設條件。

Aashtiani 所提出的非線性互補問題模式，其路段成本函數已無數學模式的假設條件，但是，非線性互補問題模式在求解過程中，必須以路徑流量為變數。而在真實世界中的路網問題，路徑的數目十分龐大，所以非線性互補問題不適合用在求解大型的的路網。李治綱(1989)也指出，非線性互補問題模式的求解，在某種路網流量類型下不易收斂到較好的精確度。

2.3.3 變分不等式問題

Smith(1979)及 Dafermos(1980)放鬆了路段旅行成本可分離的假設，以路徑和路段為變數分別建立變分不等式模式(Variational Inequality Problem，簡稱 VIP)，即是本研究所要討論的模式。此模式可以以路段為變數之方程式型式，表示如下:

求 $f^* \in \Omega$，使得下式成立

$$c(f^*)(f - f^*) \geq 0 \quad 對所有\ f \in \Omega \tag{2-18}$$

其中

$$\Omega = \{ f \mid f = \Delta h, \Lambda h = T, h \geq 0 \} \tag{2-19}$$

當其可行解區間為非負的空間時，我們可以推導出變分不等式問題的解滿足非線性互補問題，反之亦然。由於非線性互補問題所得到的解滿足路網均衡時的條件，所以變分不等式問題的解也滿足路網均衡時的條件。因此，我們可以利用變分不等式問題來描述均衡路網流量的問題。

利用變分不等式所建立的路網均衡流量模式，不需要路段成本可分離或路段成本函數 Jacobian 矩陣為對稱性的假設條件。而且其模式是以路段為變數，尤其是在考慮大型路網的分析工作時，這個特性將原本龐大的路徑變數轉換成較少的路段變數，使得此模式為最可行之路網均衡模式。

2.3.4 不動點問題

以上 MPP、NCP 或 VIP 都可以用數學模式不動點問題(Fixed Point Problem；簡稱 FPP)來表示，如下所示:

$$h_p = (h_p - (c_p - u_{ij})) \quad p \in P_{ij} \quad \forall i, j \tag{2-20}$$

$$(c_p - u_{ij}) \geq 0 \quad p \in P_{ij} \quad \forall i, j \tag{2-21}$$

$$\sum_{p \in P_{ij}} h_p - T_{ij} = 0 \quad p \in P_{ij} \quad \forall i, j \tag{2-22}$$

式中 $(h_p - (c_p - u_{ij})) \equiv Max(0, h_p - (c_p - u_{ij}))$，保證 $h_p \geq 0$

Tobin(1986)提出變分不等式的敏感性分析定理，但是，因為均衡路網流量的問題不滿足敏感性分析方法的唯一性條件(Uniqueness Condition)，因此無法直接應用在均衡路網流量的敏感性分析上。在均衡路網中，路段(Arc)的流量是唯一的，但路徑 (Path)的流量卻非唯一的。而 Tobin 的敏感性分析是分析路徑(Path)的變動狀況，所以我們無法直接應用 Tobin 的定理。Tobin 和 Friesz(1988)以線性規劃方法(Linear Planning Method)，利用路段流量求出一組路徑流量後，對該組路徑流量作敏感性分析，解決了唯一性的問題。但是，該研究所假設的非退化(Nondegenerate)特性，使得正流量的路徑數必須小於或等於正流量路段數加上起迄點數的和。而我們知道，在較大型的路網當中，路徑的數目遠大於路段的數目。所以，這個假設只能應用於簡單或較小的路網，所以該方法的使用範圍並不廣泛。在此假設下 Yang(1994)、Yang 和 Yagar(1995)以及 Yang 和 Lam (1996)已將其用在交通控制。

但是，在一般的路網狀態下，Tobin 和 Friesz 所證明的路徑流量獨立性並不存在，卓訓榮(1991)為解決非退化性的問題，以廣義反矩陣方法將可行解空間由路徑轉到路段，再以路段的可行解空間分析敏感性問題，以避免了唯一性的困擾，且結果已被 Cho 和 Lee(1998)，Cho 和 Lo(1999)用在求解路網設計。卓訓榮(1992)亦提出最短距離方法，在已知一組路徑正流量解及微擾程度並不大的假設下進行可行解集合的轉換。下面將介紹變分不等式的分析問題。

2.4 變分不等式之敏感性分析

本節將討論變分不等式微擾的充分條件。

令 $f: R^n \to R^n$ 是連續的

$g: R^n \to R^m$ 是可微分的

$h: R^n \to R^p$ 是線性的

並且定義

$$K = \{x \in R^n \mid g(x) \geq 0, h(x) = 0\} \tag{2-23}$$

若一向量 $x^* \in K$，使得下式成立

$$F(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in K \tag{2-24}$$

則 x^* 可稱為變分不等式(2-24)在 K 的一組解

定理 2.1:有解的必要條件。若向量 $x^* \in K$ 對變分不等式(2-24)是一組解而且在 $g_i(x^*) = 0$ 的梯度 $\nabla g_i(x^*)$， i 從 1 到 m，和梯度 $\nabla h_i(x^*)$， i 從 1 到 p，是線性獨立，則存在 $\lambda \in R^m$， $\mu \in R^p$ 使得下式各式成立:

$$F(x^*) - \nabla g(x^*)^T \lambda - \nabla h(x^*)^T \mu = 0 \tag{2-25}$$

$$\lambda^T g(x^*) = 0 \tag{2-26}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{2-27}$$

定理 2.2:有解的充分條件。若 $g_i(x)$ 是凸函數而且 $x^* \in K$ ，$\lambda \in R^m$，$\mu \in R^p$ 滿足(2-25)、(2-26)、(2-27)式，則 x^* 是變分不等式(2-24)的一組解, 式中 i 從 1 到 m。

定理 2.3:區域性單一解的充分條件。若定理 2.2 的充分條件滿足，且 F 函數是可微的，而且對所有 $y \neq 0$，下式成立:

$$y^T \nabla F(x^*) y > 0 \tag{2-28}$$

並使得下列各式成立:

$$\nabla g_i(x^*) y \geq 0 \qquad 對使\ g_i(x^*) = 0\ 的所有\ i \tag{2-29}$$

$$\nabla g_i(x^*) y = 0 \qquad 對使\ \lambda_i > 0\ 的所有\ i \tag{2-30}$$

$$\nabla h_i(x^*) y = 0 \qquad 式中\ i\ 是從\ 1\ 到\ \mathrm{P} \tag{2-31}$$

則 x^* 對變分不等式(2-24)是一區域性單一解

令 $F(x,\varepsilon)$ 對 (x,ε) 是一次連續可微的；

$g(x,\varepsilon)$ 對 x 是凸函數，和對 (x,ε) 是兩次連續可微的；

$h(x,\varepsilon)$ 對 x 是線性的，和對 ε 是一次連續可微的。

考慮下列參數變分不等式，寫成 $VI(\varepsilon)$。求 $X_\varepsilon^* \in K(\varepsilon)$

使得下式成立:

$$F(x_\varepsilon^*, \varepsilon)^T (x - x_\varepsilon^*) \geq 0 \quad 對所有 \quad x \in K(\varepsilon) \tag{2-32}$$

式中 $K(\varepsilon)$ 滿足下式:

$$K(\varepsilon) = \{x \mid g(x,\varepsilon) \geq 0, h(x,\varepsilon) = 0\} \tag{2-33}$$

定理 2.4:隱函數定理。設 $VI(0)$ 滿足定理 2.3 中的條件而 VI(0)中 $F(x^*)$，$g(x^*)$，$h(x^*)$，λ，μ 分別以 $F(x^*,0)$，$g(x^*,0)$，$h(x^*,0)$，λ^*，μ^* 取代，且當 $g_i(x^*,0) = 0$ 時，其梯度 $\nabla g_i(x^*,0)$， $i = 1,\ldots,m$，和 $\nabla h_i(x^*,0)$，$i = 1,\ldots,p$，為線性獨立，此外並假設嚴格鬆弛互補條件(Strict Complementary Slackness condition)成立，當 $g_i(x^*,0) = 0$ 時，滿足 $\lambda_i^* > 0$。則可得到下列結果:

（i） λ*和 μ*是唯一；

(ii) 在 ε =0 的一鄰域中，存在一唯一的連續可微函數

$\left[x(\varepsilon)^T, \lambda(\varepsilon)^T, \mu(\varepsilon)^T\right]^T$ ，其中 $x(\varepsilon)$是$VI(\varepsilon)$的區域性唯一解，

$\lambda(\varepsilon)$和 $\mu(\varepsilon)$為對應於$x(\varepsilon)$的乘數(multipliers)，滿足定理 2.3

的條件，且$\left[x(0)^T, \lambda(0)^T, \mu(0)^T\right]^T = \left[x^{*T}, \lambda^{*T}, \mu^{*T}\right]^T$

(iii)在 ε =0 的鄰域中約束不等式(Binding Inequalities)不改變，嚴格互補鬆弛性成立且約束條件(Binding Constraint)的梯度在 x(ε) 為線性獨立。

若 ε =0，$\left[x^T, \lambda^T, \mu^T\right]^T = \left[x^{*T}, \lambda^{*T}, \mu^{*T}\right]^T$

根據定理 2.1 我們可以得到:

$$F(x,\varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x,\varepsilon)^T - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla h_i(x,\varepsilon)^T = 0 \tag{2-34}$$

$$\lambda_i g_i(x,\varepsilon) = 0 \quad i = 1,\ldots,m \tag{2-35}$$

$$h_i(x,\varepsilon) = 0 \qquad i = 1,\ldots,p \tag{2-36}$$

(2-34),(2-35),(2-36)對 $y = (x,\lambda,\mu)$和對 ε 的 Jacobian 矩陣分別以 J_y^* 和 J_ε^* 表示。

系 2.1:若定理 2.4 的假設成立，即 J_y^* 存在且$\left[x^*, \lambda^*, \mu^*\right]$對 ε 的導數為

$$\nabla_\varepsilon y = \left[J_y^*\right]^{-1}\left[-J_\varepsilon^*\right] \tag{2-37}$$

系 2.2:若定理 2.4 的假設成立則在 ε =0 的鄰域中，$\left[x(\varepsilon^T), \lambda(\varepsilon)^T, \mu(\varepsilon)^T\right]^T$ 的一階近似為

$$\begin{bmatrix} x(\varepsilon) \\ \lambda(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \\ \mu^* \end{bmatrix} + \left[J_y^*\right]^{-1}\left[-J_\varepsilon^*\right]\varepsilon \tag{2-38}$$

其中

$$\left[x^*, \lambda^*, \mu^*\right] = \left[x(0), \lambda(0), \mu(0)\right] \tag{2-39}$$

$$J_y^{\ *} = J_y(0)$$

$$J_\varepsilon^{\ *} = J_\varepsilon(0) \tag{2-40}$$

2.5 路網敏感性分析

變分不等式問題的數學模式是求均衡路網流量一般化的模式。可以表示如下:

求 $f^* \in \Omega$，使得下式成立:

$$c(f^*)^T(f - f^*) \geq 0 \quad \forall f \in \Omega \tag{2-41}$$

其中

$$\Omega = \{f \mid \Delta h = f^*, \Lambda h = T, h \geq 0\} \tag{2-42}$$

$c(f)$是嚴格單調(Strictly Monotone),則知均衡路段流量向量 f^*是唯一，微擾(Perturbed)均衡路網流量問題可寫成下列變分不等式:

求 $f_\varepsilon^* \in \Omega(\varepsilon)$ 使得下式成立:

$$c(f_\varepsilon^{\ *}, \varepsilon)^T(f - f_\varepsilon^{\ *}) \geq 0 \quad \forall f \in \Omega(\varepsilon) \tag{2-43}$$

其中

$$\Omega(\varepsilon) = \{f \mid \Delta h = f_\varepsilon^{\ *}, \Lambda h = T(\varepsilon), h \geq 0\} \tag{2-44}$$

而 ε 是微擾參數向量。因為均衡路徑量不是唯一的，而是包含在凸多胞形(Convex Polytope)中:

$$\Gamma^*(\varepsilon) = \{h \mid \Delta h = f_\varepsilon^{\ *}, \Lambda h = T(\varepsilon), h \geq 0\} \tag{2-45}$$

對任意向量 ε，在$\Gamma^*(\varepsilon)$的路徑流量解集合是一凸集合，任一組路徑流量解 h 對微擾參數(Perturbation Paramenters)的導數不存在。雖然路段流量是單一，但因為路段流量是由路徑流量加總求得，所以路徑流量的非唯一性使得定理 2.3 不能直接引用。

因此，卓訓榮的廣義反矩陣方法和最短距離方法，將路徑變數可行解空間轉換為路段變數可行解空間，而均衡路網之路段流量解具唯一性，如此，就可以應用定理 2.3 求解。以下將分別介紹 Tobin 和 Friesz 提出的線性規劃法及卓訓榮提出的廣義反矩陣法和最短距離法。

2.6 線性規劃方法

路網的均衡流量可以利用 VIP 模式求得，所得到的解是路段流量。我們知道路段流量是經過該路段的所有路徑流量之加總。當我們觀察路網的敏感性分析時，必須觀察路徑流量的變動情形，將路徑之變動加總後，即可得路段的變動。但是，路段流量是唯一解，路徑流量卻非唯一解。如果要應用 Tobin 所提出的變分不等式之敏感性分析的一般化模式，必須滿足唯一性的條件。因此，Tobin 和 Friesz 以線性規劃法求得一組路徑正流量後，再利用此組路徑正流量進行敏感性分析。

首先，假設線性規劃的解是滿足 $\Gamma^*(0)$的非退化(Non-Degenerate)的端點，也就是所求得之路徑正流量的路徑數必須小於或等於路段正流量的路段數加上起迄數。根據上述條件求解線性規劃問題，可以得到一組路徑正流量 h^*，如下:

$$\min .bh$$

$$s.t.\quad h \in \Gamma^*(0)$$

$$h \geq 0 \tag{2-46}$$

其中，b 是為了使 h 滿足的假設向量。令 h^* 是在 $\Gamma^*(0)$ 中的一個非退化端點，所以 h^* 是在 $\varepsilon=0$ 中的一組解。根據定理 2.4，系統存在一組解:

$$c'(h^*,0)-\pi-\Lambda^T\mu=0 \tag{2-47}$$

$$\pi^T h^*=0 \tag{2-48}$$

$$\Lambda h^*-T(0)=0 \tag{2-49}$$

$$\pi \geq 0 \tag{2-50}$$

因為我們限制了路網中對任一路徑的路段流量必須為正流量，使得$c_p'(h^*,0)=u_w$且$\pi=0$。而將h^*中為正流量的部分定義為h^{0*}，其相對的起迄/路徑矩陣定義為Λ^0。上述之系統可以簡化為:

$$c'(h^*,0)-\Lambda^{0T}\mu=0 \tag{2-51}$$

$$\Lambda^0 h^{0*}-T(0)=0 \tag{2-52}$$

我們可以很容易的看出Λ^{0T}是線性獨立的，而且是唯一的。所以系統(2-51)及(2-52)可以滿足定理2.4的條件，h^{0*}對ε的導數即可計算。上述系統在$\varepsilon=0$時，對(h^0,μ)的 Jacobian 矩陣即為:

$$J_{h^0,\mu}=\begin{bmatrix}\nabla c'^0(h^*,0) & -\Lambda^{0T}\\ \Lambda^0 & 0\end{bmatrix} \tag{2-53}$$

而系統對ε的 Jacobian 矩陣為:

$$J_\varepsilon=\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon c'^0(h^*,0)\\ -\nabla_\varepsilon T(0)\end{bmatrix} \tag{2-54}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon h^0\\ \nabla_\varepsilon \mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla c'^0(h^*,0) & -\Lambda^{0T}\\ \Lambda^0 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\nabla_\varepsilon c'^0(h^*,0)\\ \nabla_\varepsilon T(0)\end{bmatrix} \tag{2-55}$$

