

# 國立交通大學

資訊科學與工程研究所

## 碩士論文

以 Cross-Ratio 為基礎之自動車夜間視覺定位與  
誤差分析

Nighttime Visual Localization and Error Analysis for Indoor  
Mobile Robot based on Cross-Ratio

研究生：邱郁婷

指導教授：莊仁輝 教授

中華民國九十六年六月

以 Cross-Ratio 為基礎之自動車夜間視覺定位與誤差分析  
Nighttime Visual Localization and Error Analysis for Indoor Mobile  
Robot based on Cross-Ratio

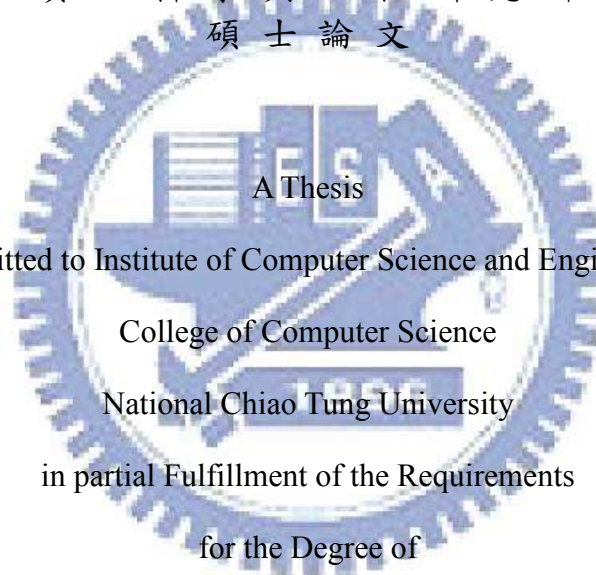
研究生：邱郁婷

Student：Yu-Ting Chiu

指導教授：莊仁輝

Advisor：Jen-Hui Chuang

國立交通大學  
資訊科學與工程研究所  
碩士論文



Submitted to Institute of Computer Science and Engineering

College of Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Computer Science

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

# 以 Cross-Ratio 為基礎之自動車夜間視覺 定位與誤差分析

學生：邱郁婷

指導教授：莊仁輝 博士

國立交通大學

資訊科學與工程研究所

## 摘要

本篇論文當中，我們介紹了以 Cross-Ratio 為基礎的自動車定位方法。並且提出一個有效率的方式，來估測 Cross-Ratio 定位方法所造成定位誤差的分析。我們推導了在合理的誤差範圍內，空間定位誤差與一維影像誤差間的線性關係。由於此一性質，我們將其推廣到二維影像誤差，並找出影像參考點之誤差與空間定位誤差的線性轉換關係。此一誤差分析方法可讓使用者容易地選擇影像參考點，以期得到機率上最正確且可信賴的定位結果。除此之外，我們亦提出了在多個影像參考點（兩點以上）有誤差的情況下，一個有效率的空間定位誤差分析方法。這些誤差分析方法能提供量化指標，可協助我們在多個參考點及 Cross-Ratio 計算的原點中，針對各種選擇去預估及描述可能的誤差分佈狀況。因此本論文所提出之誤差分析方法，將有助於發展穩定且實用的以 Cross-Ratio 為基礎的定位系統。

# Nighttime Visual Localization and Error Analysis for Indoor Mobile Robot based on Cross-Ratio

Student : Yu-Ting Chiu

Advisor : Dr. Jen-Hui Chuang

Institute of Computer Science and Engineering

National Chiao Tung University

The logo of National Chiao Tung University is a circular emblem. It features a central shield with a book and a graduation cap, surrounded by a gear-like border. The text 'NATIONAL CHIAO TUNG UNIVERSITY' is written around the perimeter of the circle.

## ABSTRACT

In this thesis, we propose an efficient way of analyzing localization error for systems which use cross-ratio for mobile robot localization. We first inspect the linear nature of localization error due to small 1D inaccuracy in image feature measurements. Properties of the localization error due to two dimensional errors of reference image points are then investigated. Such an analysis will be useful for one to choose point features in stereo images to establish the probabilistically most accurate localization system based on cross-ratio. Moreover, we also proposed an efficient way to analyze localization errors considering multiple noisy image points. Such an approach will be very helpful in practice for the development of a reliable localization system.

# 誌謝

本論文得以完成，首先必須感謝我的指導教授莊仁輝老師的耐心教導，老師熱心的指導讓我在研究方面事半功倍；而老師嚴謹的研究態度，更讓我在研究跟生活上的態度上皆有所啟發。此外，更要感謝三位口試委員，楊谷洋教授、雷欽隆教授以及賴飛熊教授的意見及指教，讓本篇論文的內容得以更加充實且完善，在此衷心感謝他們。

我還要感謝智慧型系統實驗室的學長、同學、學弟妹們，感謝泓宏學長跟高肇宏學長在課業及研究上的指導；感謝蝦姊、怡伶、光哥、Beclc、Acer 和 nail 跟其他碩二的同學們，以及小白、阿北、寧玄、阿中、忠衛、小胖和所有學弟妹們，在報告以及課業壓力都很沈重的時候，或在那段努力寫論文、拼畢業的日子裡，有著你們的陪伴與扶持我才能走過來；實驗室的活動不論是七月的台中之旅或是一起打球、烤肉、唱歌以及其他活動，都讓我留下很美好的回憶。兩年的碩士生活裡，因為有你們的陪伴，讓我過得很充實也很愉快，真的非常謝謝你們。

最後，感謝一直以來支持我、為我操心的家人，以及所有幫助過我的朋友們，僅以此篇表達我誠摯的謝意。

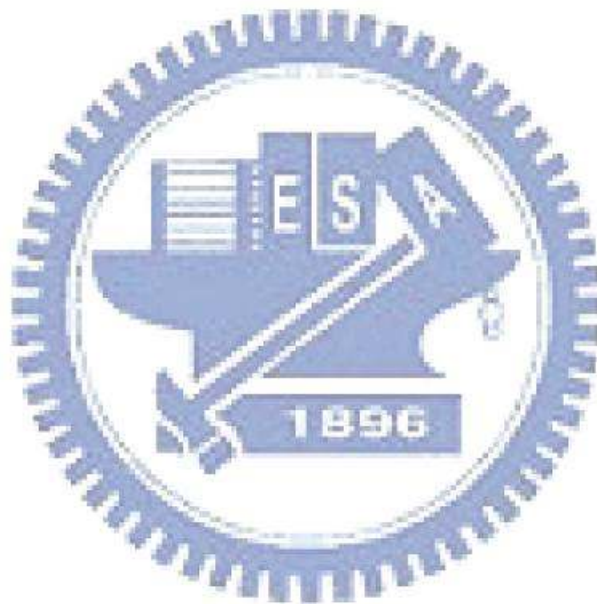
# 目錄

第一章 簡介.....	1
1.1 研究背景與簡介.....	1
1.2 相關研究.....	2
1.3 系統簡介.....	4
1.3.1 硬體環境.....	4
1.3.2 自動車定位介紹.....	5
1.4 各章介紹.....	6
第二章 自動車視覺定位.....	7
2.1 投影不變量 (Projective Invariance) .....	7
2.1.1 Cross-Ratio 的定義.....	7
2.1.2 投影不變量 — Cross-Ratio.....	9
2.2 自動車定位方法.....	10
2.2.1 設定影像上之自動車定位點.....	10
2.2.2 Cross-Ratio 定位方法.....	11
第三章 定位實驗與誤差討論.....	18
3.1 誤差來源.....	18
3.1.1 特徵點擷取誤差.....	18
3.1.2 計算誤差.....	20
3.2 地面格點定位實驗.....	21
3.3 自動車即時定位實驗.....	24
3.4 討論.....	25
第四章 定位誤差之估測與模擬.....	30
4.1 一維線性定位誤差式之推導.....	30
4.2 模擬水平方向影像誤差所造成的空間定位誤差.....	35
4.3 推廣到二維影像誤差.....	37
4.4 影像誤差與空間誤差的線性轉換.....	39
4.5 誤差橢圓的參數估計.....	40
第五章 誤差估測於定位之應用.....	43
5.1 定位標記物選點之探討.....	43
5.2 多重影像參考點之誤差探討.....	46
5.3 定位誤差分佈的線性組合.....	48
第六章 結論與未來展望.....	52
參考文獻.....	53

# 圖表目錄

圖 1-1	實驗環境與硬體架設.....	5
圖 1-2	自動車定位路線.....	6
圖 1-3	近紅外線影像.....	6
圖 2-1	平面上五點計算二維 Cross-Ratio .....	8
圖 2-2	透視投影模型.....	9
圖 2-3	自動車與標記物拍攝示意圖.....	11
圖 2-4	自動車於室內環境拍攝之示意圖.....	12
圖 2-5	用以定位之標記物示意圖.....	13
圖 2-6	用以定位之標記物示意圖.....	15
圖 2-7	定位自動車.....	16
圖 3-1	標記物拍攝影像.....	19
圖 3-2	平面上五點對於 Cross-Ratio 值的選擇 .....	21
圖 3-3	在地面格點上以 Cross-Ratio 方法定位的實驗結果 .....	22
圖 3-4	在 $A(0, 4)$ 位置拍攝的影像 .....	24
圖 3-5	自動車即時定位結果.....	25
圖 3-6	選用不同參考點的定位結果比較.....	27
圖 4-1	一維誤差於參考點 $p_4$ 的影像示意圖.....	31
圖 4-2	單一影像點水平誤差 ( $\pm 2$ pixel ) 與空間定位誤差.....	36
圖 4-3	單一影像點水平誤差 ( $\pm 50$ pixel ) 與空間定位誤差.....	36
圖 4-4	二維影像誤差 (左) 與其所造成之空間定位誤差 (右) .....	37
圖 4-5	以 $p_4$ 為圓心的影像誤差同心圓 (左) 與空間定位誤差軌跡 (右) .....	38
圖 4-6	以 $p_4$ 為圓心、半徑為 2-pixel 的影像誤差圓 (左) 與空間定位橢圓 軌跡 (右) .....	39
圖 4-7	影像誤差於空間定位誤差的線性轉換結果.....	40
圖 4-8	空間誤差橢圓之長短軸與旋轉角度.....	42
圖 5-1	挑選不同標記物的定位誤差橢圓.....	44
圖 5-2	不同標記物選擇於不同影像定位點所造成之定位誤差範圍.....	45
圖 5-3	多重參考點影像誤差 (左) 與空間定位誤差之分布 (右) .....	46
圖 5-4	多重參考點影像誤差 ( $p_3$ 誤差點—16 個; $p_4$ 誤差點—64 個) 與空間 定位誤差之分布 .....	47

圖 5-5	多重參考點影像誤差 ( $p_3$ 誤差點—64 個; $p_4$ 誤差點—16 個) 與空間 定位誤差之分布 .....	47
圖 5-6	兩影像參考點誤差於空間定位誤差之線性組合 .....	49
圖 5-7	兩點影像誤差(a)所造成之定位誤差(b) .....	50
圖 5-8	兩點影像誤差(a)所造成之定位誤差(b) .....	51
圖 5-9	兩點影像誤差(a)所造成的空間定位誤差範圍(b) .....	51
表 3-1	自動車地面格點定位的實驗數據與誤差 .....	23
表 3-2	選用不同參考點的定位結果 .....	29





# 第一章 簡介

## 1.1 研究背景與簡介

隨著資訊科技的日新月異，推陳出新的科技產品便利豐富人類的生活，而以電腦代替人力的智慧型自走車與機器人的發展也愈來愈受到關注。已經有許多研究者投入於發展可應用於不同環境與目的之自動車功能，例如導航、安全巡邏、保全物品偵測、居家看護與家用機器人等等。

尤其是在保全監控方面的應用，用智慧型自走車替代保全警衛，不僅節省人力也降低成本。透過主控電腦的控制，自動車可一直重複同樣的工作，降低因人員疲累所造成的人為疏失。而且在自動車上架設靜態攝影機，能提供更機動且無死角的監控範圍，可以解決固定式監控攝影機的視覺死角的問題。另一個自動車在監控上的優點，就是可以透過特定事件之監控而發出警報，例如貴重物品失竊、人員入侵、火災等，自動車可即時回報或發出緊急警報。

智慧型自走車之應用，必須基於自動車能在工作環境中安全且穩定地行走，自動車須定位出自己在工作環境中的位置，因此發展準確且可靠的定位系統自動車研究領域中一個重要的課題。一般而言，自動車本身有里程計可以記錄自動車行走的距離，然而里程計的資訊常有偏差且會累積誤差，對於室內監控的應用上將不足以準確地定位。為了修正此一問題，近十年來，自動車的定位研究不斷地推陳出新，許多研究者皆關注於研究以視覺為基礎的定位方法。因為以視覺為基礎的定位方法成本較低，只需在自走車上架設靜態攝影機，在進行定位的同時也可完成監控之功能。本篇論文的方法便是以視覺為基礎來進行自動車的定位，且我們的方法也不需要做攝影機的校正。

大多數所提出定位方法之研究環境，都是在白天且明亮之室內環境進行定位，較少著重於討論夜間視覺定位或夜間導航的研究，因為夜間的光線不足，一般可見光攝影機拍攝得到的影像畫面資訊較為不足，難以進行監控。然而，夜間的犯罪率較日間犯罪率為高，因此夜間的安全監控是相當重要的。本篇論文的定位方法與誤差分析方法即是在夜間無照明的室內環境下所發展的，在監控環境佈設會發出近紅外線光源的發光二極體當做標記物，從影像畫面擷取特徵點後便可

以進行 Cross-Ratio 定位（定位方法將於第二章做介紹）。其定位結果可應用在室內環境下進行安全巡邏，或是保全物品偵測。

在本論文的方法裡，我們是事先建立室內環境之資訊，而且也知道標記物佈設的位置，自動車是在已知的環境下進行監控。然而由於影像解析度的關係，各特徵點會有影像誤差，因此造成定位的誤差。而在複雜的環境中，有準確的定位資訊，自動車才能地進行避碰偵測或是路徑規劃等功能。因此我們對於定位結果做了一系列的誤差分析之探討。我們提出一個有效率地分析定位誤差的方法，讓使用者可以很容易地根據環境需求或定位應用之目的，即時選擇一組理想的參考點來進行定位。此定位誤差的分析可以幫助我們發展可靠且穩定的自動車視覺定位系統。

比較日間定位與夜間定位的差別。白天拍攝的影像背景較複雜，難以選擇好的特徵點進行定位，而夜間定位時，近紅外線影像的背景單純，易於做特徵點的擷取，缺點是標記物本身為光源，會在地板及牆壁上產生反光的現象。而使用近紅外線進行夜間定位的最大好處則是由於人眼看不見近紅外線光，不用開燈即可隱秘地進行室內監控，可降低對居家環境的干擾，且能保有隱私。

雖然本篇論文主要在探討夜間環境下的定位與誤差分析，但由於我們使用的 PTZ 攝影機同時具有一般可見光攝影與近紅外線攝影功能，其實在白天或夜晚都可進行監控。並且只要在影像畫面上能擷取到四個以上的地面特徵點，不論白天或是黑夜都可以使用 Cross-Ratio 定位方法進行自動車定位，也同樣可以利用我們發展的誤差分析方法，來增進定位之準確性與穩定性。因此本論文所提出的系統未來將可以開發成全天候的室內監控系統。

## 1.2 相關研究

以視覺為基礎之自動車定位與導航技術的應用相當地廣泛，而導航的技術需仰賴準確的定位資訊。視覺定位與導航常利用標記物偵測（Landmark Detection）之技術，分析室內場景以辨識地板、牆壁、門、窗...等特徵明顯且具有規則之形狀的標記物來協助導航[1][2]。有別於日間導航，夜間導航因為亮度不足，使用可見光攝影機將無法得到足夠的資訊，因此常利用近紅外線夜視攝影機。近紅外線影像是灰階影像，所得資訊不如可見光影像豐富，且對光線明暗變化

(Illuminance Change) 敏感。文獻[3]提出在夜間公路上的導航研究，他們使用近紅外線攝影機擷取車道影像，並過濾對向來車的強光照射 (Glare Filtering) 的影響，在光線不足的夜間公路，改善車道擷取的結果，提供使用者做輔助駕駛之應用。

另外，在導航的技術上，文獻[4]與[5]中，E. Rivlin 等人提出了在透視模型下，根據目前影像與目標影像上對應的特徵點，利用極線幾何 (Epipolar Geometry) 推出自動車目前位置與目標位置的朝向和距離 (Motion Parameters)。在他們提出的導航系統中，自動車的起始點可以是場景中的任意位置，並且可以完成多重目標點之導航任務 (Multi-target Task)。由於一次只需擷取一張影像與目標影像，而且不用擷取 3-D 的資訊就能完成導航，因此他們的方法是相當有效率的。然而，對於兩張影像間的特徵點比對 (Feature Point Matching)，需要有一個穩定且良好的演算法來辨識或追蹤特徵點，這需要額外的計算負擔，並且他們亦忽略了巡行路徑上之障礙物的問題。

視覺資訊與里程計資訊 (Odometry Information) 的結合也常被用來作室內導航與自動車位置估計的方法。這一類方法是假設在很短時間內的里程計資訊是可信賴的。F. Chenavier 等人提出了一個使用影像資訊與里程計資訊去推估自動車的位置的方法[6]。影像標記物的偵測誤差會造成視覺定位的誤差，因此他們結合自動車里程計的位移資訊，並使用 Extended Kalman Filter 來校正自動車的朝向與距離。N. X. Dao 等人則是利用里程計短時間內之位移量，並透過透視投影轉換，篩選出場景空間中位於地板上的特徵點，並利用這些特徵點資訊估計出自動車與標記物之相對誤差[7]。

