

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

天然氣價格風險值衡量

Estimating Value-at-Risk of Natural Gas Price

研究生：許博涵

指導教授：鍾惠民 博士

中華民國九十六年六月

天然氣價格風險值衡量

Estimating Value-at-Risk of Natural Gas Price

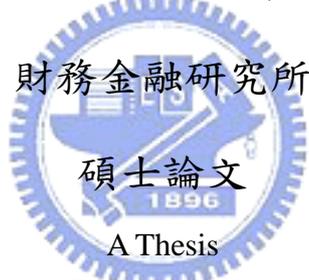
研 究 生: 許博涵

Student: Po-Han Hsu

指 導 教 授: 鍾惠民

Advisor: Huimin Chung

國立交通大學



Submitted to Graduate Institute of Finance
College of Management
National Chiao Tung University
In partial Fulfillment of Requirements
For the Degree of
Master
Of
Science in Finance

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國

中華民國九十六年六月

天然氣價格風險值衡量

研究生：許博涵

指導教授：鍾惠民

國立交通大學財務金融研究所



本文使用歷史模擬法、GARCH、EGARCH、GJR-GARCH 與 CARR 模型針對紐約商業交易所(New York Mercantile Exchange,NYMEX)天然氣商品(Natural Gas,NG)為研究對象，在誤差項分別假設為常態分配與 t 分配下計算其風險值，本文嘗試比較不同窗口長度和顯著水準下之模型特性；在模型評估方面，本文利用回朔測試，計算失敗次數、失敗比率，並以 Christoffersen (1998)發展之 Likelihood Ratio test 分別檢定未受條件限制下與受條件限制下之檢定統計量，衡量各模型績效。經過實証分析後發現，誤差項設定以常態分配較能準確評估天然氣期貨資產特性，失敗比率上五種模型都有不錯的表現，隨著顯著水準的降低，模型將趨於穩定，在 LR test 中以 CARR 與 EGARCH 模型表現較佳。

關鍵字：CARR、EGARCH、GARCH、GJR-GARCH、LR test、風險值、回朔測試

Estimating Value-at-Risk of Natural Gas Price

Student: Po-Han Hsu

Advisor: Huimin Chung

Institute of Finance

National Chiao Tung University

Abstract

This paper use historical simulation approach, GARCH model, EGARCH model, GJR-GARCH model and CARR model, under different error term distribution hypothesis to estimate the Value at Risk of NYMEX Natural Gas price.

We use different number of days and significant level to test our model and observe their performance. To value our model, we use back test, calculate failure frequency, failure ratio, and use Christoffersen's Likelihood Ratio Test to test unconditional and conditional test statistic. According to our analysis, error term should be suppose to normal distribution, that can fit the NYMEX Natural Gas property. The model have good performance in failure ratio, as the significant level goes down, the model will be more stable, CARR and EGARCH model have better performance in LR Test.

Keywords: CARR, EGARCH, GARCH, GJR-GARCH, LR test, Value at Risk

致 謝

兩年的研究生涯很快就畫上句點，學習過程中充滿了種種歡笑跟失落，一切的一切會是我生命中最寶貴跟美好的回憶。

此篇論文的完成，首先要感謝我的指導教授鍾惠民老師，不論在課業上，論文上，生活上，老師都會適時的關心我們並給予鼓勵，讓我在生活與學習上獲得很多啟發。也感謝林建榮老師，林淑惠老師，許英麟老師在口試過程中所給我的建議跟指導，使這篇論文更加完善。

一路走來，很開心能認識交大財金所的各位夥伴，課業上、生活上有了你們更是多彩多姿，希望在未來能夠繼續跟大家攜手並進。

最後要感謝我的家人，總是默默的在背後關心我、支持我、鼓勵我，讓我能無後顧之憂的專心於課業，謹將這篇論文獻給我最愛的父母。



許博涵 謹誌於

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十六年六月

目錄

第壹章、緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究目的	1
1.3 研究架構	2
第貳章、文獻回顧	3
2.1 風險值定義	3
2.2 風險值估計方法	3
2.3 模型檢定	6
第參章、研究方法	7
3.1 風險值計算	7
3.2 風險值模型	8
3.2.1 歷史模擬法	8
3.2.2 GARCH Model	9
3.2.3 GJR-GARCH Model	11
3.2.4 EGARCH Model	12
3.2.5 CARR Model	13
3.3 風險值模型檢定	14
3.3.1 回溯測試	14
3.3.2 失敗比率	15
3.3.3 概似比率法	15
3.3.4 RMSE	17
第肆章、實證分析	19
4.1 資料來源與處理	19
4.2 基本統計量與相關檢定	20
4.3 風險值估計	22
第伍章、結論	34

參考文獻	35
附錄一 天然氣價格直方圖.....	37
附錄二 N=500, t-distribution, P&L 和風險值走勢圖.....	38
附錄三 N=250, t-distribution, P&L 和風險值走勢圖.....	40
附錄四 N=500, Normal distribution, 風險值穿透圖.....	42
附錄五 N=500, 波動度圖形預測圖.....	43
附錄六 N=500, t-distribution 參數估計.....	45



圖目錄

圖 1 風險值圖形.....	3
圖 2 NYMEX 天然氣價格走勢圖.....	19
圖 3 NYMEX 天然氣報酬率走勢圖.....	20
圖 4 $N=500$ ， $\alpha=0.05$ ，模型估計之 VaR.....	24
圖 5 $N=500$ ， $\alpha=0.05$ ，模型穿透圖.....	25
圖 6 $N=250$ ， $\alpha=0.05$ ，模型估計之 VaR.....	26
圖 7 $N=250$ ， $\alpha=0.05$ ，模型穿透	27



表目錄

表 1 NYMEX 天然氣報酬率單根檢定.....	21
表 2 NYMEX 天然氣基本統計特性.....	21
表 3 GARCH、EGARCH、GJR-GARCH、CARR 模型參數估計(N=500).....	23
表 4 視窗樣本 N=500，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 282 天.....	27
表 5 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 282 天.....	28
表 6 視窗樣本 N=500，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 282 天.....	29
表 7 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 282 天.....	30
表 8 視窗樣本 N=500 之 RMSE.....	30
表 9 視窗樣本 N=250 之 RMSE	31
表 10 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 532 天.....	31
表 11 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 532 天.....	32
表 12 視窗樣本 N=250 之 RMSE	33
表 13 N=250 樣本期間 2005/6 ~2006/6.....	33



第壹章、緒論

1.1 研究動機

近年來能源需求不斷升高，而產油國如中東的政治情勢紛擾加上天然災害如美國的颶風侵襲，都造成能源類商品價格節節攀升，面對國際價格大幅波動，國內本土的石化、運輸等產業也都十分敏感，中國石油公司並打破先例在今年決定採用浮動油價的方式每週調整油價將價格風險轉嫁給大眾消費者。

風險管理人員面對這種高度波動的能源商品處理要非常謹慎，而眾多風險管理理論模型中，風險值(Value at Risk)模型能清楚的提供風險管理者在某特定期間跟顯著水準下，資產的可能損失程度。在風險值的計算中，資產的波動性則扮演著非常重要的腳色，因此我們將考慮多種波動性模型與傳統方法做比較，探討何者才是適合能源性資產的風險值模型。因此本文將以能源類商品中天然氣價格為研究標的，使用風險值模型搭配多種波動度模型以衡量其風險值。

1.2 研究目的

本研究目的是針對紐約商業交易所(NYMEX)的天然氣(Natural Gas)現貨價格為研究對象，採用歷史模擬法，GARCH、EGARCH、GJR-GARCH、CARR模型，由於金融資產的厚尾(heavy tail)特性，我們比較在誤差項設定為t分配時是否較常態分配為佳？在波動性模型中除了GARCH族外，另外加入了以變幅為考量的CARR模型，看看是否在風險值的衡量上一樣有較GARCH精確的結果，並考量在不同視窗長度下計算天然氣價格變動報酬率之風險值，最後藉由失敗穿透次數、失敗穿透率、概似比率檢定(Likelihood Ratio Test, LR Test)、均方誤差(Root Mean Square Error, RMSE)等績效衡量指標，檢定以上模型所估計之風險值

是否滿足特定顯著水準 α ，找出適合天然氣價格的風險值模型。

1.3 研究架構

本研究架構共分為五章：第壹章為緒論，說明研究動機，研究目的及研究架構；第貳章為文獻回顧，介紹風險值模型，國內外相關風險值模型文獻的探討；第參章為研究方法，定義風險值的計算方式和本研究的五種模型評估方法，模型績效的衡量指標；第肆章為實證研究，說明實證步驟和五種模型的實證結果比較；第伍章為結論。



第貳章、文獻回顧

2.1 風險值定義

風險值將所有金融資產組合所面對的各種風險，簡化為單一數值呈現，針對以下敘述(Hull&White,1998):”未來的N天裡，我們有 $(1-\alpha)\%$ 信心相信公司的損失將不會超過X元。”變數X代表此投資組合之風險值，參數為時間區間N，和顯著水準 α 。通常銀行的主管機關要求 $N=10$ ， $\alpha=0.01$ ，即主管機構要求銀行只有1%的機會在未來10天裡損失超過風險值，且銀行所提列的準備金至少是風險值的3倍，理論上，風險值有兩個參數值，N，表未來時間長度； α ，表信賴水準，通常 $N=1$ 而 $\alpha=0.05$ 或 $\alpha=0.01$ ，若要計算N天期風險值，則我們將1天期風險值乘以 \sqrt{N} 。若 r_N 表資產在未來N天的損失金額，在顯著水準 α 下的VaR可表示為 $P(r_N < VaR) = \alpha$

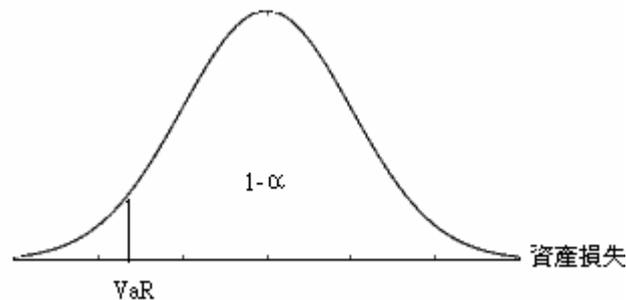


圖 1 風險值圖形

2.2 風險值估計方法

一般常用的風險值估計方法有兩種，歷史模擬法(Historical Simulation approach)、變異數-共變異數法(Variance-Covariance approach)。

一. 歷史模擬法(Historical Simulation approach)

歷史模擬法不須對母體做任何分配的假設，假設未來的價格過程會完全由歷

史資料反應，若考慮一個由 n 種資產所構成之投資組合， t 時點的報酬率可表示為

$$R_t^p = \sum_{i=1}^n W_i R_t^i$$

R_t^p 表投資組合 p 在第 t 期的報酬率， W_i 表資產 i 所佔投資組合權重，

R_t^i 表第 t 期時資產 i 的報酬率。在計算風險值時，先將個別資產酬率算出，並計算樣本期間每一時點 t 之投資組合報酬率，將投資組合報酬率由小而大排序獲得投資組合的機率分配，找出所對應的顯著水準 α 百分位數，乘以期初投資即可獲得估計風險值。歷史模擬法的優點是計算簡單，可由觀察資料直接計算，由於不需考慮母體分配的假設，可減少模型假設錯誤的風險，歷史模擬法的缺點在於當樣本數偏低或資料量不足時，由於小樣本下極端事件數量較少，或當市場發生結構轉變現象，所估計的風險值可能無法充分反應未來情況，因此主觀視窗長度的選取會有不同的影響。



二. 變異數-共變異數法 (Variance-Covariance approach)

變異數-共變異數法假設資產的報酬率為常態分配，線性組合的投資組合也服從常態分配，重點在於變異數和共變異數的估計，因此我們可以透過個別資產報酬率的平均數和標準差，計算各別資產間共變異數搭配各資產權重進而計算出投資組合變異數，最後將所計算的投資組合標準差乘上常態分配下給定顯著水準 α 所對應 Z_α 值，即求得風險值。

若有 n 種資產，個別權重為 W_i ，個別資產報酬率 r_i ， $r_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ ，

$\text{cov}(r_i, r_j) = \sigma_{ij}$ ，投資組合報酬率和變異數為：

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n W_i \mu_i$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n W_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} W_i W_j \sigma_{ij}$$

則在顯著水準 α 下，風險值可表示為：

$$\text{VaR} = \mu_p + \sigma_p Z_\alpha$$

三. GARCH 系列模型

當我們使用變異數共變異數法估計風險值時，資產報酬的變異數和共變異數是我們估計的重點，而財務時間序列資料往往具有條件變異數不齊一等現象，指的是條件變異數會隨時間變化而改變，Engle (1982) 提出自我回歸條件異質變異模型 (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, ARCH) 處理了條件變異數不齊一的問題。Bollerslev (1986) 發展的一般化自我迴歸條件異質變異數模型 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, GARCH) 則為一般化 ARCH 模型，ARCH 模型將 MA (moving average) 模型概念用在估計條件變異數之上，而 GARCH 模型則同時將 AR (autoregressive) 和 MA 觀念應用於估計條件變異數之中。Alexander & Leigh (1997) 以均等加權移動平均法、指數加權移動平均法和 GARCH 模型估計風險值，結果發現 GARCH 模型表現較佳。Goorbergh & Vlaar (1999) 以歷史模擬法、變異數-共變異數法、等 GARCH 系列模型估計荷蘭道瓊工業指數之風險值，結果發現以考慮條件變異數不齊一的 GARCH 族模型表現較佳。