線性規劃方法所推導的敏感性分析方法是由路段資訊求得一組路徑資訊，再根據此路徑資訊進行路網敏感性分析。但是，為了達到此目的，採用線性規劃方法求得一組路徑正流量必須假設所求得的路徑正流量的路徑數目小於或等於路段正流量的路段數目加上起迄對的數目。這個假設使得該方法只適用在較小型的路網上。

2.7 廣義反矩陣方法

這個方法是利用廣義反矩陣求出路段流量變數和路徑流量變數之間的適當關係。假設所考慮的路徑包括所有最低成本的路徑，這些路徑的流量均為正，因為正流量為導數存在的必要條件。如果有一最小路徑成本的流量為零，經過微擾後可能為正。另外亦假

設路段流量為正，若流量為零之路段經過微擾後仍為零，可以刪除。最後假設路徑數大於路段數。

在微擾均衡路網流量問題的可行解路段流量和路徑流量有下列關係:

$$\Delta h_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} \tag{2-56}$$

$$\Lambda h_{\varepsilon} = T(\varepsilon) \tag{2-57}$$

將△切成兩個子矩陣(Submatrices) $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Delta^r \end{bmatrix}$，其中 Δ^0 是使得 $\begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}$ 為最大列滿秩(Maximum Full Row Rank)矩陣，且 Δ^r 為一非空矩陣。令

$$\Delta^0 h_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}{}^0 \tag{2-58}$$

$$\Lambda^0 h_{\varepsilon} = T(\varepsilon) \tag{2-59}$$

式中 f^0 是 f 切割後一的部分，即 $f = \begin{bmatrix} f^0 \\ f^r \end{bmatrix}$ 而 f^0 是與 Δ^0 有關的部分，f^r 為 f 切割後去除 f^0 而剩餘部分，可得:

$$h_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} f_{\varepsilon}^0 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} + \left[I - \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix} \right] k \tag{2-60}$$

式中

$$\begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{T} \left[\begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{T} \right]^{-1} \tag{2-61}$$

k 是使得 h_{ε} 為正的任意矩陣向量，一定存在某些 k 使得 h_{ε} 的所有元素為正。即使 h_{ε} 為正的任意一組 k，則可行解路段流量可寫成:

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon) = \Bigg\{ f = \begin{bmatrix} f^0 \\ f^r \end{bmatrix} \Delta^r \Bigg[\Bigg[I - \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \Delta^0\Delta^{0T} & \Delta^0\Lambda^{0T} \\ \Lambda\Delta^{0T} & \Lambda\Lambda^{0T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix} \Bigg] k \\ + \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \Delta^0\Delta^{0T} & \Delta^0\Lambda^{0T} \\ \Lambda\Delta^{0T} & \Lambda\Delta^{0T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{\varepsilon}^0 \\ T(\varepsilon) \end{bmatrix} \Bigg] = f_{\varepsilon}^0, f \geq 0 \Bigg\} \end{aligned} \tag{2-62}$$

對於微擾均衡路網流量問題可以用變分不等式表示，即求 $f_{\varepsilon}^{*} \in \Omega(\varepsilon)$，

使得下式成立:

$$c\left(f_\varepsilon^*,\varepsilon\right)^T\left(f-f_\varepsilon^*\right)\geq 0 \qquad \forall f\in\Omega(\varepsilon)$$

其中

$$\Omega(\varepsilon)=\left\{f\mid C+B_1 f_\varepsilon^0+B_2[T(\varepsilon)]=f_\varepsilon^r,\ f\geq 0\right\} \tag{2-63}$$

式中

$$B_1=\Delta^r\Delta^{0T}A_{11}+\Delta^r\Lambda^T A_{21}$$

$$B_2=\Delta^r\Delta^{0T}A_{12}+\Delta^r\Lambda^T A_{22}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta^0\Delta^{0T} & \Delta^0\Lambda^T\\ \Lambda\Delta^{0T} & \Lambda\Lambda^T\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}+\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\left[\Lambda\Lambda^T-\Lambda\nabla^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\right]^{-1}\Lambda\Delta^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}$$

$$A_{12}=-\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\left[\Lambda\Lambda^T-\Lambda\Delta^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\right]^{-1}$$

$$A_{21}=-\left[\Lambda\Lambda^T-\Lambda\Delta^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\right]^{-1}\Lambda\Delta^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}$$

$$A_{22}=\left[\Lambda\Lambda^T-\Lambda\Delta^{0T}\left[\Delta^0\Delta^{0T}\right]^{-1}\Delta^0\Lambda^T\right]^{-1}$$

因為 f_ε^* 是式(2-43)的解，根據定理 2.4，下列系統存在解:

$$c\left(f_\varepsilon^*,\varepsilon\right)-\lambda(\varepsilon)-[B_1,-I]^T\mu(\varepsilon)=0 \tag{2-64}$$

$$\lambda(\varepsilon)^T f_\varepsilon^*=0 \tag{2-65}$$

$$C+B_1 f_\varepsilon^0+B_2[T(\varepsilon)]=f_\varepsilon^r \tag{2-66}$$

式中 $\lambda(\varepsilon)$ 是非負限制式的向量乘數，$\mu(\varepsilon)$ 是維持路網流量限制式的向量乘數。

因假設系統的路段流量皆為正，所以非負限制部分可刪除，上述系統可改寫為:

$$c\left(f_\varepsilon^*,\varepsilon\right)-[B_1,-I]^T\mu(\varepsilon)=0 \tag{2-67}$$

$$C+B_1 f_\varepsilon^0+B_2[T(\varepsilon)]-f_\varepsilon^r=0 \tag{2-68}$$

可以很簡單的看出此系統滿足定理2.3和定理2.4，因此 f_ε^* 對 ε 的導數即可計算。

在系統(2-67)、(2-68)中對 $y=(f,\mu)$ 的 Jacobian 矩陣是:

$$J_y=\begin{bmatrix}\nabla_c\left(f_\varepsilon^*,\varepsilon\right) & -[B_1,-I]^T \\ B_1,-I & 0\end{bmatrix} \tag{2-69}$$

且系統對 ε 的 Jacobian 矩陣是:

$$J_y=\begin{bmatrix}\nabla_\varepsilon c\left(f_\varepsilon^*,\varepsilon\right) \\ B_2\nabla_\varepsilon T(\varepsilon)\end{bmatrix} \tag{2-70}$$

得到:

$$\nabla_\varepsilon y=\left[J_y\right]^{-1}\left[-J_\varepsilon\right] \tag{2-71}$$

2.8 最短距離方法

Dafermos 和 Nagurney 指出若運輸成本函數是強單調(Strong Monotone)，則運輸成本的些微變動會使得均衡流量的變動跟隨成本的變動而連續的變動，假如運輸成本只是些微的變動，則流量型態的改變應該也是些微的變動，而且非常接近原來的流量。基於此一觀點產生一個可行解子集合，使得它非常靠近原來的可行解集合。而且這個新的可行解集合只有包含路段變數，沒有路徑變數，如此一來，即可在此新的可行解集合內討論路網敏感性問題。

以下將利用最短距離的觀念以數學規劃的方法進行可行解集合的轉換。首先假設已知一組路徑最佳解是 h^* ，而 $h(\varepsilon)$ 是微擾後的解，則求下列數學規劃問題:

$$\min_{h(\varepsilon)}\left[h(\varepsilon)-h^*\right]^T\left[h(\varepsilon)-h^*\right]$$

$$s.t.\quad \Delta^0 h(\varepsilon)=f_\varepsilon^0$$

$$\Lambda h(\varepsilon)=T(\varepsilon) \tag{2-72}$$

經計算後可得 2-(55)式如下:

$$\nabla_{\varepsilon} y = \left[J_y\right]^{-1}\left[-J_{\varepsilon}\right] \tag{2-73}$$

2.9 路徑的獨立性

Tobin 所提出路網敏感性分析所需路徑資訊的獨立性，包含了兩個特性：路徑流量的獨立性和路段/路徑投影矩陣選取的獨立性。路徑流量的獨立性是指選取相同的路徑，但路徑流量不同，經過微擾之後所得到的新的均衡路網之路段流量卻相同。而路段/路徑投影矩陣選取的獨立性是指選取不同的路段/路徑投影矩陣，路徑流量亦不同，經過微擾之後所得到的新的均衡路網之路段流量卻相同。因為此路徑獨立性之存在，無論是 Tobin 和 Friesz 的線性規劃法(依舊有路網大小的限制)，或是卓訓榮的廣義反矩陣及最短距離法(沒有路網限制)，都可以不考慮路徑及流量的差異，直接進行路網性分析，其結果都相同。

Tobin 和 Friesz 已證明路徑流量在非退化性假設下，利用線性規劃法所求得之敏感性分析結果亦獨立於路徑流量變數。林培煒以及卓訓榮和林培煒也證明最短距離方法的獨立性。林培煒、Cho 和 Friesz 和 Lin 也提出了廣義反矩陣法敏感性分析對於路徑資訊的獨立性。

第三章　變分不等式雙層規劃等價模式

本章引述自傅白白等之論文，針對給出 Hartman-Stampacchia 變分不等式的一種雙層均衡等價模式，指出了變分不等式與系統均衡之間的深刻關聯性，並討論其在交通路網指派中的應用。

我們首先建立變分不等式與雙層規劃之間的關係，將留給往後主從 Stackelberg Game 模型構建及求解分析帶來了直觀明析性。

3.1 變分不等式的雙層規劃等價表示

雙層規劃是一種考慮存在對策因素的決策模型。決策系統含有兩個層次:下層跟隨者(Follower)依據上層宣布的決策來考慮自己的目標最優而採取對策，上層領導者(Leader)事先考慮到這種對策信息而宣布自己的決策並使自己的目標最佳化。雙層規劃大致又分成兩類:一類是以下層問題的解(決策本身)作為響應反饋到上層，另一類是以下層的目標值(決策的效應)作為響應反饋到上層。

定義:$K \subseteq R^n$ 為一非空閉凸集，$F(x): K \to R^n$ 是一連續映射，變分不等式是指求 $x^* \in K$ 使得

$$F(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \qquad \forall x \in K \tag{3-1}$$

當 $F(x)$ 為一凸函數的梯度時，顯然 3-1 式可以轉化為一等價的可微數學規劃問題。我們下面給出 3-1 式在這兩類意義下的雙層規劃等價表示。

BE(I):

$$\min_{x \in K} \|x - y(x)\|^2 \qquad \text{Leader} \tag{3-2}$$

$$\min_{y \in K} F(x)^T y(x) \qquad \text{Follower}$$

BE(II):

$$\min_{x\in K} F(x)^T x - f(x) \qquad (3\text{-}3)$$

其中 $$f(x) = \min_{y\in K} F(x)^T y$$

針對問題解的性質分析，由於上下層解相等，我們稱這類雙層規劃問題為雙層均衡，記為 BE。

則下述結論等價。

(I) x^* 是式(3-1)的解；

(II) x^* 是 BE(I)的解；

(III) x^* 是 BE(II)的解。

證明: 事實上 BE(II)等價於式 3-1 可由 $\max_{y\in K} F(x)^T (x-y)$ 是一 gap 函數得到。

第(III)部份很明顯得到證明。故我們只需要證明(I)(II)。

設 x^* 為式 3-1 的解，則 x^* 亦為 $\min F(x)^T y$ 的解，故 x^* 為 BE(I)的解；反之，

有 x^* 為 BE(I)的解，則有

$$F(x^*)^T y \ge F(x^*)^T x^* \qquad \forall y \in K$$

因為 $y = x^*$ 時，$F(x^*)^T y$ 為最小

故 x^* 為式(3-1)的解。定理證明完畢。

由上述結果我們可以對式(3-1)作下述經濟均衡含意解釋: $F(x)$ 為單位成本向量函數，上層宣布一種狀態 x，下層尋求此信息下的總成本最小，上下層相等時的結果對應著式(3-1)的解。由此可見變分不等式(3-1)與經濟均衡之間有著深刻的聯繫。

由以上等價表示結果，我們還可以得到變分不等式(3-1)與 NASH 均衡(NE)之間的關係。

推論: 式(3-1)與下述 NASH 均衡(NE)等價:

$$\text{(NE)} \qquad \begin{cases} \min_{x \in K} \|x - y\|^2 \\ \max_{y \in K} F(x)^T y \end{cases}$$

其中，K 涵意同前。

對推論的經濟含意可解釋為系統均衡解對應著單位成本 $F(x)$ 下的總成本最小時的循環反饋平衡結果。

3.2 雙層均衡模型在交通路網中之應用

用一個有向圖 $G(N,A)$ 代表交通網絡，其中 N 是節點集合，A 是有向線段集合。設交通需求矩陣為 (d_{pq})，路段 a 上的單位成本 $C_a(x_a)$，其中 x_a 表示為路網中路段 a 上的交通流量，則用路人尋求各自最小成本(Wardrop 第一原則)的模型為用路人均衡模型。用雙層規劃方法可以方便地刻畫該模型:將用路人均衡系統化分為二階層:上層為公部門規劃管理者宣布路網上的流量狀態，下層為用路人，出行時依照該狀態信息下尋求最短路徑出行，二者互相一致時即為用路人均衡分配結果。故其雙層均衡模型為:

$$\min_{x_a \in K} \|x_a - y_a\| \qquad \text{Leader}$$

$$\mathop{Min}_{y \in K, a \in A} \sum C_a(x_a) y_a \qquad \text{Follower} \qquad (3\text{-}4)$$

其中 K 為網絡流可行集，若 記 f_{pq}^r 為從 p 到 q 經過路徑 r 的流量，

$$\delta_{pq}^{r_a} = \begin{cases} 1 & a\text{在}r\text{上} \\ 0 & \text{否則} \end{cases}$$

則 K 由下述關係給出:(下層約束與上層約束相同)

$$\sum_r f_{pq}^r = d_{pq}$$

$$f_{pq}^r \ge 0$$

$$x_a = \sum_{pq} \sum_r \delta_{pq}^{r_a} f_{pr}^r \qquad \forall a \in A$$

容易證明式(3-4)的解滿足 Wardrop 條件。事實上，設 f_{pq}^{r*} 為滿足 wardrop 條件的交通流，

相應的單位成本為$C^{r^*}{}_{pq}$，最小成本為π^*_{pq}，則 Wardrop 條件可表述為:

$$f^{r*}_{pq}\left(c^{r*}_{pq}-\pi^{r*}_{pq}\right)=0 \qquad (3\text{-}5a)$$

$$c^{r*}_{pq}-\pi^{r*}_{pq}\geq 0 \qquad (3\text{-}5b)$$

用 f^r_{pq} 乘(3-5b)與(3-5a) 相減並對r及(pq)作和得

$$\sum_{pq}\sum_{r}c^{r*}_{pq}\left(f^{r}_{pq}-f^{r*}_{pq}\right)\geq 0 \qquad (3\text{-}5c)$$

由成本函數的可加性得

$$\sum_{a\in A}c_a\left(x^*_a\right)\left(x_a-x^*_a\right)\geq 0 \qquad (3\text{-}5d)$$

其中x^*_a滿足 wardrop 條件的路段上 a 的流量，由變分不等式的 BE 表示定理知 Wardrop 條件包含著式(3-4)。反之，若$\left(x^*_a,y^*_a\right)$為式(3-4)的解，則$x^*_a=y^*_a$，且x^*_a 為

$$\text{LP}: \quad \underset{y_a\in K,a\in A}{Min}\sum c_a\left(x^*_a\right)y_a \qquad (3\text{-}5e)$$