近年來，亦有許多學者投入 SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) 的研究。SLAM 的問題主要是在研究自動車是否能在未知環境裡同時進行場景重建與定位自動車的工作。D. C. Herath 等人提出以 Stereo Vision 為基礎，且在特徵點稀少的環境裡，來解決 SLAM 問題的方法[8]。

另外，定位及導航領域的研究常利用基本投影幾何的性質，由於投影不變量能幫助我們了解未知場景結構的幾何分布，因此常被用做場景重建或標記物辨識的依據，而 Cross-Ratio 則是透視投影下唯一的投影不變量。Cross-Ratio 在定位導航上的應用多被用於當做標記物辨識之依據[9]。K. S. Roh 等人於 1997 年提出了使用投影不變量於自動車定位與障礙物偵測於室內簡單環境下之導航系統

[10]。藉由透視投影之幾何關係，事先找出自動車於影像上之虛擬位置，再利用 Cross-Ratio 投影不變量之性質計算出自動車的空間位置。然而他們的定位誤差有 20 公分之多，這對於狹窄或複雜環境下的導航應用是相當不適用的，因為過大的誤差將使自動車碰撞到障礙物而不自知。

N. Georis 等人[11]和 J.-S Liu 等人[12]提出關於 Cross-Ratio 在影像投影幾何的計算誤差分析的文獻。他們指出影像的品質將相當程度地影響三維重建及物體辨識的效果，由於影像資訊的有限解析度所產生的量化誤差（Quantization Error），不可避免地會造成場景重建的誤差。另外，選擇不同的標記物做 Cross-Ratio 定位，也會使得誤差的範圍及分佈有所改變。他們建議選擇使用讓  $|\theta - 90^\circ|$  為最小的 Cross-Ratio（將在第三章做細節說明），如此可以避免花費龐大的計算量估計全部 24 個 Cross-Ratio 值及其變異量。

本篇論文的 Cross-Ratio 定位方法與文獻[10]所提出的是一致的。文獻[10]裡是用在日間定位，我們則將之應用在夜間無照明環境下的定位，並進一步針對因影像參考點誤差所造成之空間定位誤差提出一高效率的分析方法。由於影像的有限解析度造成參考點有量化誤差，並且參考點的選擇也會影響 Cross-Ratio 的計算正確性。根據這些資訊，我們對以 Cross-Ratio 為基礎之定位方法，提出一系列定位誤差的分析與模擬，可以相當有效率地模擬定位誤差，讓使用者根據不同的需求，可以很容易地選擇一組理想的參考點來做定位，以期發展穩定且可信賴的自動車視覺定位系統。

## 1.3 系統簡介

本節將簡單介紹自動車定位時的實驗環境及定位方法。首先會介紹硬體環境的設定，以及自動車與攝影機的架設，接下來概述如何利用紅外線影像定位自動車的方法。

### 1.3.1 硬體環境

由於自動車是在夜間無照明的室內環境行進，因此我們在室內實驗環境中，裝設數個近紅外線 LED 發光二極體，做為分析近紅外線影像的標記物。這些標記物皆佈設在貼牆壁的地板上，使得這些標記物在場景空間中是共平面的。圖

1-1 為實驗環境與硬體架設的介紹。在場景空間中，我們首先建構一空間座標系統，並記錄標記物之座標（如圖 1-1 (a)所示）。自動車之架設如圖 1-1 (b)所示，包含：(1) 內建無線網路之自動車（AmigoBot）；(2) 近紅外線 PTZ 網路攝影機（Axis 213）；(3) 無線網路基地台（Access Point）；主控電腦將透過無線網路控制自動車與攝影機；(4) 鋰電池：供給電力于無線網路基地台以及 PTZ 網路攝影機；(5) 網路線：連接無線網路基地台以及 PTZ 網路攝影機。

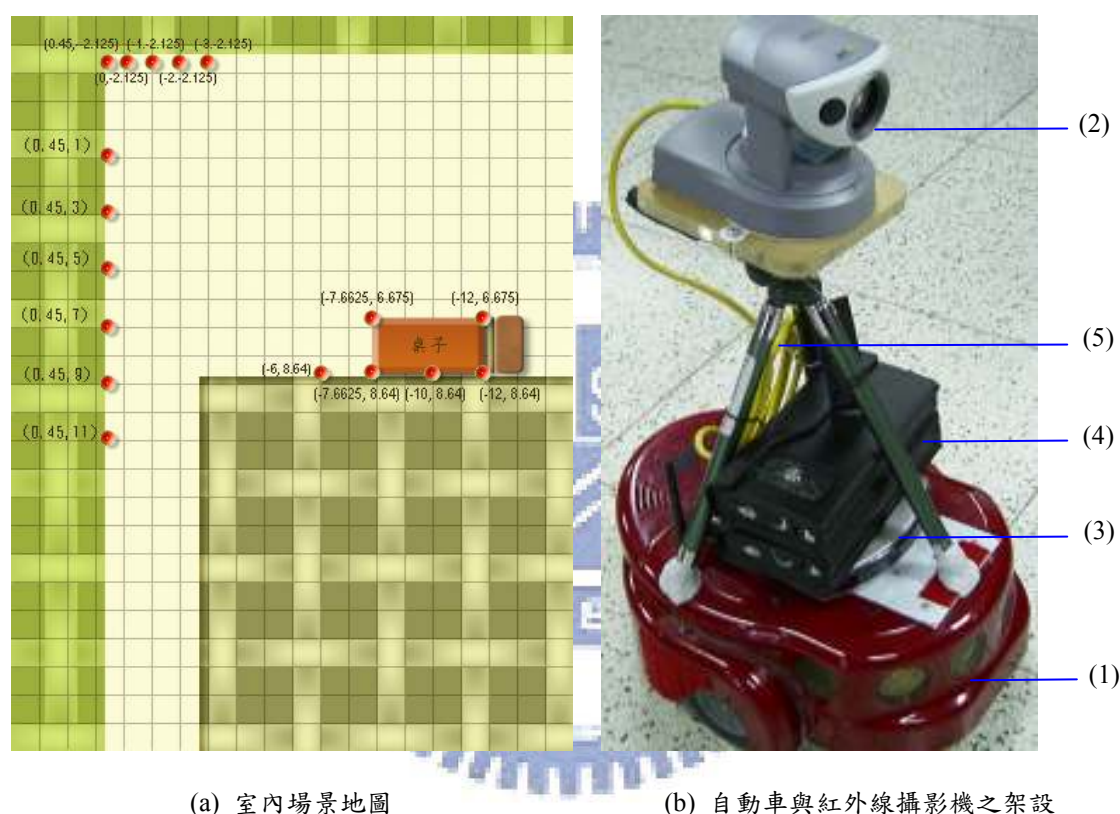


圖 1-1 實驗環境與硬體架設

### 1.3.2 自動車定位介紹

自動車是在夜間無照明的室內環境進行定位，使用近紅外線攝影機拍攝影像，並進行保全物品的偵測，圖 1-2 是自動車的預定路線，也是本論文中定位工作的主要對象。

為了達到自動車在黑暗、無照明的環境中行進之系統功能，近紅外線 PTZ 攝影機將對場景中的標記物作機動的拍攝，所拍攝得到的影像如圖 1-3，是一高對比的灰階影像，影像中有 11 個近紅外線 LED 所發出的光點。自動車之定位工

作是藉由分析即時拍攝得到的近紅外線影像，並利用標記物偵測之技術 (Landmark Detection)，找出標記物於影像上的特徵點位置，再依據已知的標記物之空間佈設 (Configuration)，建構影像參考點位置與空間標記物座標之對應關係，最後再使用 Cross-Ratio 定位方法 (將在下一章介紹) 決定出目前自動車所在的位置。

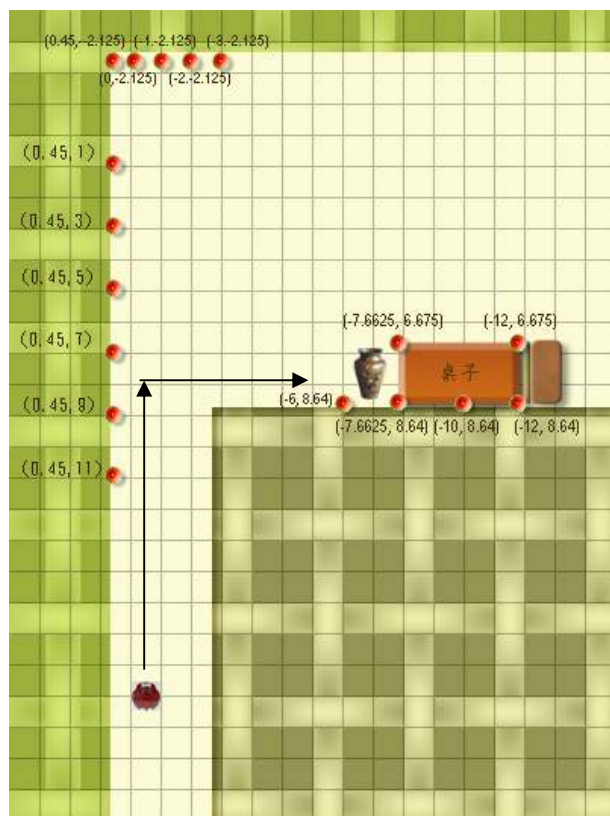


圖 1-2 自動車定位路線

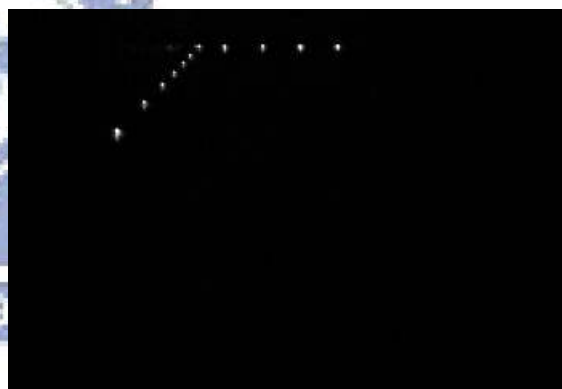


圖 1-3 近紅外線影像

## 1.4 各章介紹

本篇論文全文共分為六章，第二章介紹基本的 Cross-Ratio 的定義及投影不變量性質，並介紹以 Cross-Ratio 為基礎的視覺定位方法，與所需的相關數學運算。第三章探討 Cross-Ratio 定位方法所產生的誤差。第四章對於 Cross-Ratio 定位方法做誤差分析的估測與模擬。第五章介紹定位誤差的估測結果於定位之可能應用。第六章為結論並說明本研究未來的一些研究方向。

## 第二章 自動車視覺定位

在本章裡，我們將介紹如何應用電腦視覺的觀念來定位自動車，並推導與其相關的數學運算。長久以來，電腦視覺領域的研究常利用一些基本投影幾何的性質，以做為物體辨識 (Object Recognition) 或是場景重建 (Scene Reconstruction) 的依據。而投影不變量 (Projective Invariant) 常用來幫助我們了解未知場景結構的幾何分佈，其中，Cross-Ratio 是最基本的一種投影不變量，其他的投影不變量皆可以從 Cross-Ratio 推演出來。

在我們所採用的視覺定位方法裡，自動車的視覺定位主要是奠基於 Cross-Ratio 的投影不變量 (Projective Invariant) 特性。因此本章首先介紹投影不變量 Cross-Ratio 的幾何意義與數學運算，再說明如何應用 Cross-Ratio 定位出自動車在場景中的位置。

### 2.1 投影不變量 (Projective Invariance)

#### 2.1.1 Cross-Ratio 的定義

Cross-Ratio 的基本定義為：對於共線的四點  $A, B, C, D$ ，所形成四線段的距離的比值。如式子(2.1)所描述的比例關係：

$$CR(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC} / \overline{BC}}{\overline{BD} / \overline{AD}} = \frac{\overline{ACBD}}{\overline{BCAD}} \quad (2.1)$$

由於  $A, B, C, D$  四點的編排順序不同，所得的 Cross-Ratio 值也不同。共線四點可以組成 24 種排列，會有 24 個 Cross-Ratio 值，並可將其分為 6 類。其實各種形式的 Cross-Ratio 值均是相依的，在本篇論文中，我們使用(2.1)式的 Cross-Ratio 形式來做計算。

接下來我們欲定義二維空間中之 Cross-Ratio。假設在一個二維平面上有不共線的五點  $O, A, B, C, D$  (如圖 2-1)，如欲定義此五點的 Cross-Ratio 值，我們可以在原點  $O$  與其他參考點  $A, B, C, D$  之間畫一直線  $l_0$ ，再將  $A, B, C, D$  投影到  $l_0$  上得到投影點  $A', B', C', D'$ ，因此平面上五點  $O, A, B, C, D$  的 Cross-Ratio 值，可以用它們在直線上的投影點  $A', B', C', D'$  來定義。又由於點與線是對偶關係，以

$O$  點為原點到  $A, B, C, D$  的連線向量為  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ ，此四向量之間所形成的角度關係也會有相同的 Cross-Ratio 值，如式子(2.2)。

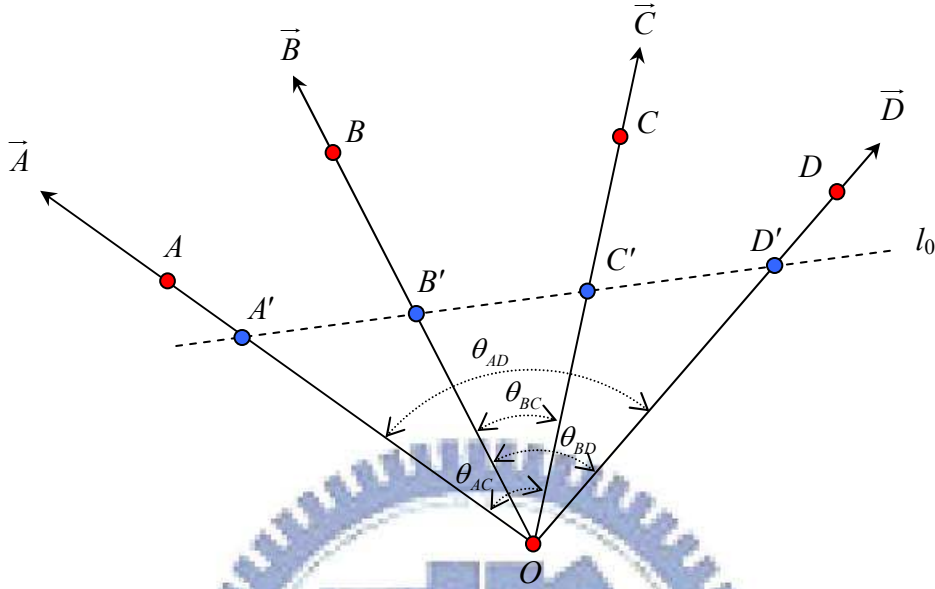


圖 2-1 平面上五點計算二維 Cross-Ratio

$$CR_O(A, B, C, D) = \frac{\overline{A'C'B'D'}}{\overline{B'C'A'D'}} = \frac{\sin \theta_{AC} \sin \theta_{BD}}{\sin \theta_{BC} \sin \theta_{AD}} \quad (2.2)$$

我們將式子(2.2)以外積形式改寫成(2.3)式，

$$\begin{aligned} CR_O(A, B, C, D) &= \frac{\sin \theta_{AC} \sin \theta_{BD}}{\sin \theta_{BC} \sin \theta_{AD}} = \frac{|\vec{A}| |\vec{C}| \sin \theta_{AC} |\vec{B}| |\vec{D}| \sin \theta_{AD}}{|\vec{B}| |\vec{C}| \sin \theta_{BC} |\vec{A}| |\vec{D}| \sin \theta_{AD}} \\ &= \frac{|\vec{A} \times \vec{C}| |\vec{B} \times \vec{D}|}{|\vec{B} \times \vec{C}| |\vec{A} \times \vec{D}|} = \frac{\begin{vmatrix} A_x & C_x \\ A_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x & D_x \\ B_y & D_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x & D_x \\ A_y & D_y \end{vmatrix}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中， $\vec{A} = (A_x, A_y)$ 、 $\vec{B} = (B_x, B_y)$ 、 $\vec{C} = (C_x, C_y)$ 、 $\vec{D} = (D_x, D_y)$ 。如此一來，我們可以不必知道向量間的角度，也不牽涉到正弦函數的運算，只要知道  $O, A, B, C, D$  的座標位置，就可以得到向量  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ ，快速求得空間中五點  $O, A, B, C, D$  的 Cross-Ratio 值。



## 2.1.2 投影不變量 — Cross-Ratio

Cross-Ratio 對於透視投影具有不變量的特性。對於三維空間物體的投影來說，Cross-Ratio 並不會因為物體平移、旋轉或大小等投影條件的改變而變化。也就是說，投影變換（Projective Transformation）後 Cross-Ratio 依然保持不變。

