

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

樹狀模型對美式亞式選擇權評價之比較研究
Using Binomial Tree to Price American Asian Option
-A Comparative Study

研究生：遲廷峻

指導教授：王克陸 博士

中華民國九十六年六月

樹狀模型對美式亞式選擇權評價之比較研究

Using Binomial Tree to Price American Asian Option

-A Comparative Study

研究生: 遲廷峻

Student: Ting-Chun Chih

指導教授: 王克陸博士

Advisor: Dr. Keh-Luh Wang

國立交通大學

財務金融研究所碩士班

碩士論文

A Thesis

Submitted to Graduate Institute of Finance

College of Management

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

of Science in Finance

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

樹狀模型對美式亞式選擇權評價之比較研究

研究生：遲廷峻

指導教授：王克陸 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

2007 年 6 月

摘要

本論文主要研究樹狀模型對美式亞式選擇權之評價結果。本文針對三個樹狀模型進行比較：Hull-White(1993)、Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)和 Costabile-Massabó-Russo(2006)。針對這三個模型的運算時間及評價結果之關係進行比較與探討。

本文除了以上所提到的樹狀模型之外，在比較評價結果的部分還加入 Dai-Huang-Lyuu(2005)及 Dai-Wang-Wei(2007)之樹狀模型以及 Longstaff-Schwartz(2001)的最小平方蒙地卡羅模擬方法一同進行比較，使本文的結論更具完整性。

根據本文的研究結果指出，在執行速度的部分，Hull-White(1993)樹狀模型的表現相較另外兩個模型優異。但是隨著二元樹之階段數(steps)的增加，Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)、Costabile-Massabó-Russo(2006)的樹狀模型卻能提供相較 Hull-White(1993)之評價模型更穩定之評價結果。

最後我們在實做的過程之中發現 Costabile-Massabó-Russo(2006)文中對其評價結果的解釋可能有誤，本文則針對 Costabile-Massabó-Russo(2006)之評價結果給予一個更合適的解釋。

關鍵字：亞式；美式；選擇權；二元樹；樹狀模型

Using Binomial Tree to Price American Asian Option

-A Comparative Study

Student : Ting-Chun Chih

Advisors : Keh-Luh Wang

Institute of Finance
National Chiao Tung University
June, 2007

Abstract

This paper compares the results of the three different models which are Hull-White(1993), Chalasani et al.(1998) and Costabile-Massabó-Russo(2006). We compare the CPU time needed for each model and try to explain the relationship of their valuation.

To make our result more reasonable, we add another three models for our study when comparing the price. They are Dai-Huang-Lyu(2005), Dai-Wang-Wei(2007) and Longstaff-Schwartz (2001).

Finally, in this paper, we conclude that Hull-White model performs the best in CPU time, but the other models provide relatively stable price when the number of the steps of a tree is larger.

Keywords: binomial tree; Asian option; option; tree model; American; Hull White

致謝

首先我必須衷心感謝我的指導教授王克陸博士，悉心地指導使我能夠如期完成這篇論文。其次感謝戴天時博士和王之彥博士，在本篇論文寫作的後期給我十分重要的建議與幫助。也感謝前來交大為本篇論文口試的委員：呂育道博士及張焯然博士，使得本篇論文的內容更為豐富完整。最後謝謝政大資管所的林立人學長針對本篇論文所提供的建議。

研究所的同學我最必須感謝的是財工組的凱秩、君婷還有小慈。你們無私貢獻所學，使我能夠跨過學業上的難關；謝謝最夠義氣的好朋友楷文、璿元、小光還有維峻，無論在學業、生活以及工作上都曾受過你們很多的幫助；好咖團的琺惠和明琪，和你們在一起真的很快樂，沒有你們研究所這兩年真是白活了。

感謝我在新竹的好室友阿光和Jeffery，能有像你們這樣的室友我真的感到無比幸運，也讓我覺得回家是件值得期待的事；謝謝從高中一路陪伴的好同學家銜，你一直都是我很重要的精神支柱；還要感謝台北的好朋友們：阿隆、阿慶、小王、瑞克、阿班、還有阿胖。很高興這兩年有你們的支持與陪伴，同時也為我分擔了很多情緒。

以上都是這兩年以來對我最重要的人，能夠和你們一起度過這兩年是最開心的。

最後，我要感謝我的母親。感謝她不辭辛勞地栽培我直到完成研究所的學業，沒有你的支持，今日我無法走到這裡。謹以此文獻給我偉大的母親。

遲廷峻 謹誌於
交通大學財務金融研究所
民國九十六年六月

目錄

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
致謝.....	III
第一章 緒論.....	1
第二章 文獻探討.....	4
第一節 樹狀模型.....	4
第二節 蒙地卡羅方法.....	6
第三章 研究方法.....	8
第一節 HULL-WHITE 樹狀模型(1993).....	8
3.1.1 模型架構.....	8
3.1.2 演算法.....	9
第二節 CHALASANI-JHA-EGRIBOYUN-VARIKOOTY 樹狀模型(1998).....	11
3.2.1 模型架構.....	11
第三節 COSTABILE-MASSABÓ-RUSSO 樹狀模型(2006).....	17
3.3.1 模型架構.....	17
3.3.2 演算法.....	17
第四節 LONGSTAFF-SCHWARTZ 蒙地卡羅方法 (2001).....	20
3.4.1 模型架構.....	20
第四章 數值驗證.....	23
第五章 結論.....	31
參考文獻.....	33

圖目錄

(圖一) Hull-White二元樹	9
(圖二) Hull-White二元樹-節點細節	10
(圖三) 二元樹的實例	12
(圖四) 利用前推法(Forward induction)在二元格子點推算 M 和 S 的虛擬碼(Pseudo-code)	14
(圖五) (圖三)之中節點(5,2)、(6,2)、(6,3)裡面的次節點(nodelets)	16
(圖六) Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型	18
(圖七) 三種樹狀模型之評價結果	25
(圖八) 三種樹狀模型之CPU運算時間(單位：秒)	25
(圖九) Costabile-Massabó-Russo(2006)原文之表格	28



表目錄

(表一) 三種樹狀模型之評價結果	24
(表二) 三種樹狀模型之 CPU 運算時間(單位：秒)	26
(表三) 五種樹狀模型以及最小平方蒙地卡羅方法之評價結果	30



第一章 緒論

亞式選擇權亦稱為平均選擇權(Average Option)，有兩種基本的形式：

1. 平均價格選擇權(Average Price Option)：在履約時，結算價以履約前一段期間標的資產的平均市價取代之。
2. 平均履約價格選擇權(Average Strike Option)：係指選擇權之履約價格不需事先設定，而是以履約前一段期間的標的資產平均市價來決定。

亞式選擇權的償付價格(payoff)決定於過去股價的變化，因此為路徑相依(path-dependent)的選擇權。亦即要計算選擇權的到期償付價格，必須知道過去股價完整的紀錄，評價的困難度大大提高。

亞式選擇權具有傳統的美式及歐式選擇權所沒有的好處。亞式選擇權可以幫助投資人避開標的資產的隨機變動，卻不需要像美式或是歐式的商品要持續根據標的資產的價格變動重新調整避險部位。最常被使用在貨幣、利率及原物料(例如：原油)等商品的避險。

亞式選擇權根據履約的方式不同又可以分別歐式亞式選擇權(European Asian option)及美式亞式選擇權(American Asian option)。前者只有在到期日當天才能履約，而後者在到期日前的任何一天都能夠提前履約。而其中美式亞式選擇權的評價複雜程度較高，因為美式亞式選擇權除了克服路徑相依的問題之外，還必須找出最佳履約時點，才能準確地做出評價。本文探討的主題則是以美式亞式選擇權為主。

亞式選擇權在近期已經是十分受歡迎的選擇權商品，雖然截至近期才有公開交易的標準化契約，但是機構法人投資者於店頭市場(OTC market)利用亞式選擇權商品進行避險卻已行之有年，在外匯、成交量不大的資產(thinly traded assets, 如：黃金)及其他原物料商品之應用尤其廣泛。亞式商品在貨幣選擇權和原油選

擇權交易佔有相當大的比例，根據Milevsky and Posner (1997)的資料顯示，亞式選擇權商品流通在外的成交量已高達50至100億美元。自2003年11月7日紐約商品期貨交易所(NYMEX, New York Mercantile Exchange)提供原油、熱燃油和汽油的均價選擇權的標準化契約之後，亞式選擇權商品已經能夠透過次級市場公開報價，此舉將更有助於亞式選擇權商品的流通，相信未來還會有更多亞式選擇權的商品在市場上陸續推出。

一般企業喜歡使用亞式選擇權商品避險，原因有以下幾點：第一、平均價格的波動度相較成交價格為低，因此亞式選擇權的價格比一般選擇權價格為低。第二、一般的選擇權商品的結算價容易受到投機客的操作，尤其是交易量比較小的標的資產，投機客會藉由在結算日拉抬或是攪壓結算價格藉此獲取最大利益。此舉對於使用選擇權商品避險的企業而言增加許多不必要的風險。使用亞式選擇權則能夠規避類似的風險，因為針對一段時間的平均價格做價的難度將大幅提高。第三、一般企業的會計長(treasurer)在做長期的財務計畫時，會比較在乎特定會計期間之內的貨幣或是原物料「平均」成本。因此對於企業而言，亞式選擇權是十分方便並且自然的風險管理工具。根據*Risk*雜誌(1998)對微軟當時的會計長Jean-Francois Heitz所做的專訪，微軟在1995、1996和1997年營收外匯淨曝險部位分別佔其總營收的37%、34%和32%。因此微軟大量使用外匯的亞式選擇權做為避險工具，將微軟每季的盈餘控制在相對穩定的範圍。