的解，式(3-5e)對應著最短路徑交通指派(All-or-Nothing)情形，故 wardrop 條件滿足。

在交通路網指派問題中，用路人出行考慮了路段擁擠因素後不是嚴格按最短路徑出行，而是依據概率最短路徑選擇，我們稱該模型為隨機用路人均衡。將該模型化為雙層均衡模型，上層為交通規劃管理者，宣布道路網絡上的交通狀態信息，下層為用路人在上層宣布的道路網絡交通量信息下尋求概率最短路徑出行，兩者均衡一致結果即為隨機用路人均衡解。當概率最短路徑分配模型確定後，即可給出隨機用路人雙層均衡模型。如基於 Logit 意義下的隨機用路人模型的雙層均衡表示為:

$$\underset{x_a\in K,a\in A}{Min}\sum\left(x_a-y_a\right)^2 \qquad \text{Leader}$$

$$\underset{y_a\in K}{Min}Z\left(f\right)=\frac{1}{\theta}\sum_{pq}\sum_{r}f^r_{pq}\ln f^r_{pq}+\sum_{a\in A}c_a\left(x_a\right)y_a \qquad \text{Follower}$$

其中$\theta>0$，K 由式(3-4)的約束條件界定。

第四章　Stackelberg Game 模型

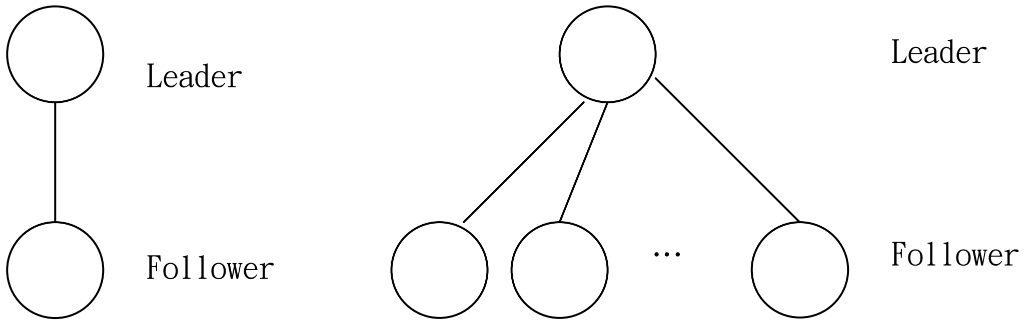
Fisk(1984)認為號誌系統最佳化與動態用路人均衡路徑選擇問題屬於賽局理論之 Stackelberg 賽局。Marcotte(1984)將網路設計問題中隱含的最佳化問題展開，組構成為雙層規劃問題，雙層規劃問題事實上是一種非合作的 Stackelberg Game，這類問題在經濟學上應用很廣。依此觀念，本章將對用路人行為進行深入研究，論證了 Stackelberg 均衡的存在性，並推導出 Stackelberg 均衡點上領導者和跟隨者的解析解。提出 Stackelberg Game 模型構建。

本章 4.1 至 4.3 節對於 Stackelberg Game 問題，單跟隨者及多跟隨者定義論述引自陶軍等之研究。

4.1 Stackelberg Game 問題的描述

Stackelberg Game 總是非對稱的，在兩個參與者的賽局中，被稱為領導者(Leader)的參與者首先制定和發佈策略，另一個被稱為跟隨者(Follower)的參與者在領導者的策略下優化自己的性能或收益。用數學表達式來說明:同樣設有兩個決策者追求最優化 $Maxf_1(x,y)$其決策變量為 x，$Maxf_2(x,y)$其決策變量為 y，第一個決策者我們稱之為主導者(Leader)，首先宣布其決策方案為 x，第二個決策者我們稱之為跟隨者(Follower)，根據上層的 x 來求解目標，得到最優的 y，$y=y(x)$反饋給上層，主導者從多個 x 中選擇對其最有利的一個。又主導者掌握的信息要多於跟隨者，因為主導者知道跟隨者的決策方案。

根據局中參與者的個數，以及參與者的關係，Stackelberg Game 主要可分成兩種結構:



(a) (b)

圖 4-1: Stackelberg Game 中參與者間的關係

在圖 4-1 中，(a)圖表示單跟隨者的 Stackelberg Game，即兩個局中人，一個為領導者，另一個為跟隨者，領導者制定策略，跟隨者根據領導者的策略設定自己的策略；(b)圖表示多跟隨者 Stackelberg Game，即一個領導者和多個跟隨者。

首先研究單跟隨者 Stackelberg Game 模型，討論該模型的均衡點，在此基礎上，進一步研究多跟隨者 Stackelberg Game 模型。

4.2 單跟隨者 Stackelberg Game 模型

假設網絡系統中，存在雙層規劃關係的非合作端系統，其中，端系統 o 為領導者，端系統 1 為跟隨者，端系統 o 制定策略，並假設跟隨者以最優的方式對該策略做出反應。我們首先定義單跟隨者 Stackelberg Game 中跟隨者的合理策略反應集。

定義 4.1 假設策略向量 $x=(x_0,x_1)\in X$，那麼端系統 1 對於領導者策略 x_0 的合理反應集 $R_1(x_0)\equiv\{x\in X \mid Max\{u_1(x)\}\}$，其中 $x_0\in X_0$、$x_1\in X_1$，$U_1(\cdot)$ 為跟隨者的效用函數。

定義 4.2 端系統 i 的效用函數 $U_i(x_i,x_{-i})$

其中 x_{-i} 為除了 x_i 以外的策略組合 $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$。也記為 Ui(xi, x-i)為 $U_i(\cdot)$。

可以看出，端系統 1 的合理反應集中的元素分向量 x_1 是端系統 1 根據端系統 0 的

策略 x_0 來選擇使自己效用最大的策略。

依據合理策略反應集的定義，我們定義 Stackelberg 均衡策略如下:

定義 4.3 在兩個參與者參加的 Stackelberg Game 中，領導者的策略 $x_0 \in X_0$ 被稱為 Stackelberg Game 均衡策略，充要條件為領導者的效用函數 $U_0(\cdot)$ 滿足 $\underset{(x_0,x_1)\in R_1(x_0)}{Max} U_0(x_0,x_1)$

4.3 多跟隨者 Stackelberg Game 模型

在多跟隨者 Stackelberg Game 中，存在 N 個非合作端系統競爭使用路段，集合記為 $N=\{1,2,3,..,N\}$。與此對應，還存在一個領導者，他了解其他 N 個端系統的非合作行為信息，並且根據這些信息制定流速控制策略，以規劃控制整個系統的行為(跟隨者根據領導者的策略制定自己的策略)，領導者記為 0，這時全部端系統的集合記為 $N_0 = N \cup \{0\}$。

在多跟隨者 Stackelberg Game 中，因為各跟隨者反應的領導者策略相同，所以我們可以將跟隨者集合作為一個整體，與領導者進行 Game。依據 Nash 的均衡定律，我們知道在混策下，各跟隨者間至少可以形成一個 Nash 均衡，所以我們可利用這個思路來求解多跟隨者 Stackelberg 均衡問題。

下面我們對多跟隨者 Stackelberg Game 中的一些概念下定義:

類似於單跟隨者，我們定義跟隨者集對於領導者策略的合理反應集為跟隨者集為根據領導者的策略集 X_0 中的策略 x_0 來選擇使自己效用最大的策略集合，如下:

定義 4.4 假設策略向量 $x=(x_0,x_f)\in X$，那麼跟隨者集對於領導者策略 x_0 的合理反應集 $R_f(x_0)\equiv\left\{x\in X \mid \underset{x_0\in X_0}{Max}\{U_f(x)\}\right\}$，其中領導者的策略 $x_0 \in X_0$，跟隨者的策略向量 $x_f=(x_1,\ldots,x_n)\in X_f$；$U_f(x)$ 為跟隨者集的效用函數。

同樣，我們定義多跟隨者的 Stackelberg 均衡策略，並研究多跟隨者 Stackelberg Game 中均衡的存在性和唯一性。

定義 4.5 在上述 Stackelberg Game 局勢中，領導者的策略 $x_0 \in X_0$ 被稱為多跟隨者 Stackelberg 均衡策略，充要條件為領導者的效用函數滿足

$$\underset{(x_0,x_f)\in R_f(x_0)}{Max} U(x_0, x_f)$$

在上述 Stackelberg Game 局勢中，我們將多跟隨者的集合作為一個整體再與領導者進行 Stackelberg Game，此時多跟隨者 Game 演化成單跟隨者 Game。通過 Nash 均衡定理證明可知： 策略向量 (x_0^*, x_f^*) 構成了 Stackelberg 均衡點，存在且唯一，其 $x_f^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ 為跟隨者的策略向量集合。

4.4 Stackelberg Game 模型構建

Fisk(1984)認為號誌系統最佳化與動態用路人均衡路徑選擇問題屬於賽局理論之 Stackelberg 賽局，亦即公部門扮演領導者的角色控制號誌時制，並掌握用路人的反應，以達到整體系統最佳化的目標；而用路人則扮演追隨者的角色，在既定的號誌時制下，選擇最適當之路徑，達到路徑旅行成本最小的目標。依此觀念，動態網路號誌控制系統可構建成如下之模型:

定義 4.6:動態網路號誌控制系統相當於求解下列最佳化模型:

$$Min \sum_a \sum_t c_a(t) u_a(t) \quad \forall u \in \Omega \tag{4-1}$$

其中，Ω 是由以下限制式所定義出之可行解區域:

動態用路人均衡路徑選擇限制式:

$$\sum_a \sum_t c_a^*(t)\left[u_a(t) - u_a^*(t)\right] \geq 0 \quad \forall u \in \Omega \tag{4-2}$$

(4-1)式說明動態網路號誌控制系統是以系統總旅行時間最低為目標，目標式中的動態路段成本函 $\{c_a(t)\}$ 至今尚未有一致的定義，然根據路段流出率與路段車輛數可視為路段流入率在不同時間階段下的變化狀態，因此可將路段成本簡化為路段流入率之函數本研究依據決策控制路段成本函數，將動態路段成本函數構建如下:

$$c_a(t) \equiv c_a(s, f(s))$$

(4-2)式為動態用路人均衡路徑選擇模型限制式，此變分不等式限制式為雙層規劃模型的下層問題，隱含用路人在完全資訊下，各謀其利之均衡狀態，也就是追求效用最大化為目標。

在此條件下，用路人無法片面改變本身所選擇之路徑，以減少路徑旅行時間。

透過第三章變分不等式等價表示 BE(I)和本章 Stackelberg Game 描述，兩者互相整合起來，可依以下步驟建立 Stackelberg Game 模型。

命題 4-7

$$令\ x_0 \in X_0 \subseteq R_+^n \cup (0)\ 及\ \ x_1 \in X_1 \subseteq R_+^m \cup (0)$$

x_0 代表領導者決策向量，x_1 代表追隨者決策向量，且 $x_1 = R(x_0)$，這 Stackelberg Game 問題可寫成下列模型：

$$\underset{x_0 \in X_0}{Min}\ P_1(x_0, R(x_0)) \tag{4-3}$$

或者

$$\underset{\substack{x_0 \in X_0 \\ x_1 \in X_1}}{Min}\ P_1(x_0, x_1) \qquad \text{(Leader)}$$

$$s.t \quad x_1 = R(x_0) \qquad \text{(Follower)} \tag{4-4}$$

命題 4-8

$$令\ \ s \in X_0 \quad f(s) \in X_1$$

X_0 控制信號決策集合， X_1 反應決策集合

$$P_1 : \underset{s \in X_0}{Min}\ P(s, f(s)) \tag{4-5}$$

命題 4-9

假設 C_a 是由 s 和 $f(s)$ 主從關係構成的映射函數，則(4-1)式改寫成

$$P_2 : Min \sum_{a \in A} C_a(s, f(s)) f_a(s) \tag{4-6}$$

限制式　$C(s, f(s))(u-f) \geq 0 \qquad \forall u \in \Omega$ （4-7）

A信號控制路段集合

$\Omega = \{f \mid f = \Delta h, \Lambda h = T, h \geq 0\}$

命題4-10

假設 $C(s, f(s))$為嚴格單調， $f(s)$連續可微，$s \geq 0$時，則(4-7)式有唯一解

P_2 可改寫成P_3

$$P_3 : MinZ(s) = \sum_a c_a(s, f(s)) f_a(s) \tag{4-8}$$

當NEP存在且唯一時

即$u^* = f^*,\ s^* = f(s^*)$時可得到如下:

命題 4-11

假設$R(s, f(s)) = \min C(s, f(s))(u-f)$，則$P_2$等價$P_4$

$$P_4 : MinZ(s) = \sum_a c_a(s, f(s)) f_a(s) \tag{4-9}$$

限制式 $R(s, f(s)) = 0$ （4-10）

第五章 Stackelberg Game 模型理論基礎與求解分析

Stackelberg Game 解模型是基本對策模型。是屬於雙層規劃的網路設計問題，該模型中主要包括一個系統最佳化問題及一個隱含的用路人均衡模型，此用路人均衡模型是以非線型互補問題的型態出現，強調用路人行為是以流量為基礎的解析性模型架構，是一種非合作 Stackelberg Game，屬於多人非合作局(Noncooperative Game)。

5.1 理論基礎

1950、1951 年納許證明了，若 Xi 為有界閉凸集，Ui(x)為連續有界，$U_i(x^i, x^{-i})$對任意局勢 x 是關於 $x^i \in X_i$ 的擬凹(Pseudoconcave)函數，則 Game 至少有一均衡點。

1. 對任意一個 Nash 均衡問題均可表示為一個變分不等式

定義 5.1：區域 $K \subseteq R^n$ 稱為凸的，當且僅當 $\forall x, y \in K$，$\forall \lambda \in [0,1]$ 有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$

$y = f(x)$稱為凸區域 K 上的凸函數，當且僅當 $\forall x, y \in K$ ，$\forall \lambda \in [0,1]$，有

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

（若“≦”換成 “＜”，則 f 稱為嚴格凸的）。

其幾何意義如圖 5.1 所示：

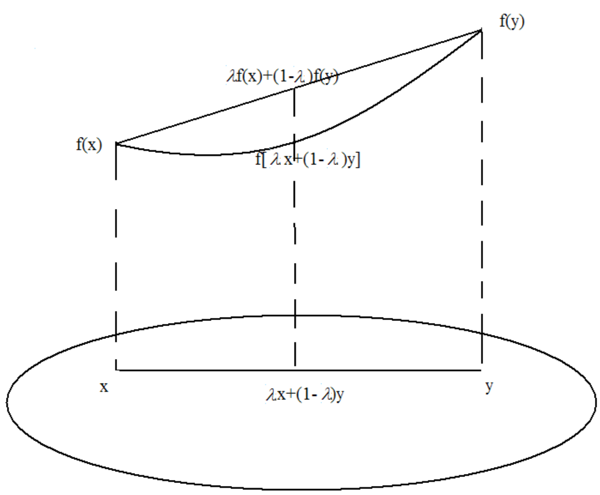


圖 5.1 凸函數示意圖

定理 5.2　設 f 在凸區域 K 上定義並且有連續的一階偏導數，則 f 在 K 內為凸函數的必要充分條件是：$\forall x, y \in K$ 有

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))(y-x) \tag{5-1}$$

其中

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ , } y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

$$(y-x)\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}(y_1 - x_1), \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}(y_2 - x_2), ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}(y_n - x_n) \right)$$

(5-2)

證：(必要性)。由於 f 在 K 上為凸函數。故 $\forall x, y \in K$ ，$\forall \lambda \in [0,1]$ 有

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$$

即

$$f[x + \lambda(y-x)] - f(x) \leq \lambda f(y) - \lambda f(x) \tag{5-3}$$

因 f 有連續的一階導數，故 f 可微：

$$f[x + \lambda(y-x)] - f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\lambda(y_1 - x_1) + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\lambda(y_n - x_n) + \varepsilon_1 \lambda(y_1 - x_1) + ... + \varepsilon_n \lambda(y_n - x_n) \tag{5-4}$$