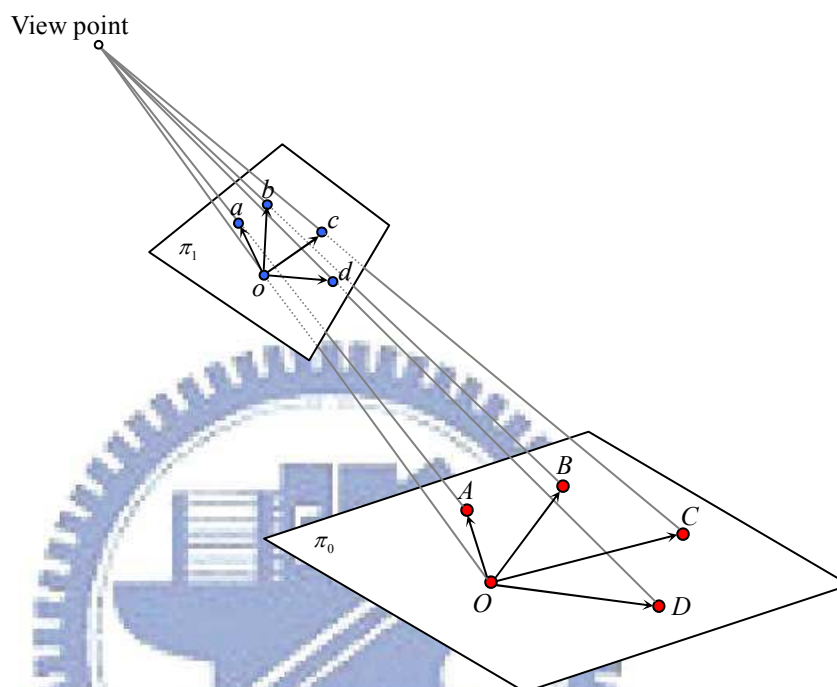


圖 2-2 透視投影模型

圖 2-2 描述一個的透視投影模型。場景空間中有一平面  $\pi_0$ ，五個共平面的參考點  $O, A, B, C, D$  在  $\pi_0$  上，其中任意三點皆不共線。 $O, A, B, C, D$  投影在  $\pi_1$  上的投影點為  $o, a, b, c, d$ 。由於 Cross-Ratio 於透視投影中是一個不變量，因此場景參考點所組成的 Cross-Ratio 值  $CR_O(A, B, C, D)$  與其對應投影點所組成的 Cross-Ratio 值  $CR_o(a, b, c, d)$  相等，亦即

$$CR_O(A, B, C, D) = \frac{|\vec{A} \times \vec{C}| |\vec{B} \times \vec{D}|}{|\vec{B} \times \vec{C}| |\vec{A} \times \vec{D}|} = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}| |\vec{b} \times \vec{d}|}{|\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a} \times \vec{d}|} = CR_o(a, b, c, d) \quad (2.4)$$

其中  $\vec{A}, \dots, \vec{D}$  是平面  $\pi_0$  上  $O$  點到  $A, \dots, D$  的向量， $\vec{a}, \dots, \vec{d}$  是平面  $\pi_1$  上  $o$  點到  $a, \dots, d$  的向量。

本節介紹了 Cross-Ratio 的數學運算，以及透視投影模型中 Cross-Ratio 的數值不變性質，下一節將介紹應用 Cross-Ratio 投影不變量於自動車的定位方法。

## 2.2 自動車定位方法

由於影像與空間場景的投影幾何關係，我們可以根據 Cross-Ratio 為投影不變量 (Projective Invariant) 之性質，亦即場景中任意五點所得的 Cross-Ratio 值，與其對應的影像上的五個特徵點，所計算出的 Cross-Ratio 值是相等的，因而當我們得到自動車在影像上的位置時，經由上述 Cross-Ratio 的一致性，就可得到其對應的空間座標，即自動車的所在位置。以下兩節中，我們首先將說明如何設定影像上的定位點，接著描述以 Cross-Ratio 為基礎的自動車定位方法以及相關數學算式的推導。

### 2.2.1 設定影像上之自動車定位點

為了定位出自動車的位置，首先需計算影像中四個標記物與自動車之間的 Cross-Ratio 值。但因為攝影機僅拍攝自動車前方的畫面，我們無法直接得知自動車本身在影像上的位置，因此我們在影像畫面上設定兩個虛擬的影像定位點，兩影像定位點的延伸向量會穿過自動車的中心，求出兩定位點在空間中的座標後，由這兩個空間定位座標的延伸向量，即可推得自動車的空間座標。

圖 2-3 是說明我們如何設定影像虛擬定位點的示意圖。首先我們將 PTZ 近紅外線攝影機架設於自動車上，固定攝影機俯角及方向，並在自動車的前端裝上參考標記物，如鐵尺。記錄參考標記物的兩端到自動車中心的距離  $D_1$ 、 $D_2$ ，如圖 2-3 (a)。拍攝所得影像如圖 2-3 (b) 所示，記錄參考標記物之兩端在影像畫面中的位置  $r_1=(r_{1x}, r_{1y})$ 、 $r_2=(r_{2x}, r_{2y})$ 。

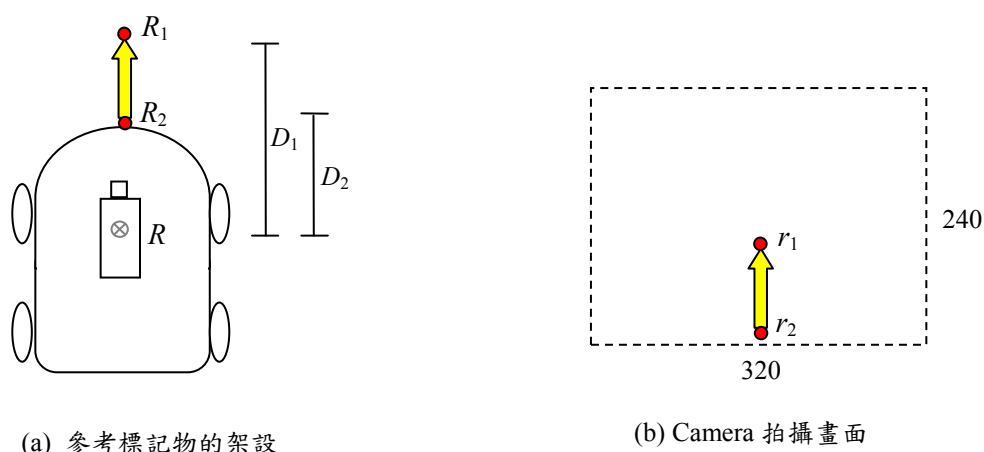


圖 2-3 自動車與標記物拍攝示意圖

當我們計算得到對應於  $r_1, r_2$  的空間座標  $R_1=(R_{1x}, R_{1y})$  及  $R_2=(R_{2x}, R_{2y})$  後，即可推得自動車  $R=(X, Y)$  的座標：

$$R = R_1 + D_1 \frac{\overline{R_1 R_2}}{|R_1 R_2|},$$

即

$$(X, Y) = (R_{1x}, R_{1y}) + D_1 \frac{(R_{2x} - R_{1x}, R_{2y} - R_{1y})}{\sqrt{(R_{2x} - R_{1x})^2 + (R_{2y} - R_{1y})^2}} \quad (2.5)$$

而自動車實際做即時定位時，是依據先前設定好的虛擬影像定位點  $r_1, r_2$  來進行定位，不需再裝設參考標記物（如鐵尺）。需要注意的是攝影機架設在自動車上的方向與俯角需固定不變。如此一來，我們不必事先估算自動車在影像上的位置，只要設定通過自動車中心的影像定位點  $r_1, r_2$ ，經由下一小節中所描述的 Cross-Ratio 定位方法，計算出  $r_1, r_2$  的空間座標  $R_1, R_2$  後，即可定位出自動車的位置。

## 2.2.2 Cross-Ratio 定位方法

在定位計算之前，我們會先分析拍攝所得的近紅外線影像。因為近紅外線影

像是高對比的灰階影像，根據影像之亮度即可偵測標記物 (Landmark Detection) 在影像平面上之位置，亦即特徵點，再依據已知的標記物的空間佈設 (Configuration)，建構影像與空間座標系之對應關係。根據此對應關係，我們可以得到各個標記物在空間與影像上的資訊，再加上影像定位點的座標，即可使用 Cross-Ratio 決定出影像定位點所對應的空間位置。

如 2.1 節所介紹，為了得到一組 Cross-Ratio 值，我們需假設在攝影機的視角範圍內至少拍攝得到四個標記物，再加上自動車本身，才能以此五點構成一組 Cross-Ratio。圖 2-4 為自動車在室內環境的拍攝狀況示意圖， $P_1, P_2, P_3, P_4$  為三維空間中已知的標記物，自動車在三維空間中的位置為  $R$ 。

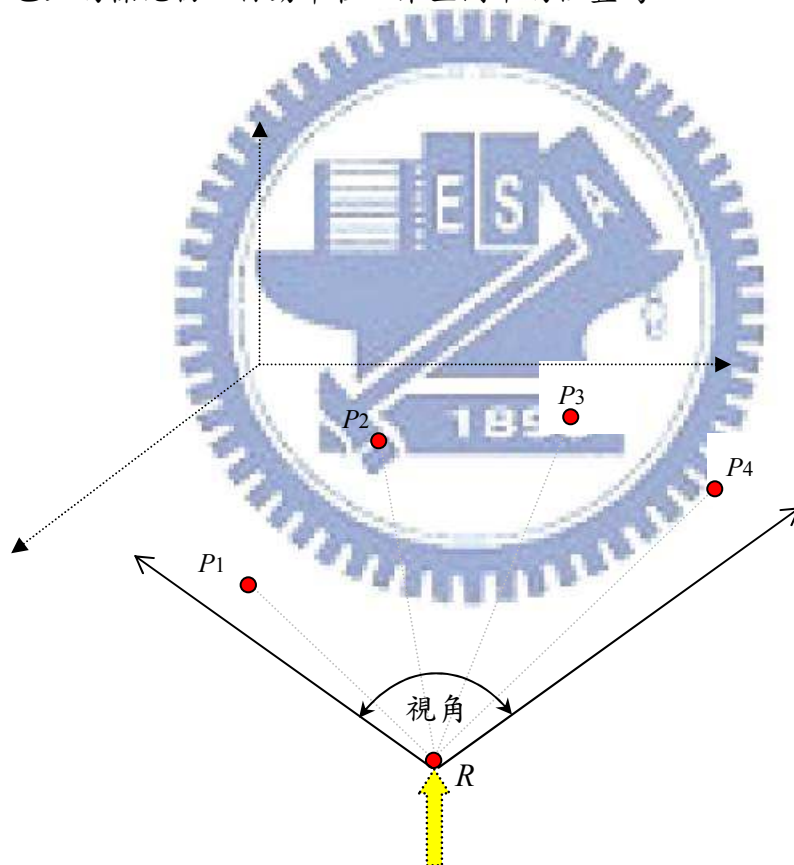
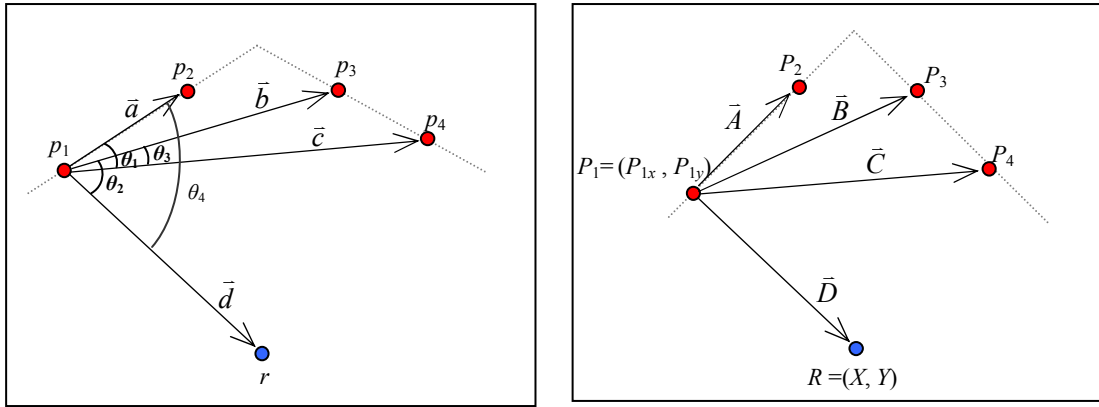


圖 2-4 自動車於室內環境拍攝之示意圖



(a) 影像標記物示意圖

(b) 場景標記物示意圖

圖 2-5 用以定位之標記物示意圖

圖 2-5 是利用標記物來定位的示意圖， $r$  為影像定位點，是自動車  $R$  在影像平面上的投影。紅外線攝影機拍攝到標記物的畫面如圖 2-5 (a)。我們從左至右將標記物編號，則標記物  $P_1$  在影像平面上的座標為  $p_1$ ，標記物  $P_2, P_3, P_4$  的影像座標則分別為  $p_2, p_3$  及  $p_4$ 。首先，以標記物  $P_1$  在影像上的參考點  $p_1$  為原點，發出四條射線到  $p_2, p_3, p_4$  及  $r$ ，令射出向量分別為  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ，則向量  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 、 $\vec{c} = (c_x, c_y)$ 、 $\vec{d} = (d_x, d_y)$ 。

場景標記物之示意圖則如圖 2-5 (b) 所示。其中  $P_1, P_2, P_3, P_4$  是場景中的已知標記物， $R = (X, Y)$  為場景中欲定位之自動車位置。同樣地，在三維空間中以標記物  $P_1$  為原點，射出向量到  $P_2, P_3, P_4$  和  $R$ ，可得到對應於前述  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  之空間向量為  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  及  $\vec{D}$ 。令  $\vec{A} = (A_x, A_y)$ 、 $\vec{B} = (B_x, B_y)$ 、 $\vec{C} = (C_x, C_y)$ 、 $\vec{D} = (X - P_{1x}, Y - P_{1y})$ ，其中  $X$  與  $Y$  是待求的自動車位置座標， $(P_{1x}, P_{1y})$  是標記物  $P_1$  在場景空間中的座標。

在影像平面上，有了標記物與定位點之影像資訊，就可以計算一組影像 Cross-Ratio 值，算式如下：

$$CR_{image} = \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sin \theta_3 \sin \theta_4} = \frac{|\bar{a}| |\bar{c}| \sin \theta_1 |\bar{b}| |\bar{d}| \sin \theta_2}{|\bar{b}| |\bar{c}| \sin \theta_3 |\bar{a}| |\bar{d}| \sin \theta_4} = \frac{|\bar{a} \times \bar{c}| |\bar{b} \times \bar{d}|}{|\bar{b} \times \bar{c}| |\bar{a} \times \bar{d}|} = \frac{\begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_x & d_x \\ b_y & d_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix}} \triangleq \frac{q_1}{q_2} \quad (2.6)$$

與(2.6)式對應的空間 Cross-Ratio 值為：

$$CR_{scene} = \frac{|\bar{A} \times \bar{C}| |\bar{B} \times \bar{D}|}{|\bar{B} \times \bar{C}| |\bar{A} \times \bar{D}|} = \frac{\begin{vmatrix} A_x & C_x \\ A_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x & D_x \\ B_y & D_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x & D_x \\ A_y & D_y \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} B_x & X - P_{1x} \\ B_y & Y - P_{1y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x & X - P_{1x} \\ A_y & Y - P_{1y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x & X - P_{1x} \\ A_y & Y - P_{1y} \end{vmatrix}} \quad (2.7)$$

由於投影不變量 (Projective Invariant) 的性質，我們可以得到：(2.6)與(2.7)式相等，

$$CR_{scene} = \frac{\begin{vmatrix} A_x & C_x \\ A_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x & X - P_{1x} \\ B_y & Y - P_{1y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x & X - P_{1x} \\ A_y & Y - P_{1y} \end{vmatrix}} = \frac{q_1}{q_2} \triangleq CR_{image} \quad (2.8)$$

其中， $q_1$  與  $q_2$  是式子(2.6)的分子與分母部份。因為只有  $X$  與  $Y$  是未知數，我們對(2.8)式做交叉相乘，並整理  $X$ 、 $Y$  項的係數，可以得到式子如下：

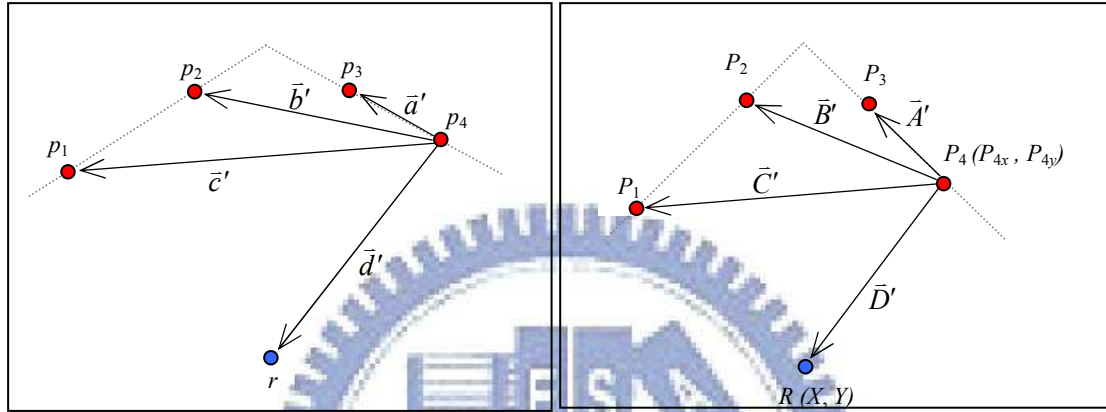
$$L_1 : (q_1 K_{BC} A_y - q_2 K_{AC} B_y) X + (q_2 K_{AC} B_x - q_1 K_{BC} A_x) Y = q_2 K_{AC} \begin{vmatrix} B_x & P_{1x} \\ B_y & P_{1y} \end{vmatrix} - q_1 K_{BC} \begin{vmatrix} A_x & P_{1x} \\ A_y & P_{1y} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

其中  $K_{AC} = \begin{vmatrix} A_x & C_x \\ A_y & C_y \end{vmatrix}$ ， $K_{BC} = \begin{vmatrix} B_x & C_x \\ B_y & C_y \end{vmatrix}$ ， $L_1$  即為一條在場景中通過自動車位置的直線方程式<sup>1</sup>。

有了一條直線方程式之後，可以以類似的方法得到第二條直線方程式。例如使用同一組標記物，但以標記物  $P_4$  為原點，可以推得另一條通過自動車位置的空間直線方程式（如圖 2-6）。紅外線攝影機拍攝畫面如圖 2-6 (a)。假設以  $p_4$  為

註 1：注意，以 Cross-Ratio 為基礎做定位算式之推導時，我們將其所有的三角函數皆代換成外積的形式，且並不直接算出 Cross-Ratio 值算出，僅以 Cross-Ratio 的分子與分母部份 ( $q_1$  及  $q_2$ ) 表示。這是為了降低在三角函數或除法的計算過程中可能產生的量化誤差 (Quantization Error)。