針對美式亞式選擇權評價的數值方法之中，主要有二元樹評價模型、蒙地卡羅模擬法及有限差分法。其中有限差分法必須處理二維偏微分方程，牽涉到較為複雜的數學推導；Grant-Vora-Week(1997)也提出二元樹評價模型在亞式選擇權商品上受到部分的限制。之前蒙地卡羅模擬法在美式路徑相依選擇權的評價上一一直無法突破，直到近期Longstaff-Schwartz(2001)發展出最小平方蒙地卡羅方法(Least-Square Monte Carlo Method)，不但克服了蒙地卡羅模擬法在路徑相依選擇權評價上的限制，也簡化了複雜的衍生性金融商品的評價過程。

Longstaff-Schwartz(2001)比較最小平方蒙地卡羅方法和有限差分法在美式

亞式選擇權上的評價結果，發現最小平方蒙地卡羅方法在提早履約價值(early exercise value)的評價和有限差分的評價結果雖然有誤差，但是都控制在名目金額每100美元小於2~3美分之內，而這樣的幅度是落在買賣價差¹(bid-ask spread)或是其他交易成本的範圍之內。

本文要將三種二元樹模型針對美式亞式選擇權的分析進行比較，分別就其評價結果以及每一個模型實際運算所必須花費的時間進行分析。第一章為緒論，說明研究範圍、動機、目的地與研究架構。第二章為文獻探討。第三章為研究方法，說明本文所要比較的三個模型：Hull-White二元樹模型、精細二元格子點模型(Refined Binomial Lattice)與改良二元樹模型(Adjusted binomial model)。第四章則是進行數值驗證。第五章為結論。



註1:在美國公開交易的選擇權商品的權利金的報價單位為1/16或是1/8美元。一個價平選擇權的買賣價差(bid-ask spread)通常為1/16或是1/8的倍數。

第二章 文獻探討

路徑相依選擇權的定價十分複雜，而一般的評價約可分成二類。第一類型為公式解或解析解，而發展公式解，需要良好的特定條件，因此常不具有通用性。當商品性質改變時，就必須要重新求解。第二類型為數值分析法，包括樹狀模型(tree method)、蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)及有限差分法(finite difference method)，此類型提供比公式解更具彈性的作法。任何一種數值方法必須借助電腦強大的計算能力，而想要愈精確求得理論價格，所花費的電腦硬體資源就愈大，運算時間也愈長，如何快速而有效地求得精確的估計值一直是個重要的議題。亞式選擇權的償付價格(payoff)乃是根據標的資產的算術平均價格而定。無論是否具有提早履約的性質，路徑相依選擇權的評價一直是不容易的問題，也吸引了許多學者研究。我們在此則僅針對數值分析法中與本文較為相關的樹狀模型及蒙地卡羅方法進行討論。

第一節 樹狀模型

假設股價 $S(t)$ 在 t 時間點服從幾何布朗運動，並滿足以下的隨機微分方程：

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

μ 是股價的年成長率； σ 則是年化波動率，為一固定常數；而 $B(t)$ 是布朗運動過程。同時也假設在風險中立下的無風險利率為 r ，為一定值。衍生性證券的到期日為 T ，單位為年。

連續時間的 $S(t)$ 函數可以用Cox-Ross-Rubinstein(1979)的二元樹模型來估計。把選擇權的存續期間分割為 n 個階段(steps)，長度為 $\Delta t = T/n$ 。在一個 Δt 時間，股價有 p 的機率像上移動 u ，也有 $1-p$ 的機率向下移動 $1/u$ ，計算方式如下：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

時間 k 在離散時間的模型裡代表連續時間的 $k\Delta t$ 。我們用 R 代表 $1 + r$ ，做為折現因子。

雖然Cox-Ross-Rubinstein已經證明出當 n 趨近於無限大時，利用二項樹模型評價歐式選擇權的結果會與Black-Scholes公式的結果一致。不過Cox-Ross-Rubinstein的二元樹模型對亞式選擇權評價之中最困難的一點在於每一條路徑都有不同的股價算術平均數，同時又很難找出這些算術平均數的分配特徵。若一種衍生性商品路徑函數的可能值 F 會隨著 n 的增加大量成長，則傳統的二元樹模型便無法做出評價。Hull-White(1993)的模型則有效地克服這個困難，發展出一套線性內插的方法計算美式亞式選擇權的上界。Chalasani-Jha-Varikooty(1998)根據股價的幾何平均數將每一個二元樹上的結點切割成次節點(nodelet)，以此代表每一條路徑的平均價格，使得所花費的運算時間和次節點的數目成比例，在 n 階段的二元樹且 $n \geq 14$ 的情形之下，次節點成長的速度小於 $n^4/20$ (使用傳統的方法，路徑數會以 2^n 的速度成長)。大幅降低電腦的運算負荷。Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)成功結合Hull-White(1993)和Chalasani-Jha-Varikooty(1998)的模型，可以更快速對美式亞式選擇權進行評價，並提供更準確的區間估計值。

Dai-Lyuu(2002)提出多層解析格子樹模型(multiresolution lattice approach)，將之與Hull-White(1993)與Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)在美式亞式選擇權上的評價結果進行比較。根據多層解析格子樹模型在歐式亞式選擇權評價上良好的收斂效果，Dai-Lyuu(2002)認為Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)在任何有限可數 n 的情形之下，對美式亞式選擇權之評價均出現低估。然而，多層解析格子樹模型理論根源於本土研究，尚無法證明在所有的情形之下，多層解析格子樹模型均能成功建造。再者，目前也沒有研究證明該模型的運算時間低於指

數增長的函數。

第二節 蒙地卡羅方法

在最小平方蒙地卡羅方法出現之前，因為一直無法針對蒙地卡羅方法發展出好的提早履約規則(early exercise rule)以使模擬結果能夠達到最佳化，蒙地卡羅模擬法只限於評價歐式亞式選擇權上。

要透過蒙地卡羅模擬法對美式選擇權進行評價，就必須發展出最佳化的「提早履約規則」(early exercise rule)。因此，我們必須在每一個履約日期比較履約價和持有至到期日的期望價值。理論上這樣的做法是可行的，因為我們只需考慮到評價當日為止的價格資訊和未來的價格狀態，而未來的價格資訊可以經由模擬獲得。

在這之前很多文章都討論過使用蒙地卡羅模擬法評價美式選擇權。Tilley(1993)破除模擬方法無法準確評價美式選擇權的迷思，是早期較為重要的文獻，但是該模型所需的記憶體空間和計算時間過於龐大，無法應用在較為複雜的衍生性金融商品評價。

Hull-White(1993)利用改進傳統的二元樹模型來評價美式選擇權，利用替代路徑(representative paths)對二元樹進行拆解，以減少運算的資源。然而Grant-Vora-Week(1997)認為樹狀模型由於無法計算選擇權存續期間之中某一段期間的股價算術平均數，即使解決了運算資源的問題，在亞式選擇權評價的應用上仍然受到限制。實務上，亞式選擇權通常只會選擇計算某一段特定時間的算術平均數做為決定償付價格(payoff)的依據。

而近期和最小平方蒙地卡羅方法比較接近的方法有Carriere(1996)和Tsitsiklis and Van Roy (1999)。但是最小平方蒙地卡羅方法有幾點重要的不同：第一、以上兩篇文章都沒有到達實做的階段。第二、最小平方蒙地卡羅方法執行迴歸時只考慮價內路徑的做法，有效地改善了計算的效率。除此之外，最小平方蒙

地卡羅方法還可以應用在複雜地衍生性商品的評價，做法比傳統的有限差分法要簡單地多。最後，它可以只針對選擇權存續期間的某一段特定期間計算股價的算術平均數，在亞式選擇權商品的應用範圍也更為廣泛。



第三章 研究方法

第一節 Hull-White 樹狀模型(1993)

3.1.1 模型架構

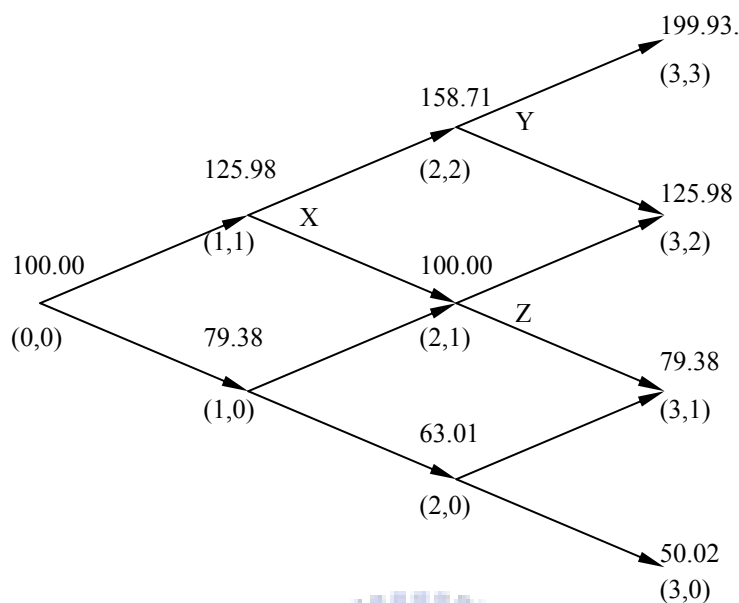
Cox-Ross-Rubinstein(1979)的二元樹模型把選擇權的存續期間分割為 n 個階段(steps)，長度為 $\Delta t = T/n$ ，而 T 代表選擇權的到期時間。在一個 Δt 時間，股價有 p 的機率像上移動 u ，也有 $1-p$ 的機率向下移動 $1/u$ 。時間 i 在離散時間的模型裡代表 $i\Delta t$ 。路徑函數 $F(t, S)$ 代表從時間0至 T 的股價 S 和時點 t 所構成的函數，該函數的值將會決定該節點的選擇權價值。而 $v(S, F, t)$ 則是選擇權的價格函數，決定時間點 t 的股價為 S ，且路徑函數為 F 的選擇權價值。