其中 $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \to 0$ (當 $\lambda \to 0$ 時)。將(5-4)式代入(5-3)式，令 $\lambda \neq 0$, 以 λ 同除(5-3)式兩端，再令 $\lambda \to 0$。 得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}(y_n - x_n) \leq f(y) - f(x)$$

注意到(5-2)式，此式左端即為 $(y-x)\nabla f(x)$ 。故(5-1)式得證。

(充分性)。$\forall x, y \in K$　$\forall \lambda \in [0,1]$

記　$z = \lambda x + (1-\lambda)y \in K$ ，按已知條件

$$f(x)\geq f(z)+\nabla f(z)(x-z) \tag{5-5}$$

$$f(y)\geq f(z)+\nabla f(z)(y-z) \tag{5-6}$$

將(5-5)式，(5-6)式分別乘以λ與$(1-\lambda)$，然後相加，得

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\geq \lambda f(z)+(1-\lambda)f(z)+[\lambda(x-z)+(1-\lambda)(y-z)]\nabla f(z)$$

$$=f(z)+\{[\lambda x+(1-\lambda)y]-z\}\nabla f(z)$$

$$=f(z)+(z-z)\nabla f(z)$$

$$=f(z)=f[\lambda x+(1-\lambda)y]$$

即

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

這就證明了 f 為凸函數。

定理 5.3 集合$K\subseteq R^n$為非空凸集，$f(x)$是K上的可微分函數。證明： $f(x)$是K上的凸函數的充分必要條件是:對任意的$x,y\in K$，有$(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geq 0$成立

證:必要性

因 $f(x)$是K上的凸函數，於是對任意$x,y\in K$，根據 5.2 定理 成立

$$f(y)-f(x)\geq \nabla f(x)^T(y-x) \tag{5-7}$$

$$f(x)-f(y)\geq \nabla f(y)^T(x-y) \tag{5-8}$$

(5-7)+(5-8)，可得

$$0\geq \nabla f(x)^T(y-x)-\nabla f(y)^T(y-x)=(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(y-x)$$

所以

$$(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geq 0$$

必要性得證。

充分性。

對任意的$x,y\in K$，因為 $f(x)$是K上的可微分函數，所以由微分中值定理可得:

$$f(y)= f(x)+\nabla f(z)^T(y-x) \tag{5-10}$$

其中 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, $\lambda\in[0,1]$, 因 K 是凸集，且 $x,y\in K$ ，所以 $z=\lambda x+(1-\lambda)y\in K$, 於是 $x,z\in K$, 又由已知條件知

$$(\nabla f(z)-\nabla f(x))^T(z-x)\geq 0$$

即

$$\nabla f(z)^T(z-x)\geq \nabla f(x)^T(z-x) \tag{5-11}$$

又因 $z-x=(1-\lambda)(y-x)$ ，所以由(5-11)可得

$$\nabla f(z)^T(y-x)\geq \nabla f(x)^T(y-x) \tag{5-12}$$

再將(5-12)式代入(5-10)得

$$f(y)\geq f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)$$

由定理(5.2)可知 $f(x)$ 是 K 上的凸函數。

由定理 5.3 可證得若 $K\subseteq R^n$ 為非空閉凸集，$F(x):K\to R^n$ 是一連續映射，其中 F(x) 為一凸函數的梯度時，則可得到變分不等式如下:

$$(\nabla f(y)-\nabla f(x))^T(y-x)\geq 0 \tag{5-13}$$

$$F(x)^T(y-x)\geq 0 \text{ ，其中 } F(x)^T=(\nabla f(y)-\nabla f(x))^T \tag{5-14}$$

若有一向量 $x^*\in K$ ，使得下式成立:

$$F(x^*)^T(x-x^*)\geq 0 \qquad \forall x\in K \tag{5-15}$$

則 x^* 可稱為變分不等式(5-15)在 K 的一組解。

2. Nash 均衡點與 N 人凹函數局

1971 年 Zukhovitskii 研究 J. Nash, (1961)多人擬凹函數賽局，提出求解 N 人凹函數賽局(Concave Multiperson Games)的方法。

現說明 Nash 均衡點與 N 人凹函數賽局解的關聯性。

定理 5.4 存在唯一定律。給出 N 人向下凹函數賽局，存在均衡點且唯一，滿足條件是:

$$(g(x)-g(y),y-x)>0,\quad \forall(x,y)\in K\times K \text{，} x\neq y \qquad (5\text{-}16)$$

其中 $g(x)$ 為嚴格遞減，$K\subseteq R^n$ 為非空閉凸集

或者條件為:

(a) $\|g(x)\|>0$

(b) $(g(x)-g(y),y-x)\geq 0 \quad \forall(x,y)\in K\times K$ (5-17)

(c) K 是嚴格凸的。

定理 5.5 設 $K\subseteq R^n$ 非空閉凸集，$f(x)$ 是定義在 K 上的二次可微分函數, 則 $f(x)$ 是 K 上的凸函數的充分必要條件是:對任意的 $x\in K$，$\nabla^2 f(x)$ 半正定，其中 $\nabla^2 f(x)$ 表示函數 $f(x)$ 在 x 處的海賽矩陣(Hesse matrix), 即

$$\nabla^2 f(x)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

由定理 5.5 可以證明式(5-17)滿足存在唯一條件，如下所示 :

(a) $\|g(x)\|>0$，$\forall x\in K$

(b) $(H(x)\zeta,\zeta)\leq 0,\ \forall x\in K,\ \forall\zeta\in R^m$ (5-18)

(c) K 是嚴格凸的。

註:(b)因是凹函數賽局。

3. Nash 均衡與鞍點之間的關係

Zukhovitskii 在 1969 年就指出了 Nash 均衡與鞍點之間的關係: x^* 是式(5-13)的解，充要條件為 (x^*,x^*) 為變分方程式 $F(x)^T(y-x)$ 的一個鞍點，其中 $F(x)^T=\nabla f(x,y)$ 。

由式(5-17) $(g(x)-g(y),y-x)\geq 0 \quad \forall(x,y)\in K\times K$

令 $g(x)$ 為遞減，若 $x^* \in K$ 是一個 NEP，則充要條件為 $(x = x^*, y = x^*)$ 是函數 $(g(y), x-y)$ 的一個鞍點。即對一切 $x \in K,\ y \in K$，有

$$\left(g(x^*), x - x^*\right) \le \left(g(x^*), x^* - x^*\right) \le \left(g(y), x^* - y\right) \tag{5-19}$$

而且 $\min_{y\in K} \max_{x\in K} (g(y), x-y) = \max_{x\in K} \min_{y\in K} (g(y), x-y) = \left(g(x^*), x^* - x^*\right) = 0$

換句話說這 NEP 問題等價於兩人零和問題，兩個局中人獲利函數

$\phi_1(x,y) = g(y)(x-y),\ \phi_2(x,y) = g(y)(y-x) = -\phi_1(x,y)$ 因為 Nash 均衡解是相同的。

定義 5.6 非合作局 $\Gamma = \langle I, \{S_i\} i \in I, \{H_i\} i \in I \rangle$，若其每一局面 $s \in S$ 滿足

$\sum_{i\in I} H_i(s) = 0$，則 Γ 為零和局（Zero-Sum game）

定理 5.7 任一非合作常和局(Noncooperative Constant-sum Game)必與某一零和局等策。

證明:設有常和局

$$\Gamma' = \langle I, \{S_i\} i \in I, \{H_i'\} i \in I \rangle$$

各局面中諸競者報酬之和等於 c，使取 $c_i (i \in I)$，供 $\sum_{i\in I} c_i = c$

令 $H_i(s) = H_i'(s) - c_i$，此乃零和局。

N 人非合作局與兩人零和局，在討論均衡局面下對於競者之均衡策略間的性質，以及如何決定此等局面及策略基本性質相同可歸為一類。所以解 N 人非合作局可以兩人零和 Game 來解。

4. 多人非合作對策(N 人非合作局)

(1)非合作局定義:

本小節討論的是非合作局(Noncooperative Game, 或稱不合作局)。此局中，每一競者或參與者(Player)之目標，為儘量爭取個人之最大利益(Profit, 或稱報酬 Payoff)。若競者多人，其行動方針為尋求集體(Collective，或聯盟(Coalition)，簡稱盟)利益之極大，各競者無意將聯盟瓜分，則稱為合作局(Cooperative game)。

競者構成之集，以 I 表示，假定此集之元素有限，各競者可編一號碼，故 $I=\{1,2,\ldots,n\}$。可是，在現代局論中，其競者之數目常為無限，仍有其實用性。

第 i 競者或競者 $i\in I$，依其所好，而從事之行動集(Action Set)，以 S_i 表示，局論中稱之為策略(Strategy，簡稱策)。如果每人只有一種策略，別無選擇，也就用不著參與競局，所以，很自然地假定每人至少有兩種不同的策略可行。

競局之過程中，各競者選其策略之一，$s_i\in S_i$。所以，每一盤(Round)的結果把一系列的策略集合在一起，得到 $(s_1,s_2,\ldots,s_n)=s$，稱之為局面(Situation, 或局情)，所有局面之集合為 $S=S_1\times S_2\times\ldots\times S_n$ 寫成

$$S=\prod_{i\in I}S_i$$

換言之，局面之集乃競者策略集之卡積(Cartesian Product)。

任一局面下，競者各有其報酬。設局面為 s，競者 i 之報酬以 $H_i(s)$ 表之，在所有局面上界定之函數(Function, 簡稱函，函數多半非數) H_i，稱為競者 i 之報酬函(Payoff Function)。

至此，可為非合作局下個精確的定義:

定義 5.8: I, $S_i(i\in I)$ 為二集，$S=\prod_{i\in I}S_i$，函 H_i 是以 S 為定義域，實數為值域。三者合成之系統

$$\Gamma=\langle I,\{S_i\}i\in I,\{H_i\}i\in I\rangle \qquad (5\text{-}20)$$

稱為非合作局。

(2)常和局

非合作局中，有些現象是把定額基金供各競者瓜分，這就相當於局論中的常和局(constant-sum game)。

定義 5.9:如有一常數 c，而對任一局面 s，均滿足 $\sum_{i\in I}H_i(s)=c$

(3)均衡局面

定義 5.10 對所有競者均為可用之局面s，稱為均衡局面(Equilibrium Situation 或 Equilibrial Situation)。

換言之，均衡局面對任一競者i之任意策略$s_i' \in S_i$，都滿足不等式

$$H_i(s \| s_i') \le H_i(s)$$

由定義，顯然可知，均衡局面下，競者無意更改初衷，尤其是在均衡局面下，競者達成之協議，不會有人蓄意違反；反之，在不均衡局面下達成的協議，至少有一競者會貌合神離，準備食言毀約。

定義 5.11:非合作局中，某競者之均衡策略(equilibrium strategy)至少是某一均衡局面下出現的策略。

非合作局論中，大部分篇幅，在討論均衡局面下對於競者之均衡策略間的性質，以及如何設法決定此等局面及策略。

非合作局中，決定均衡局面之過程，常稱之為尋求此局之解(solution)。

(4)局之等策

非合作局之式樣繁多，就其基本性質相同者可歸為一類。以後，討論時可集中在若干結構簡單的特殊局，就不必考慮各類之所有局。

把策略相當的局歸屬同類，就是一種區分的方法。

定義 5.12:設有二局，競者及其所給之策略均同，只是報酬函數不同，即:

$$\Gamma' = \langle I, \{S_i\} i \in I, \{H_i'\} i \in I \rangle$$

$$\Gamma'' = \langle I, \{S_i\} i \in I, \{H_i''\} i \in I \rangle$$

若有一正數k，以及各競者所具之實數c_i，在任一局面 s 中，

$$H_i'(s) = K H_i''(s) + c_i \qquad (5\text{-}21)$$

則謂Γ'與Γ''為等策(strategically equivalent，或策等)。

並以$\Gamma' \sim \Gamma''$表之。

(5)多人非合作對策模型描述

實際問題中，會經常出現多人對策的問題，且每個局中人的贏得函數之和也不必一定為零，特別是許多經濟過程中的對策模型一般都是非零和的，因為經濟過程總是有新價值的產生。所謂非合作對策，就是指局中人之間互不合作，對策略的選擇不允許事先有任何交換信息的行為，不允許訂立任何約定，矩陣對策就是一種非合作對策。

一般非合作對策模型可描述為:

(1) 局中人集合: $I = \{1,2,\ldots,n\}$;

(2) 每個局中人的策略集: $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (均為有限集);

(3) 局勢: $s = (s_1,\ldots,s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$

(4)每個局中人i的贏得函數記為$H_i(s)$，一般說來，$\sum_{i=1}^{n} H_i(s) \neq 0$ 。一個非合作n人對策一般用符號$G = \langle I, \{S_i\}, \{H_i\} \rangle$表示。

為討論非合作n人對策的均衡局勢，引入記號

$$s \| s_i^0 = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_i^0,s_{i+1},\ldots,s_n) \tag{5-22}$$

它的含義是:在局勢$s = (s_1,\ldots,s_n)$中，局中人i將自己的策略由s_i換成s_i^0，其他局中人的策略不變而得到一個新局勢。如果存在一個局勢 s，使得對任意$s_i^0 \in S_i$，有

$$H_i(s) \geq H_i(s \| s_i^0)$$

則稱局勢s對局中人i有利，也就是說，若局勢s對局中人i有利，則不論局中人i將自己的策略如何置換，都不會得到比在局勢s下更多的贏得。顯然，在非合作的條件下，每個局中人都力圖選擇對自己最有利的局勢。

定義 5.13 如果局勢s對所有的局中人都有利，即對任意$i \in I$, $s_i^0 \in S_i$ 有

$$H_i(s) \geq H_i(s \| s_i^0) \tag{5-23}$$

則稱s為非合作對策G的一個均衡局勢(或均衡點)。

當G為兩人零和對策時，上述定義等價為:$\left(\alpha_i^*, \beta_i^*\right)$為均衡局勢的充要條件是:對任意$i, j$, 有

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \tag{5-24}$$

由矩陣對策的結果可知，非合作n人對策在純策略意義下的均衡局勢不一定存在。因此，需要考慮局中人的混合策略。對每個局中人的策略集S_i，令S_i^*為定義在S_i上的混合策略集(即S_i上所有概率分布的集合)，x^i表示局中人i的一個混合策略，

$x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$為一個混合局勢$x \| z^i = \left(x^1, \ldots, x^{i-1}, z^i, x^{i+1}, \ldots, x^n\right)$

表示局中人i在局勢x下，將自己的策略由x^i置換成z^i而得到的一個新的混合局勢。以下，記$E_i(x)$為局中人i在混合局勢x下的贏得期望值，則有以下關於非合作n人對策解的定義。

定義 5.14 若對任意$i \in I$, $z^i \in S_i^*$，有

$$E_i\left(x \| z^i\right) \le E_i(x)$$

則稱 x 為非合作n人對策G的一個均衡局勢(或均衡點)。

對非合作n人對策，已經得到了一個非常重要的結論—定理 5.15

定理 5.15 Nash 定理 非合作n人對策在混和策略意義下的均衡局勢一定存在。

5.2 求解分析

本研究所構建之 Stackelberg Game 雙層最適化模型是以動態用路人最短路徑出行為目標，強調以流量為基礎，並利用不動點定律，納許均衡作為策略控制的依據，透過變分不等式的技巧，將此問題轉化成 MPEC 問題，以便利於用演算法求解。