原點發出四條射線到  $p_3$ 、 $p_2$ 、 $p_1$  及  $r$ ，分別為向量  $\bar{a}'$ 、 $\bar{b}'$ 、 $\bar{c}'$ 、 $\bar{d}'$ ，其中  $\bar{a}' = (a'_x, a'_y)$ 、 $\bar{b}' = (b'_x, b'_y)$ 、 $\bar{c}' = (c'_x, c'_y)$ 、 $\bar{d}' = (d'_x, d'_y)$ 。場景標記物之示意圖則如圖 2-6 (b) 所示。以  $P_4$  為原點，射出向量到  $P_3$ 、 $P_2$ 、 $P_1$  和  $R$ ，可得空間向量  $\bar{A}'$ 、 $\bar{B}'$ 、 $\bar{C}'$  及  $\bar{D}'$ 。令  $\bar{A}' = (A'_x, A'_y)$ 、 $\bar{B}' = (B'_x, B'_y)$ 、 $\bar{C}' = (C'_x, C'_y)$ 、 $\bar{D}' = (X - P_{4x}, Y - P_{4y})$ 。其中  $(P_{4x}, P_{4y})$  是標記物  $P_4$  在場景空間的座標。



(a) 影像標記物示意圖

(b) 空間標記物示意圖

圖 2-6 用以定位之標記物示意圖

如此，以  $p_4$  和  $P_4$  為參考點之影像及空間 Cross-Ratio 的式子分別為

$$CR'_{image} = \frac{|\bar{a}' \times \bar{c}'| |\bar{b}' \times \bar{d}'|}{|\bar{b}' \times \bar{c}'| |\bar{a}' \times \bar{d}'|} = \frac{\begin{vmatrix} a'_x & c'_x \\ a'_y & c'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b'_x & d'_x \\ b'_y & d'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b'_x & c'_x \\ b'_y & c'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x & d'_x \\ a'_y & d'_y \end{vmatrix}} \triangleq \frac{q'_1}{q'_2} \quad (2.10)$$

及

$$CR'_{scene} = \frac{|\bar{A}' \times \bar{C}'| |\bar{B}' \times \bar{D}'|}{|\bar{B}' \times \bar{C}'| |\bar{A}' \times \bar{D}'|} = \frac{\begin{vmatrix} A'_x & C'_x \\ A'_y & C'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B'_x & X - P_{4x} \\ B'_y & Y - P_{4y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B'_x & C'_x \\ B'_y & C'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'_x & X - P_{4x} \\ A'_y & Y - P_{4y} \end{vmatrix}} \quad (2.11)$$

因投影不變的性質，(2.10)式與(2.11)式相等，可得式子(2.12)，

$$CR'_{scene} = \frac{\begin{vmatrix} A'_x & C'_x \\ A'_y & C'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B'_x & X - P_{4x} \\ B'_y & Y - P_{4y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B'_x & C'_x \\ B'_y & C'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'_x & X - P_{4x} \\ A'_y & Y - P_{4y} \end{vmatrix}} = \frac{q'_1}{q'_2} \triangleq CR'_{scene} \quad (2.12)$$

同樣地，經交叉相乘整理係數後，可得到第二條通過自動車之空間直線方程式

$$L_2 : (q'_1 K'_{BC} A'_y - q'_2 K'_{AC} B'_y) X + (q'_2 K'_{AC} B'_x - q'_1 K'_{BC} A'_x) Y = q'_2 K'_{AC} \begin{vmatrix} B'_x & P_{4x} \\ B'_y & P_{4y} \end{vmatrix} - q'_1 K'_{BC} \begin{vmatrix} A'_x & P_{4x} \\ A'_y & P_{4y} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

其中  $K'_{AC} = \begin{vmatrix} A'_x & C'_x \\ A'_y & C'_y \end{vmatrix}$ ,  $K'_{BC} = \begin{vmatrix} B'_x & C'_x \\ B'_y & C'_y \end{vmatrix}$ 。

有了兩條通過 $(X, Y)$ 的空間直線方程式後，兩條直線的交點 (Intersection) 即為自動車在場景中的位置 (圖 2-7)。式子(2.14)是我們將方程式(2.9)和(2.13)用一組聯立方程式來表示，

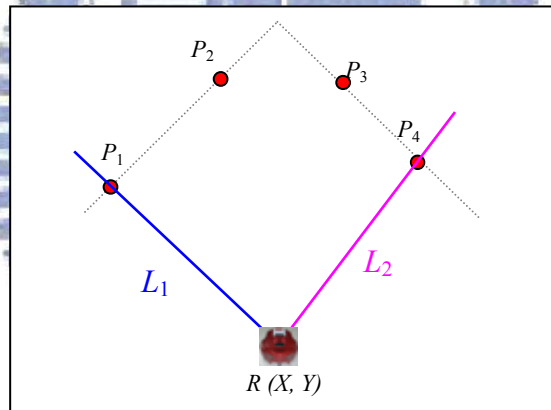


圖 2-7 定位自動車

$$\begin{cases} \alpha_1 X + \beta_1 Y = \gamma_1 \\ \alpha_2 X + \beta_2 Y = \gamma_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

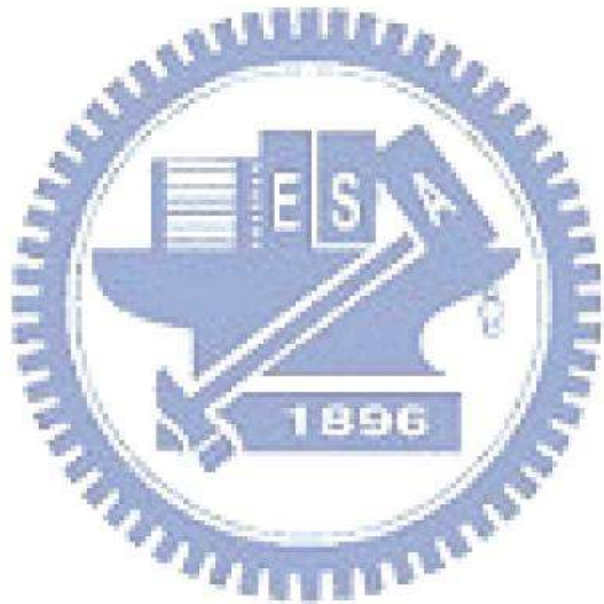
其中  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\gamma_1$  分別為式子(2.9)的  $X$ 、 $Y$  項係數和常數項之值， $\alpha_2$ 、 $\beta_2$ 、 $\gamma_2$  則分別為式子(2.13)的  $X$ 、 $Y$  項係數和常數項。根據 Cramer's Rule，

$$(X, Y) = \left( \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \right) \quad (2.15)$$

即可求得自動車透過 Cross-Ratio 定位之場景座標。



由於在視角範圍內，我們也可能看到多於四個以上的標記物，這時我們僅須選出四個標記物做定位計算。至於選擇哪些標記物，我們應以達到最小定位誤差為依據，此部分會在第四章及第五章做討論。



## 第三章 定位實驗與誤差討論

上一章我們已介紹了以 Cross-Ratio 為基礎的自動車定位方法，本章我們欲探討此一定位方法所可能產生的定位誤差。定位的準確與否，會對自動車行走的範圍或環境有所限制。尤其對於較為狹小的室內環境，自動車常有碰撞牆壁或物體的可能性，若是定位準確度不足，即使自動車有偵測障礙物（Obstacle Detection）以及路徑規劃（Path Planning）的功能，過大的誤差將使這些功能失效。

本章首先討論可能的誤差來源，然後進行一個對於地面格點進行定位的實驗，以及自動車在已規劃好的路徑行進時做即時定位的結果，這些實驗結果可以幫助我們了解誤差分布的情況，並進一步做誤差的分析。

### 3.1 誤差來源

定位誤差的來源主要可以分成兩類。第一類是由於實驗環境或是自動車與攝影機等硬體的設定所造成的系統誤差，使得我們擷取得到的是有雜訊或錯誤的影像資訊，而影響標記物偵測的結果，導致定位有所偏差；第二類則是肇因於後端影像分析或是定位計算時所造成的計算誤差。

#### 3.1.1 特徵點擷取誤差

在第一類的誤差方面，我們所針對的實驗環境主要是在黑暗無照明的室內環境，並使用近紅外線 LED 發射器做為標記物偵測時的特徵點，然而架設在地板或牆邊的近紅外線發射器會因光線反射與散射而造成反光或光暈等現象。尤其是在環境過亮的情況下，光暈以及雜訊的情況都會變嚴重。另外，也常有因為地板或牆壁的反光，使得我們在偵測標記物時須做額外的處理，才能辨識出正確的標記物特徵點（Feature Points）。再者，自動車行進時所牽動攝影機的晃動，也會

造成亮點模糊的情況。

圖 3-1 是架設於自動車上之近紅外線攝影機所拍攝到的標記物影像，標記物在場景空間中是沿踢腳板且緊貼地板來佈設。圖 3-1 (a) 是在黑暗無光源的環境且自動車靜止不動時所看到的標記物影像。圖 3-1 (b) 則是在右方有一微弱光源，環境亮度較大，使得所拍攝的亮點的光暈較為明顯。圖 3-1 (c) 是在自動車往前走，較靠近亮點時拍攝的。可以明顯地看到多出一個亮點 *B* 點，該點是因為 *A* 點在牆壁上的反光所造成的 Outlier。圖 3-1 (d) 則是在自動車行走時造成攝影機晃動時所拍攝的亮點模糊的情況。而當自動車越來越接近某一標記物時，此標記物在影像上的亮點面積亦將變大（如亮點 *C*），同時亮點在地面上的反光亦清楚可見，這讓我們在偵測亮點時可能會將此亮點當做兩個亮點來看待，這麼一來，在標記物辨識時其結果可能是錯誤的。

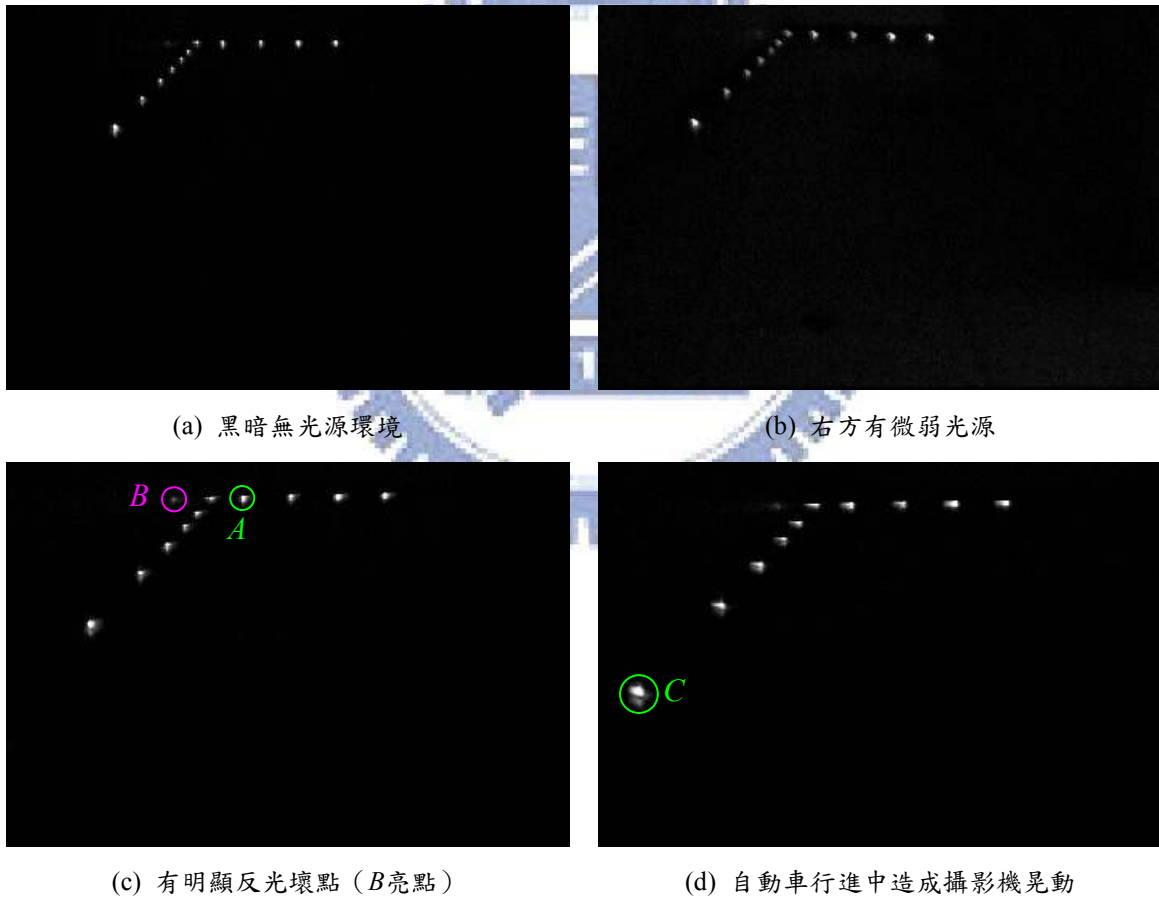


圖 3-1 標記物拍攝影像

光暈和模糊亮點的情況可以藉由降低自動車的車速和調整攝影機快門來改善。另外，也利用一些影像處理技術來降低其他標記物偵測的錯誤。例如將影像

二值化後，利用連通元件分析（Connected Component Analysis）找出每個亮點的大小和中心，將較小的亮點視為雜訊濾除掉，並考慮過於相近的兩個亮點其中之一為標記物於地板的反光的可能性。另外，也可以根據亮點的幾何分布來去除壞點（Outliers），像是用直線擬合（Line Fitting）的方式，濾掉不在線上的點，這能有效去除反光於牆壁上的亮點。另外，我們也可以利用亮點的位置幾何分布來對其進行編號，以便與空間標記物做比對。

### 3.1.2 計算誤差

在第二類的誤差方面，如2.1節所提到的，Cross-Ratio 已被廣泛應用於三維重建以及物體辨識，而影像的解析度將相當程度地影響三維重建及物體辨識的效果。同理，來自於影像資訊的有限解析度所產生的量化誤差（Quantization Error），不可避免地也將會造成自動車定位誤差。另外，選擇不同的標記物做Cross-Ratio定位，也會使得誤差的範圍及分佈有所不同。接下來我們將以量化誤差在不同的標記物位置分布情形下，對於影像定位點重建結果的影響，以及所造成空間定位的誤差做探討。

#### A. 量化誤差（Quantization Error）

這是對於影像上的單一參考點來看。由於Cross-Ratio的計算需要四個影像上的參考點再加上一個影像定位點（見2.2.1），而每一個影像參考點因為解析度的關係都可能會產生量化誤差，因此由高解析度影像可以得到愈近似於實際場景所得到的Cross-Ratio值。而對於場景空間中同一平面上的物體，距離攝影機愈近的物體在影像上所佔的像素值愈多，也就是說它們在影像上的量化誤差相對上較可忽略。因此我們可以挑選距離攝影機較近的標記物來作計算，以期獲得較好的定位結果。

#### B. 標記物幾何分布

這是從一組參考點來看。當我們有多於四個以上用以計算 Cross-Ratio 的標記物可以挑選，那麼除了量化誤差的考量，還應考慮挑選的參考點的

幾何結構 (Geometric Configuration) 。N. Georis 等人[11]曾提出關於 Cross-Ratio 的數值計算與誤差分析的研究結果，他們提出對於平面上五點  $O, A, B, C, D$  (如圖 3-2 所示)，應該選擇使得  $|\theta - 90^\circ|$  為最小的 Cross-Ratio，其中  $\theta$  為式子(2.3)中，分母第二項的兩向量  $\vec{B}$  與  $\vec{D}$  之夾角  $\angle BOD$ 。如此可以避免花費龐大的計算量估計全部 24 個 Cross-Ratio 值及其變異量。此外，每兩條射線之間的夾角不宜太小，因為這也會降低 Cross-Ratio 在數值計算上的精確度。而後 J.-S Liu 等人[12]則更具體的指出，應選擇使得  $\Delta(O, B, C)$  和  $\Delta(O, A, D)$  面積之乘積最大的幾何結構，以確保最小的 Cross-Ratio 計算誤差。

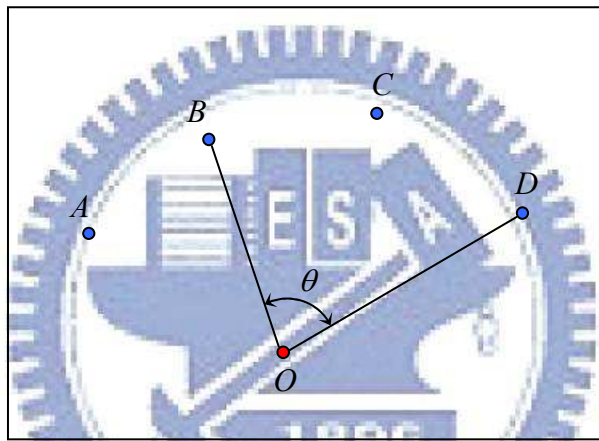


圖 3-2 平面上五點對於 Cross-Ratio 值的選擇

### 3.2 地面格點定位實驗

我們設計了一個在地面格點上定位的實驗，用以測量使用 Cross-Ratio 方法進行自動車定位的實際定位誤差。我們以室內實驗場景地板上之地磚為一單位，為實驗場景訂定座標，每一地磚面積是  $40\text{cm} \times 40\text{cm}$ 。並由人工手動將自動車放在場景中的地磚格子點上，觀察他們的定位誤差。