Hull-White(1993)的方法根據事先定義的路徑函數可能值 F 計算每一個節點的選擇權價值 $v(S, F, t)$ ，因為事先定義的 F 不可能包含每一種實際的可能值，因此遺漏的部分必須透過線性內插的方式計算。

Hull-White 利用 $S(0)e^{mh}$ 的形式事先定義每一個節點的路徑函數的可能值 F 。 n 是一個常數， m 是整數。在時間點 $i\Delta t$ 的事先定義 F 值範圍必須涵蓋該時間點所有實際可能發生的 F 值。可以藉由前推法(forward induction)推得。

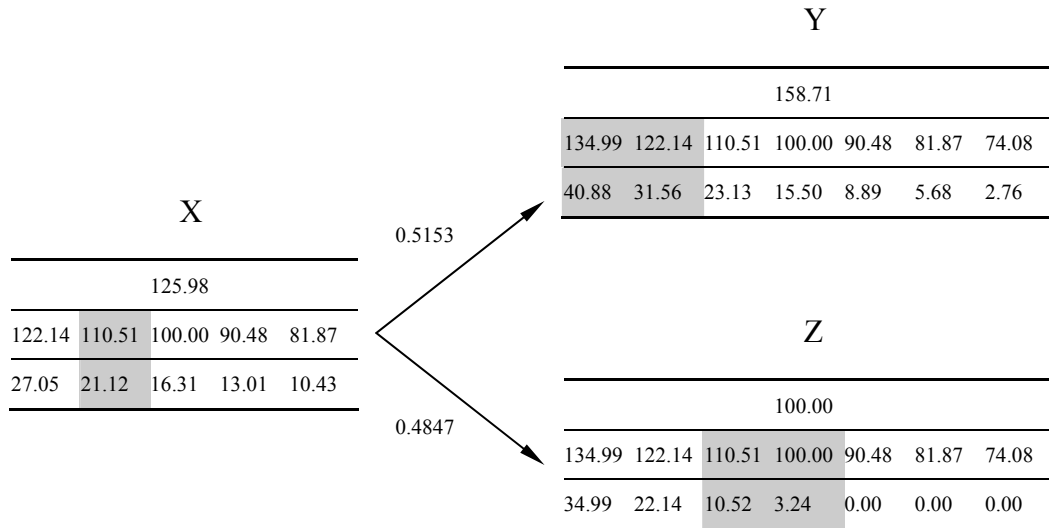
之所以選擇 $S(0)e^{mh}$ 是因為資產價格服從對數常態分配(lognormal distribution)，而股價的算術平均數和資產價格的總和密切相關，而資產價格的總和也是服從對數常態分配，因此我們便利用對數線性(log-linear)的集合代表時間點 $i\Delta t$ 的路徑函數的可能值 F 。

3.1.2 演算法



(圖一) 初始股價為 $S(0) = 100$, 選擇權存續期間 $T = 1$, 每一個階段的 $\Delta t = 0.3333$ (年), 年化波動度 $\sigma = 0.4$, 連續複利的無風險利率 $r = 10\%$ 。向上機率 $p = 0.5153$ 而向下的機率為 0.4847 。每一個節点上方的數字為該節點的股價。節點下方括弧內的數字 (i, j) 為對應時間點 $i\Delta t$, 向上格子點數目 (up-ticks) j 的節點座標。

在 Δt 時間, 平均值的最大最小值分別為 $(100.00 + 125.98) / 2 = 112.99$ 和 $(100.00 + 79.38) / 2 = 89.69$ 。為了使事先定義的 F 值涵蓋這兩個區間, 我們在 Δt 時間令 $m = -2$ 至 $+2$, $h = 0.1$ 。因此事先定義的 F 包含了 122.14, 110.51, 100, 90.48, 81.87。假設 122.14 和 81.87 在 Δt 時間是最大和最小的股價平均數, 則 $2\Delta t$ 的最大平均數和最小平均數的可能值為 $(2 \times 122.14 + 158.71) / 3 = 134.33$ 和 $(2 \times 81.87 + 63.01) / 3 = 75.58$ 。為了使 F 涵蓋 $2\Delta t$ 時間的最大和最小平均數, 我們必須令 $m = -3$ 至 $+3$ 。因此在 $2\Delta t$ 時間事先定義的 F 包含 134.99, 122.14, 110.51, 100, 90.48, 81.87 和 74.08。



(圖二) 此為(圖一)中的節點(1,1)、(2,2)和(2,1)。一個表格代表一個節點：上排的數字代表該節點的股價，第二排的數字代表事先定義的股價平均值，第三排的數字為選擇權的價值。其中向上的機率為 0.5153，向下的機率為 0.4847。

考慮節點 X ，且 $F = 110.51$ 的情形，它有0.5153的機率向上移動，而股價的算術平均數成為 $(2 \times 110.51 + 158.71) / 3 = 126.58$ 。它落在134.99至122.14之間，從122.14算起34.55%的位置。因此我們可以利用線性內插法得到選擇權的價值 $v_u = 31.56 + 0.3455 \times 9.32 = 34.78$ 。同樣地，它有0.4847的機會向下移動，股價的算術平均數為 $(2 \times 110.51 + 100.00) / 3 = 107.01$ 。利用內插法可知選擇權價格 $v_d = 8.09$ 。在沒有提早履約的情形下，在節點 X ，且 $F = 110.51$ 的選擇權價值 $v = (34.78 \times 0.5153 + 8.09 \times 0.4847)e^{-0.3333 \times 0.1} = 21.12$ 。此時再和提早履約價值相比，便能決定真正的選擇權價格 v 。利用倒推法可以推得每一個節點的在不同的 F 之下的選擇權價值。而節點(0,0)的選擇權價格 v 即是美式亞式選擇權的理論價格。

第二節 Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty 樹狀模型(1998)

3.2.1 模型架構

在此介紹該演算法所使用的符號： p 代表格子點的向上機率(up-tick probability)， u 和 $1/u$ 分別是股價在每一段期間上漲及下跌的單位， n 是二元樹的階段(steps)數目， R 是每一期的折現因子。而隨機變數 S_k 是在時間 k 的股價， H_k 是在時間 k 時向上移動的格子數(up-ticks)，而 A_k 是從時間0至時間 k 之中所產生的 $k + 1$ 個時點的股價的算術平均術。其中 $S_k = S_0 u^{2H_k - k}$ 。

假設我們有一個樣本空間 Ω ，裡面包含一連串 n 個獨立的隨機變數 $\omega_i \in \{H, T\}$ 。在Cox-Ross-Rubinstein的二元樹模型中，一條路徑就是 Ω 之中的一個樣本點 $\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ ， $\omega_i \in \{H, T\}$ 。 H 代表向上移動，而 T 代表向下移動，而一條路徑的長度就是它所包含的所有分歧點。在所有 $k = 1, 2, \dots, n$ 的情形之下，如果 $\omega_k = H$ ，則我們定義 $X_k = 1$ ，否則 $X_k = 0$ 。同時我們定義 H_k 為一條路徑在時間點 k 之前的向上移動的格子數(up ticks)總和。

$$H_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

對一條已知的路徑 P 和一個隨機變數 Z ，若我們想要表示隨機變數 Z 在路徑 P 上的值，則我們會用 $Z(P)$ 表示。

Cox-Ross-Rubinstein的重合(recombining)二元樹可以用 (k, H_k) 數對來表示在二元樹其中一條路徑上的節點(node)。若在路徑 A 上的 $H_k(A) = h$ ，則我們說路徑 A 經過(pass through)或到達(reach)節點 (k, h) 。

時間點 k 的股價用 S_k 表示， $k = 0, 1, \dots, n$ 。計算方式如下：

$$S_k = S_0 u^{2H_k - k}$$

故在節點 (k, h) 的股價為 $S_0 u^{2h - k}$ 。而時間點 k 的平均股價則定義為：

$$A_k = (S_0 + S_1 + \dots + S_k) / (k + 1), \quad k \geq 0.$$

一個履約價為 L 的亞式買權在時間點 n 的償付價格(payoff)為 $\max(A_n - L, 0)$ ，而選擇權在時間0的價格則定義為「在考慮所有可能的履約策略 τ 之下，最大化

3.2.2 演算法

在詳細介紹如何切割次節點之前，我們先介紹新的隨機變數 χ_k ，又被稱做時間點 k 的「範圍」(area)：

$$\chi_k = \sum_{i=1}^k (1 - X_i) H_i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

我們定義 $\chi_0 = 0$ 。(圖三)則是說明一條特定路徑的 χ_k 。對每一個節點來說，我們把先向下移動 $k - h$ 個格子點，再向上移動 h 個格子點到達 (k, h) 節點的路徑定義為到達 (k, h) 的**最低路徑**；先向上移動 h 個格子點再向下移動 $k - h$ 個格子點到達 (k, h) 節點的路徑定義為到達 (k, h) 的**最高路徑**。任一條到達 (k, h) 路徑 ω 的範圍 $\chi_k(\omega)$ 是由該路徑和最低路徑所圍成的區域內菱形方塊的個數。節點 (k, h) 最大的可能範圍為最高路徑和最低路徑所圍成的區域，菱形方塊個數等於 $h(k - h)$ 。而最小可能範圍為0。