1、考慮不等式的優化問題解的關聯性

$$\min\ Z(s)=\sum_a C_a(s, f(s)) f_a(s) \qquad (5\text{-}25)$$

限制式 $R(s, f(s))=0=\min\ C(s, f(s))(u-f(s))$

利用第三章的變分不等式雙層規劃等價表示，將 BE(I)Leader 部分，$\min_{x\in K}\|x-y(x)\|^2$ 改變成限制式$\|s-f(s)\|^2<\xi$ ，Follower 部分，$\underset{y\in K}{Min}\ F(x)^T y(x)$改變成$C_a(s, f(s)) f_a(s)$

其中$F(x)^T=C_a(s, f(s))$，$y=f_a(s)$

所以(5-25)式可改變成 BE(I’)形式，相當於求解下列方程式:

$$\text{BE(I')} \quad \begin{cases} \min_{s\in K}\|s-f(s)\|^2 & \text{Leader} \\ \min_{C_a(s,f(s))\in A} C_a(s, f(s)) f_a(s) & \text{Follower} \end{cases} \qquad (5\text{-}26)$$

又由於變分不等式$C(s, f(s))(u-f)\ge 0$與 BE(I’)等價，所以當$s=s^*$時，可以得到唯一解使得以下等式成立:

$$\|s^*-f(s^*)\|=C(s^*, f(s^*))(u-f(s^*))=0$$

所以$s^*=f(s^*),\ u=f(s^*)$

2、不定點定律與限制式$R(s, f(s))$關聯性

定理 5.16：在有限維空間中，凸集對本身之連續映射 f 必有一定點，即有一定點s,而$f(s)=s$,以上所述是眾所周知的鮑歐定點定理(Brouwer’s Fixed Point Theorem)。

定理 5.17：設$f(s)$在$[a,b]$上連續，且$f(s)$的值域含於$[a,b]$之中，則$f(s)$在$[a,b]$中必至少有一個不動點。

證明:此時$f(a)\ge a$，$f(b)\le b$，故令$F(s)=f(s)-s$，則$F(a)\ge 0,\ F(b)\le 0$，由連續函數的中間值定理，知必存在c使$F(c)=0$，$a\le c\le b$，此時c即為$f(s)$的不動點。

定理 5.18(連續函數的中間值定理)：若$f(x)$是區間$[a,b]$上的連續函數，$f(a)>0$，

$f(b)<0$則必存在一點c，使得$f(c)=0$。

證明:通常用區間套定理，取$[a,b]$的中點$\frac{(a+b)}{2}$，若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，定理已證畢。 若它大於 0，取$[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，若它小於 0，則取$[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$。再取$\frac{a_1+b_1}{2}$，再視$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$的正負取$[a_2,b_2]$，使得$f(a_2)$和$f(b_2)$異號，這樣一直下去，可得一列$[a_n,b_n]$且$b_n-a_n=\frac{(b-a)}{2^n}$，$f(a_n)$與$f(b_n)$為異號，由區間套定理可得一點$c$。我們可斷言$f(c)=0$。

原限制式$\|s-f(s)\|^2<\xi$，因為題目設定$f(s)$為連續可微，故由其區間$f(s)$在R上，且$s\geq 0$，故符合連續函數不動點定理，至少有一解，使得$s=f(s)$。

嚴格單調增加的連續函數可以有不止一個不動點。因為s本身也是單調增加函數。

3、NEP 與變分不等式$C(s,f(s))(u-f)\geq 0$關聯性

由定理 5.4 存在唯一定律。可證明變分不等式$C(s,f(s))(u-f)\geq 0$存在均衡點且唯一的滿足條件是:$C(s,f(s))$嚴格單調

4、凸規劃

定義 5.19　設有問題

$$\underset{x\in K}{Min}\, f(x) \tag{5-27}$$

若可行集K為凸集，目標函數$f(x)$為凸函數，則稱問題(5-27)為凸規劃問題。

凸規劃的解有一個重要性質:

定理 5.20　設$f(x)$是非空凸集K上的函數，假設x^*是(5-27)式的局部最優解。

(1) 若$f(x)$為凸函數，則x^*是(5-27)式中的全局最優解。

(2) 若$f(x)$為嚴格凸，則x^*是(5-27)式中的唯一最優解。

證明: 1. 用反證法。假設x^*不是(5-27)式中的全局最優解，則應有

$x^1\in S, f(x^1)<f(x^*)$，對任意$\lambda\in(0,1)$，由凸函數的性質應有

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^*)\leq \lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^*)<f(x^*)$$

令λ充分小，則$\lambda x^1+(1-\lambda)x^*$便可充分接近於$x^*$，從而由上式可知$x^*$不是局部最優解，矛盾。

2. 假設x^*不是唯一的最優解，則存在$x^2 \neq x^*$，$f(x^2)=f(x^*)$於是應有

$\lambda \in (0,1)$，使$f(\lambda x^2+(1-\lambda)x^*)<\lambda f(x^2)+(1-\lambda)f(x^*)=f(x^*)$

這同 x^*是全區最優解的假設矛盾，證畢。

5.3 求解演算法

Stackelberg Game 模型，可轉換成 BE(I’)式(5-26)中，Leader 端為限制式

$$\|s-f(s)\|^2<\xi,\ \text{Follower 為}\ \min_{C_a(s,f(s))\in A} C_a(s,f(s))f_a(s)$$

因為 BE(I’)是變分不等式$C(s,f(s))(u-f)\geq 0$雙層規劃等價表示。

所以只要有一決策向量 $s^*\in K$，使得下式成立:

$$C(s^*,f(s^*))(u-f)\geq 0 \qquad \forall u\in K \tag{5-28}$$

則s^* 可稱為變分不等式 (5-28)在 K 的一組解。接著再求

$$\| s^*-f(s^*) \|^2 < \xi \tag{5-29}$$

同時滿足(5-28)及(5-29)式的解 s^*即為目標式:

$$\min_{C_a(s,f(s))\in A} C_a(s,f(s))f_a(s) \qquad \text{最優解}$$

若$C_a(s,f(s))f_a(s)$為凸函數，則 s^*是全局最優解。若$C_a(s,f(s))f_a(s)$為嚴格凸，則s^*是唯一最優解。一般來說，這種雙層規劃整合模型求解方法可區分為簡便法與最佳化模型兩大類。

1. 簡便法:

簡便法採取循序性的方式來考慮運量分派與最佳時制選擇的過程。Allsop(1974)是第一個正式提出運量分派與最佳時制之間有互賴關係的學者。他認為感應式號誌控制系統的架構，經由結合運量分派與交通控制措施的整體考慮，可以用來改良現有的交通

管理功能。根據這個理念，他提出一個覆算求解的過程(Iterative Procedure)。Tan et al.(1979)將此過程命名為 IOA(Iterative Optimization and Assignment)，其方法簡述如下：

(1) 設定任一可行的起始解。

(2) 求解當時路網流量狀態下的最佳時制。

(3) 求解上述號誌設定下之網路均衡狀態。

(4) 檢定是否滿足收斂條件。若是，則停止；否則回到步驟 2。

根據 Allsop 的論述，Maher et al.(1975)進一步的探討號誌時制變化所產生的交通流量分配之效果，發現路口延滯比路段行駛時間對於網路均衡狀態有更大的影響。此外他們也發現不斷的依據交通現況來調整號誌時制，將會使得路網績效趨於惡化。惡化的原因是因為次要街道的交通流量都被引導至主要街道上。

簡便法不具嚴謹的理論基礎，因此無法更進一步探討問題求解的性質，且以此覆算的方式所得之均衡解，僅為系統最佳化之近似解。

2. 最佳化模型

號誌時制最佳化模型可視為一種網路設計問題(Network Design Problem, NDP)，網路設計問題具有完整的理論架構，是由一個目標方程式及一組限制式所構成的，限制式中亦可能隱含著另一個或多個最佳化的問題。如果將這個隱含的問題展開，這個網路設計問題就轉變成為雙層或多層式的規畫模型。

將號誌時制最佳化問題建構為嚴謹的數學規劃模型首見於 Tan et al.(1979)。該模型中主要是包括一個系統最佳化問題及一個隱含的用路人均衡模型。此用路人均衡模型是以非線性互補問題(Nonlinear Complementary Problem)的型態出現。Tan et al.稱這個模型為 HOP(Hybrid Optimization Problem)。為了探討求解演算法 ALM(Augmented Lagrangian Method)及 IOA 的正確性，Tan et al.使用了自創的假成本均衡原則(Pseudo Cost Equilibrium Principle)及 Wardrop 的用路人均衡原則作為演算結果正確性檢核的標準。根據這兩項檢核標準，ALM 演算法可獲得完全正確的結果，而 IOA 演算法則否。

但 ALM 演算法的正確性必須以龐大的運算為代價。

Marcotte(1984)將網路設計問題中隱含的最佳化問題展開，組構成為雙層規劃問題(Bilevel Problem)，雙層規劃問題事實上是一非合作斯達克貝爾競局(Noncooperative Stackelberg Game, NSG)，這類問題在經濟學上的應用很廣，但正如 Ben-Ayed(1988)所示，雙層規劃模型是 NP Hard(Nondeterministic Polynomial Hard)，不存在多項式演算法可獲得全區最佳解。

Abdulaal et al.(1979)將號誌統最佳化問題改寫為無限制式的最佳化問題，將有限制式的最佳化問題改寫為無限制式的最佳化問題，其關鍵在於一個隱函數的決定，由於此隱函數之導函數並不具封閉型式(closed form)，無法直接計算求得。因此文獻中利用 Powell 及 Hooke and Jeeves 兩種方法進行求解，以試誤法決定方向，再以該方向之最佳步幅降低目標值，但所得到的結果僅能視為局部最佳解之近似解。

Yang and Yagar (1995)亦利用網路設計問題之觀念，建構路網號誌與路段延滯模型，並利用 Tobin and Friesz(1988)所提出之網路均衡問題之敏感度分析為基礎進行求解，以號誌時制的微量擾動，計算路段流量與路段延滯之導函數，求解靜態路網號誌時制最佳化設定問題，由於此問題為非凸問題(Nonconvexity)，故所得解為局部最佳解。

5.4 變分不等式敏感度分析方法

在號誌時制設定問題中，若欲利用陡降法進行求解，所遭遇最大的困難在於路段流量變數為號誌時制(有效綠燈時間)之函數，且此函數不具封閉型式，無法直接計算其導函數，而敏感度分析可運用變數在均衡解附近之微量擾動，有效推估其均衡解附近之導函數，作為搜尋最佳解之有效資訊。因此本研究將以此方法搜尋目標函數之尋優方向(descent direction)，相關文獻整理如下:

在參考文獻中，Fiacco and Mccormick(1968)最早提及敏感度分析，當初他們為了提高非線性數學規劃問題之求解演算法效率，探討當目標函數或限制式小幅變動的情況下最佳解之改變量。改變後問題，若能滿足

(1) 目標函數及限制式二階可微 (Twice Differentiable)

(2) 唯一解之二階充分條件(Second order Sufficient Condition)

(3) 限制式之一階偏微滿足線性獨立

(4) 等式限制式及其對偶變數滿足嚴格互補性質(Strict Complementary)

則新的最佳解可視為微擾變數之函數。

Fiacco(1976)建構以懲罰值函數預測非線性規劃問題局部解(Local Solution)附近敏感度資訊之理論基礎。若最佳解滿足唯一解之二階充分條件及完全互補條件，即可獲得一階敏感度分析(First-order Sensitivity Analysis)資訊，該文獻並利用懲罰值函數推導目標式、限制式小幅擾動後之最佳解與微擾變數間的函數關係。

Tobin(1986)參照 Fiacco 所提之非線性規劃問題敏感度分析方法，提出變分不等式敏感度分析理論與求解方法，文獻中提及若欲獲得變分不等式敏感度分析資訊，其均衡解及對偶變數必須滿足局部唯一解之充分條件(Sufficient Conditions for a Locally Unique Solution)、限制式一階偏微線性獨立及嚴格互補鬆弛條件(Strict Complementary Slackness)，若上述之條件成立，將均衡解存在之必要條件恆等式對微擾變數進行偏微，便可獲得均衡解附近敏感度分析資訊，而微擾後之均衡解亦可由其一階敏感度分析與微擾值加以估算。

Tobin and Friesz(1988)將變分不等式敏感度分析應用至網路均衡問題中。由於網路問題之路徑解或路段流量間有交互影響之路段解並不滿足唯一解之充分條件，無法對其變分不等式模型進行敏感度分析。但是當路段成本函數為嚴格單調(Strictly Monotonic)函數時，則網路均衡問題之路段解符合局部唯一解之充分條件，則路段解之變分不等式模型符合敏感度分析之要件。但敏感度分析是分析路徑流量間的變動狀況。因此在該篇文獻中，Tobin and Friesz 利用數學規劃的方式，以唯一之路段流量解推估一組路徑流量解進行敏感度分析，此路徑流量必須滿足角點(Extreme point)且非退化(Nondegenerate)之假設，亦即該數學規劃問題所使用到路徑流量為正之路徑數必須小於或等於使用到的路段數與起迄對數目之合，以確保可以找到一組可行之路徑解。

由於 Tobin and Friesz 欲將變分不等式敏感度分析應用至網路均衡分析所需之假設過於強烈，降低了求解一般網路問題的適用性，因此 Cho(1991)提出廣義反矩陣方法(Generalized Inverse Approach)，將路徑可行解空間轉換至路段可行解空間，再由路段可行解空間探討敏感度分析問題，以避免唯一性的困擾。

第六章　均衡路網流量敏感度分析在雙層規劃上之應用

求解雙層規劃模式最適化問題的過程中，若採用目標函數對決策變數之一階偏微作為搜尋最佳解的方向，將遭遇路段流入率函數不具封閉形式，因此無法直接求得其導函數的困境，而一般遭遇此問題可藉由微擾變數在局部唯一解附近微量的擾動，推估其敏感度分析資訊加以解決。

本章的內容安排如下：6.1 節探討變分不等式敏感度分析之適用時機；6.2 節說明如何將變分不等式應用於網路均衡問題中；6.3 節說明如何以符合局部唯一解特性之均衡路徑解進行變分不等式敏感度分析；6.4 節說明如何應用敏感度分析求解雙層規劃網路設計問題，Stackelberg Game 模型最適化。

6.1 變分不等式敏感度分析適用時機

Tobin(1986)發展變分不等式敏感度分析之手法，文中提及若要對變分不等式之均衡解進行敏感度分析，必須滿足四項條件：

(1)：變分不等式之均衡解存在。

(2)：變分不等式之均衡解必須滿足局部唯一解(Locally unique solution)之充分條件，即均衡解必須為局部唯一解。

(3)：變分不等式之可行解區域函數，符合一階偏微線性獨立。

(4)：邊界限制式之對偶變數必須滿足嚴格互補鬆弛條件(Strictly Complementary Slackness, SCS).