圖 3-3 是我們將自動車放置在格點上，再以 Cross-Ratio 方法定位的實驗結果。藍色的點代表標記物佈設的位置，紅色的點代表其地面格點定位結果。場景的左方是一長廊，此實驗在定位走廊上的格點時，自動車與攝影機的方向是朝向北方，而用來計算 Cross-Ratio 的參考點皆是佈設在走廊上的標記物。而在  $(-2, 7)$ 、 $(-3, 7)$ 、 $(-4, 7)$  格點上定位時自動車是朝向東方，且使用櫃子前方的五個標記物來

做定位。在這個實驗裡，當有多於四個標記物可以選擇時，我們使用手動方式來選點。圖 3-3 中之紅點為個格點定位之結果，而表 3-1 則顯示在各格點上定位實驗結果的數據以及誤差的大小。

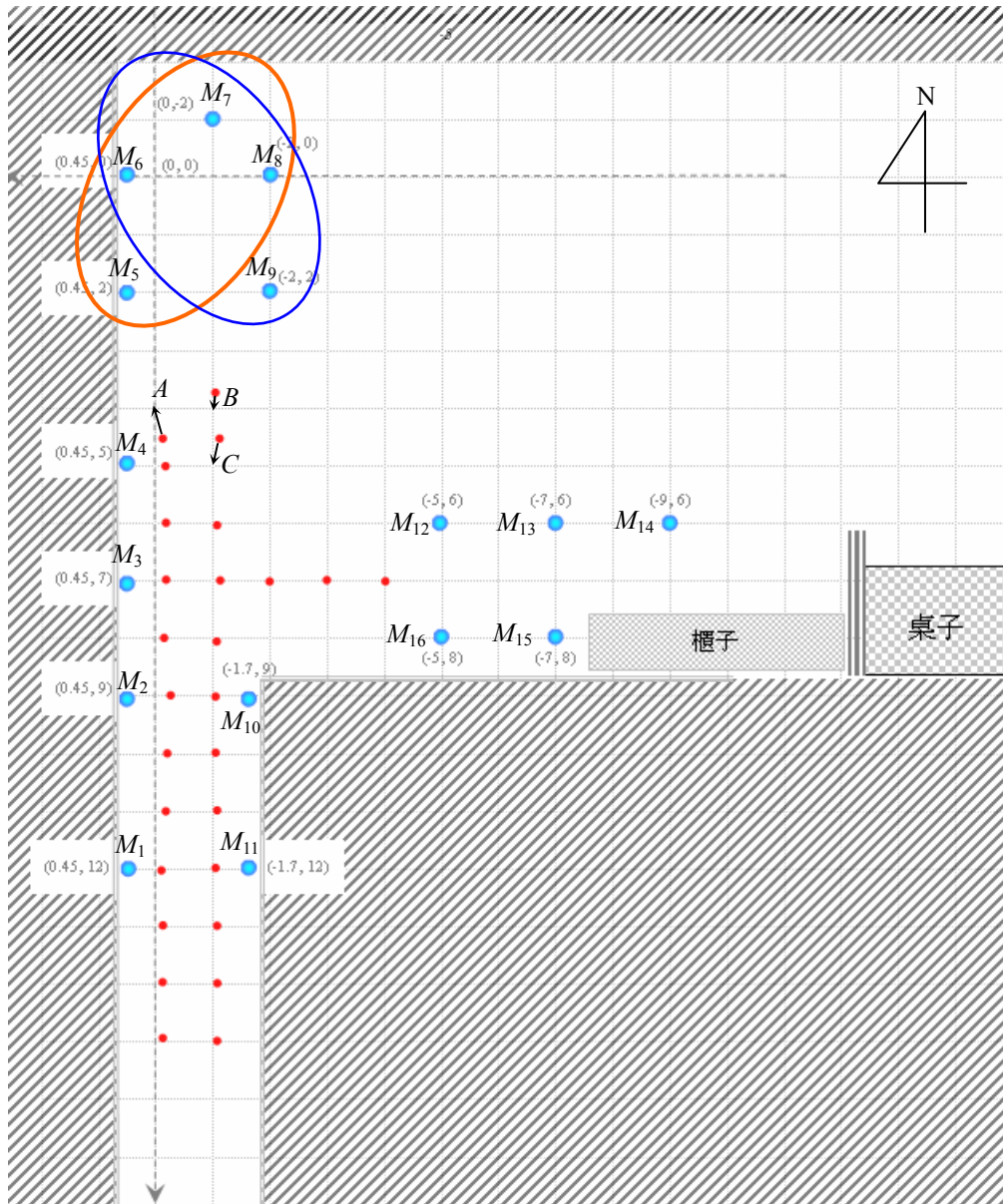


圖 3-3 在地面格點上以 Cross-Ratio 方法定位的實驗結果

表 3-1 自動車地面格點定位的實驗數據與誤差

自動車座標 (tile)	定位結果 (tile)	誤差 $X$ (cm)	誤差 $Y$ (cm)	自動車座標 (tile)	定位結果 (tile)	誤差 $X$ (cm)	誤差 $Y$ (cm)
(0, 4)	(-0.1082, 4.6689)	4.3272	26.7568	(-1, 4)	(-1.01590, 3.6778)	0.6360	12.8880
(0, 5)	(-0.1598, 5.0485)	6.3912	1.9420	(-1, 5)	(-1.0820, 4.4898)	3.2819	20.4064
(0, 6)	(-0.1755, 5.9854)	7.0196	0.5833	(-1, 6)	(-1.0934, 6.01245)	3.7354	0.4979
(0, 7)	(-0.1943, 6.9892)	7.7709	0.4326	(-1, 7)	(-1.1173, 6.9463)	4.6909	2.1480
(0, 8)	(-0.1598, 7.9573)	6.3925	1.7062	(-1, 8)	(-1.04978, 8.0077)	1.9913	0.3079
(0, 9)	(-0.2190, 9.0739)	8.7617	2.9554	(-1, 9)	(-1.0337, 8.9510)	1.3497	1.9592
(0, 10)	(-0.18799, 10.0253)	7.5195	1.0121	(-1, 10)	(-1.0246, 9.9428)	0.9833	2.3010
(0, 11)	(-0.1729, 10.9941)	6.9166	0.2364	(-1, 11)	(-1.0356, 10.9606)	1.4241	1.5772
(0, 12)	(-0.0982, 11.9833)	3.9274	0.6681	(-1, 12)	(-1.0292, 11.9524)	1.1680	1.9019
(0, 13)	(-0.1801, 12.9480)	7.2031	2.0802	(-1, 13)	(-1.0729, 12.9747)	2.9158	1.0132
(0, 14)	(-0.1660, 13.9303)	6.6397	2.7875	(-1, 14)	(-1.0452, 13.9172)	1.8077	3.3122
(0, 15)	(-0.1750, 14.8501)	6.9995	5.9953	(-1, 15)	(-1.0605, 14.9814)	2.4198	0.7449
(-2, 7)	(-2.0627, 7.0133)	2.5065	0.5301				
(-3, 7)	(-2.9639, 6.9197)	1.4424	3.2101				
(-4, 7)	(-4.0024, 7.0107)	0.0975	0.4285				

根據表 3-1 的實驗結果， $X$  方向的定位誤差平均為 4.0895 公分， $Y$  方向的定位平均誤差則為 3.7179 公分。只有在  $A(0, 4)$ 、 $B(-1, 4)$ 、 $C(-1, 5)$  位置的定位結果較差，尤其  $A$  點在  $Y$  方向的誤差有 26 公分之多。這是因為在這三個格點位置攝影機僅能看到四個標記物。在  $A$  點僅能看到  $M_5$ 、 $M_6$ 、 $M_7$ 、 $M_8$  四個標記物（圖 3-3 橘色橢圓圈起的標記物），在  $B$ 、 $C$  兩點則僅能看到  $M_6$ 、 $M_7$ 、 $M_8$ 、 $M_9$  四個標記物（圖 3-3 藍色橢圓圈起的標記物）。以格點  $A(0, 4)$  為例，所拍攝到的影像如圖 3-4 所示。我們可以發現，因這四個標記物的幾何分布，所造成的射線間夾角過於狹小，所以會得到不穩定的 Cross-Ratio 值，也因而產生較大的定位誤差。



圖 3-4 在  $A(0, 4)$  位置拍攝的影像

根據此實驗的觀察，定位時若選用的四個標記物其幾何關係是成正方形或是矩形排列，會有較準確的定位結果。因為他們所形成的射線夾角較為平均，少有狹小夾角的產生，且最大夾角接近正交 90 度，因此可以得到可信度高的定位結果。另外，對於原點的選擇，我們多以四個參考點中最靠近攝影機的兩個標記物為原點，因為由這兩個原點到自動車所發出的射線較接近正交 90 度，這在兩直線求交點（intersection）時，在數值計算上較為穩定的。

### 3.3 自動車即時定位實驗

接下來我們讓自動車在室內環境行走並做即時的定位。圖 3-5 是一室內環境的示意圖，紅色亮點是標記物在場景空間的位置。自動車每 1/30 秒以 Cross-Ratio 方法定位一次，並將定位結果以黑色的點則顯示於圖 3-5 上。自走車行走的路徑是從 START 位置開始，往前走一段距離之後，過了走廊向右轉，然後再往前走。

觀察黑色點所形成的路徑，顯示在走廊上的自走車行進路徑並不是直線，部分原因是因為自動車本身在行走時，兩輪軸速度不夠一致，使得在經過一段長時間的行走後，自動車的路徑看起來是有點像曲線的。然而另外值得注意的是以藍色圓圈圈起來的部份有彎折的情況，這是因為自動車在行走過程中，所參考的標記物改變的關係，因為自動車愈往前走，有些標記物在影像畫面便會消失不見，無法再用做影像 Cross-Ratio 的計算，這時便要改換其它的標記物來定位自動車位置。而因為不同的標記物對於自動車定位誤差的影響不盡相同，使得自動車的定位會有彎折甚或斷層的情況出現。



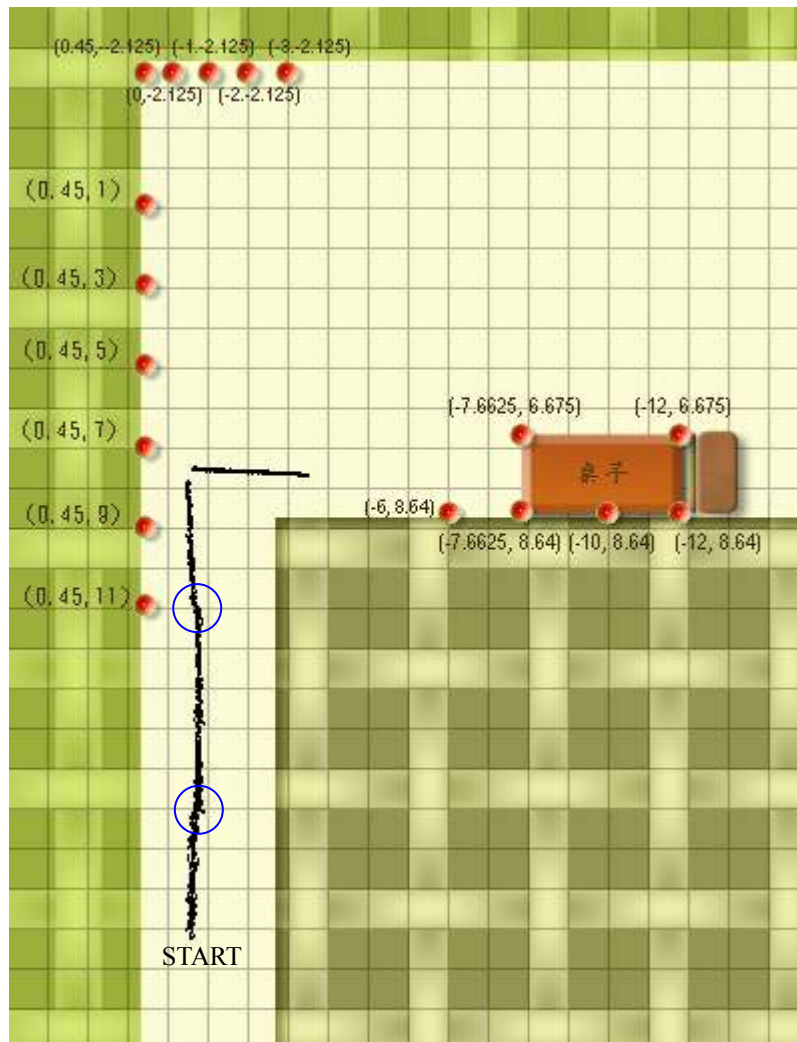


圖 3-5 自動車即時定位結果

### 3.4 討論

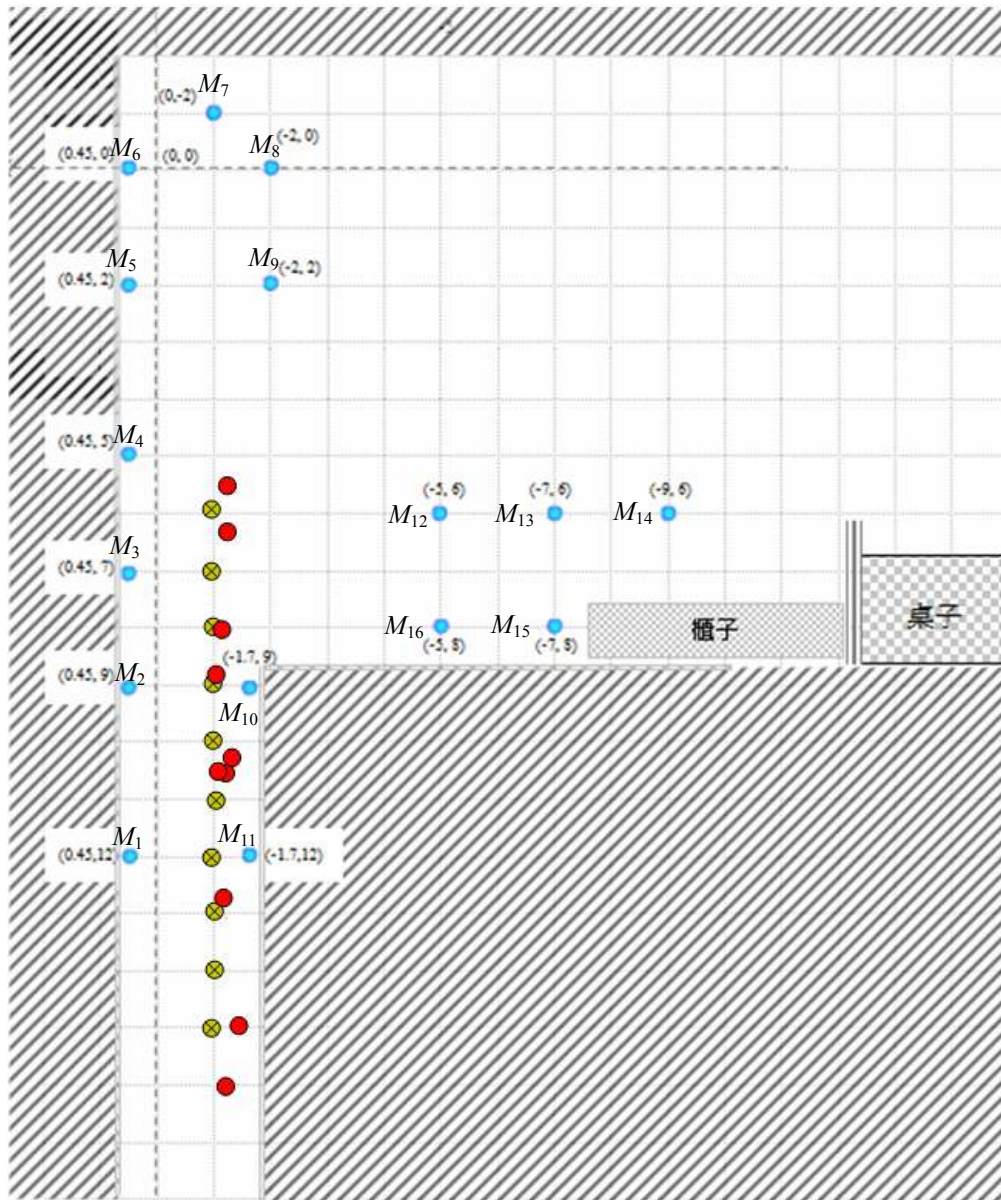
本章介紹了定位誤差的來源，並以兩個實際的實驗結果來驗證誤差的存在及其對定位的影響。由於第一類的誤差通常可以藉由環境的控制，或以調整自動車、攝影機的設定來改善，因此在本篇論文中，我們將著重在探討第二類的誤差——計算誤差的影響。

總結兩個定位實驗的結果。即時定位的實驗顯示出參考點換點後，由於每一參考點對於計算誤差有不同的影響，造成定位彎折的情況。而格點定位的實驗可以看出標記物的幾何分布對於定位的影響。在我們的定位環境中，若在影像中可以看到  $n$  個標記物，則須在  $n$  個參考點裡選出四個參考點，再選定兩個標記物為原點做定位計算，使得我們需要考量很多計算 Cross-Ratio 的方式 ( $C_4^n \times C_2^4$ )。

由於影像解析度的關係，定位誤差對於每一參考點的敏感度皆不同，而且用來計算 Cross-Ratio 的四個參考點的幾何分佈對於 Cross-Ratio 的準確性也造成很大的影響，使得定位會產生誤差與不穩定的情況，因此標記物的選點是 Cross-Ratio 定位方法中一個很重要的課題。