而時間序列模型中，對於資產波動性的估計除了 GARCH 模型外，還有利用變幅 (Range) 概念取代報酬率的方式，Parkinson (1980) 指出，相較於傳統歷史

波動性的衡量方法，使用變幅來預測股價的波動性，會比只有使用收盤價資訊來進行波動性預測的表現為佳，Chou (2002)也將變幅概念融合 GARCH 模型提出自我迴歸條件變幅 (Conditional Autoregressive Range, CARR)，同時 Chou (2002) 並利用 S&P 500 股價指數資料發現 CARR 模型比 GARCH 模型更能獲得較為精確的波動性估計值。

由上述研究結果發現，當標的資產具有厚尾、波動群聚等條件變異數不齊一現象時，以 GARCH 相關模型衡量確實有提升估計風險值之精確性，而 CARR 模型在波動性的估計上較 GARCH 模型準確，是否代表其在風險值的估計也將有更好的結果呢？因此本文將以歷史模擬法、GARCH、EGARCH、GJR-GARCH 與 CARR 模型在不同窗口長度和顯著水準下，分別假設誤差項為常態分配與 t 分配，計算 NYMEX 天然氣價格之風險值。



2.3 風險值模型檢定

在風險值模型的檢定上，Hendricks (1996)認為不同的風險值模型所做的估計會有所差異，Kupiec (1995)提出概似比檢定(Likelihood Ratio Test, LR test)，檢定模型所估計之風險值與實際報酬率之穿透比率是否與顯著水準相同。Christoffersen (1998)提出 3 個 LR 檢定統計量分別檢定未受條件限制下、獨立性與受條件限制下之模型風險估計值效率。Jorion (2000)提出回朔測試 (back test)，比較一段時間內，模型所估計之風險值與真實報酬率之穿透次數，計算穿透比率是否與顯著水準一致。

本研究將採用回朔測試，並結合 Christoffersen (1998)提出 3 個 LR 檢定統計量比較各模型估計之精確性。

第參章 研究方法

3.1 風險值計算

Jorion (2000)提出所謂風險值為『在特定信賴水準 $100(1-\alpha)\%$ 下，衡量某一特定時間 Δt 內，因市場變動所造成未來可能發生的最大損失金額』

以數學式說明風險值如下：

若假設報酬服從常態分配

$$\frac{R^* - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sim ND(0, 1) \quad (1)$$

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{W^*} f(W)dW = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = \int_{-\infty}^{Z_\alpha} \Phi(Z)dZ \quad (2)$$

$$\text{Value at Risk} = W_0 * (\mu\Delta t + Z_\alpha * \sigma * \sqrt{\Delta t}) \quad (3)$$

R^* ：該投資組合之報酬率

$\mu = E(R)$ ：該投資組合之預期報酬率

Δt ：持有期間長度

W_0 ：投資組合之期初價值

Z_α ：常態分配下顯著水準 α 所對應 Z 統計量

由風險值的定義可發現，除了顯著水準 α 和時間長度 Δt 外，最重要的兩個參數 σ 和期望報酬 μ 則是我們所關心的，本研究在條件期望值 μ_t 的估計上，使用以下的均數方程式：

$$y_t = C + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{\sigma_t^2} z_t$$

z_t 來自相同分配且互相獨立，本研究假設服從常態及 t 分配。

在條件波動性 σ_t 的估計上，則考慮 GARCH、EGARCH、GJR-GARCH 和 CARR 模型，分別估計風險值。

3.2 風險值模型

3.2.1 歷史模擬法

歷史模擬法為利用過去歷史價格資料的變動來預測未來價格變動的機率分配，由於不需要任何統計分配的假設，屬於無母數方法之一。我們假設未來價格變動的機率分配會跟樣本內資料的價格變動相同，除了可避免估計參數的模型風險外，對於線性和其他非線性投資組合(ex. 選擇權商品投資組合)等計算較為簡單。惟資料量不足時，投資組合報酬真正分配可能會有所偏誤，樣本內主觀資料數(N)的選擇也有所影響，若資料數太少，則所估計之 VaR 不準確，若資料量太多，可能無法反映當時市場狀況。本研究將採用 N=250 和 N=500 兩種窗口長度以移動視窗法對未來價格變動作估計，過程如下：

當 N=250 時，我們選取前 251 筆資料 S_1, S_2, \dots, S_{n+1} ，估算每日價格變動 $\Delta S_{i-1} = S_i - S_{i-1}$ ，共得 n 筆價格變動資料 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ ，若將本期價格 S_0 加上變動價格 ΔS_i 共可得出 250 筆下一期資料：

$$\begin{aligned}
S_1(1) &= S_0 + \Delta S_1 \\
S_1(2) &= S_0 + \Delta S_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
S_1(i) &= S_0 + \Delta S_i \\
&\cdot \\
&\cdot \\
S_1(250) &= S_0 + \Delta S_{250}
\end{aligned}$$

將上述資料予以排序，給定顯著水準 α 後，找出相對應的百分位數左尾臨界值即為此投資組合之風險值。在 $N=200$ ， $\alpha=0.01$ 的情況下，排序後價格資料預期會有 2 筆超出 VaR 值，歷史模擬法下所估計的 VaR 值會落在第 3 筆資料上。

最後將 S_1 剔除，加入 S_0 ，計算下一期的 VaR 估計值，並依此步驟以一天的移動視窗重複計算至最後一期的 VaR。歷史模擬法計算簡單且可避免模型設定風險，在使用歷史模擬法時需考慮樣本期間內資料量是否夠足以涵蓋未來價格變化特徵，本研究將使用 $N=500$ 和 $N=250$ 兩種視窗長度進行風險值估計。

3.2.2 GARCH(P,Q)

過去的許多研究文獻上，對於有關經濟和財務的時間序列資料都有厚尾相較於常態分配和波動群聚等現象，這跟一般樣本報酬假設為常態分配和報酬間獨立的關係有所不同，實務上也發現股價指數本身的波動性會受前期波動所影響，Bollerslev (1986) 發展一般化自我迴歸條件異質變異數模型，其為 ARCH 的一般式，GARCH 是將 AR (autoregressive) 和 MA (moving average) 的觀念用在估計條件變異數之中，GARCH(P,Q) 數學式表示如下：

$$y_t = C + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{\sigma_t^2} z_t$$

$$z_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^Q A_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (5)$$

G_i : GARCH effect

A_j : ARCH effect

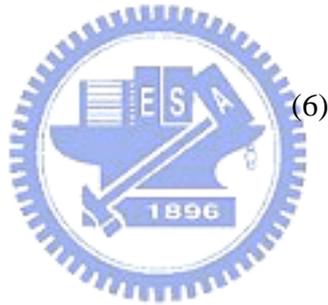
參數的限制式為：

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j < 1$$

$$k > 0$$

$$G_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, P$$

$$A_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, Q$$



(6)

限制式 $G_i \geq 0, A_j \geq 0$ 確保 σ_t^2 恆正。

GARCH(P,Q)模型的非條件變異數 σ^2 表示如下：

$$\sigma^2 = \frac{k}{1 - \sum_{i=1}^P G_i - \sum_{j=1}^Q A_j} \quad (7)$$

條件變異數 σ_t^2 的下一期預測值 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ 表示如下：

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = k + G_1 \sigma_t^2 + A_1 \varepsilon_t^2 \quad (8)$$

利用前 N 期資料估計完模型參數後，我們可預測下一期平均數 $\hat{\mu}$ 及變異數

$\hat{\sigma}^2$ 並計算下一期所估計之風險值，利用移動視窗的概念，每做完一次預測即剔除第一筆資料，加入新的一筆資料，繼續預測下一期風險值。

3.2.3 GJR(P,Q)

Glosten, Jagannathan 和 Runkle (1993)對 GARCH 模型提出修正，其特點為市場消息衝擊下，可描述正向及負向的報酬對於條件變異數的影響之不對稱效果，模型如下：

$$\sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q L_j S_{t-j}^- \varepsilon_{t-j}^2 \quad (9)$$

Where

$$S_{t-j}^- = \begin{cases} 1 & \varepsilon_{t-j} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

G_i : GARCH effect

A_j : ARCH effect

L_j : asymmetry effect



參數限制式如下：

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q L_j < 1 \quad (10)$$

$$k > 0$$

$$G_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, P$$

$$A_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, Q$$

$$A_j + L_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, Q$$

若 $L_j > 0$ ，表示存在不對稱性。

GJR-GARCH(P,Q)模型的非條件變異數表示如下：

$$\sigma^2 = \frac{k}{1 - \sum_{i=1}^p G_i - \sum_{j=1}^q A_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q L_j} \quad (11)$$

條件變異數 σ_t^2 的下一期預測值 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ 表示如下：

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = k + G_1 \sigma_t^2 + A_1 \varepsilon_t^2 + L_1 \varepsilon_t^2 S_t^- \quad (12)$$

3.2.4 EGARCH(P,Q)

Nelson (1991)提出含不對稱效果之模型稱為 Exponential GARCH (EGARCH)，他認為一般 GARCH 模型有以下缺失需要改進：

1. 無法說明現在的報酬率與未來報酬的波動度呈現負相關(leverage effect)。
2. 無法解釋前期的衝擊對當期條件變異數的影響。
3. 條件變異數的參數限制式中，必須恆為正數的假設破壞了條件變異數的動態過程。

其數學模型表示如下：

$$\log \sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^p G_i \log \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q A_j \left[\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} - E \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right) \right] + \sum_{j=1}^q L_j \left(\frac{\varepsilon_{t-j}}{\sigma_{t-j}} \right) \quad (13)$$

Where

$$E \left(\frac{|\varepsilon_{t-j}|}{\sigma_{t-j}} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{Gaussian} \\ \sqrt{\frac{v-2}{\pi}} & \text{Student's t} \end{cases}$$

$v > 2$

這各過程的共變異數穩定條件為：

$$\sum_{i=1}^P G_i < 1$$

EGARCH(P,Q)模型的非條件變異數表示如下：

$$\sigma^2 = \exp\left(\frac{k}{1 - \sum_{i=1}^P G_i}\right) \quad (14)$$

條件變異數 σ_t^2 的下一期預測值 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ 表示如下：

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sigma_t^{2G_1} \exp[(1 - G_1)k] \exp[g(\varepsilon)] \quad (15)$$

$$g(\varepsilon) = L \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + L \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$$

3.2.5 CARR(P,Q)

GARCH 模型的優點在於改善了變異數隨時間而變動的方式，而 Parkinson (1980)則認為變幅是波動性的有效估計值，Chou (2002)考量 GARCH 模型的優勢結合變幅(range)的特性提出 CARR 模型。相較於 GARCH 模型是以報酬平方衡量波動性，CARR 模型則利用變幅為變數，變幅為特定區間內，資產價格的最高價與最低價差，本研究將時間區間設定為一天，因此我們採用交易當天的最高價與最低價差為日變幅，CARR 模型的條件期望值 μ_t 的估計設定與 GARCH 模型相同，而波動性的估計上則利用變幅取代，其數學模型表示如下：

$$\begin{aligned} R_t &= \lambda_t \varepsilon_t & \varepsilon_t &\sim \exp(1) \\ \lambda_t &= k + \sum_{i=1}^P G_i \lambda_{t-i} + \sum_{j=1}^Q A_j R_{t-j} \end{aligned} \quad (16)$$

$$R_t = \log P_t^{High} - \log P_t^{Low}$$

λ_t 表條件變異數，且 $\lambda_t > 0$ ， ε_t 為來自相同分配的隨機干擾項，且互相獨立，

此處我們假設 ε_t 服從平均數和變異數為一的指數分配。

參數限制式為：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j &< 1 \\ G_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, P \\ A_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (17)$$

CARR(P,Q)模型的非條件變異數和 GARCH(P,Q)模型相同，表示如下：

$$\lambda_t = \frac{k}{1 - \sum_{i=1}^P G_i - \sum_{j=1}^Q A_j} \quad (18)$$

條件變異數 λ_t 的下一期預測值 $\hat{\lambda}_{t+1}$ 表示如下：

$$\hat{\lambda}_{t+1} = k + (G_1 + A_1)\lambda_t \quad (19)$$



3.3 風險值模型檢定

使用不同的模型在風險值的估計上會有所差異，因此在模型的績效驗證上，我們採用以下幾種方法：

3.3.1 回朔測試(Back Test)