6.1.1 變分不等式解的存在性與唯一性條件

令 u 為決策變數，$c:R^n \to R^n$ 連續，$e:R^n \to R^m$ 表示變分不等式可行解區域中所有邊界限制式之函數集合且可微，$f:R^n \to R^p$ 為所有等式限制式之函數集合且為線性。則定義可行解區域如下:

$$\Omega=\{u\in R^n \mid e(u)\geq 0,\, f(u)=0\} \tag{6-1}$$

若一向量$u^*\in\Omega$ 滿足

$$c(u^*)^T(u-u^*)\geq 0 \quad \forall u\in\Omega \tag{6-2}$$

則 u^*被稱為變分不等式(6-2)在可行解區域Ω之一組均衡解。

變分不等式均衡解存在的必要條件與充分條件如定理 6.1 與定理 6.2 所示，局部唯一解存在的充分條件如定理 6.3 所示，相關證明及推導引用自 Tobin(1986)。

定理 6.1：變分不等式均衡解存在之必要條件

若向量$u^*\in\Omega$為變分不等式(6-2)之均衡解，且限制式之一階偏微$\nabla_u e_i(u^*),\ \forall i$ such that $e_i(u^*)=0$與$\nabla_u f_j(u^*),\ \forall j$為線性獨立，則存在$\eta\in R^m$, $\mu\in R^p$滿足限制式(6-3)~(6-6)。

$$c(u^*)-\nabla_u e(u^*)^T\eta-\nabla_u f(u^*)^T\mu=0 \tag{6-3}$$

$$\eta^T e(u^*)=0 \tag{6-4}$$

$$f(u^*)=0 \tag{6-5}$$

$$\eta\geq 0 \tag{6-6}$$

證明：

令$\theta(u)=c(u^*)^T(u-u^*)$，則由$c(u^*)^T(u-u^*)\geq 0$得知變分不等式均衡解$u^*$亦為非線性最佳化問題(6-7)之最佳解：

$$Min\,\theta(u)=c(u^*)^T(u-u^*) \tag{6-7a}$$

受限於

$$u\in\Omega \tag{6-7b}$$

由於限制式之一階偏微符合線性獨立的假設，因此當決策變數u^*為最佳解時，根據 Kuhn-Tucker 必要性定理(Kuhn-Tucker Necessity Theorem),存在η, μ滿足：

$$\nabla_u \theta(u^*)^T - \nabla_u e(u^*)^T \eta - \nabla_u f(u^*)^T u = 0 \tag{6-8}$$

$$\eta^T e(u^*) = 0 \tag{6-9}$$

$$f(u^*) = 0 \tag{6-10}$$

$$\eta \ge 0 \tag{6-11}$$

由(6-7a)對決策變數偏微可得

$$\nabla_u \theta(u^*) = c(u^*) \tag{6-12}$$

故(6-8)~(6-11)對等於(6-3)~(6-6)，必要條件得證。

定理 6.2 ：變分不等式均衡解存在之充分條件

若 $f(u)$ 為凹(Concave)函數集合，且 $u^* \in \Omega$, $\eta \in R^m$, $\mu \in R^p$ 滿足(6.3)-(6.6)式，則 u^* 為變分不等式(6-2)之一組均衡解。

證明：

在本定理之假設前提下，非線性規劃問題(6-7)為凸(Convex)規劃問題，若(6-3)-(6-6)式成立，表示數學規劃問題(6-7)之最佳化條件成立，由(6-13)可知 u^* 為變分不等式(6-2)之一組均衡解。

$$0 = c(u^*)^T (u^* - u^*) \le \theta(u) = c(u^*)^T (u - u^*) \qquad \forall u \in \Omega \tag{6-13}$$

充份條件得證。

若一組均衡解 u^* 為變分不等式(6-2)之局部唯一解(Locally Unique)，則存在一以 u^* 為球心、ε 為半徑之球狀鄰域 $B(u^*,\varepsilon)$，對於所有 $\bar{u} \in B(u^*,\varepsilon) \cap \Omega$, $\bar{u} \ne u^*$，存在 $u \in \Omega$，使得(6-14)式成立。

$$C(\bar{u})^T (u - \bar{u}) < 0 \tag{6-14}$$

定理 6.3：局部唯一解(Locally Unique Solution)存在之充分條件

若定理 6.2 成立、c 可微， 且存在

$$y^T \nabla_u c(u^*) y > 0 \tag{6-15}$$

其中 $y \neq 0$，且滿足

$$\nabla_u e_i(u^*) y \geq 0 \text{ all } i \text{ such that } e_i(u^*) = 0 \tag{6-16}$$

$$\nabla_u e_i(u^*) y = 0 \text{ all } i \text{ such that } \eta_i > 0 \tag{6-17}$$

$$\nabla_u f_i(u^*) y = 0 \quad \forall i \tag{6-18}$$

則 u^* 為變分不等式(6-2)之一組局部唯一解。

證明：

利用反證法證明若滿足(6-15)~(6-18)且定理 6.2 成立，則 u^* 為變分不等式(6-2)之局部唯一解。

若 u^* 為均衡解但非局部唯一解，令

$$u' = u^* + \lambda y, \text{ with } \|y\| = 1, \lambda > 0 \tag{6-19}$$

則存在多組向量集合 $\{u'\}$，$\lim_{\lambda \to 0} u' = u^*$，$u' \in \Omega$，且 u' 為變分不等式(6-2)之均衡解。

因 $u' \in \Omega$，故

$$e_i(u') - e_i(u^*) \geq 0 \text{ all } i \text{ such that } e_i(u^*) = 0 \tag{6-20}$$

$$f_i(u') = f_i(u^*) = 0 \quad \forall i \tag{6-21}$$

$$c(u^*)^T (u' - u^*) \geq 0 \tag{6-22}$$

若 u' 為變分不等式(6-2)之均衡解，因 $u^* \in \Omega$，可得

$$c(u')^T (u^* - u') \geq 0 \tag{6-23}$$

由於 $\lim_{\lambda \to 0} u' = u^*$，考慮一定點令 $\lambda \to 0$，$u' \to u^*$, $u' \neq u^*$，因 e 與 f 可微，將

(6-20),(6-21),(6-22)除以微量之 λ 可得:

$$\nabla_u e_i(u^*) y \geq 0 \text{ all } i \text{ such that } e_i(u^*) = 0 \tag{6-24}$$

$$\nabla_u f_i(u^*)y = 0 \quad \forall i \tag{6-25}$$

$$c(u^*)^T y \geq 0 \tag{6-26}$$

又由(6-19)與(6-23)可知

$$c(u')^T y \leq 0 \tag{6-27}$$

因 $\lambda \to 0$, $u' \to u^*$，則 $c(u') = c(u^* + \lambda y) \to c(u^*)$，故由(6-26)及(6-27)可得

$$c(u^*)^T y = 0 \tag{6-28}$$

由(6-3)與(6-25)可得

$$\begin{aligned} c(u^*)^T y &= \eta^T \nabla_u e(u^*)y + \mu^T \nabla_u f(u^*)y \\ &= \sum_{i:\eta_i>0} \eta_i \nabla_u e_i(u^*)y + \sum_{i:\eta_i=0} \mu_i \nabla_u e_i(u^*)y + \mu^T \nabla_u f(u^*)y \\ &= \sum_{i:\eta_i>0} \eta_i \nabla_u e_i(u^*)y + 0 + 0 \end{aligned} \tag{6-29}$$

將(6-28)與(6-29)相對照可得

$$\nabla_u e_i(u^*)y = 0 \ \text{ all } \ i \ \text{ such that } \ \eta_i > 0 \tag{6-30}$$

令 $\nabla_u c_i(u)$ 表函數 $c_i(u)$ 對變數向量 u 之一階偏微向量。由泰勒展開式定理，取 $c(u')$ 之一階泰勒展開式可得

$$c(u') = c(u^*) + \lambda \begin{bmatrix} \nabla_u c_1(u^*) \\ \vdots \\ \nabla_u c_n(u^*) \end{bmatrix} y \tag{6-31}$$

將(6-31)式代入(6-27)式中可得

$$c(u')^T y + \lambda y^T \begin{bmatrix} \nabla_u c_1(u^*) \\ \vdots \\ \nabla_u c_n(u^*) \end{bmatrix} y \leq 0 \tag{6-32}$$

對照(6-26)與(6-32)可得

$$\lambda y^T \begin{bmatrix} \nabla_u c_1(u^*) \\ \vdots \\ \nabla_u c_n(u^*) \end{bmatrix} y \leq 0 \tag{6-33}$$

將(6-33)除以λ可得

$$y^T \nabla_u c(u^*) y \le 0 \qquad (6\text{-}34)$$

因此在(6-24),(6-25),(6-30)成立的條件下，若變分不等式(6-2)存在多組均衡解，則原假設(6-15)不成立，局部唯一解之充分條件得證

推論 6.1:若定理 6.2 成立，且$\nabla_u c(u^*)$正定(Positive Definite)，則u^*為變分不等式(6-2)之局部唯一解。

6.1.2 變分不等式敏感度分析理論基礎及適用條件

本小節說明變分不等式敏感度分析之理論基礎及適用條件，相關之推導及證明引用自 Tobin(1986)變分不等式敏感度分析與 Fiacco and McCormick(1968) Fiacco (1976, 1983)非線性規劃問題敏感度分析。

令$c(u,\varepsilon)$對於(u,ε)為一階連續可微，$e(u,\varepsilon)$對於u而言為凹函數，且在(u,ε)為二階連續可微，$f(u,\varepsilon)$對於u而言為線性函數，且對於ε為一階連續可微，則重新定義微擾變分不等式$VI(\varepsilon)$為尋找均衡解$u(\varepsilon)\in\Omega(\varepsilon)$使得

$$c(u(\varepsilon),\varepsilon)^T (u-u(\varepsilon)) \ge 0 \quad \forall u \in \Omega(\varepsilon) \qquad (6\text{-}35)$$

其中，$\Omega(\varepsilon)$定義為$u\in R^n$且滿足

$$e(u,\varepsilon)\ge 0 \qquad (6\text{-}36)$$

$$f(u,\varepsilon)=0 \qquad (6\text{-}37)$$

定理 6.4:微擾局部唯一解存在之充分性定理

令$c(u^*)$, $e(u^*)$, $f(u^*)$, η, μ為$VI(\varepsilon)$在$\varepsilon=0$之局部唯一解,將其重新定義為$c(u^*,0)$, $e(u^*,0)$, $f(u^*,0)$, η^*, μ^*，所對應限制式之一階偏微$\nabla_u e_i(u^*,0)$, $\forall i$ such that $e_i(u^*,0)=0$與$\nabla_u f_j(u^*,0)$, $\forall j$為線性獨立。若限制式滿足嚴格互補鬆弛條件，即

$$\eta_i^* > 0 \ \text{all } i \quad \text{such that } e_i(u^*,0)=0 \qquad (6\text{-}38)$$

則η^*與μ^*具有唯一性，且在$\varepsilon=0$之鄰域，必存在唯一一階可微函數$\left[u(\varepsilon)^T,\eta(\varepsilon)^T,\mu(\varepsilon)^T\right]^T$，使$u(\varepsilon)$為$VI(\varepsilon)$之局部唯一解，即$u(\varepsilon)$，$\eta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$對$VI(\varepsilon)$而言滿足局部唯一解之充分條件。此鄰域必須滿足(i)邊界限制式(ii)邊界限制式之一階偏微在$u(\varepsilon)$為線性獨立(iii)嚴格互補鬆弛條件。

證明:

當$\varepsilon=0$，令$\left[u^T,\eta^T,\mu^T\right]=\left[u^{*T},\eta^{*T},\mu^{*T}\right]^T$為微擾變分不等式在$\varepsilon=0$之均衡解，根據定理 6.1 可得

$$c(u,\varepsilon)-\nabla_u e(u,\varepsilon)^T\eta-\nabla_u f(u,\varepsilon)^T\mu=0 \tag{6-39}$$

$$\eta^T e(u,\varepsilon)=0 \tag{6-40}$$

$$f(u,\varepsilon)=0 \tag{6-41}$$

$$\eta\geq 0 \tag{6-42}$$

根據 Fiacco and McCormick(1968)定理 6，若限制式(6-39)與可行解區域之一階偏微$\nabla_u e_i(u^*,0)$, $\forall i$ such that $e_i(u^*,0)=0$與 $\nabla_u f_j(u^*,0)$, $\forall j$為線性獨立之假設均成立，則對偶變數η, μ在$\varepsilon=0$具有唯一性。若u, η, μ在$\varepsilon=0$滿足(6-39)~(6-42)，則在$\varepsilon=0$之鄰域，且該鄰域滿足假設條件(i),(ii),(iii)的情況下，根據 Rudin(1953)隱函數定理，存在一階可微矩陣$[u(\varepsilon),\eta(\varepsilon),\mu(\varepsilon)]$滿足 6-15~6-18 局部唯一解之充分條件。

定理 6.5:隱函數定理(Implicit Function Theorem)

令$u(\varepsilon)$，$\eta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$為微擾變分不等式(6-35)在$\varepsilon=0$鄰域之局部唯一解，且滿足限制式一階偏微線性獨立、嚴格互補鬆弛條件。令

$$x(\varepsilon)=\left[u(\varepsilon)^T,\eta(\varepsilon)^T,\mu(\varepsilon)^T\right]^T \tag{6-43}$$

$J_x(\varepsilon)$為系統限制式(6-39)~(6-42) 對$\left[u^T,\eta^T,\mu^T\right]^T$在$(x(\varepsilon),\varepsilon)$處偏微之 Jacobian 矩陣，$J_\varepsilon(\varepsilon)$為系統限制式(6.39)~(6.42)對$\varepsilon$在$(x(\varepsilon),\varepsilon)$偏微之 Jacobian 矩陣。則在$\varepsilon=0$之鄰域必滿足等式(6.44)

$$\nabla_{\varepsilon} x(\varepsilon) = [J_x(\varepsilon)]^{-1}[-J_{\varepsilon}(\varepsilon)] \tag{6-44}$$

證明:

由於$u(\varepsilon)$，$\eta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$為微擾變分不等式之均衡解，在$\varepsilon = 0$之鄰域必滿足系統限制(6-39)~(6-42)。由於$u(\varepsilon)$為$VI(\varepsilon)$之區域均衡解，因此(6-39)~(6-42)對ε在$\varepsilon = 0$之鄰域偏微等於 0。根據連鎖律(Chain Rule)可知，在$\varepsilon = 0$之鄰域必滿足:

$$J_x(\varepsilon)\nabla_{\varepsilon} x(\varepsilon) + J_{\varepsilon}(\varepsilon) = 0 \tag{6-45}$$

其中

$$J_x(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \nabla_u c(u,\varepsilon) - \nabla_u{}^2 e(u,\varepsilon)^T \eta - \nabla_u{}^2 f(u,\varepsilon)^T \mu & -\nabla_u e(u,\varepsilon)^T & -\nabla_u f(u,\varepsilon)^T \\ \eta^T \nabla_u e(u,\varepsilon) & e(u,\varepsilon)^T & 0 \\ \nabla_u f(u,e) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-46}$$

$$J_{\varepsilon}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \nabla_{\varepsilon} c(u,\varepsilon) - \nabla_{\varepsilon}\nabla_u e(u,\varepsilon)^T \eta - \nabla_{\varepsilon}\nabla_u f(u,\varepsilon)^T \mu \\ \eta^T \nabla_{\varepsilon} e(u,\varepsilon) \\ \nabla_{\varepsilon} f(u,\varepsilon) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-47}$$

由 Fiacco and McCormick(1968)定理 14 得知，當$x(\varepsilon)$滿足$VI(\varepsilon)$之局部唯一解、限制式一階偏微為線性獨立、嚴格互補鬆弛條件，$J_x(\varepsilon)$在$\varepsilon = 0$之鄰域存在反矩陣，故在$\varepsilon = 0$鄰域(6-45)可轉換為:

$$\nabla_{\varepsilon} x(\varepsilon) = [J_x(\varepsilon)]^{-1}[-J_{\varepsilon}(\varepsilon)] \tag{6-48}$$

變分不等式隱函數定理得證。

由(6-48)可得以下之推論。

推論 6.2:變分不等式$VI(\varepsilon)$在$\varepsilon = 0$鄰域之一階近似解

$$\begin{bmatrix} u(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u(0) \\ \eta(0) \\ \mu(0) \end{bmatrix} + [J_x(0)]^{-1}[-J_{\varepsilon}(0)]\varepsilon \tag{6-49}$$