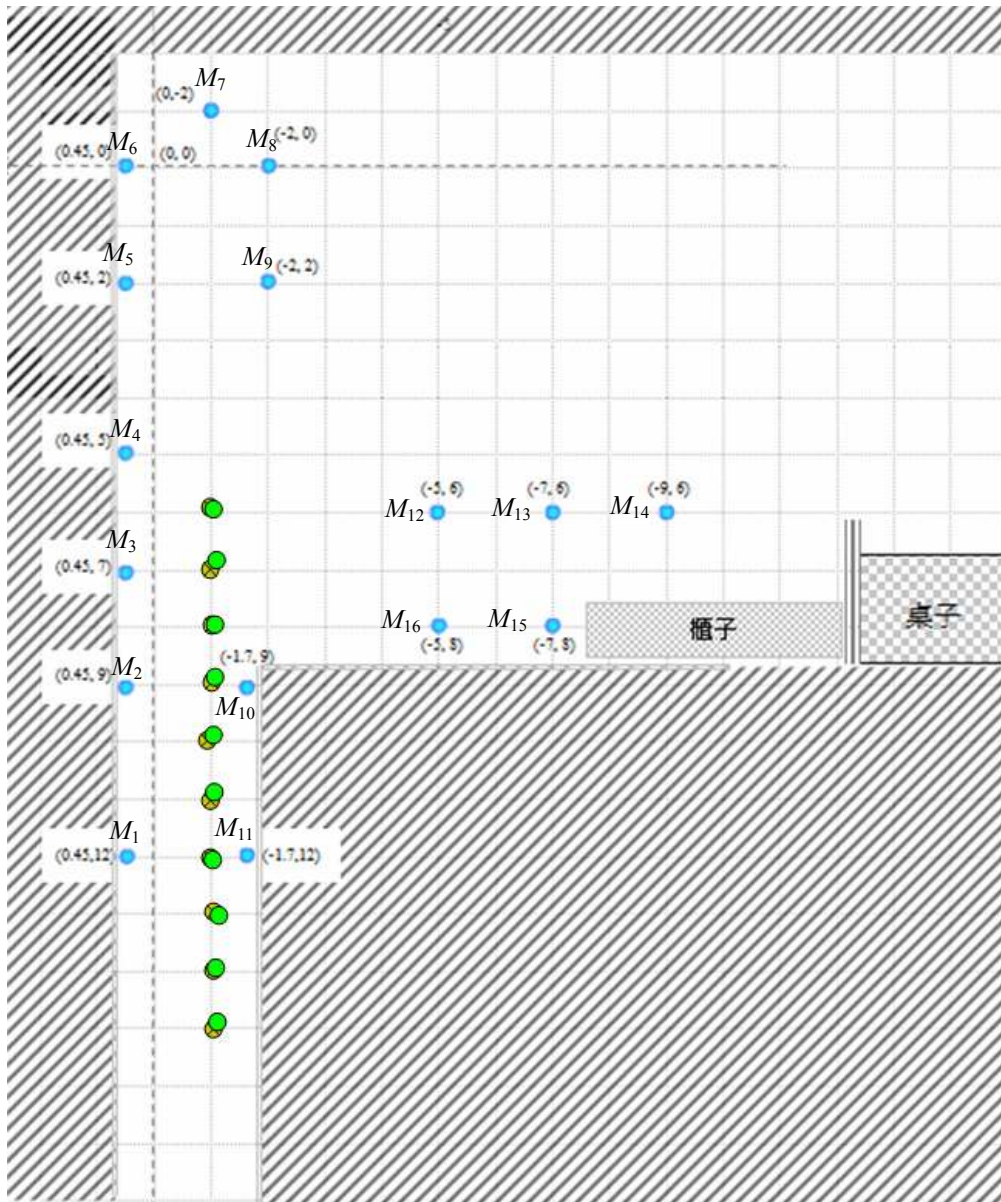
在本篇論文中，我們將在下兩章分析並模擬影像誤差對於定位的影響，而該分析的結果將可以作為參考點選點的重要依據。在本章結束前，我們先以一些實例來顯示此一影響對於一般環境中之定位所可能造成之誤差範圍，以及利用上述分析結果所可能獲得之定位改善。

圖 3-6 是選擇不同參考點的定位結果比較，其中，橄欖綠的圓點（有 x 標記）是自動車的實際位置。圖 3-6 (a) 是對於每個自動車位置，任意挑選四個參考點的定位結果（紅色圓點）；圖 3-6 (b) 則是根據本篇論文所提出的誤差分析方法，選出最適合的參考點來做定位的結果（綠色圓點）。表 3-2 為在各格點上定位結果的數據與誤差的數值大小。其中，在任意挑點的定位結果中， $X$  方向與  $Y$  方向的平均定位誤差分別為 6.3636 公分和 30.8740 公分，而根據誤差分析選點的定位結果的平均定位誤差分別只有 2.7820 公分和 1.6104 公分。很明顯地，根據誤差分析選點後的定位是較為準確的。因此，有效率且能正確描述定位誤差的分析方法，將有助於我們發展穩定且實用的以 Cross-Ratio 為基礎的定位系統。



(a) 任意挑選參考點

圖 3-6 選用不同參考點的定位結果比較



(b) 根據誤差分析結果挑選參考點

圖 3-6 選用不同參考點的定位結果比較 (續)

表 3-2 選用不同參考點的定位結果

自動車座標 (tile)	定位結果 (tile)	誤差 X (cm)	誤差 Y (cm)	選用標記物
(-1, 6)	(-1.1583, 5.5337)	6.3320	18.6520	[ $M_5, M_7, M_8, M_9$ ]
(-1, 7)	(-1.1482, 6.3217)	5.9280	27.1320	[ $M_5, M_7, M_8, M_9$ ]
(-1, 8)	(-1.2482, 7.1200)	9.9280	35.2000	[ $M_5, M_7, M_8, M_9$ ]
(-1, 9)	(-1.0307, 8.8367)	1.2280	6.5320	[ $M_4, M_7, M_8, M_{10}$ ]
(-1,10)	(-1.0238, 10.5882)	0.9520	23.5280	[ $M_4, M_6, M_7, M_{10}$ ]
(-1,11)	(-1.2029, 10.1826)	8.1160	32.6960	[ $M_3, M_4, M_8, M_9$ ]
(-1,12)	(-1.1954, 10.3255)	7.8160	66.9800	[ $M_4, M_7, M_8, M_9$ ]
(-1,13)	(-1.1108, 12.7128)	4.4320	11.4880	[ $M_4, M_5, M_8, M_9$ ]
(-1,14)	(-1.3906, 15.1537)	15.6240	46.1480	[ $M_2, M_3, M_7, M_8$ ]
(-1,15)	(-1.082, 16.0096)	3.2800	40.3840	[ $M_2, M_5, M_7, M_{11}$ ]
<b>平均定位誤差</b>		<b>6.3636</b>	<b>30.8740</b>	

(a) 任意挑點的定位誤差結果

自動車座標 (tile)	定位結果 (tile)	誤差 X (cm)	誤差 Y (cm)	選用標記物
(-1, 6)	(-1.0934, 6.0124)	3.7360	0.4960	[ $M_5, M_6, M_8, M_9$ ]
(-1, 7)	(-1.1173, 6.9463)	4.6920	2.1480	[ $M_5, M_6, M_8, M_9$ ]
(-1, 8)	(-1.1632, 8.0922)	6.5280	3.6880	[ $M_5, M_6, M_8, M_9$ ]
(-1, 9)	(-1.0203, 8.9364)	0.8120	2.5440	[ $M_4, M_6, M_9, M_{10}$ ]
(-1,10)	(-1.0238, 9.9398)	0.9520	2.4080	[ $M_4, M_6, M_9, M_{10}$ ]
(-1,11)	(-1.0189, 10.9958)	0.7560	0.1680	[ $M_3, M_6, M_9, M_{10}$ ]
(-1,12)	(-1.0752, 12.0281)	3.0080	1.1240	[ $M_3, M_6, M_{10}, M_{11}$ ]
(-1,13)	(-1.0869, 13.0025)	3.4760	0.1000	[ $M_2, M_4, M_{10}, M_{11}$ ]
(-1,14)	(-1.0588, 13.9296)	2.3520	2.8160	[ $M_2, M_6, M_9, M_{11}$ ]
(-1,15)	(-1.0377, 14.9847)	1.5080	0.6120	[ $M_2, M_6, M_9, M_{11}$ ]
<b>平均定位誤差</b>		<b>2.7820</b>	<b>1.6104</b>	

(b) 根據誤差分析選點的定位結果

## 第四章 定位誤差之估測與模擬

本章主要是在分析單一影像參考點的量化誤差對於空間定位誤差的影響，然後進行一連串基於 Cross-Ratio 定位方法的誤差分析之模擬。首先們考量單一參考點的一維誤差（水平誤差），並用泰勒一次近似展開式（Taylor 1st-order Expansion Approximation）估測定位誤差的結果，進而推廣到二維影像誤差。更進一步地，我們估測二維影像誤差與空間定位誤差的線性轉換關係，如此我們可以以一個有效率的誤差分析方式，來估測並模擬定位誤差。

由於用來定位的標記物的幾何分布對於 Cross-Ratio 定位方法的計算誤差有相當的影響，因此參考點的選擇便成為 Cross-Ratio 定位方法的重要課題，而本章模擬結果的觀察與分析，即可以提供自動車在定位時對於參考點選擇的重要依據。

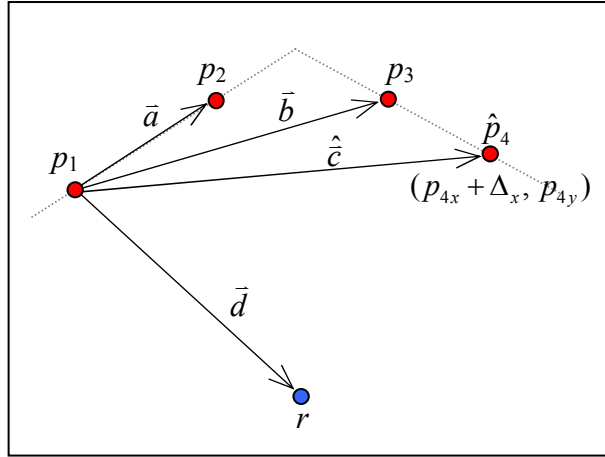
### 4.1 一維線性定位誤差式之推導

在這一節裡，我們欲從數學算式上來分析，當影像參考點有量化誤差時，對於自動車定位的影響。圖 4-1 是參考點  $p_4$  有水平誤差的影像示意圖。在取得影像資料並得到標記物偵測的結果後，我們可以得到標記物  $P_1, P_2, P_3$  和  $P_4$  的影像座標  $p_1, p_2, p_3, p_4$ ，然而若假設  $p_4$  在水平方向有量化誤差  $\Delta_x$ ，則其參考點座標應為  $\hat{p}_4 = (p_{4x} + \Delta_x, p_{4y})$ 。

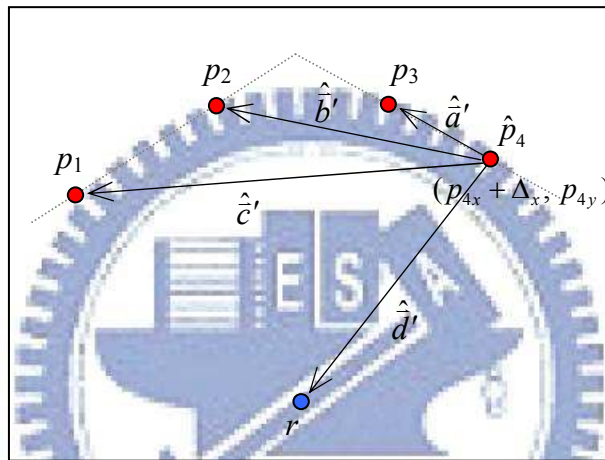
Cross-Ratio 定位方法的第一步就是要計算出影像參考點的 Cross-Ratio 值（2.2.2 節），而影像參考點的誤差便會直接影響 Cross-Ratio，所以首先我們須做的便是計算參考點有誤差情況下的影像的 Cross-Ratio 值。圖 4-1 (a) 是以參考點  $p_1$  為原點射出向量， $p_4$  上有水平誤差  $\Delta_x$ ，則向量  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、 $\vec{b} = (b_x, b_y)$ 、

$$\vec{c} = (c_x + \Delta_x, c_y)、\vec{d} = (d_x, d_y)。令  $k_{ac} = \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix}$ ， $k_{bd} = \begin{vmatrix} b_x & d_x \\ b_y & d_y \end{vmatrix}$ ， $k_{bc} = \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix}$ ，$$

$$k_{ad} = \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix}，類似(2.6)式的計算，我們可以得到一組影像的 Cross-Ratio 值，$$



(a) 以  $p_1$  為原點計算 Cross-Ratio



(b) 以  $p_4$  為原點計算 Cross-Ratio

圖 4-1 一維誤差於參考點  $p_4$  的影像示意圖

$$CR_{\hat{image}} = \frac{|\bar{a} \times \hat{c}| |\bar{b} \times \bar{d}|}{|\bar{b} \times \hat{c}| |\bar{a} \times \bar{d}|} = \frac{\begin{vmatrix} a_x & c_x + \Delta_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_x & d_x \\ b_y & d_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_x & c_x + \Delta_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix}} \triangleq \frac{\hat{q}_1}{\hat{q}_2} = \frac{q_1 - k_{bd} a_y \Delta_x}{q_2 - k_{ad} b_y \Delta_x} \quad (4.1)$$

此外我們亦將 Cross-Ratio 分為分子與分母部份，分別以  $\hat{q}_1$  及  $\hat{q}_2$  表示，以減少計算過程中的量化誤差。影像的 Cross-Ratio 值在分子與分母項都有一次項的誤差。

圖 4-1 (b) 是以參考點  $p_4$  為原點，因為假設原點  $p_4$  亦有水平誤差  $\Delta_x$ ，射出向量變為  $\hat{a}' = (a_x - \Delta_x, a_y)$ 、 $\hat{b}' = (b_x - \Delta_x, b_y)$ 、 $\hat{c}' = (c_x - \Delta_x, c_y)$ 、

$$\hat{d}' = (d_x - \Delta_x, d_y)。令 k'_{ac} = \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a_y & c_y \end{vmatrix}, k'_{bd} = \begin{vmatrix} b_x & d_x \\ b_y & d_y \end{vmatrix}, k'_{bc} = \begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix}, k'_{ad} = \begin{vmatrix} a_x & d_x \\ a_y & d_y \end{vmatrix},$$

則以  $p_4$  為原點的影像的 Cross-Ratio 值成為，

$$\begin{aligned}
 CR'_{image} &= \frac{\left| \hat{a}' \times \hat{c}' \right| \left| \hat{b}' \times \hat{d}' \right|}{\left| \hat{b}' \times \hat{c}' \right| \left| \hat{a}' \times \hat{d}' \right|} = \frac{\begin{vmatrix} a'_x - \Delta_x & c'_x - \Delta_x \\ a'_y & c'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b'_x - \Delta_x & d'_x - \Delta_x \\ b'_y & d'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b'_x - \Delta_x & c'_x - \Delta_x \\ b'_y & c'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_x - \Delta_x & d'_x - \Delta_x \\ a'_y & d'_y \end{vmatrix}} \\
 &\triangleq \frac{\hat{q}'_1}{\hat{q}'_2} = \frac{q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{ac}u_{bd}\Delta_x^2}{q'_2 + u_{ad}k'_{bc}\Delta_x + u_{bc}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中  $u_{ac} = a'_y - c'_y$ ,  $u_{bd} = b'_y - d'_y$ ,  $u_{bc} = b'_y - c'_y$ ,  $u_{ad} = a'_y - d'_y$ 。(4.2)式顯示以  $p_4$  為原點的 Cross-Ratio 值在分子與分母項都會有一次和二次項的誤差 ( $\Delta_x$  和  $\Delta_x^2$ )。

接下來我們將利用 Cross-Ratio 為投影不變量的性質，求算標記物  $P_1$  和標記物  $P_4$  到自動車位置的兩條空間直線方程式。根據式子(2.9)，我們將(4.1)式的 Cross-Ratio 值代入到(2.9)式，以  $P_1$  為原點連到自動車位置  $R$  的直線方程式為，

$$\begin{aligned}
 &\left[ (q_1 - k_{bd}a_y\Delta_x)K_{BC}A_y - (q_2 - k_{ad}b_y\Delta_x)K_{AC}B_y \right] X \\
 &+ \left[ (q_2 - k_{ad}b_y\Delta_x)K_{AC}B_x - (q_1 - k_{bd}a_y\Delta_x)K_{BC}A_x \right] Y \\
 &= (q_2 - k_{ad}b_y\Delta_x)K_{AC} \begin{vmatrix} B_x & P_{1x} \\ B_y & P_{1y} \end{vmatrix} - (q_1 - k_{bd}a_y\Delta_x)K_{BC} \begin{vmatrix} A_x & P_{1x} \\ A_y & P_{1y} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

同樣地，我們接著將(4.2)式的新的 Cross-Ratio 值代入到(2.13)式，則以  $P_4$  為原點連到自動車位置  $R$  的直線方程式如式子(4.4)，

$$\begin{aligned}
 &\left[ (q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{ac}u_{bd}\Delta_x^2)K'_{BD}A'_y \right. \\
 &\quad \left. - (q'_2 + u_{ad}k'_{bc}\Delta_x + u_{bc}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2)K'_{AC}B'_y \right] X \\
 &+ \left[ (q'_2 + u_{ad}k'_{bc}\Delta_x + u_{bc}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2)K'_{AC}B'_x \right. \\
 &\quad \left. - (q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{ac}u_{bd}\Delta_x^2)K'_{BD}A'_x \right] Y \\
 &= (q'_2 + u_{ad}k'_{bc}\Delta_x + u_{bc}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2)K'_{AC} \begin{vmatrix} B'_x & P_{4x} \\ B'_y & P_{4y} \end{vmatrix} \\
 &\quad - (q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{ac}u_{bd}\Delta_x^2)K'_{BD} \begin{vmatrix} A'_x & P_{4x} \\ A'_y & P_{4y} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