回朔測試為檢驗模型合適度最簡單的一種方式，我們衡量過去一段時間的部位資料檢測投資組合真實損失超過風險值的次數，假設 $N=250$ 天，我們衡量一天期 95%的風險值，若發現真實報酬超過風險值次數為 13 次左右，則我們對此風險值深具信心，若超過次數遠低於或遠高於 13 次，則我們所使用的方法就值得懷疑了，巴塞爾監理委員會也提出回朔檢定的方式，其規定衡量過去一年的部位資料(約 250 筆日資料)檢測真實報酬超過風險值的次數。在顯著水準 $\alpha=0.01$

下，若 250 天的觀測樣本中，損失超過 VaR 的天數在 4 日以內，稱為綠燈區，表風險值模型值得確信，若為 5 至 9 日則稱黃燈，表風險值模型有正確的疑慮，若超過 10 天，則為紅燈，表模型嚴重錯誤。獲綠燈銀行之資本提存為 VaR 的 3 倍，黃燈為 3.4 至 3.85 倍，紅燈則不為 BIS 所接受。

3.3.2 失敗比率(Uncovered Loss Ratio, ULR)

失敗比率為將上述回溯測試所觀察到的違反次數除以該段期間內風險值的估計次數，失敗比率越接近顯著水準 α ，代表模型估計越準確，越偏離 α 則模型越不適當。

3.3.3 概似比率法(Likelihood Ratio Test, LR Test)

Kupiec (1995) 提出 Proportion of Failure Test (PF-Test) 對所估計的結果進行檢定，其目的在檢定報酬超過風險值的實際比率 $\hat{\alpha}$ 是否與風險值模型所假設的 α 相同，虛無假設 $H_0: \hat{\alpha} = \alpha$ 檢定統計量為：

$$LR = -2 \log \left[\frac{p^{n_1} (1-p)^{n_0}}{\hat{\pi}^{n_1} (1-\hat{\pi})^{n_0}} \right] \sim \chi^2(1) \quad (20)$$

$$H_0: \hat{\alpha} = \alpha$$

$$H_1: \hat{\alpha} \neq \alpha$$

P: 風險值模型之顯著水準

$\hat{\pi}$: 實際報酬率超過所估計風險值的比率

n_0 : 實際報酬率未穿過所估計風險值的次數

n_1 : 實際報酬率穿過所估計風險值次數

Christoffersen (1998) 利用區間預測的概念將 Kupiec 之 LR 統計量延伸為 3 個 LR 的檢定：

1. 檢定為未受限制收斂之正確度(correct unconditional coverage)，檢定統計量為：

$$LR_{uc} = -2\log \left[\frac{p^{n_1} (1-p)^{n_0}}{\hat{\pi}^{n_1} (1-\hat{\pi})^{n_0}} \right] \sim \chi^2(1) \quad (21)$$

$$H_0 : \hat{\alpha} = \alpha$$

$$H_1 : \hat{\alpha} \neq \alpha$$

P:風險值模型之顯著水準

$\hat{\pi}$:實際報酬率超過所估計風險值的比率

n_0 :實際報酬率未穿過所估計風險值的次數

n_1 :實際報酬率穿過所估計風險值次數

2. 檢定獨立性(independence)，檢定統計量為：

$$LR_{ind} = -2\log \left[\frac{(1-\hat{\pi})^{(n_{00}+n_{10})} \hat{\pi}^{(n_{01}+n_{11})}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}^{n_{01}} (1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}^{n_{11}}} \right] \sim \chi^2(1) \quad (22)$$

H_0 :失敗過程為獨立

H_1 :失敗過程不為獨立

$\hat{\pi}$:實際報酬率超過所估計風險值的比率

n_0 :實際報酬率未穿過所估計風險值的次數

n_1 :實際報酬率穿過所估計風險值次數

n_{00} :前期沒發生穿透事件，本期也沒發生穿透事件

n_{01} :前期沒發生穿透事件，本期發生穿透事件

n_{10} :前期發生穿透事件，本期沒發生穿透事件

n_{11} :前期發生穿透事件，本期也發生穿透事件

$$\hat{\pi} = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

3. 檢定受限制收斂之正確度(correct conditional coverage)，檢定統計量為：

$$LR_{cc} = -2 \log \left[\frac{(1-p)^{n_0} p^{n_1}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}} \hat{\pi}_{01}^{n_{01}} (1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}} \hat{\pi}_{11}^{n_{11}}} \right] \sim \chi^2(2) \quad (23)$$

P: 風險值模型之顯著水準

$\hat{\pi}$: 實際報酬率超過所估計風險值的比率

n_0 : 實際報酬率未穿過所估計風險值的次數

n_1 : 實際報酬率穿過所估計風險值次數

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

其中 Christoffersen (1998) 的 LR_{uc} 檢定統計量相當於 Kupiec (1995) 的 LR 檢定統計量， LR_{ind} 檢定統計量則是檢定風險值模型失敗發生之隨機過程是否滿足獨立性，檢測穿透的發生是否有連續的特性，而 LR_{cc} 檢定統計量則是同時考慮失敗過程之隨機特性及失敗機率，可視為 $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$ 。

3.3.4 Root Mean Square Error (RMSE)

若風險值模型的檢定結果均符合 LR 檢定，則表示模型的失敗率與信賴水準夠接近，我們可以透過均方誤差(root mean square error, RMSE) 進一步比較真實報

酬率與風險值的貼近程度。

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - VaR_i)^2}{n}} \quad (24)$$

r_i : 第 i 期的實際報酬率

VaR_i : 第 i 期所估計之風險值

RMSE 越小表示實際報酬率與模型所估計之風險值越接近，若所比較之模型均通過 LR 檢定，則計算 RMSE 並選取 RMSE 最小者為最佳模型。

本文在模型估計完成後，先進行回朔測試計算各模型失敗次數，失敗比率，並透過 Christoffersen (1998) 提出之檢定方法進行統計檢定，並將通過失敗率檢定之模型進一步計算其 RMSE 以選取較佳之模型。



第肆章 實證分析

4.1 資料來源與處理

本文資料數據摘取自 datastream 資料庫，美國紐約商業交易所(NYMEX)天然氣(NG)現貨價格。資料型態為日資料，研究期間為 2004 年 4 月 6 日至 2007 年 4 月 5 日。進行實証研究時，遇到假日或當日沒有交易則將當日資料刪除，資料筆數總計為 783 筆日變幅及價格觀測值，天然氣價格走勢如圖 2 所示。

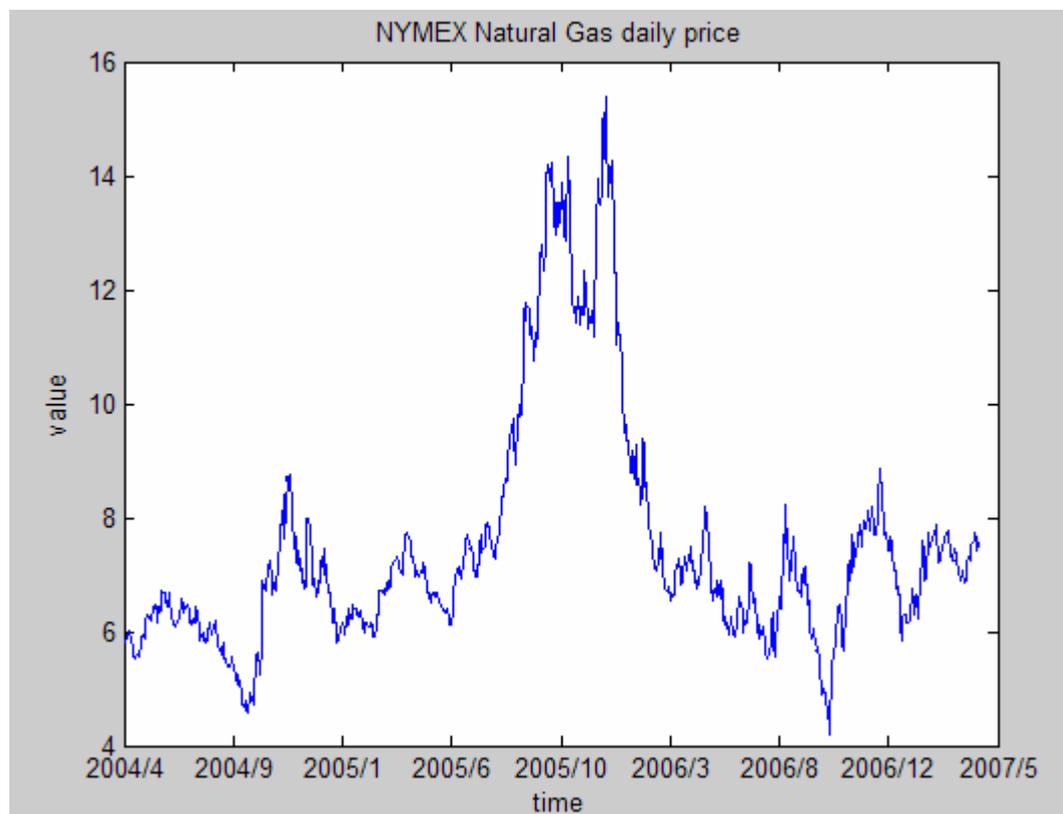


圖 2 NYMEX 天然氣價格走勢圖

本文於實證上將 NYMEX 天然氣價格日資料轉換為報酬率形式定義如下：

$$R_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (25)$$

天然氣日報酬率如圖 2 所示：

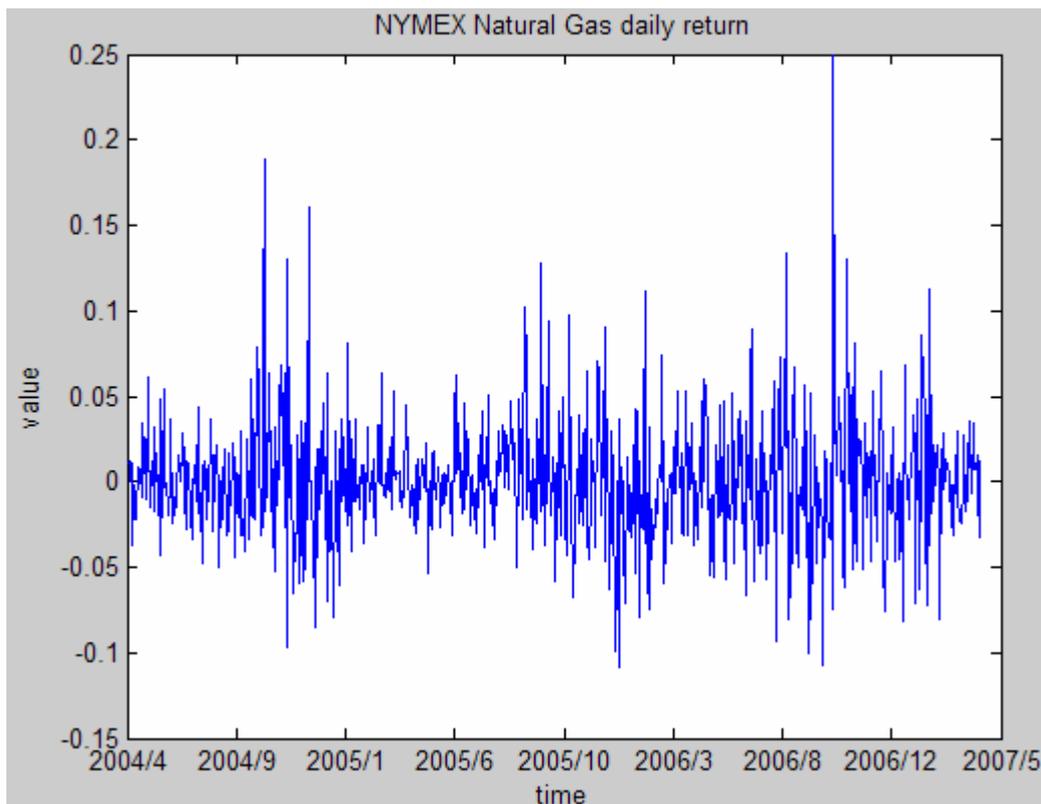


圖 3 天然氣報酬率走勢圖

4.2 基本統計量與相關檢定

在模型估計前，必須檢查所觀測時間序列資料是否呈現定態才能進行計量模型之分析。因此本文利用 Augmented Dickey-Fuller(ADF)對報酬率進行單根檢定，迴歸方程式如下表示，檢定結果如表 1。

(1)不含截距項與時間趨勢

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

(2)含截距項

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$$

(3)含截距項及趨勢項

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + bt + \varepsilon_t$$

表 1 NYMEX 天然氣報酬率單根檢定

ADF 單根檢定	T statistic	Critical value (1%)	Critical value (5%)
Intercept	-28.1327***	-3.438497	-2.865026
Trend and intercept	-28.11738***	-3.969845	-3.41558
None	-28.14834***	-2.567926	-1.941229

***表顯著拒絕水準達 1%

判定資料為定態序列後計算其日價格及日報酬率基本統計特性如表 2:

表 2: NYMEX 天然氣基本統計特性

	平均值	標準差	偏態	峰態	最大值	最小值	LBQ(20)	JB
價格	7.5164	2.0956	1.7456	5.5678	5.378	4.012	12601***	608.91***
報酬率	0.000348	0.03594	0.9233	7.9149	0.2495	-0.1083	27.8981**	891.34***

註: 1. ***表顯著拒絕水準達 1%

2. **表顯著拒絕水準達 5%

3. LBQ 表 Ljung-Box Q-statistic

4. JB 表 Jarque-Bera 常態性檢定

由表二可發現 NYMEX 天然氣之日報酬率偏態係數異於零，且峰態係數大於 3，呈現厚尾(heavy tail)特性。接著進行 Jarque-Bera 檢定是否資料呈現常態分配，其檢定過程如下:

H_0 : 報酬為常態分配

H_1 : 報酬不為常態分配

$$\text{檢定統計量為 } J.B = \frac{T}{6} \left[S + \frac{1}{4}(K - 3)^2 \right] \quad (26)$$

$$S = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3}$$

$$K = \frac{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4}$$

其中 T 為總樣本數， \bar{x} 為樣本平均數， σ 為樣本標準差。

經過 Jarque-Bera 常態分配檢定後發現 NYMEX 天然氣價格與日報酬率之檢定統計量顯著拒絕水準達 1%，表有足夠證據顯示 NYMEX 天然氣價格與日報酬率不滿足常態分配假設。

本研究在 NYMEX 天然氣日報酬率將以落後期數(P=1,Q=1)模型進行，在估計模型參數前必須先檢定 NYMEX 天然氣日報酬率模型配適所產生的殘差項是否具有 ARCH 現象。若模型具有 ARCH 現象但仍使用傳統計量模型進行分析，其結果將產生誤差，因為若迴歸的殘差條件變異不一致，估計出來的參數會不具有效性，因此本研究以 ARCH-LM 檢定對 NYMEX 天然氣日報酬率進行 ARCH 效果檢定，檢定統計量值為 3.9403 其顯著拒絕水準達 5%，因此我們有足夠信心拒絕單根的存在，表資料為定態，且存在異質變異的 ARCH 特性。

4.3 風險值估計

1. 歷史模擬法：

利用移動視窗的概念，以前 N 筆價格變化估算下一期的風險值，再給定顯著水準 α 下，估算前 N 筆價格變化之左尾 α 百分位數，加上本期之價格即可推得下一期之風險值預估值，本研究將分別計算 N=250, N=500 及 $\alpha=0.01$, $\alpha=0.05$ 情形下所求得之風險值，並與其他模型作比較。

2. GARCH 族模型參數之估計：

本研究利用 Matlab 軟體以最大概似估計法對波動度模型進行參數估計，結果如下所示。

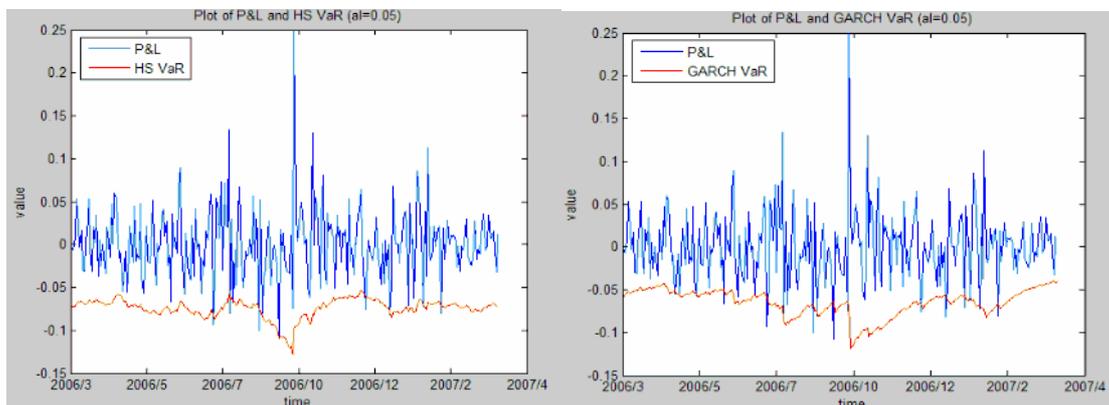
表 3 GARCH、EGARCH、GJR-GARCH、CARR 模型參數估計(N=500)

	GARCH	EGARCH	GJR-GARCH	CARR
C	0.00090066 (0.0013765)	0.0011405 (0.001331)	0.00094859 (0.0013836)	
K	1.0289e-005** (7.1998e-006)	-0.0704** (0.04526)	1.3152e005** (6.767e-006)	0.00193** (0.00107)
G_1	0.92491*** (0.014508)	0.9844*** (0.00657)	0.92685*** (0.01518)	0.56262*** (0.10622)
A_1	0.067926*** (0.011544)***	0.13959*** (0.024109)	0.075991*** (0.01271)	0.39494*** (0.07946)
L_1		0.027365* (0.018507)	-0.23722*** (0.022417)	

***表顯著拒絕水準達 1% **表顯著拒絕水準達 5% *表顯著拒絕水準達 10%

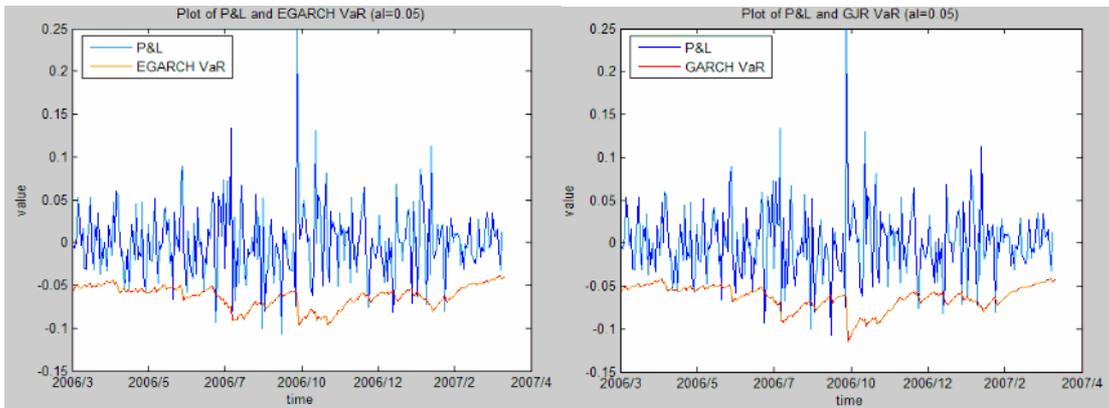
利用移動視窗的概念，每一次的預測都踢除第一筆資料並加入新的一筆資料，重新對模型進行估計並對未來一天的風險值進行估計。

圖 4 為窗口樣本數 N=500，顯著水準 $\alpha=0.05$ 時，各模型估計風險值與實際報酬走勢圖。



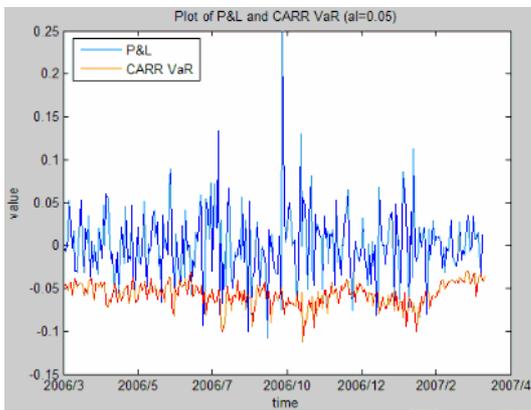
歷史模擬法 VaR

GARCH 模型 VaR



EGARCH 模型 VaR

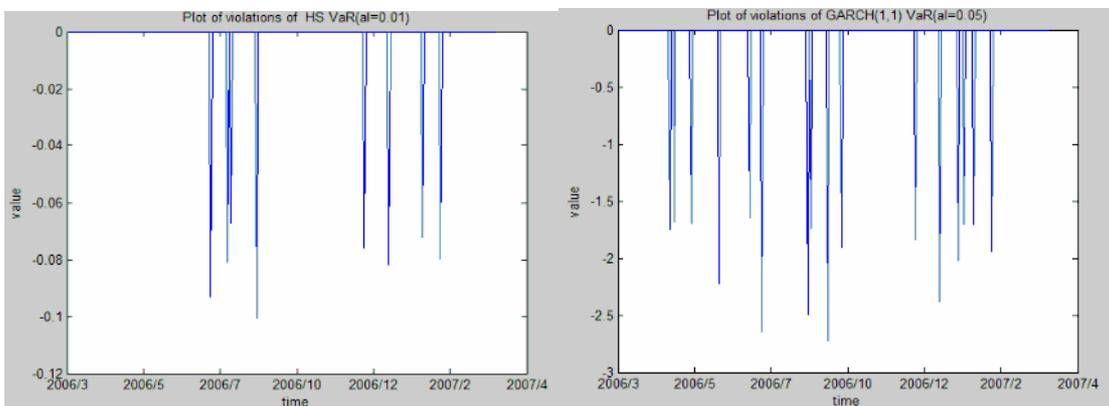
GJR-GARCH 模型 VaR



CARR 模型 VaR

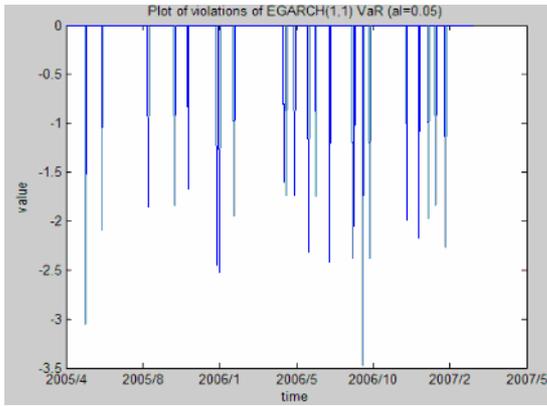
圖 4 $N=500$ ， $\alpha=0.05$ ，模型估計之 VaR

各模型穿透圖形如下所示：

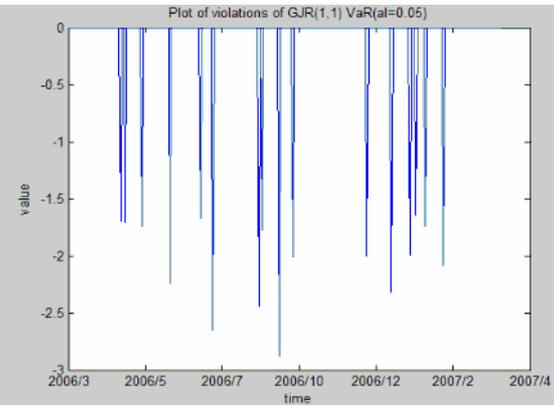


歷史模擬法穿透圖

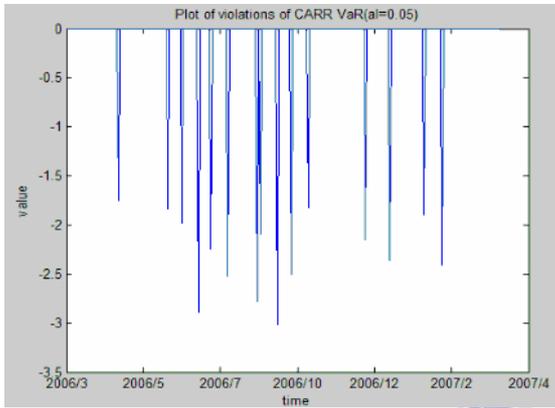
GARCH 模型穿透圖



EGARCH 模型穿透圖



GJR-GARCH 模型穿透圖



CARR 模型穿透圖

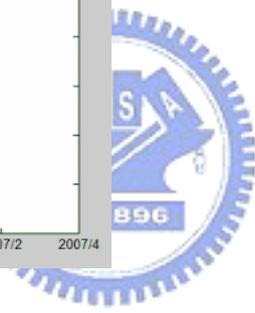
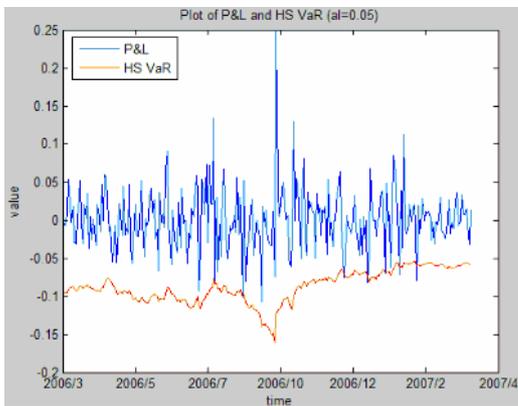
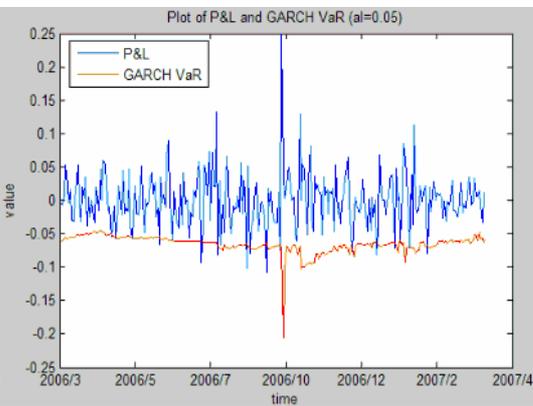