如同我們之前所提，我們想要把節點二元樹中的每一個格子點切割成許多次節點(nodelet)，每一個次節點的股價幾何平均數都相同。我們根據每一條路徑的「範圍」做為分割的依據。一條路徑 ω 到達或是經過一個次節點 (k, h, a) ，則：

$$H_k(\omega) = h, \quad \chi_k(\omega) = a$$

這代表一個次節點 (k, h, a) 在二元樹的第 k 層，路徑中有 h 個向上移動的格子數(up-ticks)，而該路徑的範圍(area)為 a 。

以下是幾個有關於「範圍」 χ_k 的有用性質。

Lemma 1 1. 在二元樹中給定的節點 (k, h) ，每一條到達節點 (k, h) 的路徑的可能範圍與可能的股價幾何平均數具有一對一對應的關係。

2. 每一條到達節點 (k, h) 的可能範圍(area)的集合為

$$\{0, 1, \dots, h(k - h)\}$$

3. 一條到達次節點 (k, h, a) 的路徑，若在 $k + 1$ 時間點向上移動，它會到達次節點 $(k + 1, h + 1, a)$ ，否則它會到達 $(k + 1, h, a + h)$

```

for  $k := 0$  to  $n-1$  do
  for  $h := 0$  to  $k$  do
    for  $a := 0$  to  $h(k-h)$  do
      for  $v := 0$  to  $1$  do
         $j := a + (1-v)h;$ 
         $M(k+1, h+v, j) += M(k, h, a);$ 
         $\mathbf{S}(k+1, h+v, j) += \mathbf{S}(k, h, a) + M(k, h, a)S_0u^{2(h+v)-(k+1)}$ 
      end
    end
  end
end

```

(圖四) 利用前推法(Forward induction)在二元格子點推算 M 和 \mathbf{S} 的虛擬碼(Pseudo-code)

$M(k, h, a)$ 是到達次節點 (k, h, a) 的路徑數。我們的演算法利用前推法(forward induction)計算 $M(k, h, a)$ 和 $\mathbf{S}(k, h, a)$ 。首先在 $k = 1, 2, \dots, n, h = 0, 1, \dots, k$ 和 $a = 0, 1, \dots, h(k-h)$ 的情況下，我們將 $M(k, h, a)$ 和 $S(k, h, a)$ 初始化為 0。根據定義，我們設定 $M(0, 0, 0) = 1, S(0, 0, 0) = S_0$ 。假設我們已經利用前推法算出所有的 $M(m, h, a)$ 和 $S(m, h, a)$ 的值，for $m = 0, 1, \dots, k$ ，而我們想要計算當 $m = k+1$ 的值。我們必須考慮第 k 層的每一個次節點 (k, h, a) 和每一個在 $k+1$ 時間點的次節點中 $M(m, h, a)$ 和 $S(m, h, a)$ 正確的增加量(increment)。而我們必須計算出每一個到達次節點 (k, h, a) 的路徑對 $M(m, h, a)$ 和 $S(m, h, a)$ 的貢獻值(contribution)。

根據 Lemma 1，每一條在時間點 k 通過次節點 (k, h, a) ，並在 $k+1$ 時間向上移動的路徑，會到達次節點 $(k+1, h+1, a)$ 。因此透過 (k, h, a) 到達 $(k+1, h+1, a)$ 的路徑會貢獻 $M(k, h, a)$ 給 $M(k+1, h+1, a)$ 。而該路徑也貢獻

$$\mathbf{S}(k, h, a) + M(k, h, a)S_k = \mathbf{S}(k, h, a) + M(k, h, a)S_0u^{2(h+1)-(k+1)}$$

給 $\mathbf{S}(k+1, h+1, a)$ 。

同樣地，根據Lemma 1，我們可以知道透過 (k, h, a) 到達 $(k+1, h, a+h)$ 的路徑會貢獻 $M(k, h, a)$ 給 $M(k+1, h, a+h)$ 。而該路徑也貢獻

$$\mathbf{S}(k, h, a) + M(k, h, a)S_0 u^{2h-(k+1)}$$

給 $\mathbf{S}(k+1, h, a+h)$ 。

在我們的演算法裡，我們需要計算每一條到達次節點 (k, h, a) 的路徑上股價算術平均數的平均數，我們用 $A(k, h, a)$ 代表。

$$A(k, h, a) = \mathbf{E}[A_k | H_k = h, \chi_k = a], k = 0, 1, \dots, n, h \leq k$$

為了要了解如何計算 $A(k, h, a)$ ，我們要引進一個新的隨機變數 S_k ，我們將它定義為一條路徑中從時間0到時間 k 的股價總和：

$$S_k = \sum_{i=0}^k S_i, k = 0, 1, \dots, n.$$

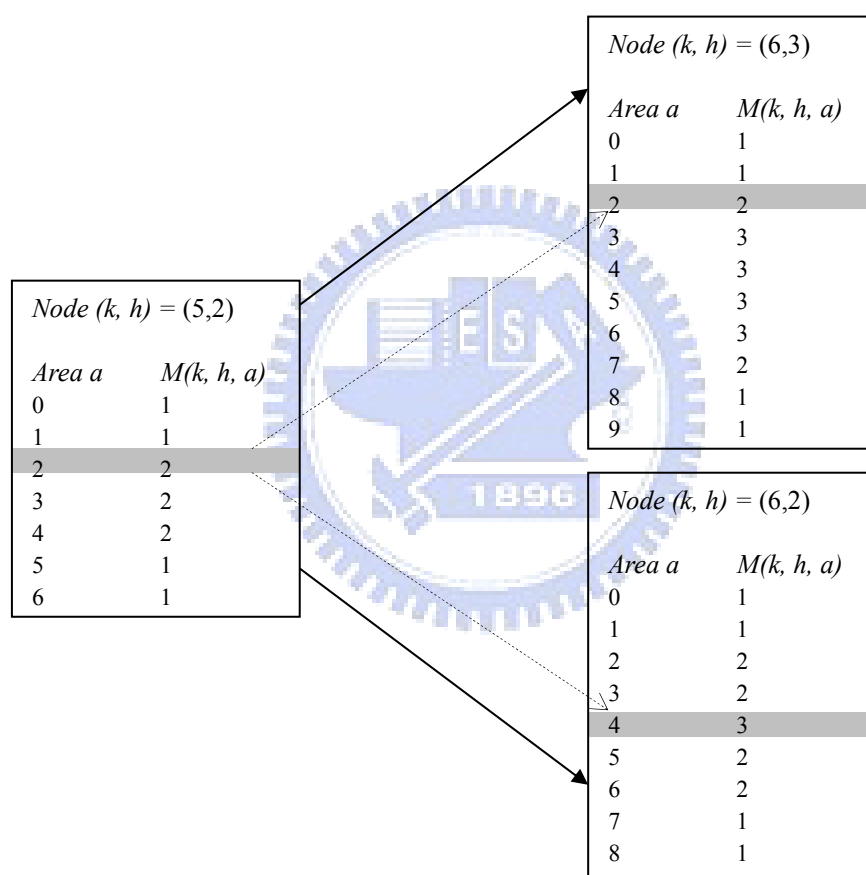
$A_k = S_k / (k+1)$ ，當 $k = 0, 1, \dots, k$ 。我們同時定義 $\mathbf{S}(k, h, a)$ 為所有通過次節點 (k, h, a) 的路徑的 S_k 的總和。 $\tilde{A}(k, h, a)$ 是所有通過次節點 (k, h, a) 的路徑 A_k 的未加權平均數(unweighted average)，計算方式如下。

$$\tilde{A}(k, h, a) = \frac{\mathbf{S}(k, h, a)}{(k+1)M(k, h, a)}$$

接著，我們將介紹如何計算美式亞式選擇權的上界。首先，在每一個次節點 (k, h, a) ，計算 $\tilde{A}(k, h, a)$ 的值，也就是所有到達該節點的路徑的 A_k 的平均數，並將 $\tilde{A}(k, h, a)$ 視為代表該次節點的股價算術平均數。藉由Hull-White(1993)所提出的方法，利用倒推法(backward-recursion)和線性內插法即可推得選擇權價值的上界(upper bound)。在 $k = n$ 的情況之下，選擇權價值即為立即履約的價值。在 $k < n$ 的情況之下，選擇權價值可以利用倒推法(baward-recursively)求得，再取立即履約價值和 $k+1$ 時間折現後的期望值之中較大者做為選擇權價值。而節點 $(0,0,0)$ 的選擇權價格 v 即是美式亞式選擇權的上界價格。

根據上界的評價結果，我們可以用下列的方法得到下界：從上界的計算過程之中，我們使用以下的履約規則：對每一個節點 (k, h, a) ，如果 $k = n$ 或是立即

履約的價格大於或等於 $k + 1$ 時間折現後的期望值，那麼就把 (k, h, a) 標記為「中斷點」(stopping node)，再利用與上界相同的倒推法算出節點 $(0,0,0)$ 的選擇權價格。唯一不同的地方是，在使用倒推法的過程中，若次節點 (k, h, a) 被標記為中斷點，便只能執行履約的動作。換句話說，在格子點上的每一條路徑，都要在最早碰到的中斷點進行履約，如此便能得到美式亞式選擇權之下界價格。



(圖五) (圖三)之中節點 $(5,2)$ 、 $(6,2)$ 、 $(6,3)$ 裡面的次節點(nodelets)。每一個方塊代表一個節點，而之中的每一列 a 代表次節點 (k, h, a) ，而 $M(k, h, a)$ 代表到達每一個次節點的路徑數，在這張圖之中我們也可以看到前推法(forward induction)的例子。如虛線所示，次節點 $(5,2,2)$ 可以向前改變次節點 $(6,3,2)$ 及 $(6,2,4)$ 的值。

第三節 Costabile-Massabó-Russo 樹狀模型(2006)