6.2 變分不等式敏感度分析於網路均衡問題之應用

6.2.1 不含微擾變數之網路均衡模型

由第四章所構建之動態用路人均衡路徑選擇模型式(4-2)可知，動態用路人路徑選擇問題可視為尋找一組均衡路段流入率 $u^{*}\in\Omega^{*}$ 滿足以下變分不等式。

$$C\left(u^{*}\right)^{T}\left(u-u^{*}\right)\geq 0 \quad \forall u\in\Omega^{*} \tag{6-50}$$

Ω^{*} 為 Ω 之子集合，路段流入率之可行解區域 Ω 如下所示：

$$\Omega=\left\{u\mid \Lambda_{1}h=\bar{q},\Lambda_{2}h,h\geq 0\right\} \tag{6-51}$$

本研究中路段成本函數 $c_{a}(t)$ 對該路段之路段流入率 $u_{a}(t)$ 而言為嚴格單調函(strictly monotone)，路段成本函數對路段流入率之 Jacobian 矩陣為正定，故均衡路段流入率 u^{*} 為變分不等式(6-50)之局部唯一解。

一般而言，在網路均衡問題中，均衡路段解所對應之均衡路徑解通常並不唯一，其可行解區域為一凸多面體(Convex Polytope)，定義如下

$$\Omega^{*}_{u^{*}\to h}=\left\{h\mid \Lambda_{1}h=\bar{q},\Lambda_{2}h=u^{*},h\geq 0\right\} \tag{6-52}$$

其次，若以路徑變數為基礎之變分不等式表示動態用路人均衡路徑選擇模型，可視為尋找一組均衡路徑流量 $h^{*}\in\Omega^{*}_{h}$ 滿足變分不等式(6-53)。

$$c\left(h^{*}\right)^{T}\left(h-h^{*}\right)\geq 0 \quad \forall h\in\Omega^{*}_{h} \tag{6-53}$$

Ω^{*}_{h} 為 Ω_{h} 之子集合，路徑流量之可行解區域 Ω_{h} 如下所示

$$\Omega_{h}=\left\{h\mid \Lambda_{1}h=\bar{q},h\geq 0\right\} \tag{6-54}$$

定理 6.6:變分不等式(6-50)與(6-53)對等於動態用路人均衡路徑選擇問題,若變分不等式(6-50)存在均衡解 u^{*}，變分不等式(6-53)存在均衡解 h^{*}，即表示動態用路人路徑選擇問題存在均衡路段解與均衡路徑解，反之亦然。

若變分不等式(6.53)存在均衡解，則根據定理 6.1 必存在

$$c\left(h^*\right)-\eta-\Lambda_1^T\mu=0 \tag{6-55}$$

$$\eta^T h^*=0 \tag{6-56}$$

$$\Lambda_1 h^*-\bar{q}=0 \tag{6-57}$$

$$\eta\geq 0 \tag{6-58}$$

6.2.2 包含微擾變數之網路均衡模型

以路段變數為基礎之微擾均衡網路流量問題可視為尋找均衡路段流入$u(\varepsilon)\in\Omega^*(\varepsilon)$，滿足微擾變分不等式(6-59):

$$c(u(\varepsilon),\varepsilon)^T(u-u(\varepsilon))\geq 0 \quad \forall u\in\Omega^*(\varepsilon) \tag{6-59}$$

$\Omega^*(\varepsilon)$為$\Omega(\varepsilon)$之子集合，微擾後，路段流入率之可行解區域$\Omega(\varepsilon)$如下所示

$$\Omega(\varepsilon)=\{h\,|\,\Lambda_1 h=\bar{q},u=\Lambda_2 h,h\geq 0\} \tag{6-60}$$

其中ε為微擾變數向量，且滿足$c(u,\varepsilon)$在(u,ε)一階連續可微。所對應之均衡路徑解通常並不唯一，其可行解區域為一凸多面體，定義如下:

$$\Omega^*_{u^*\to h}(\varepsilon)=\{h\,|\,\Lambda_1 h=\bar{q},\Lambda_2 h=u^*,h\geq 0\} \tag{6-61}$$

其中u^*為變分不等式(6-59)之均衡解。

若以路徑變數為基礎之變分不等式表示動態用路人均衡路徑選擇模型，可視為尋找一組均衡路徑流量$h(\varepsilon)\in\Omega_h^*(\varepsilon)$滿足變分不等式(6-62)。

$$c(h(\varepsilon),\varepsilon)^T(h-h(\varepsilon))\geq 0 \qquad \forall h\in\Omega_h^*(\varepsilon) \tag{6-62}$$

$\Omega_h^*(\varepsilon)$為$\Omega_h(\varepsilon)$之子集合，微擾後，路徑流量之可行解區域$\Omega_h(\varepsilon)$如下所示

$$\Omega_h(\varepsilon)=\{h\,|\,\Lambda_1 h=\bar{q},h\geq 0\} \tag{6-63}$$

在網路均衡問題(6-62)~(6-63)中，由於均衡之路徑流量解一般不為局部唯一解，因此定理 6.4 及定理 6.5 適用的情況不存在，均衡路徑流量$h(\varepsilon)$對微擾變數ε之導函數

無法利用標準的敏感度分析方法(standard sensitivity analysis approach)獲得。相同的，在模型(6-59)~(6-60)中，其可行解區域$\Omega(\varepsilon)$之決策變數亦包含路徑流量變數，因此亦不滿足決策變數為局部唯一解之假設，故該模型亦無法進行敏感度分析。

探討至此可以發現，網路均衡問題只要以路徑流量做為決策變數，就不能滿足標準敏感度分析手法之假設條件，而無法進一步獲得敏感度分析資訊。要規避這樣的問題，必須(1)對路徑流量解集合進行限制，使其路徑流量解符合唯一性之假設，或(2)利用廣義反矩陣，將敏感度分析之決策變數由路徑變數轉換成路段變數。

6.3 以路徑流量進行敏感度分析

6.3.1 以路徑流量進行敏感度分析之限制條件

由之前的討論可知，均衡路徑解若不為局部唯一解，則不滿足敏感度分析之先決條件，將無法進行敏感度分析。Tobin and Friesz(1988)為解決此問題，針對均衡之路徑解訂定嚴格的限制條件，在均衡路徑解之可行解區域內求得符合局部唯一解特性的路徑流量，以獲得敏感度分析資訊。

在微擾網路均衡問題中，若路段成本為嚴格單調函數，可獲得唯一之均衡路段流入率$u(\varepsilon)$，再以此界定均衡路徑解之可行解區域$\Omega^*_{u^*\to h}(\varepsilon)$，以滿足(6-61)式之條件。而在均衡路段解$u(\varepsilon)$為已知的情況下，要獲得符合局部唯一解特性的路徑流量，首先必須重新將可行解區域限制於路徑流量為正之路徑上，受限可行解區域$\Omega^{*+}_{u^*\to h}(\varepsilon)$如下所示:

$$\Omega^{*+}_{u^*\to h}(\varepsilon)=\left\{h^+ \mid \Lambda^+_1 h^+ = \bar{q}, \Lambda^+_2 h^+ = u(\varepsilon), h^+ > 0\right\} \tag{6-64}$$

其次在受限可行解區域中，推估均衡之路徑流量符合以下兩點假設:

(1) 均衡解在可行解區域之角點(Extreme point)上

(2) 此均衡解不存在退化的現象(Nondegenerate)

根據Kaplan(1982)定義:角點是指在可行解區域中，無法利用兩組不同可行解進行線性加總而產生之解；均衡解退化的現象是指在可行解區域中，存在兩組或兩組以上之

均衡解，換言之，網路問題之退化現象是指在受限可行解區域$\Omega^{*+}_{u^*\to h}(\varepsilon)$中，存在不同的均衡路徑流量使用相同路徑變數且流量均大於零。若要符合以上兩點假設，則均衡路徑解所使用的路徑變數個數必須等於受限可行解區域之秩(Rank)。

6.4 雙層規劃 Stackelberg Game 模型最適化求解分析

本節將研究如何透過變分不等式技巧將主從 Stackelberg 問題轉化成 MPEC 問題；因數學規劃有明確的目標追求及其在各領域中應用廣泛和深入研究，有比較成熟的演算法求解。並提出假設簡化決策變數，且以路段流量為基礎的 Stackelberg Game 模型交通路網設計。

命題 6.7

若將 BE(II)式(3-3) 上層部分改成限制式，下層部分改成目標式

則得到下列 MPEC (Mathematical Program with Equilibrium Constraints) 問題

目標式

$$\min_{y\in K} F(x)^T y$$

限制式

$$\min_{\substack{x\in K\\ y\in K}} F(x)^T x - f(x)$$

其中 $f(x)=F(x)^T y$ (6-65)

命題 6.8(以下層的目標值(決策的效應)作為響應反饋到上層)原 BE(II)式(3-3)，若將決策效應簡化為路段流量為基礎，則動態用路人模式可改成 BE(II’)模式，如下:

$$\min_{\substack{u\in\Omega\\ f\in\Omega}} C_a(u)(u-f)$$ 上層

其中 $C_a(u)$ 由 BE(II)式 $F(x)^T$ 改成

且其中 x 改成 u

BE(II’) (6-66)

$$\min_{\substack{u\in\Omega \\ f\in\Omega}} C_a(u)f \quad \text{下層}$$

其中 f 由 BE(II)式 y 改成

命題 6.9

再將(6-66)式仿造(6-65)式轉化成 MPEC 問題，如下:

目標式 $$\min_{\substack{u\in\Omega \\ f\in\Omega}} C_a(u)f \tag{6-67}$$

限制式 $$\min_{\substack{u\in\Omega \\ f\in\Omega}} C_a(u)(u-f)$$

以上說明，如何將主從二階層 Stackerberg 網路設計問題透過變分不等式技巧轉化成(6-67)式 MPEC 問題，具有完整的理論架構，是由一個目標方程式及一組限制式所構成的，限制式中隱含著另一個或多個最佳化的問題。

式(6-67)目標函數: $\min_{\substack{u\in\Omega \\ f\in\Omega}} C_a(u)f$ 為用路人最適化

限制式 $\min_{\substack{u\in\Omega \\ f\in\Omega}} C_a(u)(u-f)$ 隱含用路人均衡，流量控制

將路段成本簡化為路段流入率函數，又若路段成本函數為嚴格單調函數，則可求得唯一均衡路段流入率 $\{U_a(t)\}$，此均衡路段流入率可視為決策控制之隱函數 $U(s)$，且此函數非線性函數。

由於動態流量控制系統的可行解區域包含路段流入率變數，此可行解區域為非凸(Nonconvex)可行解區域，而非凸可行解區域表示此模型無法利用有限回合數之演算法尋得全域最佳解(Global Optimum)，僅能利用敏感度分析資訊求得局部最佳解。

本小節提出 Stackelberg Game 路網設計模型，希望能結合變分不等式敏感度分析，發展適合求解演算法，將用路人獲得均衡指派至適當路上，達成系統最佳化。實為徹底解決交通問題，提高道路效能的必備條件。

第七章　結論與建議

路網指派模式，文獻討論最廣者是變分不等式，但實務界應用最多的依舊是數學規劃模式，以 Frank-Wolf 方法求解均衡問題。

本文提出雙層規劃 Stackelberg Game 模型，其在理論論証方面是以納許均衡定律，擬凹函數 N 人賽局可表示成變分不等式，建立變分不等式雙層規劃等價模式，構建成 Stackelberg Game 基本對策規劃模型。發現變分不等式與 Nash 均衡及不等點之間有著深刻的聯繫 ； 任意一個 Nash 均衡問題均可表示為一個變分不等式。Nash 均衡與鞍點之間的關係，N 人非合作局與二人零和局等價，不動點定律在主從關係的聯繫上的作用。瞭解這些層次性給問題建模及求解分析帶來了直觀明晰性。

一個理想的交通系統運作過程，必須能同時表現網路均衡原則，並反應交通策略控制改變對於路網流量的影響。而一般實務上，常將網路均衡與策略控制視為兩個對等的問題加以處理，以競局理論中 Nash 競局的求解概念來解決這樣的問題，然而發現依據交通現況不斷調整策略控制，將會使網路績效趨於惡化，網路上所有的流量將被導引到主要路段上。因此本研究利用網路設計問題之觀念，構建成 Stackelberg Game 模型架構，並透過變分不等式技巧，建構成數學規劃模式，目標式為用路人旅行最小成本為目標，限制式為策略控制，主從 Stackelberg Game 關係。以便利於演算法求解，或利用變分不等式敏感度分析方法獲得正確的尋優方向。

本研究 Stackelberg Game 模型，其中 $C_a(s, f(s))$，模型變數的定數不明確，決策變數為控制變數，控制用路人所使用路段的流量控制 $f(s)$。如號誌時制的調整、路寬的些微改變，這些決策參數的改變對於整體路網流量均會產生影響。所以這種主從網路設計模型，必須領導者確實掌握住追隨者的資訊，以便下決策，並確定追隨者跟著執行其策略方屬有效。因此，均衡路網流量敏感性分析在這種雙層規劃 Stackelberg Game 模型中也就顯得特別重要；路網敏感性分析的資訊是用路人對路網參數變化所產生之反應，此資訊可快速提供給決策者參考，並可進一步結合先進用路人資訊系統(Advanced

Traveler Information Systems, ATIS)，將用路人指派至最適當之路段上，達成系統最佳化之目標。

附錄

1. 納許定理

納許(J. F. Nash)(註 1)曾證明非合作局必有混策均衡局面。

定理 1:任一非合作局 $\Gamma=\left\langle I,\{S_i\}_{i\in I},\{H_i\}_{i\in I}\right\rangle$,至少有一個(混策)均衡局面。

證明:若局Γ中,競者i有m_i個純策,其所有純策集Σ_i為幾何上之(m_i-1)維單體,計為$S^{(i)}$。

故任取混策局面

$$\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \tag{A-1}$$

可視同為混策單體之卡積$S^{(1)}\times\cdots\times S^{(n)}$中之一點。

此一卡積必為$m_1+\cdots+m_n$ — n 維歐氏空間中之有界封閉凸子集。

茲為競者i，任取一局面σ及純策$s_i^{(j)}\in S_i$而定義一函

$$\phi_{ij}(\sigma)=\max_i\left\{0,H_i\left(\sigma\parallel s_i^{(j)}\right)-H_i(\sigma)\right\} \tag{A-2}$$

此式只取非負值。

此函數只度量競者i在局面σ中，策略σ_i為純策$s_i^{(j)}$取代時，報酬之增值；報酬減少之值，因函數ϕ_{ij}為 0，故不予計算。茲對所有$i=1,\dots,n$，及 $j=1,\cdots,m_i$ 取

$$\frac{\sigma_i\left(s_i^{(j)}+\phi_{ij}(\sigma)\right)}{1+\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}(\sigma)} \tag{A-3}$$

顯然，此式對$j=1,\dots,m$加總，其和為 1。

所以(A-3)式中之σ及i確定後,可視為競者i在諸純策$s_i^{(j)}$上之機率,也就是競者i之一混策。

因(A-3)式針對每一競者,故其總體決定一套諸競者之混策體系,也即局Γ之局面。

此一局面乃原始局面σ之函數，記為$f(\sigma)$。函數f顯然是從一封閉有界之局面凸集至本身之映射。

此外，此一函數乃諸局面之連續函數。其實，局面中之各項均為f之函數值，其形式如(A-3)之分數、分子中，第一項為起始局面之成分，故為相依且連續。按照(A-2)式，第二項中有一次函數$H_i(\sigma), H_i(\sigma \| s_i^{(j)})$，0 以及求極大的算符，所以，$\phi_{ij}(\sigma)$都為$\sigma$的函數。最後，分母永不為 0(至少為 1)，故函數f為連續。由上所述，眾所週知的鮑歐定點定理(Brouwer's fixed point theorem)(註二)之條件均已具備，該定理稱:有限維空間中，凸集對本身之連續映射 f 必有一定點，即有一定點σ^0，而$f(\sigma^0)=\sigma^0$，因此，任取i及j，必有

$$\sigma_i^0\left(s_i^{(j)}\right)=\frac{\sigma_i^0\left(s_i^{(j)}\right)+\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)}{1+\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)} \qquad \text{(A-4)}$$