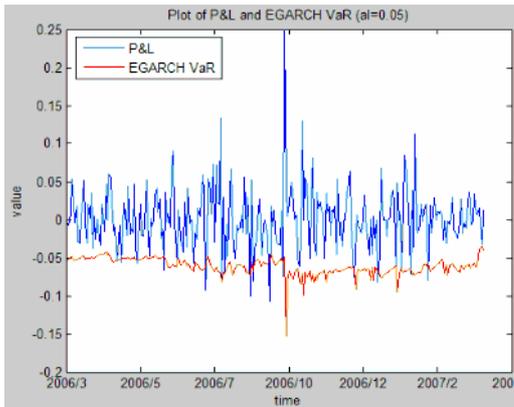
圖 5 $N=500$ ， $\alpha=0.05$ ，模型穿透圖



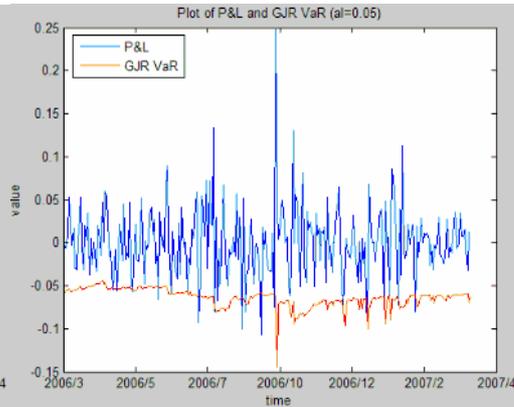
歷史模擬法 VaR



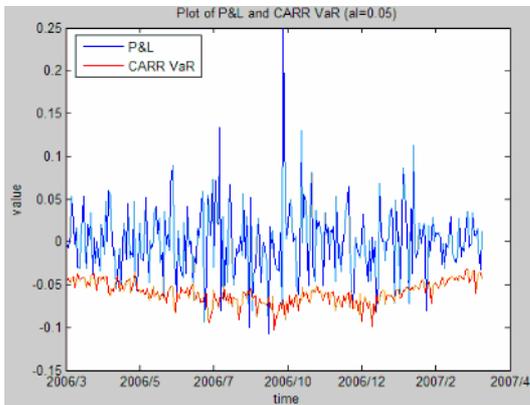
GARCH 模型 VaR



EGARCH 模型 VaR



GJR 模型 VaR



CARR 模型 VaR

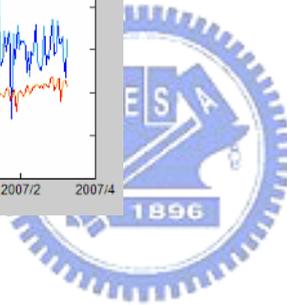
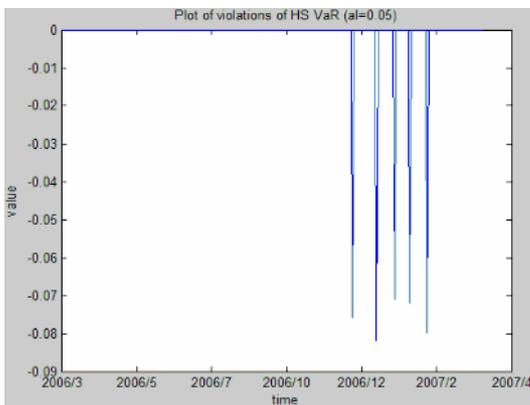
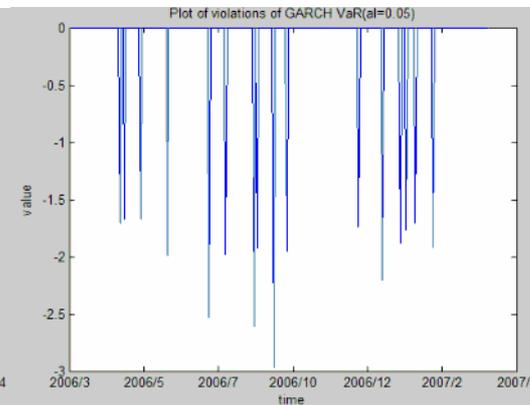


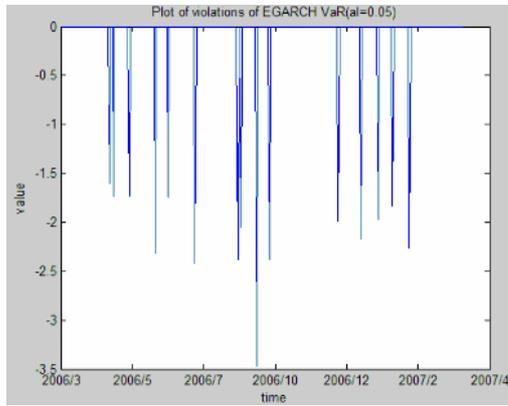
圖 6 $N=250$ ， $\alpha=0.05$ ，模型估計之 VaR



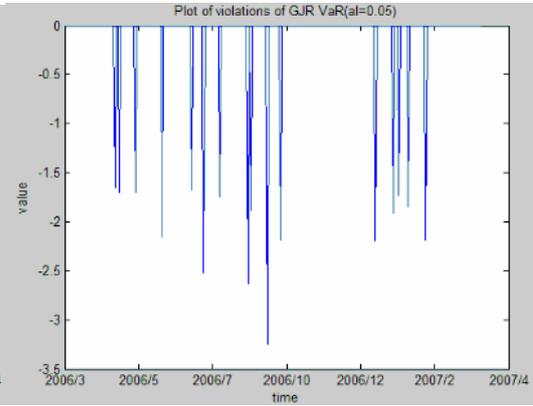
歷史模擬法穿透圖



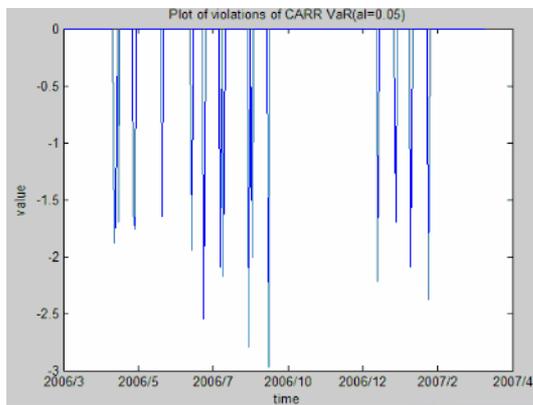
GARCH 模型穿透圖



EGARCH 模型穿透圖



GJR 模型穿透圖



CARR 模型穿透圖

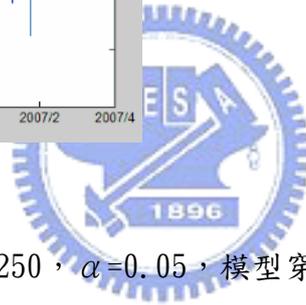


圖 7 $N=250$ ， $\alpha=0.05$ ，模型穿透圖

本研究同時試著將誤差項設定為 t 分配下，對模型參數進行估計並計算風險值，結果整理如下。

表 4 視窗樣本 $N=500$ ，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 282 天

模型	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.0744	8	0.0285	-0.0814	3.9252	0.4707*	4.3959*
GARCH	Normal	-0.0650	16	0.0567	-0.0745	0.2588*	1.9326*	2.1914*
	t	-0.0680	13	0.0460	-0.0781	0.0926*	1.2617*	1.3543*
EGARCH	Normal	-0.0628	15	0.0532	-0.0756	0.0593*	1.6926*	1.7519*
	t	-0.0673	11	0.0390	-0.0813	0.7736*	0.8962*	1.6698*
GJR	Normal	-0.0634	16	0.0567	-0.0745	0.2588*	1.9326*	2.1914*
	t	-0.0676	13	0.0460	-0.0781	0.0926*	1.2617*	1.3543*
CARR	Normal	-0.0571	15	0.0532	-0.0763	0.0593*	1.6926*	1.7519*
	t	-0.0590	15	0.0532	-0.0763	0.0593*	1.6926*	1.7519*

- 註 1. *表通過統計檢定
2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值
 3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數
 4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
 5. 穿透平均表實際報酬穿過 VaR 之平均值
 6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
 7. HS 為歷史模擬法

表 5 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 282 天

模型	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.0874	5	0.0177	-0.0762	8.0716	0.1819*	8.2535*
GARCH	Normal	-0.0655	16	0.0567	-0.0733	0.2588*	2.9663*	3.2251*
	t	-0.0672	12	0.0426	-0.0820	0.3460*	1.0706*	1.4166*
EGARCH	Normal	-0.0613	15	0.0532	-0.0753	0.0593*	1.6512*	1.7105*
	t	-0.0688	10	0.0355	-0.0757	1.3906*	0.7382*	2.1288*
GJR	Normal	-0.0639	16	0.0567	-0.0748	0.2588*	2.9663*	3.2251*
	t	-0.0680	10	0.0355	-0.0832	1.3906*	0.7382*	2.1288*
CARR	Normal	-0.0597	17	0.0603	-0.0695	0.5901*	0.8417*	1.4318*
	t	-0.0614	13	0.0461	-0.0735	0.0926*	1.2617*	1.3543*

- 註 1. *表通過統計檢定
2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值
 3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數
 4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
 5. 穿透平均表實際報酬穿過 VaR 之平均值
 6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
 7. HS 為歷史模擬法

表 4 為視窗樣本 N=500，顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，各模型所估計之風險值，歷史模擬法穿透次數上最偏離顯著水準，因此我們推測使用過多的樣本數可能使得資訊無法及時反應，在常態分配的假設下各模型皆通過 Christoffersen (1998) 概似比檢定，顯示出各模型所估計之風險值與實際報酬的穿透率滿足顯著水準的假設，且報酬的穿透次數為獨立的，進而計算 RMSE 值後，結果如表 8 所示，CARR

的 RMSE 值最小，代表其最為貼近實際報酬率。而我們同時考慮在 t 分配假設下風險值模型的表現，結果發現，由於 t 分配的厚尾特性，使得各模型之穿透率明顯下降，相較於常態分配時的假設，模型穿透率都比顯著水準還低，顯示出較為低估的風險值，且各模型間的 RMSE 值也較常態分配為高，表示其所估計的風險值較為偏離實際報酬率。在 $\alpha=0.01$ 時，歷史模擬法甚至沒有發生任何穿透次數，顯示出模型合適性相當差，而 CARR 模型在顯著水準低時發生過多的穿透次數導致其無法通過 LR 檢定，整體表現以 EGARCH 模型最好。若顯著水準越低，代表風險管理者的風險趨避程度越高，理論上所估計的風險值也會越小，其 RMSE 值也相對越大。表 5 為視窗樣本 $N=250$ 時，模型估計的結果，由表 4 與表 5 可發現，兩種不同視窗長度的估計結果除了歷史模擬法外，其他模型皆能順利通過 LR 統計檢定。表 6 和表 7 為顯著水準 $\alpha=0.01$ 下估計結果，歷史模擬法在沒有發生任何穿透事件，而 CARR 模型則發生過多的穿透使得未通過 LR 檢定，其他模型皆順利通過統計檢定。



表 6 視窗樣本 $N=500$ ，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 282 天

模型	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.1281	0	0	0	x	x	x
GARCH	Normal	-0.0924	4	0.0142	-0.0959	0.4414*	0.1155*	0.5569*
	t	-0.0959	3	0.0106	-0.1005	0.0113*	0.0648*	0.0761*
EGARCH	Normal	-0.0894	4	0.0142	-0.0959	0.4414*	0.1155*	0.5569*
	t	-0.0949	2	0.0071	-0.1004	0.2681*	0.0286*	0.2967*
GJR	Normal	-0.0900	4	0.0142	-0.0959	0.4414*	0.1155*	0.5856*
	t	-0.0952	3	0.0106	-0.1005	0.0113*	0.0648*	0.5569*
CARR	Normal	-0.0813	7	0.0248	-0.0832	4.4313	0.3577*	4.7890*
	t	-0.0831	7	0.0248	-0.0832	4.4313	0.3577*	4.7890*

註 1. *表通過統計檢定

2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值

3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數

4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
5. 穿透平均表實際報酬穿透 VaR 之平均值
6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
7. HS 為歷史模擬法