3.3.1 模型架構

該模型與Chalasanani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)的模型架構相同。以路徑的幾何平均數做為分割次節點的依據。唯一不同的是，它計算每一個次節點的算術平均數的方式不是使用推導的近似值而是計算每一條替代路徑實際的算術平均數。如此一來便能減少計算選擇權價值時減少內插的使用，使得計算出來的選擇權價格更貼近樹狀模型所計算出的理論價值。

p 代表格子點的向上機率(up-tick probability)， u 和 d 分別是股價在每一段期間上漲及下跌的單位， n 是二元樹的階段(steps)數目， R 是每一期的折現因子。

在時間點 i 之前，有 j 個向上移動格子點和 $i-j$ 個向下移動格子點的節點為節點 (i, j) 。改良二元樹格子點利用以下的方法計算替代路徑的算術平均數價格。首先，先計算出到達節點 (i, j) 最高路徑 τ_{\max} 的算術平均數價格 $A_{\max}(i, j)$ 。這是第一個替代路徑的值，我們用 $A(i, j; 1)$ 代表之。而替代路徑的最後一個值則是最低路徑 τ_{\min} 的算術平均數 $A_{\min}(i, j)$ 。而其他替代路徑的算術平均數則是以 $A(i, j; k), k = 1, \dots, j(i-j)$ 代表之。

3.3.2 演算法

$S_{\max}(i, j; k)$ 是替代路徑上標的資產的最大價格，而該價格所在節點不能屬於最低路徑之節點。便能使用下式推出其他的替代路徑的算術平均數：

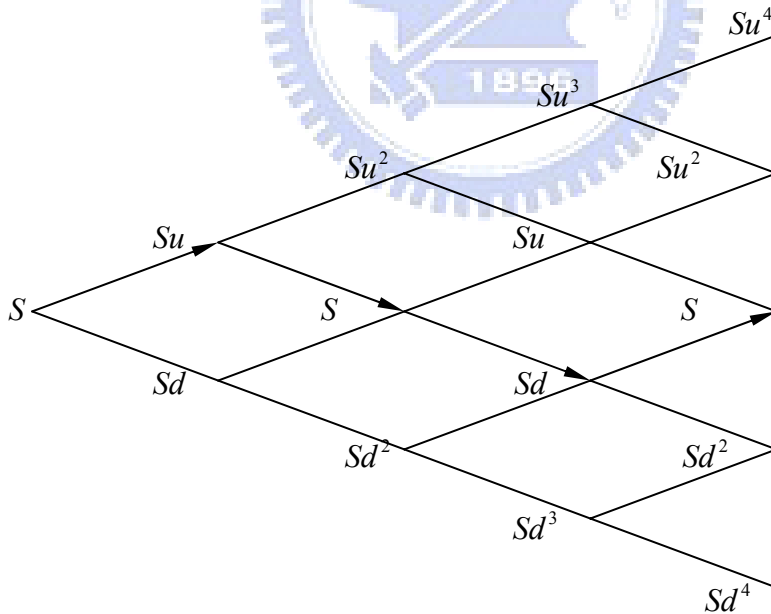
$$A(i, j; k+1) = A(i, j; k) - \frac{1}{i+1} [S_{\max}(i, j; k) - S_{\max}(i, j; k)d^2]$$

也就是說，第 $(k+1)$ 個替代路徑的算術平均數，可以用第 k 個替代路徑的算術平均數推得，接下來只要把 $S_{\max}(i, j; k)$ 用 $S_{\max}(i, j; k)d^2$ 替換掉即可。如此繼續，一直到替代路徑成為最低路徑 τ_{\min} 。而最高路徑和最低路徑算術平均數計算公式如下所示：

$$A(i, j; 1) = A_{\max}(i, j) = \frac{1}{i+1} \left(\sum_{h=0}^j Su^h + \sum_{h=0}^{i-j-1} Su^{h+2j-i} \right),$$

$$A(i, j; j(i-j)) = A_{\min}(i, j) = \frac{1}{i+1} \left(\sum_{h=0}^{i-j} Sd^h + \sum_{h=0}^{j-1} Sd^{i-2j+h} \right),$$

參考(圖六)，以節點(4,2)為例， $A(4, 2; 1) = A_{\max}(4, 2)$ 必須利用到達該節點的最高路徑 (S, Su, Su^2, Su, S) 計算出來。而 $S_{\max} = Su^2$ 。在計算第二條替代路徑的算術平均數時，必須要用 $S_{\max}(4, 2; 1)d^2 = S$ 取代 $S_{\max}(4, 2; 1)$ 。因此計算 $A(4, 2; 2)$ 的替代路徑成為 (S, Su, S, Su, S) 。節點(4,2)剩下的三個替代路徑為 (S, Sd, S, Su, S) 、 (S, Sd, S, Sd, S) 和 (S, Sd, Sd^2, Sd, S) 。與節點(4,2)有關的替代路徑算術平均數，包含了所有到達節點(4,2)的路徑的真實算術平均數，除了 (S, Su, S, Sd, S) 之外(在圖(六)中以箭頭所描寫之路徑)。此外，一條路徑的 $S_{\max}(i, j; k)$ 可能會有一個以上。在這種情形之下，只需要將路徑之中第一個到達的 $S_{\max}(i, j; k)$ 用 $S_{\max}(i, j; k)d^2$ 替換。



(圖六) Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型

得到所有替代路徑的算術平均數之後，便能透過倒推法(backward induction)及以下公式推得選擇權價格。

$$C(i, j; k) = \max\{R[pC(i+1, j+1; k_u) + qC(i+1, j; k_d)], A(i, j; k) - K\};$$

改良二元格子樹模型與Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)最大的不同點在於在許多情形之下，不需要藉由線性內插求得 $C(i+1, j+1; k_u)$ 和 $C(i+1, j; k_d)$ 。因為 $[(i+1)A(i, j; k) + dS(i, j)]/(i+2)$ 和 $[(i+1)A(i, j; k) + uS(i, j)]/(i+2)$ 可能包含在 $A(i+1, j; k)$ 和 $A(i+1, j+1; k)$ 兩個集合之內，因此不需要使用內插法。若沒有包含在內，才需要使用Hull-White模型之中所使用的線性內插法計算 $C(i+1, j+1; k_u)$ 和 $C(i+1, j; k_d)$ 。



第四節 Longstaff-Schwartz 蒙地卡羅方法 (2001)

3.4.1 模型架構

假設存在機率空間 (Ω, \mathbb{F}, P) 和一段有限期間 $[0, T]$ 。 Ω 是在時間點0到 T 所有可能真實發生的隨機經濟事件的集合，而它的基本元素 ω 為一條路徑， \mathbb{F} 是在時間點 T 所有可分辨的事件的 σ -field，而 P 是 \mathbb{F} 空間內的元素所對應的機率測度。我們定義 $F = \{ \mathbb{F}_t; t \in [0, T] \}$ 為證券的價格的隨機過程中所產生的悠關事件的累積集合(augmented filtration)，而我們假設 $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}$ 。為了符合無套利的前提，我們也假設經濟體存在equivalent martingale 測度 Q 。

我們限制套用這個模型的美式衍生性商品的償付價格屬於二次可積(square-integrable)或是有限變異(finite-variance)的函數。美式選擇權的價值為根據選擇權所產生的現金流量折現後的最大值，而該最大值必須是對所有 F 上的履約時點都成立。 $C(\omega, s; t, T)$ 代表選擇權在時間點 t 之前還未履約，並且持有者遵守最佳履約策略的條件下，一條路徑上所產生的現金流量。 s 代表所有 t 至 T 之間的履約時點， $t < s \leq T$ 。

在時間點 t_k ，投資者已經知道立即履約的價格，不過並不知道繼續持有的價值。無套利評價理論暗示繼續持有的價值相當於對 t_k 時間之後的現金流量折現值在風險中立評價測度 Q 下取期望值。因此在時間點 t_k ，繼續持有選擇權的價值可以用以下的式子表達：

$$F(\omega; t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^K -\exp\left(\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds\right) C(\omega, t_j; t_k, T) \mid \mathbb{F}_{t_k} \right] \quad (1)$$

$r(\omega, s)$ 為無風險利率(可以是隨機過程)，而條件期望值的是根據到時間點 t_k 時的資訊集合 \mathbb{F}_{t_k} 。根據上式便可以決定繼續持有選擇權的價值。接著只要比較立即履約價格和繼續持有至到期日的價值，便能夠決定最佳履約策略。

3.4.2 演算法

最小平方蒙地卡羅方法利用最小平方法去近似時間點 $t_{k-1}, t_{k-2}, \dots, t_l$ 的條件期望值函數。因為路徑上的現金流 $C(\omega, s; t, T)$ 是遞迴定義的，所以我們可以利用倒推法求得每一條路徑的最佳履約時點。 $C(\omega, s; t_k, T)$ 可能和 $C(\omega, s; t_{k+1}, T)$ 不同。原本在 t_{k+1} 時點可能是最佳中斷點，卻可能在倒推的過程中改變結果。我們假設在Equation(1)中未知的 $F(\omega; t_{k-1})$ 的函數形式可以表達為一個 $F_{t_{k-1}}$ -measurable 基本函數的可數集合的線性組合。

假設條件期望值是一個平方可積(square-integrable)函數的 L^2 空間之中的一個元素。因為 L^2 是一個Hilbert空間，它具有可數的正交基底，而條件期望值可以利用這些基底的線性組合表示。如範例所示，假設 X 是選擇權的標的資產的價值，而 X 服從Markov過程，其中一種基底函數就是Laguerre多項式。

$$\begin{aligned} L_0(X) &= \exp(-X/2), \\ L_1(X) &= \exp(-X/2)(1-X), \\ L_2(X) &= \exp(-X/2)(1-2X+X^2/2), \\ L_n(X) &= \exp(-X/2) \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}) \end{aligned}$$