將上兩式整理成聯立方程式，並根據 Cramer's Rule 求聯立方程解，可得到方程式(4.5)式和(4.6)式。

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 \hat{X} + \hat{\beta}_1 \hat{Y} = \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \hat{X} + \hat{\beta}_2 \hat{Y} = \hat{\gamma}_2 \end{cases} \tag{4.5}$$



$$(\hat{X}, \hat{Y}) = \left( \begin{array}{c|c} \hat{\gamma}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \hat{\gamma}_2 & \hat{\beta}_2 \\ \hline \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c} \hat{\alpha}_1 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\gamma}_2 \\ \hline \hat{\alpha}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\beta}_2 \end{array} \right) \quad (4.6)$$

由方程式(4.3)、(4.4)和(4.6)，即可以推得新的自動車位置 $\hat{X}$ 與 $\hat{Y}$ 。然而由於(4.3)式有一次項的誤差，(4.4)式有一次和二次項的誤差，在求聯立方程解時，我們可以預期 $\hat{X}$ 與 $\hat{Y}$ 的分子與分母項都會有三次方的誤差，分母項如方程式(4.7)所示。

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{array} \right| &= (q_1 - k_{bd}a_y\Delta_x)(q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{bd}u_{ac}\Delta_x^2)K_{BC}K'_{BC} \left| \begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right| \\ &\quad - (q_1 - k_{bd}a_y\Delta_x)(q'_2 + u_{bc}k'_{bc}\Delta_x + u_{ad}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2)K_{BC}K'_{AC} \left| \begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right| \\ &\quad + (q_2 - k_{ad}b_y\Delta_x)(q'_2 + u_{bc}k'_{bc}\Delta_x + u_{ad}k'_{ad}\Delta_x + u_{bc}u_{ad}\Delta_x^2)K_{AC}K'_{AC} \left| \begin{array}{c} B_x \\ B_y \end{array} \right| \\ &\quad - (q_2 - k_{ad}b_y\Delta_x)(q'_1 + u_{bd}k'_{ac}\Delta_x + u_{ac}k'_{bd}\Delta_x + u_{bd}u_{ac}\Delta_x^2)K_{AC}K'_{BC} \left| \begin{array}{c} B_x \\ B_y \end{array} \right| \end{aligned} \quad (4.7)$$

然而當 $\Delta_x$ 在合理的範圍內或 $\Delta_x$ 很小 ( $|\Delta_x| \leq 1$ )，我們可以假設高次項的誤差 $\Delta_x^n$  ( $n \geq 2$ )是可忽略的，僅留下一次誤差的項次，如(4.8)式所示。

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{array} \right| &\approx \left| \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right| + \left[ M_1 \left| \begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right| - M_2 \left| \begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array} \right| \right. \\ &\quad \left. + M_3 \left| \begin{array}{c} B_x \\ B_y \end{array} \right| - M_4 \left| \begin{array}{c} B_x \\ B_y \end{array} \right| \right] \Delta_x \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中，

$$\begin{aligned} M_1 &= (q_1u_{bd}k'_{ac} + q_1u_{ac}k'_{bd} - q'_1k_{bd}a_y)K_{BC}K'_{BC} \\ M_2 &= (q_1u_{ad}k'_{bc} + q_1u_{bc}k'_{ad} - q'_2k_{bd}a_y)K_{BC}K'_{AC} \\ M_3 &= (q_2u_{ad}k'_{bc} + q_1u_{bc}k'_{ad} - q'_2k_{ad}b_y)K_{AC}K'_{AC} \\ M_4 &= (q_2u_{bd}k'_{ac} + q_2u_{ac}k'_{bd} - q'_1k_{ad}b_y)K_{AC}K'_{BD} \end{aligned}$$

$\hat{X}$ 與 $\hat{Y}$ 的分子項也使用同樣的方式，分別整理為

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \hat{\gamma}_2 & \hat{\beta}_2 \end{vmatrix} &\approx \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \left[ M_1 \left( \begin{vmatrix} R'_x A_x & A'_x \\ R'_x A_y & A'_y \end{vmatrix} + A_x A'_x (P_{1y} - P_{4y}) \right) \right. \\
&- M_2 \left( \begin{vmatrix} R'_x A_x & B'_x \\ R'_x A_y & B'_y \end{vmatrix} + A_x B'_x (P_{1y} - P_{4y}) \right) \\
&+ M_3 \left( \begin{vmatrix} R'_x B_x & A'_x \\ R'_x B_y & A'_y \end{vmatrix} + B_x A'_x (P_{1y} - P_{4y}) \right) \\
&\left. - M_4 \left( \begin{vmatrix} R'_x B_x & A'_x \\ R'_x B_y & A'_y \end{vmatrix} + B_x A'_x (P_{1y} - P_{4y}) \right) \right] \Delta_x
\end{aligned} \tag{4.9}$$

以及

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{\gamma}_2 \end{vmatrix} &\approx \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \left[ M_1 \left( \begin{vmatrix} R_y A_x & A'_x \\ R_y A_y & A'_y \end{vmatrix} + A_y A'_y (P_{4x} - P_{1x}) \right) \right. \\
&- M_2 \left( \begin{vmatrix} R_y A_x & B'_x \\ R_y A_y & B'_y \end{vmatrix} + A_y B'_y (P_{4x} - P_{1x}) \right) \\
&+ M_3 \left( \begin{vmatrix} R_y B_x & B'_x \\ R_y B_y & B'_y \end{vmatrix} + B_y B'_y (P_{4x} - P_{1x}) \right) \\
&\left. - M_4 \left( \begin{vmatrix} R_y B_x & A'_x \\ R_y B_y & A'_y \end{vmatrix} + B_y A'_y (P_{4x} - P_{1x}) \right) \right] \Delta_x
\end{aligned} \tag{4.10}$$

由方程式(4.8)、(4.9)和(4.10)式，即可以將式子(4.6)改寫成

$$\hat{X} \cong \frac{E\Delta_x + F}{I\Delta_x + J} \tag{4.11}$$

$$\hat{Y} \cong \frac{G\Delta_x + H}{I\Delta_x + J} \tag{4.12}$$

方程式(4.11)和(4.12)式是兩個有理式，從式子上來看我們難以了解誤差  $\Delta_x$

對於自動車位置的影響。因此我們由(4.11)式得到  $\Delta_x = \frac{F - \hat{X}J}{\hat{X}I - E}$ ，並將其代入到

(4.12)式消去  $\Delta_x$ ，可以得到如(4.13)式的線性方程式，

$$\hat{Y} = \frac{IH - GJ}{IF - EJ} \hat{X} + \frac{GF - EH}{IF - EJ} \tag{4.13}$$

(4.13)式描述了自動車在  $(X, Y)$  位置時，因為影像誤差所造成切線方向的線性定位軌跡。除此之外，我們也可以直接對式子(4.6)做泰勒展開式的一次近似 (1st-order Taylor Expansion Approximation)，其結果為

$$\begin{cases} \hat{X} \cong \frac{F}{J} + \frac{EJ - FI}{J^2} \Delta_x = X + \frac{EJ - FI}{J^2} \Delta_x & (4.14) \\ \hat{Y} \cong \frac{H}{J} + \frac{GJ - HI}{J^2} \Delta_x = Y + \frac{GJ - HI}{J^2} \Delta_x & (4.15) \end{cases}$$

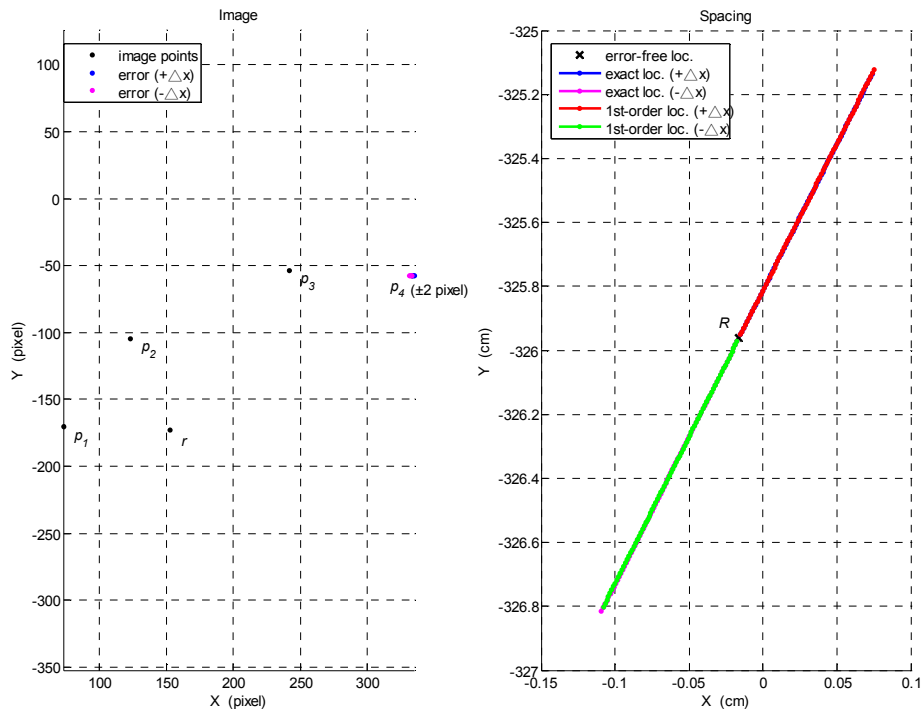
同樣用代入消去法，以(4.14)式的 $\Delta_x$ 代入到(4.15)式，即可以得到與(4.13)式完全相等的線性方程式。由於 $\frac{EJ - FI}{J^2}$ 和 $\frac{GJ - HI}{J^2}$ 都是常數，泰勒一次近似的結果意味著當 $\Delta_x$ 很小時（ $\Delta_x \leq 1$ ），二維影像誤差與三維定位誤差之間有一線性關係。這可以幫助我們以一個有效率的方式來模擬自動車的定位誤差。

## 4.2 模擬水平方向影像誤差所造成的空間定位誤差

根據 4.1 節的推導，我們接下來即可利用泰勒一次展開式近似自動車定位誤差的結果，來模擬當影像參考點有水平誤差時，對於自動車在三維空間定位誤差的影響。

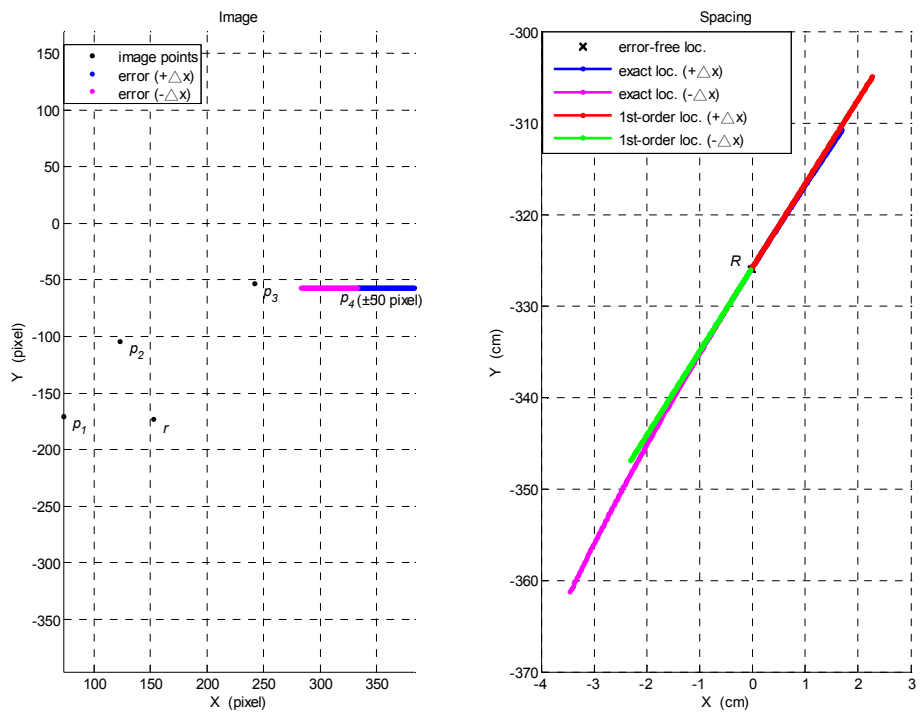
圖 4-2 和圖 4-3 是以水平影像誤差模擬空間定位誤差的結果，前者的水平影像誤差範圍在 $\pm 2$  pixel 之間，後者則在 $\pm 50$  pixel 之間。圖 4-2 (a)和圖 4-3 (a)是影像平面的示意圖，平面上有參考點 $p_1, p_2, p_3, p_4$ 和影像定位點 $r$ ，在影像參考點 $p_4$ 兩側的影像誤差以紫紅色和藍色的點表示。自動車在三維空間定位的軌跡則顯示在圖 4-2 (b)及圖 4-3 (b)上， $R$ 是在沒有誤差和雜訊的情況下所定位出來的自動車座標；在影像參考點 $p_4$ 有水平誤差時，以 Cross-Ratio 方法實際定位的結果（式子(4.6)）以紫紅色與藍色的定位軌跡來顯示；而紅色和綠色的定位軌跡則是以泰勒一次展開式（式子(4.14)和(4.15)）去近似定位誤差的結果。

我們可以看到圖 4-2 (b)的實際定位的軌跡和一次近似的軌跡幾乎重疊，且其軌跡近於直線。圖 4-3 (b)則顯示大範圍的影像誤差（ $\pm 50$  pixel）在實際定位軌跡會呈現曲線的情況。由於之前的推導，我們知道 Cross-Ratio 定位方法對於水平誤差 $\Delta_x$ 會有三次式的效果，所以當 $\Delta_x$ 很大時，實際定位的軌跡是曲線的。然而圖 4-2 已顯示了當 $\Delta_x$ 合理的小範圍時，利用一次近似的線性誤差方程式，就可以很好地描述自動車在空間定位的誤差。



(a) 影像平面 (b) 場景空間

圖 4-2 單一影像點水平誤差 ( $\pm 2$  pixel) 與空間定位誤差



(a) 影像平面 (b) 場景空間

圖 4-3 單一影像點水平誤差 ( $\pm 50$  pixel) 與空間定位誤差

### 4.3 推廣到二維影像誤差

上一節我們對於單一影像點水平誤差對於空間誤差的影響，已進行了一些模擬，且發現在小範圍的影像誤差內，定位誤差是線性的。接下來我們欲將上述結果推廣到二維影像誤差上。一個影像參考點的二維誤差 $(\Delta_x, \Delta_y)$ ，若是要從數學式上來推導，其式子是相當複雜的。然而我們可以對影像座標系做一個座標轉換，亦即利用一個旋轉矩陣讓整個座標系旋轉 $\theta$ 度。我們可以這麼做的理由是，雖然在座標系轉換後造成參考點座標改變，但在影像上組成的 Cross-Ratio 值是不變的，同樣可以用來做為自動車定位空間座標的依據。如此一來我們不需再從式子上去推導，也不需用到更複雜的計算，就可以推廣到二維影像誤差。

圖 4-4 是我們模擬二維影像誤差對於空間定位誤差的結果。在左圖中，影像參考點  $p_4$  上有水平、垂直以及四十五度角方向的誤差，每個方向的誤差範圍都在 $\pm 2$  pixel 之間。其右圖中的藍色點是實際定位的結果，紫紅色的點則是利用一次近似所得定位誤差的結果。經由座標轉換的方法，我們可以描述二維影像上任意方向的誤差，並且發現它們在小範圍的誤差情況下依然可以很好地描述定位誤差。

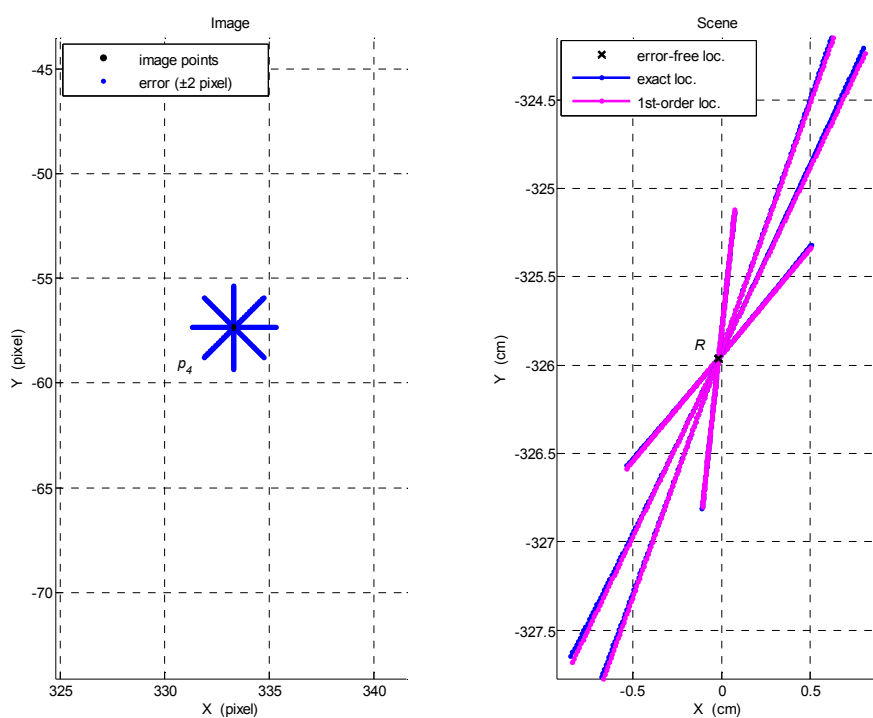


圖 4-4 二維影像誤差（左）與其所造成之空間定位誤差（右）

以上的模擬皆是以直線方向來看誤差的軌跡，接下來我們以影像參考點  $p_4$  為圓心，影像誤差同心圓由內向外擴展，並觀察空間定位誤差的情況。圖 4-5 顯示參考點  $p_4$  上有八個誤差圓，每一圓上有 72 個誤差點，而他們在空間定位的軌跡如右圖所示，藍色的點是實際定位的結果，紅色點則是一次近似的定位誤差結果。我們可以發現每一個誤差圓在空間定位上形成類似橢圓的軌跡。圖 4-6 則是模擬在參考點  $p_4$  上有一個半徑為 2 pixel 的誤差圓時，實際定位的橢圓軌跡（藍色橢圓）與一次近似的橢圓軌跡是很相近的。