表 7 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 282 天

	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.1539	0	0	0	\bar{x}	\bar{x}	\bar{x}
GARCH	Normal	-0.0923	3	0.0106	-0.1005	0.0114*	0.0649*	0.0763*
	t	-0.0941	3	0.0106	-0.1005	0.0114*	0.0649*	0.0763*
EGARCH	Normal	-0.0862	3	0.0106	-0.1005	0.0114*	0.0649*	0.0763*
	t	-0.0964	1	0.0035	-0.1078	1.5784*	0.0041*	1.5825*
GJR	Normal	-0.0899	3	0.0106	-0.1005	0.0114*	0.0649*	0.0763*
	t	-0.0953	3	0.0106	-0.1005	0.0114*	0.0649*	0.0763*
CARR	Normal	-0.0842	4	0.0142	-0.0953	0.4415*	0.1155*	0.5570*
	t	-0.0858	4	0.0142	-0.0953	0.4415*	0.1155*	0.5570*

- 註 1. *表通過統計檢定
2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值
 3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數
 4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
 5. 穿透平均表實際報酬穿透 VaR 之平均值
 6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
 7. HS 為歷史模擬法

表 8 視窗樣本 N=500 之 RMSE 值

顯著水準 α	0.05		0.01	
	Normal	t	Normal	t
HS	0.0848	0.0848	0.1319	0.1319
GARCH	0.0787	0.0810	0.1040	0.1068
EGARCH	0.0761	0.0798	0.1002	0.1052
GJR-GARCH	0.0770	0.0807	0.1013	0.1063
CARR	0.0717	0.0732	0.0933	0.0950

註 HS 為歷史模擬法

表 9 視窗樣本 N=250 之 RMSE 值

顯著水準 α	0.05		0.01	
	Normal	t	Normal	t
HS	0.0979	0.0979	0.1649	0.1649
GARCH	0.0788	0.0795	0.1033	0.1038
EGARCH	0.0746	0.0807	0.0969	0.1059
GJR-GARCH	0.0768	0.0719	0.1001	0.1062
CARR	0.0690	0.0745	0.0904	0.0965

註 HS 為歷史模擬法

表 8 和表 9 為不同樣本下的 RMSE 值，比較兩種不同視窗長度下的 RMSE 值，我們發現在各種波動度模型中，小樣本時的 RMSE 值無論在何種分配的假設下，普遍比大樣本來的低，利用大樣本估計並沒有顯著的優勢，而 CARR 模型在兩種樣本估計下都有最小的 RMSE 值，若模型通過統計檢定且具有較小的 RMSE 值，則我們可以認定模型同時具有正確預測風險值和資金使用效率兩種優勢。

表 10 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.05$ ，共估計 532 天

模型	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.0680	27	0.0501	-0.0591	0.0079*	3.8615	3.8694*
GARCH	Normal	-0.0588	26	0.0489	-0.0715	0.0143*	0.3973*	0.4116*
	t	-0.0613	20	0.0376	-0.0780	1.8787*	0.0797*	1.9584*
EGARCH	Normal	-0.0560	23	0.0432	-0.0729	0.5364*	2.0834*	2.6198*
	t	-0.0684	17	0.0319	-0.0757	4.1595	1.1247*	5.2842*
GJR	Normal	-0.0574	28	0.0526	-0.0705	0.0763*	0.1883*	0.2646*
	t	-0.0612	19	0.0357	-0.0777	2.5278*	0.1429*	2.6707*
CARR	Normal	-0.0563	31	0.0583	-0.0695	0.7291*	0.4790*	1.2081*
	t	-0.0581	26	0.0488	-0.0735	0.0143*	0.0669*	0.0812*

註 1. *表通過統計檢定

2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值

3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數

4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
5. 穿透平均表實際報酬穿透 VaR 之平均值
6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
7. HS 為歷史模擬法

表 11 視窗樣本 N=250，顯著水準 $\alpha=0.01$ ，共估計 532 天

	分配	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS		-0.1214	6	0.0113	-0.0757	0.0869*	3.8257*	3.9126*
GARCH	Normal	-0.0833	6	0.0112	-0.0938	0.0843*	0.1371*	0.2214*
	t	-0.0861	6	0.0113	-0.0938	0.0843*	0.1371*	0.2214*
EGARCH	Normal	-0.0792	6	0.0112	-0.0938	0.0843*	0.1371*	0.2214*
	t	-0.0961	3	0.0056	-0.0899	1.2130*	0.0341*	1.2471*
GJR	Normal	-0.0812	6	0.0112	-0.0938	0.0843*	0.1371*	0.2214*
	t	-0.0859	6	0.0113	-0.0938	0.0843*	0.1371*	0.2214*
CARR	Normal	-0.0798	9	0.0169	-0.0886	2.1293*	0.3104*	2.4397*
	t	-0.0816	9	0.0169	-0.0916	2.1293*	0.3086*	2.4379*

註 1. *表通過統計檢定

2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值
3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數
4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
5. 穿透平均表實際報酬穿透 VaR 之平均值
6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
7. HS 為歷史模擬法

接著在 N=250 時，我們將估計天數拉長為 532 天，由表 10 可發現歷史模擬法的穿透率最為接近顯著水準值，當樣本數由 500 降為 250 使得歷史模擬法估計正確性提升，顯示出此模型可能較適用於樣本數資料量較少時的情況，而由於穿透有連續發生的情況，歷史模擬法無法通過 Christoffersen (1998)獨立性檢定，其他模型在常態分配假設下皆通過 LR 檢定，我們由表 12 比較各模型 RMSE 值後發現以 EGARCH 模型表現最好。

表 12 視窗樣本 N=250 之 RMSE 值

顯著水準 α	0.05		0.01	
	Normal	t	Normal	t
HS	0.0815	0.0815	0.1380	0.1380
GARCH	0.0711	0.0715	0.0936	0.0952
EGARCH	0.0682	0.0693	0.0892	0.0908
GJR-GARCH	0.0694	0.0719	0.0911	0.0960
CARR	0.0690	0.0701	0.0904	0.0919

註 HS 為歷史模擬法

在 2005 年美國天然氣價格由於颶風侵襲墨西哥灣地區影響，造成價格大幅上揚，我們嘗試利用風險值模型特別針對 2005 年 6 月到 2006 年 6 月共一年期間進行風險值估計。看看這價格變化劇烈的期間，風險值模型是否仍能具有良好的表現。結果如表 13 所示：



表 13 N=250 樣本期間 2005/6 ~ 2006/6

模型	平均 VaR	穿透數	穿透率	穿透平均	LRuc	LRind	LRcc
HS	-0.0600	21	0.07447	-0.0553	3.8623	4.1681	8.0304
GARCH	-0.0554	12	0.0425	-0.0661	0.3460*	2.8333*	3.1793*
EGARCH	-0.0536	11	0.0390	-0.0687	0.7736*	0.8962*	1.6698*
GJR	-0.0539	14	0.0496	-0.0662	0.3325*	1.8790*	2.2115*
CARR	-0.0540	15	0.0532	-0.0601	0.3218*	2.0561*	2.3779*

註 1.*表通過統計檢定

2. 平均 VaR 表模型估計 VaR 之平均值
3. 穿透數表實際報酬穿過 VaR 次數
4. 穿透率為穿透數除以估計樣本數
5. 穿透平均表實際報酬穿過 VaR 之平均值
6. LRuc 表(21)式，LRind 表(22)式，LRcc 表(23)式
7. HS 為歷史模擬法

第五章 結論

許多實證研究發現，很多金融性資產的時間序列資料都具有厚尾和波動群聚的現象，本研究以 NYMEX 的天然氣價格為標的，針對能源性金融資產作研究，發現到其具有條件變異數不齊一之現象，而在風險值的估計上若能正確衡量資產報酬分配型態和各時點的波動性，將能更有效估計風險值。

在資產報酬分配上，我們嘗試比較常態分配和 t 分配兩種不同型態，除了歷史模擬法外，其他模型皆能有效估計風險值並通過 Christoffersen (1998) 的統計檢定，而常態分配的假設使得各模型比 t 分配有更低的 RMSE 值，若站在銀行角度觀點能有更好的資金運用效率。

在不同的窗口長度上，歷史模擬法有著顯著差異，大樣本估計時，歷史模擬法相較於其他模型表現最差，穿透率也明顯偏離顯著水準，但在小樣本時，歷史模擬法的穿透率甚至最為接近顯著水準，顯示大樣本下資訊未能及時反應，其他模型上在小樣本估計時依然有不錯的表現，RMSE 值在小樣本時也比大樣本低，且模型皆能通過 Christoffersen (1998) 統計檢定，顯示窗口長度的大小在波動度模型上沒有太大的差異。

而相較於 GARCH 模型採用每日收盤價資訊，CARR 選擇利用當天的高低價差來對波動性做預測，在波動度行為上，CARR 可能會有較好的表現，經過本文研究發現，無論在大樣本和小樣本下的風險值衡量也確實比 GARCH 模型為佳。

參考文獻

- Alexander, C.O. and C.T. Leigh (1997). "On the Covariance Matrices Used in Value-at-Risk Models," *Journal of Derivatives*, 4, pp.50-62.
- Berkowitz, J. and J. O'Brien (2002). "How Accurate Are Value-at-Risk Models at Commercial Banks?" *Journal of Finance*, Vol.57, No.3. pp.1093-1111.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp.34-105.
- Chou, R. (2002), "Forecasting financial volatilities with extreme values: the Conditional AutoRegressive Range(CARR) Model," Working paper, The institute of Economics Academia Sinica, Taiwan.
- Christoffersen, P. (1998), "Evaluating interval forecasts," *International Economic Review*, 39, pp.841-862.
- Christoffersen, P., J. Hahn, and A. Ionue (2001), "Testing and comparing Value-at-Risk measures," *Journal of Empirical Finance*, 8, pp.325-342.
- Duffie, D., and Pan, J. (1997), "An overview of Value-at-Risk," *Journal of Derivatives*, 4:3, pp.7-49.
- Engle, R.F. (1982), "Autoregressive conditional heteroscedicity with estimates of the variance of U.K.inflation," *Econometrica*, 50, pp.987-1008.
- Glosten, L., Jagannathan, R., & Runkle, D. (1993). "On the relation between the expected value and the volatility on the nominal excess returns on stocks, "

Journal of Finance, 19, pp.3-29.

Goorbergh, R.V.D., and Vlaar, P. (1999), "Value-at-Risk analysis of stock returns historical simulation, variance techniques or tail index estimation?" Working paper.

Hendricks, Darryll (1996), "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data, " Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review, 2(1), pp36-69.

Hull, J. (2002), Fundamentals of futures and options markets, Pearson Education, N.J.

Hull, J. and White, A. (1998), "Value-at-Risk when daily changes in market variables are not normal distributed," Journal of Derivatives, 5, pp.9-19.

Jorion, P. (2000), Value-at-Risk: The Benchmark for Controlling Market, 2nd edition, McGraw-Hill, N.Y.

Kupiec, P.H. (1995), "Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models," Journal of Derivatives,2, pp.73-84.

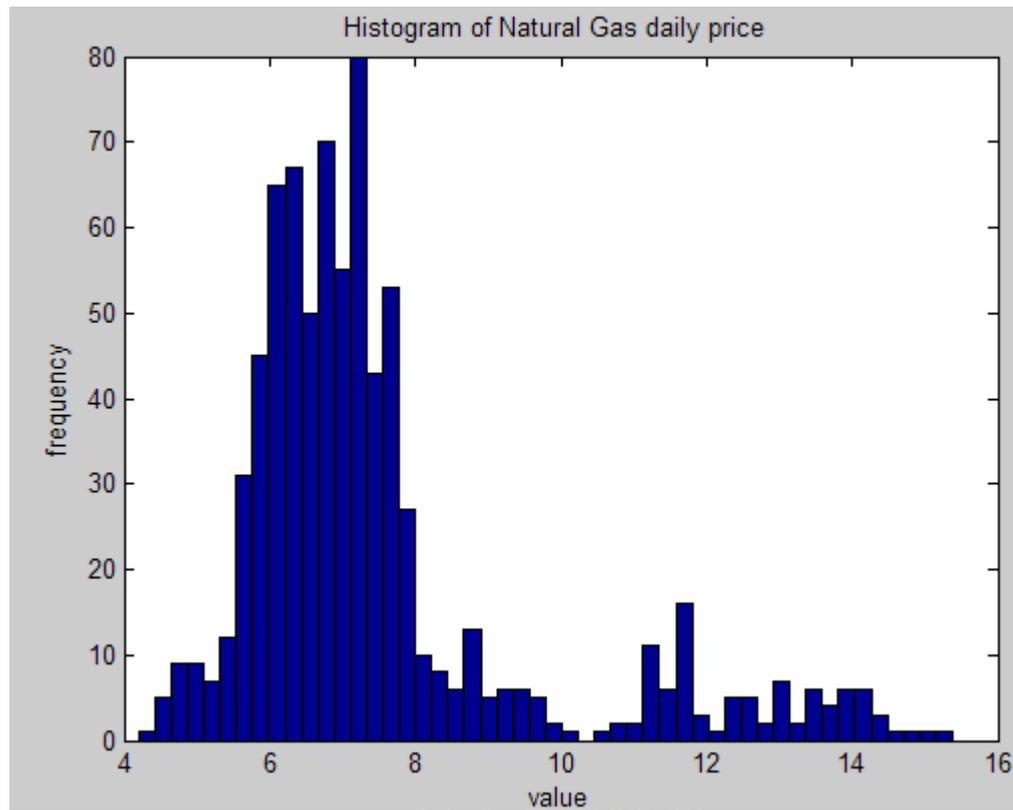
Meese,R.A. (1986)," Testing for bubbles in exchange markets: a case of sparking rates?" Journal of Political Economy,94, pp.345-373.