根據以上的法則， $F(\omega; t_{k-1})$ 可以被表示成：

$$F(\omega; t_{k-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(X),$$

為了實做最小平方蒙地卡羅方法，我們首先利用 $M < \infty$ 個基本函數近似 $F(\omega; t_{k-1})$ ，並用 $F_M(\omega; t_{k-1})$ 表示近似結果。一旦基本函數的子集合固定， $F_M(\omega; t_{k-1})$ 就可以將 $C(\omega, s; t_{k-1}, T)$ 的折現值投影在這些路徑的基本函數上。我們在估計的過程只使用價內的路徑，因為只有價內的路徑才具有悠關性(relevance)。藉由聚焦在價內路徑上，可以縮小條件期望值可能的範圍，為了得到準確估計值所需的基本函數也會減少許多。既然每一條基本函數的值都是獨立並且具有相同分配，根據動差存在的弱假設(weak assumption about the existence of moment)，並且利用White(1984)的定理可以證明對應的迴歸結果 $\hat{F}_M(\omega; t_{k-1})$ 在 $n \rightarrow \infty$ 的情形下會機

率均方收斂(converges in mean square and in probability)至 $F_M(\omega; t_{k-1})$ 。除此之外，Amemiya(1985)根據均方矩陣證明 $\hat{F}_M(\omega; t_{k-1})$ 是 $F_M(\omega; t_{k-1})$ 的最佳線性不偏估計量。

一旦 t_{k-1} 時間的期望值函數被估算出來。我們便可以比較提早履約價值及 $\hat{F}_M(\omega; t_{k-1})$ 來決定在價內路徑 ω 的 t_{k-1} 時點是否應該提早履約。一旦確認了履約策略，我們把時間點再向前移至 t_{k-2} ，並重覆同樣的步驟，我們就可以求出 $C(\omega, s; t_{k-2}, T)$ 。如此繼續直到每一個履約時點都被確認完畢為止。由於我們必須在時間點0對美式亞式選擇權做出評價。因此確認完每一條路徑的最佳履約時間及現金流量之後，我們再把每一條路徑的現金流量根據履約時間折現後取算術平均數。便完成了美式亞式選擇權的評價。



第四章 數值驗證

本文之測試平台為Intel® Pentium® M 740處理器(1.73 GHz)、1Gb DRAM與Microsoft® .NET Framework SDK v2.0。實作語言為Microsoft® Visual Studio 2005的C# .NET。

本文比較Hull-White(1993)、Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)和Costabile-Massabó-Russo(2006)在不同的條件之下的運算時間。根據(表二)的結果，Chalasani et al.(1998)與Costabile et al.(2006)在 $n \leq 100$ 時所花費的時間十分接近，成長的速度也十分一致。然而在 $n > 100$ 時，Chalasani et al.(1998)的運算時間卻顯著高於其他模型。雖然Costabile et al.(2006)的演算法相較Chalasani et al.(1998)簡單，但是在本文實做的過程之中發現搜尋內插區間是整個運算過程之中最耗費資源的部分，而Costabile et al.(2006)在這個部分並沒有提出很具體的改進，因此相較於Chalasani et al.(1998)的模型而言，在 $n \leq 100$ 時速度上並沒有出現明顯的提升。不過在 $n > 100$ 的情形之下，Chalasani et al.(1998)樹狀模型的所需使用的記憶體空間已經接近系統上限，因此必須要額外使用運算資源執行記憶體配置(memory allocation)，因此執行速度相較Costabile et al.(2006)樹狀模型緩慢。

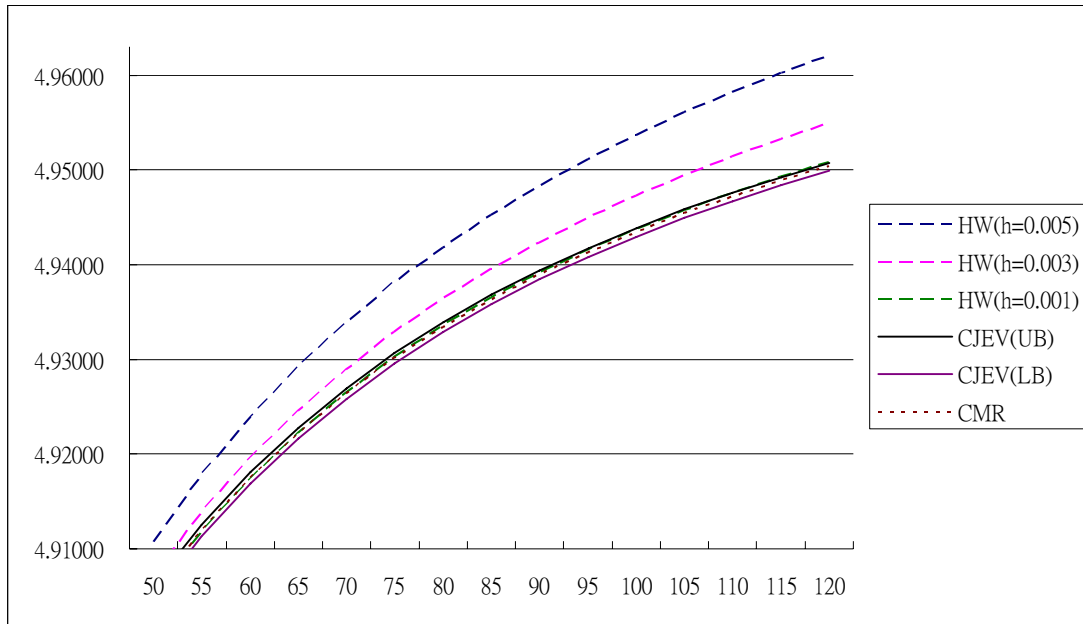
Hull-White(1993)的模型的運算速度和模型中的則與參數 h 的相關程度較高。我們發現當 $h = 0.005$, $h = 0.003$ 時即使 n 成長至120，運算時間成長的速度也十分緩慢。但是當 $h = 0.001$ 時，運算的時間卻大幅上揚，不過在準確度的部分也有明顯的改進，在 $n \leq 110$ 的情況之下，甚至已經可以收斂至Chalasani et al.(1998)的上下界區間之內(圖七)。

本文發現隨著 n 的增加，Hull-White(1993)樹狀模型在 $h = 0.001$ 之下的評價結果會從原本十分接近Chalasani et al.(1998)樹狀模型下界逐漸向Chalasani et al.(1998)上界靠近之現象，最後甚至超過上界。這是因為Hull-White(1993)評價模型並不會隨著階段數上升而增加替代路徑之密度，但是可能路徑的數目會隨著 n

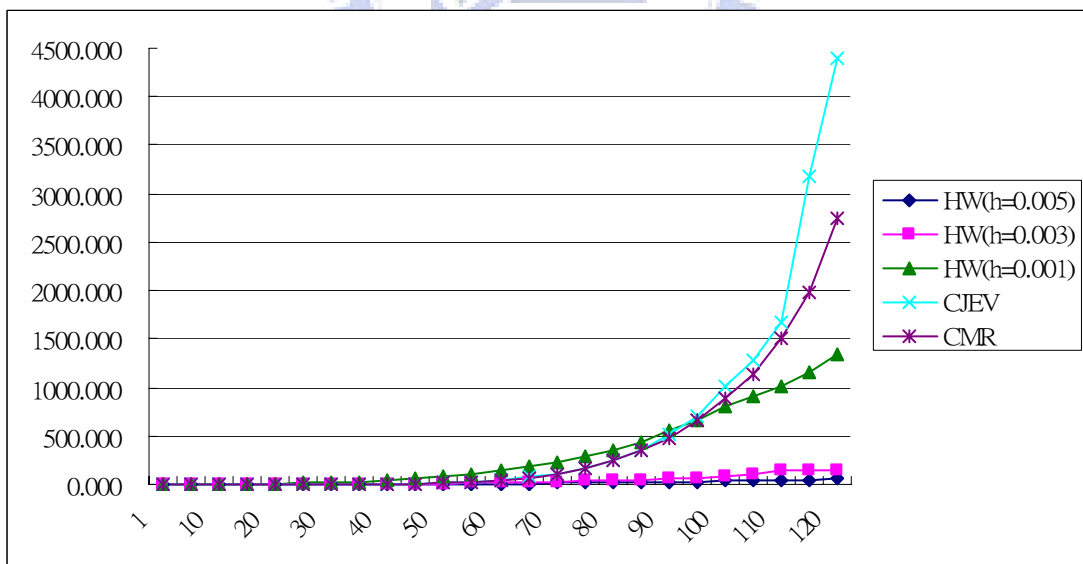
上升，上升的速度高達 2^n 。因此即使把參數 h 調整得很小，隨著 n 愈大，因內插而產生的向上誤差仍然會增加；而Chalasani et al.(1998)與Costabile et al.(2006)的模型之中每個節點的次節點數量均隨著 n 的上升而增加，雖然不能完全消除向上誤差隨著 n 增加的情形，但是增加的速度相較於Hull-White(1993)的模型緩慢。