由引理：任取混策$\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$，任一競者$i$必有純策$s_i^0$，使得$\sigma_i^0(s_i^0)>0$且$\phi_{i0}(\sigma^0)=0$。對此一特殊的策略，(A-4)式可改寫成

$$\sigma_i^0\left(s_i^0\right)=\frac{\sigma_i^0\left(s_i^0\right)+\phi_{i0}\left(\sigma^0\right)}{1+\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)}$$

故

$$\sigma_i^0\left(s_i^0\right)+\sigma_i^0\left(s_i^0\right)\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)=\sigma_i^0\left(s_i^0\right)+\phi_{i0}\left(\sigma^0\right)$$

等號二邊相消，又因右邊末項為 0（因已選s_i^0），得

$$\sigma_i^0\left(s_i^0\right)\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)=0$$

可是，左邊首項非 0，故

$$\sum_{j=1}^{m_i}\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)=0$$

此外，$\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)$均為非負，只得各 $\phi_{ij}\left(\sigma^0\right)$均為 0，因此(A-2)式之極大號右邊應無一正數，換言之

$$H_i\left(\sigma^0 \parallel s_i^{(j)}\right) \le H_i\left(\sigma^0\right)$$

此不等式對任一競者i之任一純策$s_i^{(j)}$，故由定理可知局面σ^0為均衡局面。

1.2 納許定理之基本重要性在於保證均衡局面之存在性。可是，在實際決定局面時無法應用；因為鮑歐定點定理只保證定點之存在，並未指出如何求得，故非建構式之結果。納許定理既以鮑歐定理為基礎，故也無法求得均衡局面。

（註一）Ann. Of Math, 54（1951）, p286~295。

(註二)鮑歐定點定理證法繁多。最簡明者為 K, Kuga 提出，可參閱 Brouwer's Fixed Point Theorem: an Alternative Proof. Siam Journ. Of appl. Math., 5(1974), P. 893~897。

2. 非擴張映射的不動點定理

這節我們在希爾伯特空間H上考察。H中子集F稱為閉的，是指按由內積導出的範數、再由範數導出的距離ρ是閉集。(意即若 $x_n \in F, \rho\left(x_n, x_0\right) \to 0$, 則 $x_0 \in F$)。

H 中子集 M 稱為有界的，是指存在一個以原點 0 為中心，半徑為α的球 B(0, α)，使 $M \subset B(0,a)$, $B(0,a)$可用範數描述為$\{x \mid \|x\| \le \alpha\}$。因此有界集 M 是指存在常數$\alpha$，使得當$x \in M$時，都有$\|x\| \le \alpha$。H 中的集合 E 稱為是凸集，是指 E 中任何兩點的連線均在 E 中，即若$x, y \in E$則對 任何$0 \le \alpha \le 1$，均有$\alpha x + (1-\alpha)y \in E$。

顯然R^n中以 0 為中心的單位球是閉的、有界的凸集。所以希爾伯特空間中的閉、有界、凸集是R^n中單位球的推廣。我們將證明布勞威爾不動點定理的下列推廣:

定理 2　若 C 是希爾伯特空間中的閉、有界、凸集，那麼 C 上的非擴張自映射至少有一個不動點。

為了證明定理 2，先來做一些準備工作。

引理 1　設 u,v 是希爾伯特空間 H 中的兩個元素，如果存在 $x\in H$，使得 $\|x-u\|\le R$，$\|x-v\|\le R$ 且 $\|x-(u+v)/2\|>r$，則 $\|u-v\|\le 2\sqrt{R^2-r^2}$。

證明　由平行四邊形法則

$$\|u-v\|^2=\|(x-v)-(x-u)\|^2$$

$$=2\|u-v\|^2+2\|x-u\|^2-\|x-v+x-u\|^2$$

$$=2\|x-v\|^2+2\|x-u\|^2-4\left\|x-\frac{u+v}{2}\right\|^2\le 4R^2-4r^2$$

$$=4\left(R^2-r^2\right)$$

兩邊開方即得結論。

引理 2　F 是有界集 C 上的非擴張自映射。若 x,y 及 $a=(x+y)/2$ 均在 C 內，且

$$\|x-F(x)\|\le\varepsilon,\ \|y-F(y)\|\le\varepsilon$$

則

$$\|a-F(a)\|\le 2\sqrt{2\delta(C)}\cdot\sqrt{\varepsilon}$$

這裡 $\delta(C)=\max\limits_{x,y\in c}\|x-y\|$， 稱為 C 的直徑。

證明　因為

$$\|x-y\|\le\left\|x-\frac{a+F(a)}{2}\right\|+\left\|y-\frac{a+F(a)}{2}\right\|$$

故右端兩項必有一項不小於左端的一半。不仿認為是第一項

即

$$\left\|x-\frac{a+F(a)}{2}\right\|\ge\frac{1}{2}\|x-y\|$$

但

$$\|x-a\|=\frac{1}{2}\|x-y\|$$

且

$$\|x-F(a)\| \le \|x-F(x)\| + \|F(x)-F(a)\| \le \varepsilon + \|x-a\| = \varepsilon + \frac{1}{2}\|x-y\|$$

由引理 1 可知

$$\|a-F(a)\| \le 2\left[\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\|x-y\|\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\|x-y\|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon + \|x-y\|}$$

因為 ε 和 $x-y$ 都不超過 $\delta(C)$ ，定理的結論隨即可得。

現在我們來證明此定理。它的想法是很自然的。首先非擴張映射 F 可用壓縮映射 $F_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)F$ 來近似，F_n 有不動點 x_n。其次，x_n 當然不必是 F 的不動點，但 $x_n - F_n$ 距離不超過 $\frac{1}{n}\delta(C)$。於是考察 $Q_n = \left\{x \in C \mid \|x-F(x)\| \le \frac{1}{n}\delta(C)\right\}$

然後設法將 Q_n 改造成一個直徑趨於 0 的閉集套 A_n，由於完備距離空間中這種閉集套必有一公共點，定理遂最後得證，現詳述如下：

第一步：不失一般性，設 $O \in C$，對任何自然數 $n > 2$ 作 $F_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)F$ ，此時 F_n 是 C 到 C 的壓縮映射，必有不動點 $x_n : F_n(x_n) = x_n$。 但

$$\|x_n - F(x_n)\| = \|F_n(x_n) - F(x_n)\|$$
$$= \frac{1}{n}\|F(x_n)\| \le \frac{\delta(C)}{n}$$

第二步：考察 $Q_n = \left\{x \in C \mid \|x-F(x)\| \le \frac{1}{n}\delta(C)\right\}$ 今後我們把這種點稱為 $\frac{1}{n}\delta(C)$ 不動點（一般地對 $\varepsilon > 0$， 有 $\|x-F(x)\| < \varepsilon$ 的 x 稱為 ε 不動點），顯然 Q_n 是遞縮的非空閉集套：$Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$。記 $d_n = \inf\{\|x\| \mid x \in Q_n\}$（$Q_n$ 各點與原點的最小距離）。則 d_n 是單調不減數列，由於 Q_n 是 C 的子集，d_n 之值不超過 $\delta(C)$，所以 $d_n \to d$。

第三步：構造直徑趨於 0 的閉集套 A_n ：

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B\left(O, d + \frac{1}{n}\right)}$$

顯然，A_n 仍是非空遞縮閉集套，我們來計算 $\delta(A_n)$。

首先，若 $x, y \in A_n$，則 $x, y \in Q_{8n^2}$，且 $a = \frac{x+y}{2} \in Q_n$，

這可由引理 2 看出:

$$\|a - F(a)\| \le 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{\delta(C)}{8n^2}} = \frac{\delta(C)}{n}$$

其次，又 $x, y \in \overline{B\left(O, d + \frac{1}{n}\right)}$，則 $\|O - x\| \le d + \frac{1}{n}$, $\|O - y\| \le d + \frac{1}{n}$，而 $\left\|O - \frac{x+y}{2}\right\| \ge d_n$

因為 $a \in Q_n$

再由引理 1 知

$$\|x - y\| \le 2\sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d_n^2}$$

$$= 2\sqrt{2dn^{-1} + n^{-2} + d^2 - d_n^2}$$

當 $n \to \infty$ 時，右端之值趨於 0。故 $\delta(A_n) \to 0$

由拓樸空間中的康托定理，完備距離空間中直徑趨於 0 的遞縮閉集套必有唯一的一點 x_0 屬於所有套中的閉集:

$x_0 \in \bigcap_n A_n$ 因而 $x_0 \in \bigcap_n Q_{8n^2}$，亦即

$$\|x_0 - F(x_0)\| \le \delta(C) \cdot \frac{1}{8n^2}$$

對所有 n 都成立。故 $\|x_0 - F(x_0)\| = 0$，x_0 即為 F 的不動點。

3. 定理　設 $D \subseteq R^n$ 為凸區域，$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 D 上定義，有連續的二階偏導數，證明 $f(x)$ 在 D 上為凸函數的充要條件是 Hessian 矩陣

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

在 D 上為半正定的

證明：

充分性。

$$\forall x, y \in D$$

根據 Taylor 公式

$$\exists \zeta = x + \theta (y - x) \qquad (0 < \theta < 1)$$

使得

$$f(y) = f(x) + (y - x)\nabla f(x) + \frac{1}{2!}\left[(y_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (y_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(\zeta) \qquad \text{(A-5)}$$

注意到

$$\left[(y_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (y_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(\zeta)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)\left(\frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial x_i \partial x_j}\right)\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix} \qquad \text{(A-6)}$$

若矩陣 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(i, j = 1,2,\ldots,n)$

在 D 上為半正定的，則(A-6)式非負，(A-5)式成為

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)\nabla f(x)$$

故函數 f 在 D 上為凸函數

必要性。反證法證明，假設 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ 為非半正定的，則

$\exists x \in D, h = (h_1, \ldots h_n)$　　使得

$$(h_1,\ldots,h_n)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} < 0 \text{ 成立，} \tag{A-7}$$

另一方面，由 Tayor 公式，當 $\lambda \to 0$ 時

$$f(x+\lambda h) = f(x) + \lambda h \nabla f(x) + \frac{1}{2}(\lambda h_1,\ldots,\lambda h_n)\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)\begin{pmatrix} \lambda h_1 \\ \vdots \\ \lambda h_n \end{pmatrix} + o\left(|\lambda h|^2\right)$$

$$= f(x) + \lambda h \nabla f(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 (h_1,\ldots,h_n)\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + o(\lambda^2)$$

$$= f(x) + \lambda h \nabla f(x) + \lambda^2 \left[\frac{1}{2}\left((h_1,\ldots,h_n)\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}\right) + o(1)\right]$$

當 λ 充份小時，(A-7)式中第三項為負，則

$$f(x+\lambda h) \le f(x) + \lambda h \nabla f(x)$$

與 f 凸性矛盾。

參考文獻

[1] Stackelberg H.V., *Marktform und Gleichgewicht*, Berlin: J. Springer, 1934

[2] Wardrop J.G., "Some theoretical Aspects of Road Traffic Research," Proceeding of Institute of Civil Engineers, Part II, pp.325-378, 1952.

[3] Beckmann M.J., C.B.McGuire and C.B.Winston, Studies in the Economics of Transportation, Yale University press. New Haven, Conn.1956.

[4] Graybill, F.A., Theory and Application of the Linear Models, Colorado State University, (1970)

[5] Dafermos S. C., "The Traffic Assignment Problem for Multiclass-user Transportation Network," Transportation Science, Vol.6, pp.73-87, 1972.

[6] Ashtiani H. Z., The Multi-modla Traffic Assignment Problem, Ph.D. Dissertation, M.I.T., 1979.

[7] Smith M.J.," The Existence, Uniqueness and stability of Traffic Equilibria," Transportation Research B, Vol. 13, pp.295-304, 1979.

[8] Dafermos S. C., "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities," Transportation science, Vol 14, pp.42-54, 1980.

[9] Dafermos S.C. and A. Nagurney, "Sensitivity Analysis for the General Spatial Economic Equilibrium Problem," Operations Research 32, pp. 1069-1086, 1984.

[10]Tobin R.L., "Sensitivity Analysis for Variational Inequalities," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.48, pp.191-204.1986.

[11]Tobin R.L. and T.L.Friesz "Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow," Transportation Science, Vol.22(4), pp.242-250.1988.

[12]Yang, H. and S.Yagar, "Traffic Assignment and Traffic Control in General Freeway-Arterial Corridor Systems," Transportation Research, 28B, 463-486, 1994.

[13]Yang,H.And S.Yagar, “Traffic Assignment and Signal Control in Saturated Road Network, “Transportation Research,29A,125-139,(1995)

[14]Yang,H.And W.H.K.Lam, “Optimal road Troos Under Conditions of Queuing and Congestion,” Transportation Research,30A,319-332,(1996)

[15]Cho,H-J and J-H Lee, “Solving Bilevel Network Design Problem without Nondegeneracy Assumption,” International Journal of Optimizations and Quantitative Management,Vol 5, No.1, pp1-16,1999.

[16]Cho,H-J and S-C,Lo, “ Solving Bilevel Network Design Problem Using Linear Reaction Function without Nondegeneracy Assumption,” transportation Research Record,in revise, No.1667,pp96-106,1999.

[17]李治綱，「用路人路徑擇問題之研究」，成功大學交通管理科學研究所研究報告，民國七十八年。

[18]卓訓榮，「以廣義反矩陣方法探討均衡路網流量的敏感性分析」，運輸計畫季刊，第二十卷，第一期，頁 1-頁 14，民國八十年。

[19]卓訓榮，「最短距離方法與廣義反矩陣敏感性分析方法之比較」，運輸計畫季刊，第二十一卷，第一期，頁 23-頁 34，民國八十一年。

[20]卓訓榮，「均衡路網流量之敏感性分析與路段、路徑空間轉換模式」，國科會研究報告，國立交通大學，民國八十三年。

[21]卓訓榮，李治輝，「靜態路網交通量指派模式與求解法之回顧」，運輸計畫季刊，第二十四卷，第三期，頁 283-頁 298，民國八十四年。

[22]卓訓榮，羅仕京，「以廣義反矩陣的特性推倒路徑非負流量之研究」，運輸學刊，第十一卷，第二期，頁 41-頁 50，民國八十八年。

[23]周鄭義，「動態號誌時制最佳化之研究---雙層規劃模型之應用」，中央大學碩士論文，民國八十八年

[24]卓訓榮、林培偉，「最短距離方法變分不等式均衡路網流量敏感性分析路網資訊獨

立性研究」，運輸學刊，第十一卷，第四期，頁 73-86，民國八十八年

[25]S. I. Zukhovitskii, R. A. Poliak , and M. E. Primak(USSR) Concave Multiperson Games: Numerical Methods Ekonomika i matematicheskie metody, 1971, No. 6

[26]Vorob’ev N. N., *Game theory: Lectures For Economists and Systems Scientists*, 1977.

[27]傅白白、劉法勝、夏尊銓，「變分不等式的雙層平衡表示及其在交通流分配中的應用」，系統工程理論與實踐 1999 年第 19 卷第 12 期

[28]陶軍、吳強、吳清亮，「基於多跟隨者 Stackelberg 博弈的流速控制算法」，計算機工程與應用，2006 42(2 期)