Nelson, D. (1991). " Conditional heteroskedasticity in asset returns. " a new approach, Econometrica, 59, pp.347-370.

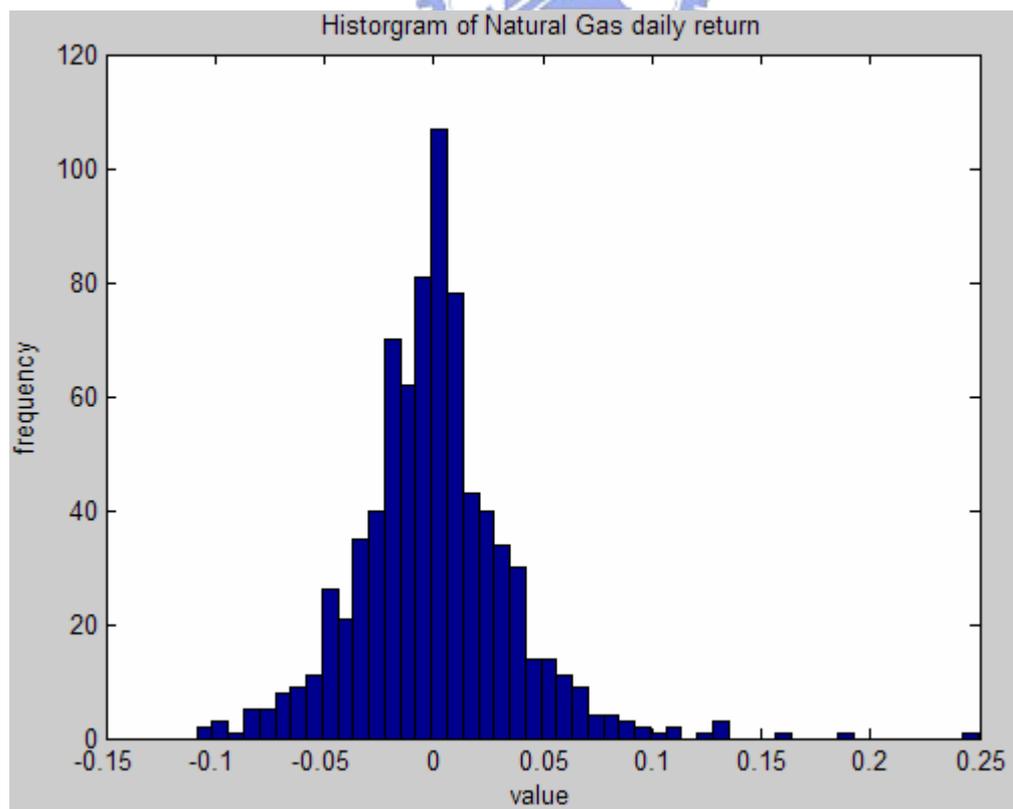
Parkinson, M.(1980), "The extreme value for estimating the variance of the rate of return, " Journal of Business,53, pp.61-65.



附錄一 天然氣價格直方圖

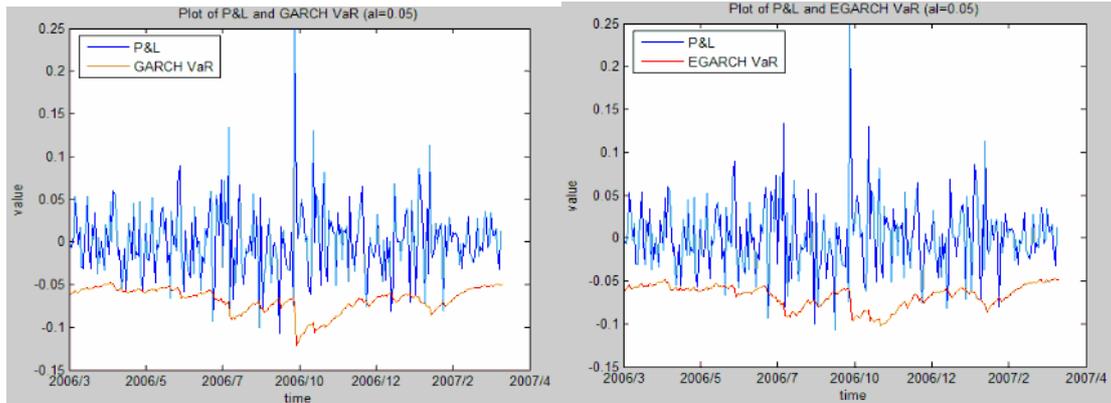


天然氣日價格直方圖



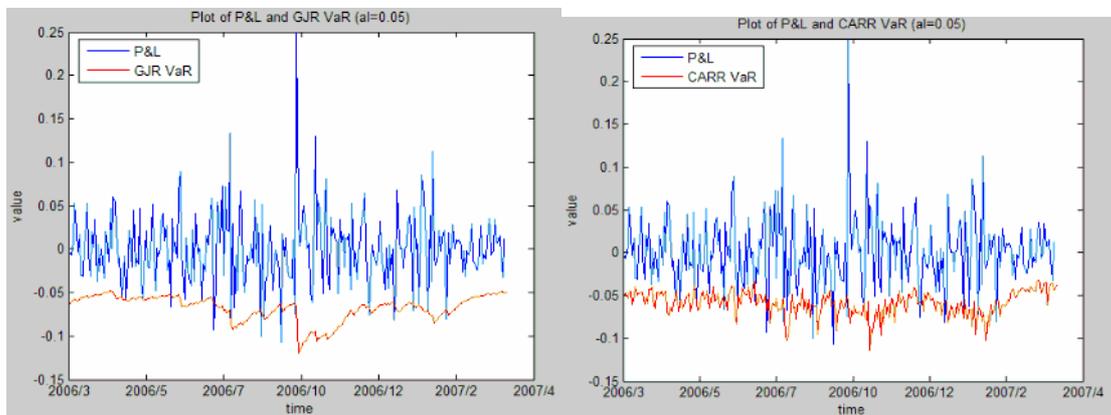
天然氣日報酬率

附錄二 P&L 和風險值走勢圖(t distribution) (N=500)



GARCH 模型

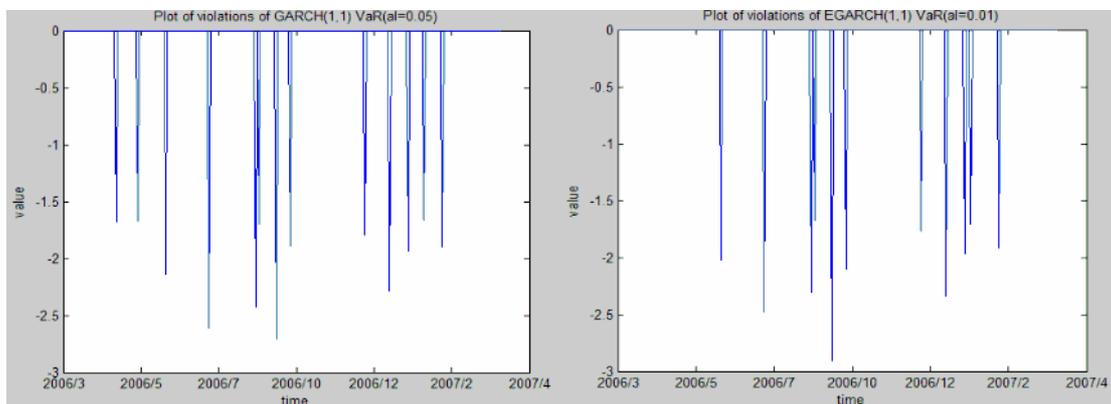
EGARCH 模型



GJR-GARCH 模型

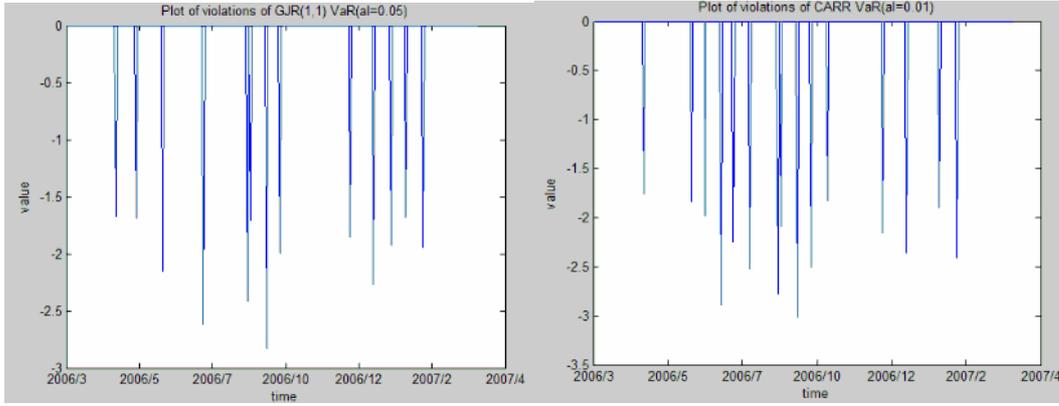
CARR 模型

風險值穿透圖 (t distribution) (N=500)



GARCH 模型

EGARCH 模型

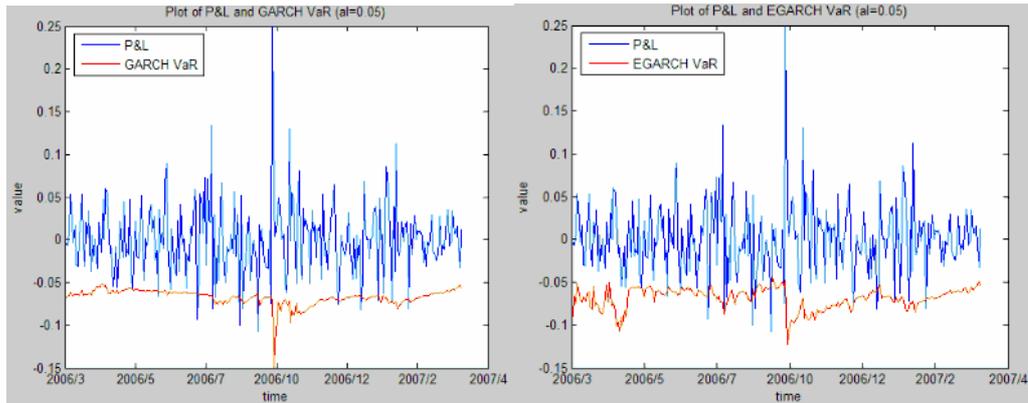


GJR-GARCH 模型

CARR 模型

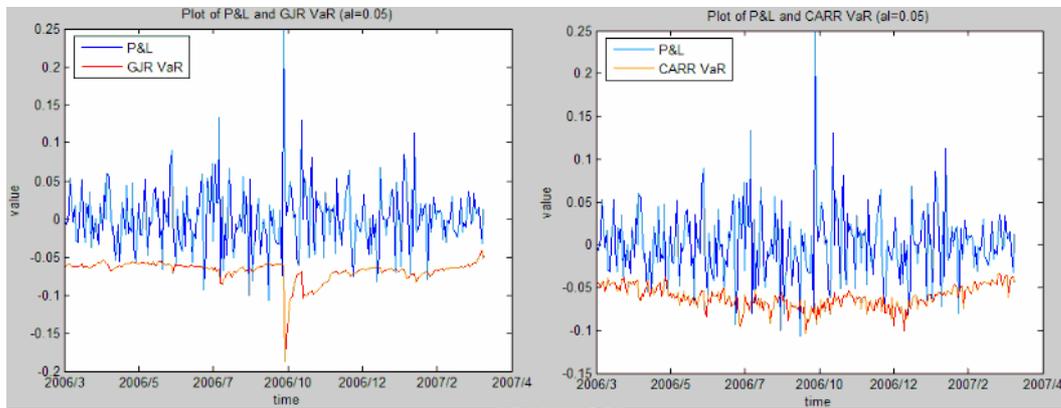


附錄三 P&L 和風險值走勢圖(t distribution) (N=250)