steps	HW(h=0.005)	HW(h=0.003)	HW(h=0.001)	CJEV(UB)	CJEV(LB)	CMR
1	4.73455	4.73455	4.73455	4.73455	4.73455	4.73455
5	4.56659	4.56545	4.56541	4.56541	4.56541	4.56541
10	4.70963	4.70873	4.70850	4.70970	4.70849	4.70972
15	4.78080	4.77957	4.77905	4.78079	4.77882	4.77972
20	4.81503	4.81358	4.81266	4.81445	4.81240	4.81341
25	4.84459	4.84261	4.84163	4.84318	4.84133	4.84214
30	4.86501	4.86280	4.86180	4.86318	4.86147	4.86228
35	4.88031	4.87769	4.87642	4.87760	4.87598	4.87674
40	4.89243	4.88949	4.88805	4.88913	4.88762	4.88833
45	4.90235	4.89910	4.89746	4.89840	4.89699	4.89769
50	4.91073	4.90711	4.90526	4.90610	4.90474	4.90540
55	4.91781	4.91384	4.91184	4.91258	4.91128	4.91191
60	4.92391	4.91960	4.91744	4.91811	4.91688	4.91747
65	4.92923	4.92460	4.92223	4.92281	4.92161	4.92220
70	4.93392	4.92899	4.92647	4.92696	4.92582	4.92641
75	4.93813	4.93292	4.93023	4.93065	4.92958	4.93014
80	4.94185	4.93642	4.93356	4.93391	4.93286	4.93343
85	4.94529	4.93955	4.93653	4.93681	4.93579	4.93635
90	4.94835	4.94237	4.93918	4.93941	4.93844	4.93897
95	4.95113	4.94495	4.94157	4.94175	4.94080	4.94132
100	4.95370	4.94729	4.94375	4.94388	4.94295	4.94347
105	4.95606	4.94945	4.94575	4.94582	4.94493	4.94544
110	4.95824	4.95144	4.94758	4.94760	4.94672	4.94724
115	4.96026	4.95330	4.94928	4.94925	4.94839	4.94890
120	4.96213	4.95501	4.95084	4.95077	4.94994	4.95044

(表一) 三種樹狀模型之評價結果：HW代表Hull-White二元樹模型，參數 $h = 0.001, 0.003, 0.005$ ；CJEV代表Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)樹狀模型之評價結果；LB代表下界(lower bound)，UB代表上界(upper bound)；CMR代表Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型之評價結果。起始股價 $S_0 = 50$ ，無風險利率 $r = 10\%$ ，年化波動度 $\sigma = 0.3$ ，買權存續期間 $T = 1$ 。



(圖七) 三種樹狀模型之評價結果：HW代表Hull-White二元樹模型，參數 $h = 0.001, 0.003, 0.005$ ；CJEV代表Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)樹狀模型之評價結果：LB代表下界(lower bound)，UB代表上界(upper bound)；CMR代表Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型之評價結果。橫座標為階段數(steps)，縱座標為價格(單位：元)。起始股價 $S_0 = 50$ ，無風險利率 $r = 10\%$ ，年化波動度 $\sigma = 0.3$ ，買權存續期間 $T = 1$ 。橫座標為階段數(steps)，縱座標為選擇權價值。當中CMR模型的評價結果落在CJEV模型的上下界之內。



(圖八) 三種樹狀模型之CPU 運算時間(單位：秒)：HW 代表 Hull-White 二元樹模型，參數 $h = 0.005、0.003、0.001$ ；CJEV 代表 Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)樹狀模型；CMR 代表 Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型。橫座標為階段數(time steps)，縱座標為運算時間(單位：秒)

steps	HW(h=0.005)	HW(h=0.003)	HW(h=0.001)	CJEV	CMR
1	0.000	0.016	0.016	0.031	0.000
5	0.000	0.016	0.078	0.000	0.000
10	0.047	0.078	0.688	0.000	0.000
15	0.094	0.266	2.250	0.016	0.016
20	0.266	0.641	5.281	0.094	0.078
25	0.484	1.266	10.344	0.297	0.281
30	0.828	2.125	17.672	0.828	0.906
35	1.359	3.375	28.000	1.953	2.078
40	2.031	5.031	41.641	4.313	4.266
45	2.828	7.141	59.313	8.500	7.969
50	3.906	9.906	81.953	15.672	14.797
55	5.219	13.063	107.984	27.531	25.938
60	6.766	17.063	140.266	45.344	43.719
65	8.563	21.703	178.594	72.859	71.500
70	10.797	27.203	223.016	112.828	107.969
75	13.297	33.391	281.281	169.859	162.297
80	16.266	40.594	345.609	249.781	241.359
85	19.594	48.828	439.766	357.906	346.000
90	23.344	58.156	559.625	507.797	478.313
95	27.734	68.828	668.969	710.156	653.234
100	32.672	80.516	799.500	1007.547	886.891
105	37.719	98.297	902.125	1288.078	1142.609
110	43.234	139.219	1002.797	1677.719	1508.219
115	49.672	141.906	1159.906	3181.547	1976.719
120	56.031	143.828	1345.391	4396.391	2741.875

(表二) 三種樹狀模型之 CPU 運算時間(單位：秒)：HW 代表 Hull-White 二元樹模型，參數 $h = 0.005$ 、 0.003 、 0.001 ；CJEVChalasan-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)樹狀模型；CMR 代表 Costabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型。

本文利用 Hull-White(1993)、Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)和 Costabile-Massabó-Russo(2006)三種樹狀模型對五種不同履約價 X 的美式亞式選擇權的買權進行評價。比較在不同的 n 之下，三種模型的評價結果。並且考慮價內、價平以及價外的情形，選擇 5 種不同的履約價格 X ，分別為 $X = 40, 45, 50, 55, 60$ 。結果如(表三)所示。

我們發現在 $n = 10, 20, 40, 60, 80$ 的情況之下，Hull-White(1993)的模型($h = 0.005$)之評價結果較Chalasani et al.(1998)所求得之上下界為高。而Costabile et al.(2006)所求得之評價結果則落在Chalasani et al.(1998)所估計之上下界之內。此乃導因於Costabile et al.(2006)之演算法使用線性內插的次數較少，所產生之向上誤差較小的緣故。而Hull-White(1993)模型相較於其他兩個模型之所以產生較高的向上誤差，則是因為選擇替代路徑的方式較為粗糙，又使用線性內插法進行選擇權價值的估計，因此出現向上誤差之情形最為嚴重。不過隨著 h 參數愈小，向上誤差的產生的程度也愈低。

本文將 Longstaff-Schwartz(2001)最小平方蒙地卡羅之評價結果與本文的三個樹狀模型相互對照。發現樹狀模型之評價結果與最小平方蒙地卡羅之評價結果十分接近，並且在大部分的情況之下均落在正負一個標準誤的範圍之內。

除此之外，我們發現本文的結論與Costabile et al.(2006)的結果相異。(圖九)為Costabile et al.(2006)文章之中的表格，Costabile et al.(2006)之原文討論 $n = 40$ 時該模型與Chalasani et al.(1998)之上下界的關係，所得出的結論是該模型的評價結果稍微低於Chalasani et al.(1998)之下界，而本文實作的結果卻是介於上下界之間。出現不同的解釋乃根源於原文之中改良二元樹模型 $n = 40$ 的選擇權價值與本文所計算出的價值不一致，而我們合理地懷疑可能是Costabile et al.(2006)的結果有誤。原因分述如下：

1. 本文在 $n = 10$ 、 $n = 20$ 、 $n = 60$ 及 $n = 80$ 所估算的結果與原文的數據一致，而在這四種情形之下，Costabile et al.(2006)模型的評價結果均落在 Chalasani et al.(1998)之上下界之內。只在 $n = 40$ 時發生評價結果低於下界的情形並不合

理。在檢驗其他有限可數 n 的情形之下，也沒有發現 Costabile et al.(2006)之評價結果落在下界之外的情形。

2. Costabile et al.(2006)之模型雖然有效地減少使用線性內插的次數，但是並沒有完全避免使用線性內插法進行評價。因此 Costabile et al.(2006)的評價結果仍然存在因線性內插法所導致的高估，只是程度較為輕微。在詳細檢視演算法後，我們也沒有發現任何會造成評價結果低估的原因，因此出現評價結果低估的情況並不合理。
3. Dai-Huang-Lyuu(2005)及 Dai-Wang-Wei(2007)之樹狀模型的評價結果在其他情形下與 Costabile et al.(2006)之評價結果十分接近。但是在 $n=40$ 的情形之下，Dai-Huang-Lyuu(2005)和 Dai-Wang-Wei(2007)的評價結果也和原文的數據存在較大的誤差。反之，以上兩個模型的評價結果和本文所計算的評價結果十分接近。

n	$K = 40$	$K = 45$	$K = 50$	$K = 55$	$K = 60$
10	12.6824	8.1766	4.7097	2.4391	1.1279
20	12.9562	8.3949	4.8134	2.4960	1.1772
30	13.0756	8.4312	4.8619	2.5194	1.1951
40	13.1416	8.5375	4.8793	2.5237	1.1975
50	13.1986	8.5844	4.9053	2.5411	1.2110
60	13.2347	8.6114	4.9175	2.5470	1.2152
70	13.2612	8.6322	4.9264	2.5513	1.2181
80	13.2820	8.6490	4.9334	2.5545	1.2203
	LB = 13.150	LB = 8.546	LB = 4.888	LB = 2.532	LB = 1.204
	UB 13.151	UB = 8.547	UB = 4.889	UB = 2.534	UB = 1.206