GARCH 模型 VaR

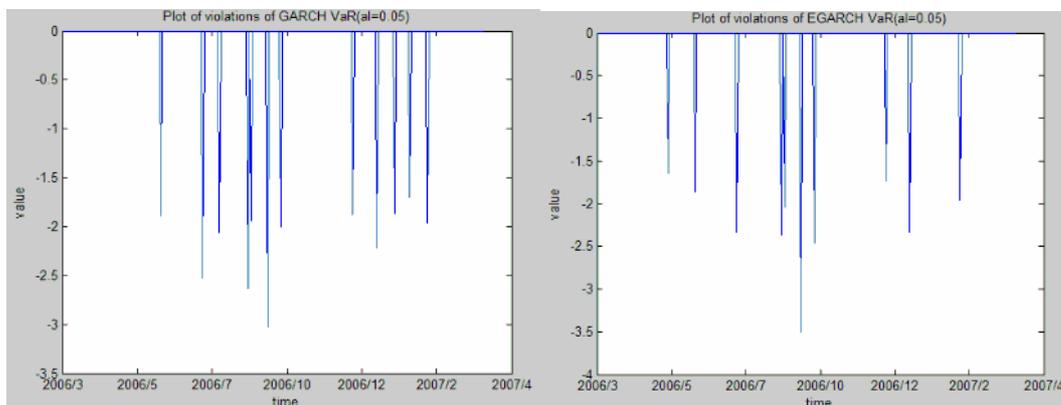
EGARCH 模型 VaR



GJR 模型 VaR

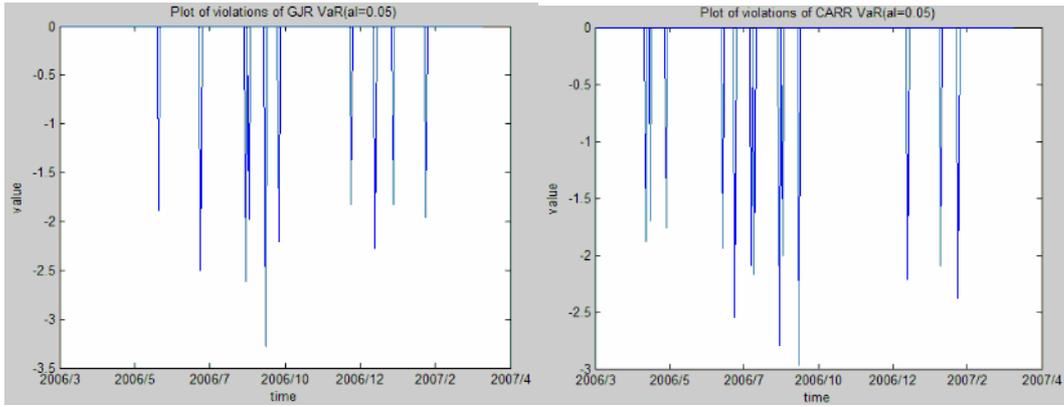
CARR 模型 VaR

風險值穿透圖如下表示：



GARCH 模型穿透圖

EGARCH 模型穿透圖

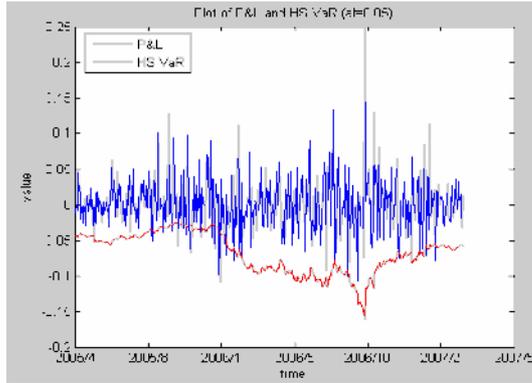


GJR 模型穿透圖

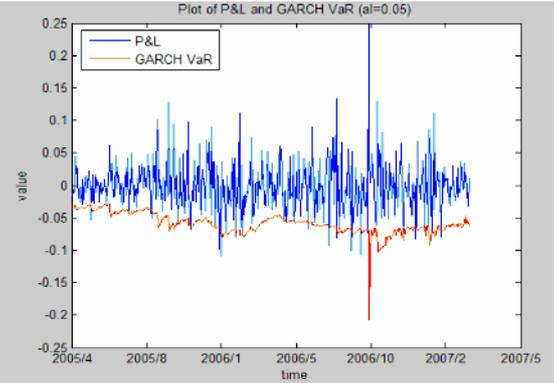
CARR 模型穿透圖



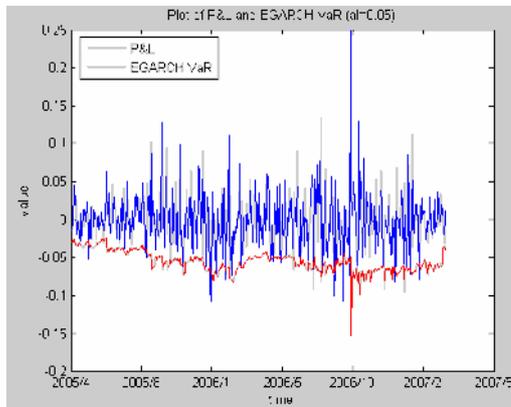
附錄四 P&L 和風險值走勢圖(Normal distribution) (N=250)



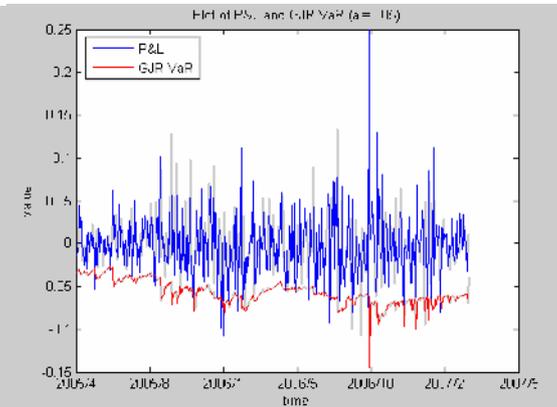
歷史模擬法



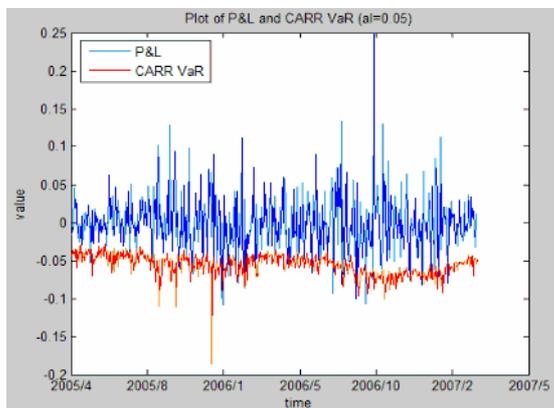
GARCH 模型



EGARCH 模型

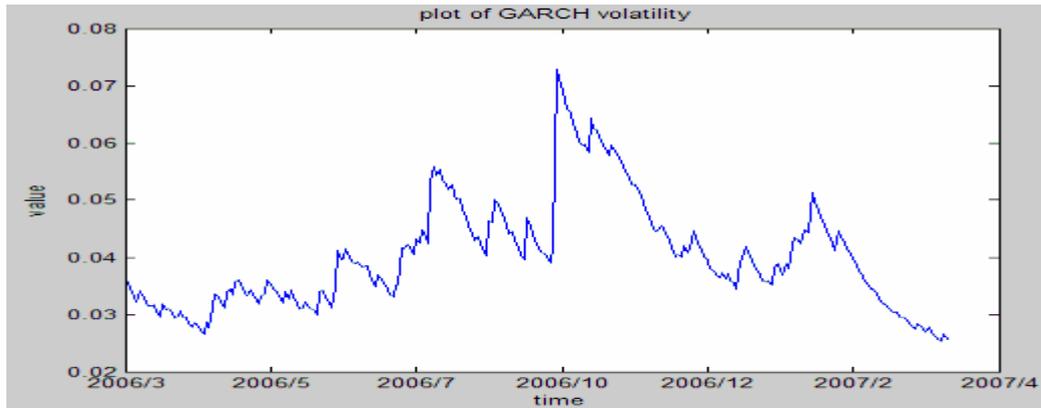


GJR-GARCH 模型

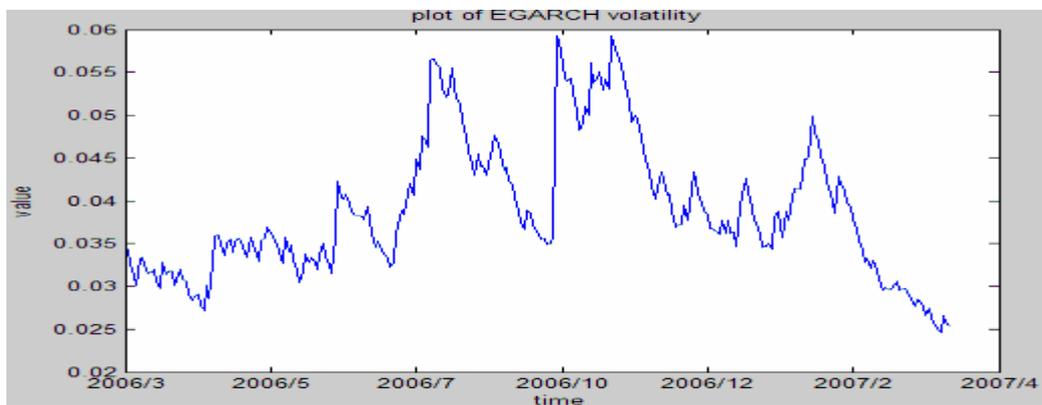


CARR 模型

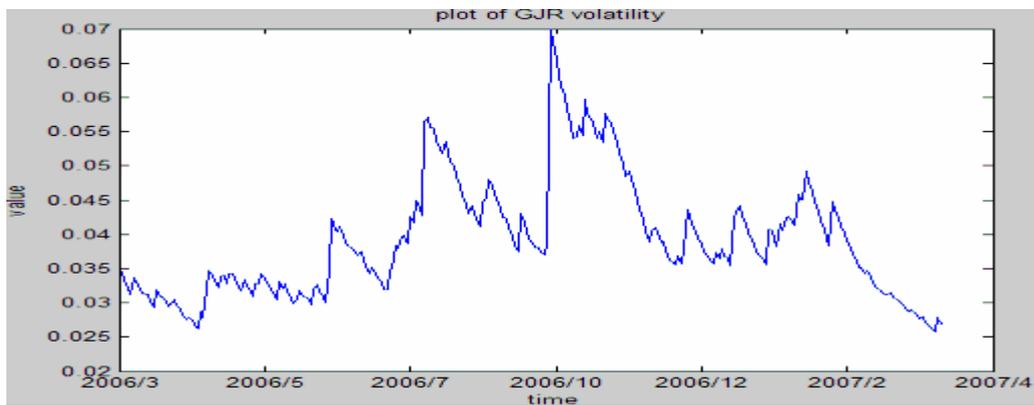
附錄五 波動度模型預測圖 (N=500)



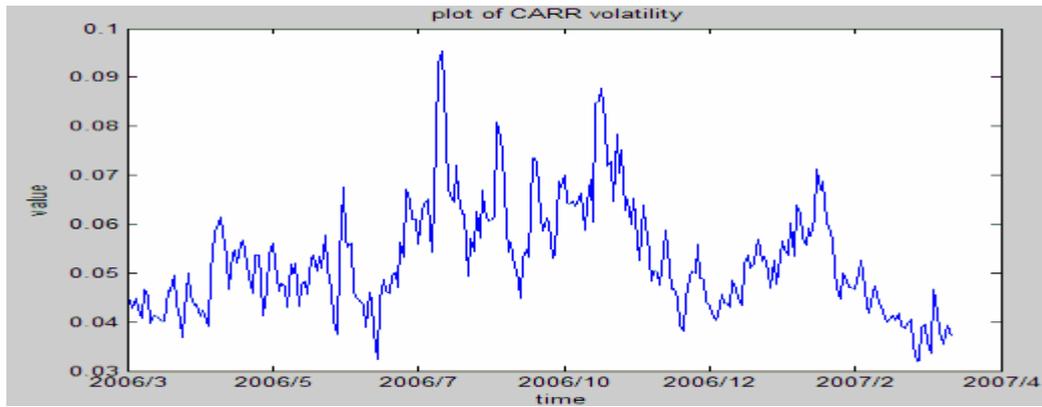
GARCH 模型波動度



EGARCH 模型波動度



GJR-GARCH 模型波動度



CARR 波動度



附錄六 N=500 ， t 分配參數估計

	GARCH	EGARCH	GJR-GARCH
C	-0.0008249 (0.00125)	-0.0008114 (0.00153)	-0.0008304 (0.00119)
K	1.8511e-005* (1.4557e-005)	-0.083812 (0.08103)	1.8558e-005* (1.5104e-005)
G_1	0.93615*** (0.02782)	0.98738*** (0.01192)	0.93581*** (0.02989)
A_1	0.055969*** (0.023708)	0.12198*** (0.045691)	0.0546*** (0.024243)
L_1		0.12154 (0.02882)	0.004486 (0.040263)
DoF	3.9418*** (0.9203)	4.1128*** (1.0142)	3.9374*** (0.9206)

***表顯著拒絕水準達 1% **表顯著拒絕水準達 5% *表顯著拒絕水準達 10%