(圖九) Costabile-Massabó-Russo(2006)原文之表格。在 $n=40$ ，起始股價 $S_0=50$ ，無風險利率 $r=10\%$ ，年化波動度 $\sigma=0.3$ ，買權存續期間 $T=1$ 。時，本文所計算出來的結果與上表的結果不一致，本文所估算之結果分別為 13.1502、8.5464、4.8883、2.5329、1.2052。

steps	Strike price	DHL	DWW	LSM (s.e.)	HW (h=0.005)	HW (h=0.001)	CJEV(UB)	CJEV(LB)	CMR
10	40	12.6818	12.6818	12.6713 (0.0221)	12.6820	12.6819	12.6824	12.6819	12.6824
	45	8.1758	8.1758	8.1603 (0.0222)	8.1775	8.1759	8.1771	8.1757	8.1766
	50	4.7085	4.7085	4.6627 (0.0194)	4.7096	4.7085	4.7097	4.7085	4.7097
	55	2.4384	2.4384	2.4211 (0.0150)	2.4389	2.4384	2.4412	2.4384	2.4391
	60	1.1270	1.1270	1.1553 (0.0106)	1.1276	1.1270	1.1297	1.1270	1.1279
20	40	12.9558	12.9559	12.9812 (0.0218)	12.9568	12.9559	12.9567	12.9557	12.9562
	45	8.3944	8.3944	8.4049 (0.0221)	8.3976	8.3945	8.3959	8.3942	8.3949
	50	4.8126	4.8126	4.7841 (0.0194)	4.8150	4.8127	4.8145	4.8124	4.8134
	55	2.4952	2.4951	2.4890 (0.0151)	2.4970	2.4952	2.4971	2.4946	2.4960
	60	1.1766	1.1766	1.1805 (0.0107)	1.1780	1.1766	1.1785	1.1760	1.1772
40	40	13.1500	13.1499	13.1620 (0.0216)	13.1533	13.1500	13.1508	13.1498	13.1502
	45	8.5462	8.5461	8.5445 (0.0220)	8.5507	8.5462	8.5472	8.5458	8.5464
	50	4.8882	4.8879	4.8782 (0.0196)	4.8924	4.8881	4.8891	4.8876	4.8883
	55	2.5329	2.5326	2.5584 (0.0153)	2.5362	2.5327	2.5337	2.5321	2.5329
	60	1.2052	1.2049	1.2059 (0.0109)	1.2076	1.2050	1.2058	1.2042	1.2052
60	40	13.2345	13.2345	13.2467 (0.0214)	13.2393	13.2346	13.2352	13.2343	13.2347
	45	8.6111	8.6111	8.6009 (0.0217)	8.6178	8.6113	8.6121	8.6107	8.6114
	50	4.9174	4.9173	4.9064 (0.0195)	4.9239	4.9174	4.9181	4.9169	4.9175
	55	2.5471	2.5470	2.5499	2.5523	2.5471	2.5476	2.5463	2.5470

				(0.0152)					
	60	1.2152	1.1251	1.2147	1.2190	1.2152	1.2156	1.2143	1.2152
				(0.0107)					
80	40	13.2819	13.2829	13.2818	13.2884	13.2821	13.2825	13.2816	13.2820
				(0.0203)					
	45	8.6489	8.6501	8.6459	8.6569	8.6490	8.6496	8.6483	8.6490
				(0.0217)					
	50	4.9335	4.9349	4.9384	4.9418	4.9336	4.9339	4.9329	4.9334
				(0.0197)					
	55	2.5548	2.5561	2.5542	2.5615	2.5547	2.5549	2.5539	2.5545
				(0.0152)					
	60	1.2206	1.2219	1.2236	1.2254	1.2205	1.2206	1.2196	1.2203
				(0.0109)					
FVZ	40	-	-	-	13.4370	13.4290	13.4290	13.4280	13.4290
	45	-	-	-	8.7727	8.7628	8.7630	8.7621	8.7625
	50	-	-	-	4.9975	4.9867	4.9867	4.9859	4.9863
	55	-	-	-	2.5908	2.5820	2.5815	2.5810	2.5815
	60	-	-	-	1.2478	1.2414	1.2408	1.2403	1.2409

(表三) HW 代表 Hull-White(1993) 二元樹模型的評價結果；CJEV 代表 Chalasani-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)樹狀模型的評價結果；LB代表下界(lower bound)，UB代表上界(upper bound)；CMRCostabile-Massabó-Russo(2006)樹狀模型；DHL 代表 Dai-Huang-Lyuu(2005)樹狀模型之評價結果；DWW代表Dai-Wang-Wei(2007)樹狀模型之評價結果；LSM代表Longstaff-Schwartz(2001)最小平方蒙地卡羅方法之評價結果。起始股價 $S_0 = 50$ ，無風險利率 $r = 10\%$ ，年化波動度 $\sigma = 0.3$ ，買權存續期間 $T = 1$ 。

第五章 結論

在執行速度的部分，Chalasanı-Jha-Egriboyun-Varikooty(1998)和Costabile-Massabó-Russo(2006)這兩個模型的執行時間相較於Hull-White(1993)的模型要來得高，Hull-White(1993)執行時間隨著 n 成長的速度較慢，但卻受該模型中的參數 h 影響甚鉅。

綜合三種樹狀模型對美式亞式選擇權的評價結果。發現這三個模型對美式亞式選擇權的評價結果存在以下關係：Hull-White(1993)之評價結果在參數 h 較大的情形之下($h = 0.005, h = 0.003$)高於其他兩個模型，而Costabile et al.(2006)之評價結果落在Chalasanı et al.(1998)評價結果之上下間區間之內。形成此一關係乃導因於替代路徑的算術平均價格選擇方式之不同，而使得線性內插所造成之向上偏誤的程度有所差別。Hull-White(1993)之模型直接利用指數線性(log-linear)集合做為替代路徑的算術平均數，選擇的方法較為粗糙。並且不會隨著 n 的增加調整替代路徑的密度，因此產生向上偏誤的情形較其他兩個模型為嚴重。

Chalasanı et al.(1998)則是把一個節點的路徑根據相同的幾何平均數做分割每一個節點之替代路徑的依據，相較於Hull-White(1993)的選擇替代路徑的方法更為精細。但是替代路徑之算術平均數乃根據前推法(forward induction)推得，並非替代路徑實際之算術平均數，因此每一條替代路徑之選擇權價格仍然必須大量依賴線性內插法求得；Costabile et al.(2006)分割每一個節點之替代路徑的作法和Chalasanı et al.(1998)相同。但是它捨棄前推法而發展出一套演算法可以直接替代路徑的實際算術平均數。因此在很多情況之下，可以避免掉使用線性內插法估計選擇權價格，因線性內插導致的向上偏誤相較於Chalasanı et al.(1998)的上界更小，使得美式亞式選擇權的評價結果更貼近樹狀模型之理論價格。

本文對Costabile et al.(2006)原文中提到該模型的評價結果會稍微低於Chalasanı et al.(1998)之下界這個論點提出質疑。並提出三個論點支持本文的看

法：第一、Costabile et al.(2006)文中的其他評價結果均落在Chalasanani et al.(1998)之上下界內，僅在 $n = 40$ 發生評價結果低於下界的情形並不合理。第二、Costabile et al.在評價的過程中雖然減少使用線性內插使用的次數，但是並沒有完全避免使用線性內插，故仍然會產生高估的效果。我們也沒有發現該演算法可能造成低估的原因，原文中所提到低估的情形並不合理。第三、本文實做出的數據與Dai-Hang-Lyuu(2005)及Dai-Wang-Wei(2007)的評價結果十分接近。

綜合以上的結果，本文認為Costabile et al.(2006)模型的評價可以更進一步縮小Chalasanani et al.(1998)的上下界區間。因為Costabile-Massabó-Russo(2006)有效減少在評價過程之中使用線性內插的次數，如此一來可以使得線性內插所造成的高估效果大幅降低。



參考文獻

1. Black, F., and M. Scholes. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
2. Carriere, J., (1996) "Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulations and Nonparametric Regression." *Insurance: Mathematics and Economics*, 19, 19-30.
3. Chalasani, P., S. Jha and A. Varikooty. (1998) "Accurate approximations for European-style Asian options." *Journal of Computational Finance*, 1(4), 11-30.
4. Chalasani, P., S. Jha, F. Egriboyan. and A. Varikooty. (1998) "A refined binomial lattice for pricing American Asian options." *8th Annual Derivatives Securities Conference*, Boston.
5. Costabile, M., I. Massabó and E. Russo (2006) "An adjusted binomial model for pricing Asian options." *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 27(3), 285-296.
6. Cox, J., S. Ross, and M. Rubenstein. (1979) "Option pricing: A simplified approach." *Journal of Financial Economics*, 7, 87-106.
7. Dai, T.S. (2004) "Pricing Asian Options on Lattices." working paper, National Taiwan University.
8. Dai, T.-S., Huang, G.-S., Lyuu, Y.-D. (2005) "An Efficient Convergent Lattice Algorithm for European Asian Options." *Appl. Math. and Comput.* 169, 1458-1471.
9. Dai, T.S., J.Y. Wang, H.S. Wei. (2007) "An Ingenious, Piecewise Linear Interpolation Algorithm for Pricing Arithmetic Average Options." to be published in *Lecture Notes in Computer Science*.

10. Grant, D., G. Vora, D. Week. (1997) "Path-Dependent Options: Extending the Monte Carlo Simulation Approach." *Management Science*, 43(11), 1589-1602.
11. Hull, J. and A. White. (1993) "Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options." *Journal of Derivatives*, 1, 21-31.
12. Hull, J. (2006) "Options Futures, and Other Derivatives, 6th ed." Prentice-Hall.
13. Jäckel, P. (2002) "Monte Carlo methods in finance." *Wiley finance series*.
14. Longstaff, F. and E. Schwartz. (2001) "Valuing American Options by simulation: A Simple Least-Squares Approach." *Review of financial Studies*, 14, 113-147.
15. Tilley, J. A. (1993) "Valuing American Options in a Path Simulation Model." *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 83-104.
16. Tsitsiklis, J., and B. Van Roy (1999) "Optimal Stopping of Markov Processes: Hilbert Space Theory, Approximation Algorithms, and an Application to Pricing High-Dimensional financial Derivatives." *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 1840-1851.