其實實際定位的軌跡並不是一個理想的橢圓，只是近似橢圓的形狀，因為實際定位的結果含有高次項誤差的影響，在大範圍誤差的情況下，其軌跡不再會是近似橢圓的形狀。然而，我們著重於探討量化誤差對於自動車定位的影響，而通常量化誤差的範圍以  $\pm 2$  pixel 來描述應該就已足夠。

我們已知道在合理範圍內，影像參考點上的一個誤差圓，會在空間定位出橢圓的軌跡，那麼橢圓的大小與方向可以做為參考點對於空間定位誤差的敏感度的依據，這可以幫助我們在自動車即時定位時選擇出適當的參考點，以期降低計算誤差。下兩節，我們將對誤差橢圓做進一步的分析與探討。

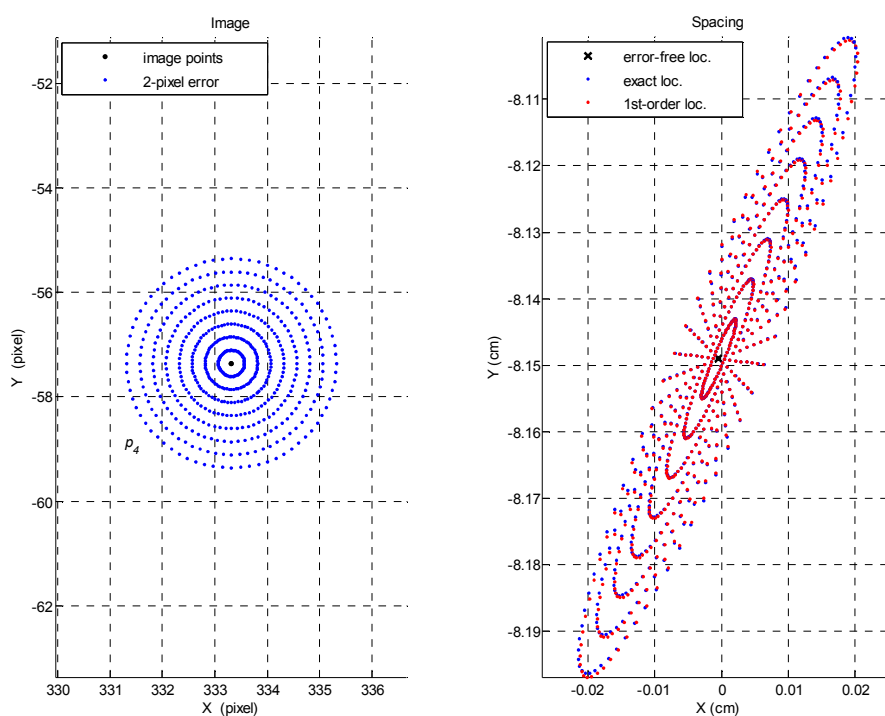


圖 4-5 以  $p_4$  為圓心的影像誤差同心圓（左）與空間定位誤差軌跡（右）

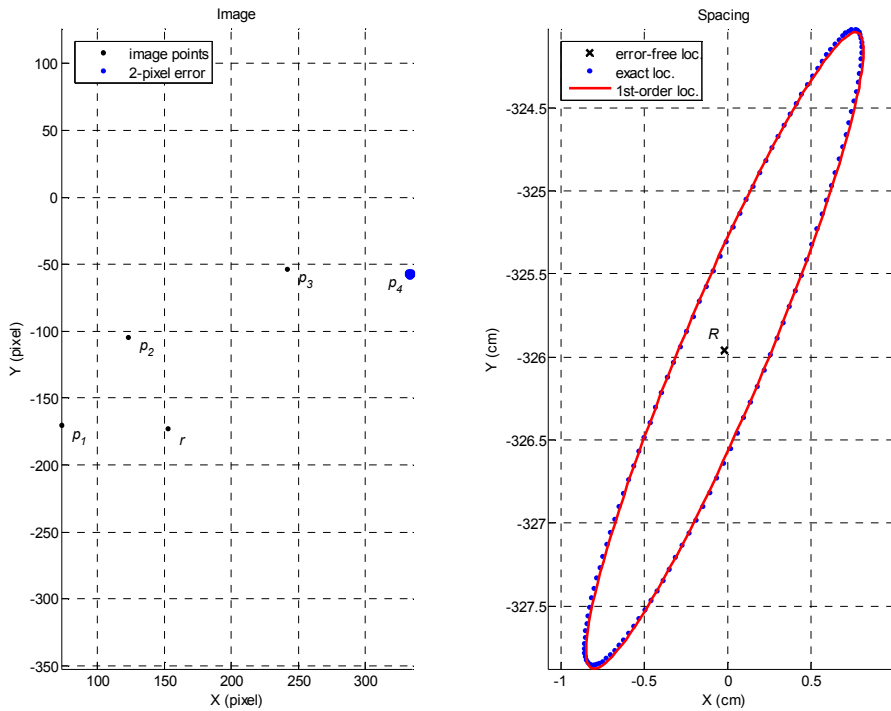


圖 4-6 以  $p_4$  為圓心、半徑為 2-pixel 的影像誤差圓（左）與空間定位橢圓軌跡（右）

#### 4.4 影像誤差與空間誤差的線性轉換

由於之前的算式推導和誤差模擬的結果，我們知道影像誤差與空間定位誤差之間在合理的誤差範圍內是一線性關係，因此我們可用一個轉換矩陣

(Transformation Matrix)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  來表示它們之間的線性轉換關係，

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

其中  $\hat{p}_x$ ,  $\hat{p}_y$  代表影像參考點上的一個誤差點座標， $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  則是在場景空間的定位座標。轉換矩陣可以由兩個影像誤差點及其對應的空間定位座標求算出來。圖 4-7 顯示了線性轉換的結果，我們取兩個影像誤差點當作樣本點 (Sample Point)，分別是在參考點  $p_4$  的誤差圓範圍上的  $(\Delta_x, \Delta_y)=(2, 0)$  和  $(\Delta_x, \Delta_y)=(0, -2)$ ，於圖 4-7 影像平面上以綠色符號「x」表示。將這兩個影像誤差點做一次近似的定位，可得到對應的空間定位座標，在場景示意圖中同樣以綠色的「x」表示。如此一來，我們就可以求算轉換矩陣，在此模擬實例中轉換矩陣的結果為

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0011446 & -0.010351 \\ -0.010491 & -0.021524 \end{bmatrix}$$

圖 4-7 場景示意圖的藍色橢圓是實際定位的結果，青藍色的點代表誤差圓上的每一影像誤差點代入到一次近似式 ((4.14) 式與(4.15) 式) 的空間定位結果。透過轉換矩陣我們亦可求得每一影像誤差點在空間中所對應的定位座標，以紅色連線橢圓描繪於圖 4-7 的場景示意圖，而一次近似的結果與透過轉換矩陣計算的定位結果相當一致，亦即它們在空間定位的軌跡幾乎是完全重疊的。

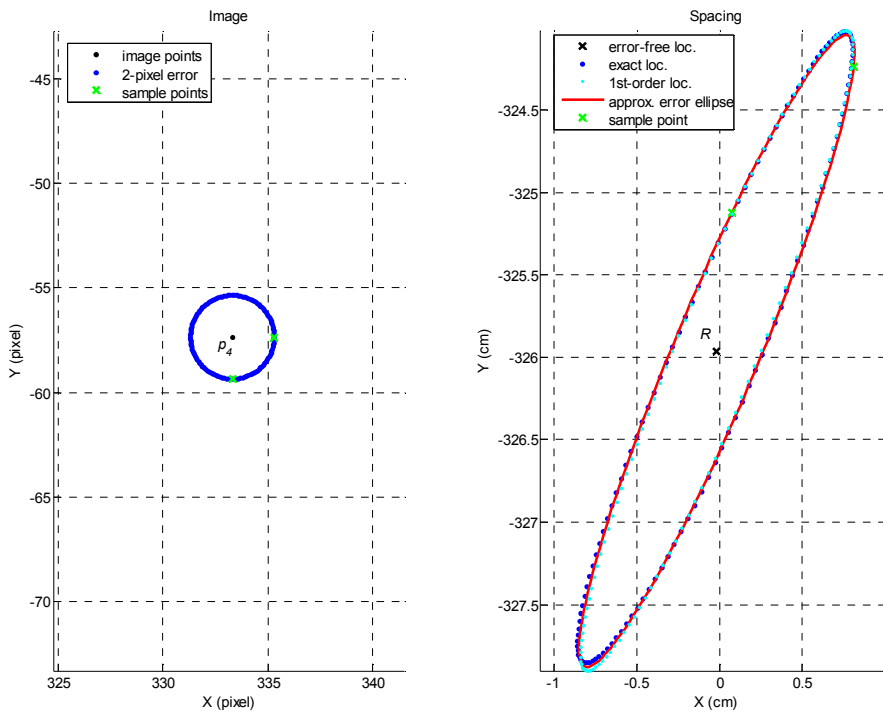


圖 4-7 影像誤差於空間定位誤差的線性轉換結果

## 4.5 誤差橢圓的參數估計

在這一節裡，我們將延續影像誤差與空間定位誤差的線性轉換關係的概念，求算誤差橢圓的參數，亦即橢圓的長軸、短軸和旋轉角度。橢圓參數將有助於我們了解參考點的影像誤差對於空間定位誤差的敏感度。

我們將影像參考點上的誤差圓以圓方程式  $\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 = 1$  表示，根據方程式 (4.16)，影像誤差的座標為  $(\hat{p}_x, \hat{p}_y) = \left( \frac{d\hat{X} - b\hat{Y}}{ad - bc}, \frac{a\hat{Y} - c\hat{X}}{ad - bc} \right)$ ，將其代入圓方程式，

我們可以得到空間誤差橢圓的方程式(4.17)



$$\frac{c^2 + d^2}{(ad - bc)^2} \hat{X}^2 + \frac{a^2 + b^2}{(ad - bc)^2} \hat{Y}^2 - 2 \frac{(ac + bd)}{(ad - bc)^2} \hat{X}\hat{Y} = 1 \quad (4.17)$$

式子(4.17)並不是一個標準的橢圓方程式（水平或垂直橢圓方程式），因為橢圓旋轉了 $\theta$ 角，因此無法直接從式子上得知橢圓的長短軸之長。然而經由座標轉換，我們可以找到對應的橢圓標準方程式，這個座標轉換就是透過一個旋轉矩陣。首先令水平或垂直的橢圓標準方程式為

$$\frac{\hat{X}'^2}{A^2} + \frac{\hat{Y}'^2}{B^2} = 1 \quad (4.18)$$

其中 $A$ 、 $B$ 是橢圓的長短軸之半。當橢圓旋轉 $\theta$ 角，則 $(\hat{X}, \hat{Y})$ 與 $(\hat{X}', \hat{Y}')$ 的轉換關係如式子(4.19)所示

$$\begin{bmatrix} \hat{X}' \\ \hat{Y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

將(4.19)式的 $(\hat{X}, \hat{Y})$ 代入到(4.18)式中，整理係數後與(4.17)式做係數比較，我們可以得到橢圓參數如下：

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{-2(ac + bd)}{c^2 + d^2 - a^2 - b^2} \right) \quad (4.20)$$

$$A = \sqrt{\frac{2(ad - bc)^2 \sin(2\theta)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \sin(2\theta) - 2(ac + bd)}} \quad (4.21)$$

$$B = \sqrt{\frac{2(ad - bc)^2 \sin(2\theta)}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \sin(2\theta) + 2(ac + bd)}} \quad (4.22)$$

圖 4-8 是我們求算橢圓參數的結果。其中 $(\theta, A, B) = (-22.6438^\circ, 0.1296 \text{ cm}, 1.0364 \text{ cm})$ ，並將橢圓長短軸以藍色線段標示於圖上。

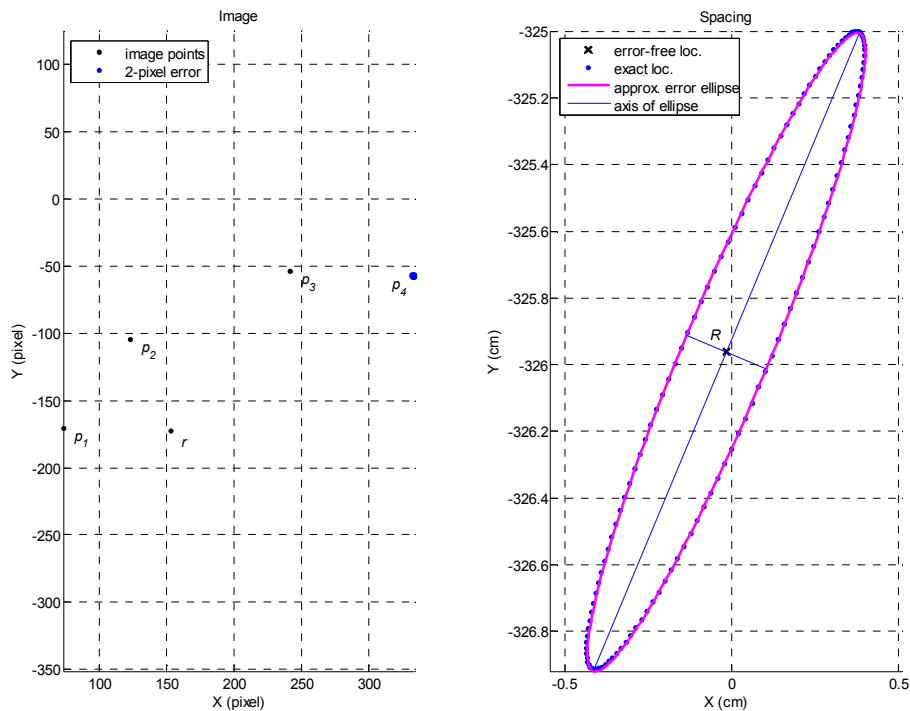


圖 4-8 空間誤差橢圓之長短軸與旋轉角度

上一章我們曾討論到，對於 Cross-Ratio 定位方法的計算誤差除了量化誤差以外，還有因為參考點的幾何分布造成的影響，其中，後者將有賴於選擇出適當的參考點來降低誤差。而現在我們已經可以相當正確地描述影像誤差造成空間定位誤差的橢圓軌跡，也能夠計算出橢圓的長短軸大小與長短軸之方向，其中橢圓之長短軸可直接界定空間定位誤差的範圍，而橢圓長軸之方向也代表著影像誤差之於空間定位誤差有較高的敏感度之方向。這些定位誤差的資訊，將可以成為 Cross-Ratio 定位方法中對於參考點選點的重要依據，並幫助我們發展出有效率且穩定可靠的自動車定位系統。

## 第五章 誤差估測於定位之應用

本章我們將討論空間定位誤差之估測於定位導航的應用。我們根據一些實驗的實例，應用第四章模擬誤差橢圓的推估結果，從中探討並說明定位時參考點選擇的準則。如何選擇一組最理想的參考點（Optimal Choice of Reference Point Selection）在定位的穩定性研究當中是一個重要的課題。然而，最理想的參考點選擇取決於環境與使用者的需求。因此對於空間誤差橢圓的分析，我們會從兩個方面來看：(1)誤差範圍；(2)誤差分佈。前者即是指誤差橢圓面積的大小，後者則是考量誤差橢圓長短軸的方向，亦即對特定方向的誤差敏感度。

最後我們將討論多重影像誤差點的情況，基於第四章的影像誤差與空間定位誤差之線性關係，我們提出了一個有效率的方法，去估測多重影像誤差對於空間定位誤差的影響。

### 5.1 定位標記物選點之探討

本節主要是探討選用不同的標記物，對於定位誤差的不同影響。在實際的自動車定位應用中，我們常有多於四個以上的參考點可供選擇，以計算 Cross-Ratio 定位。圖 5-1 顯示影像平面上有五個影像參考點  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ ，參考點  $p_5$  上有半徑為 2 pixel 的誤差圓。選用  $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  計算 Cross-Ratio 進行實際定位的結果標示在空間平面示意圖上的藍色點集合；而選用  $\{p_1, p_3, p_4, p_5\}$  進行實際定位的結果以青綠色點集合標示；紫紅色與紅色的橢圓分別是對應於前兩者的推估誤差橢圓。

首先值得注意的是，當選用不同組標記物來進行定位時，所得到誤差橢圓的中心不會重疊，以這個例子來看，其橢圓中心分別在  $X$  和  $Y$  方向差了大約 1cm。這是因為我們所採用的參考點位置皆是從實驗得來的，每一參考點實際上都會有各自的誤差量。有關於多重參考點之影像誤差的情況，是比誤差在單一參考點上的情況要更複雜得多的，我們將在下一節做多重參考點誤差的討論。

觀察兩個推估的誤差橢圓，紅色誤差橢圓所涵蓋的面積顯然比藍色誤差橢圓的大，也就是說，選用參考點  $\{p_1, p_3, p_4, p_5\}$  進行定位的誤差情況較為嚴重。因此

我們在定位時，宜選用  $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  做為 Cross-Ratio 定位方法的參考點，以期獲得較穩定的定位結果。另外，從參考點的幾何分布來看，參考點  $p_3, p_4, p_5$  有接近共線的情形，因此可以預期選用  $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  對於 Cross-Ratio 計算會有比較大的計算誤差，這與我們前述對於定位時參考點選擇的建議是一致的。

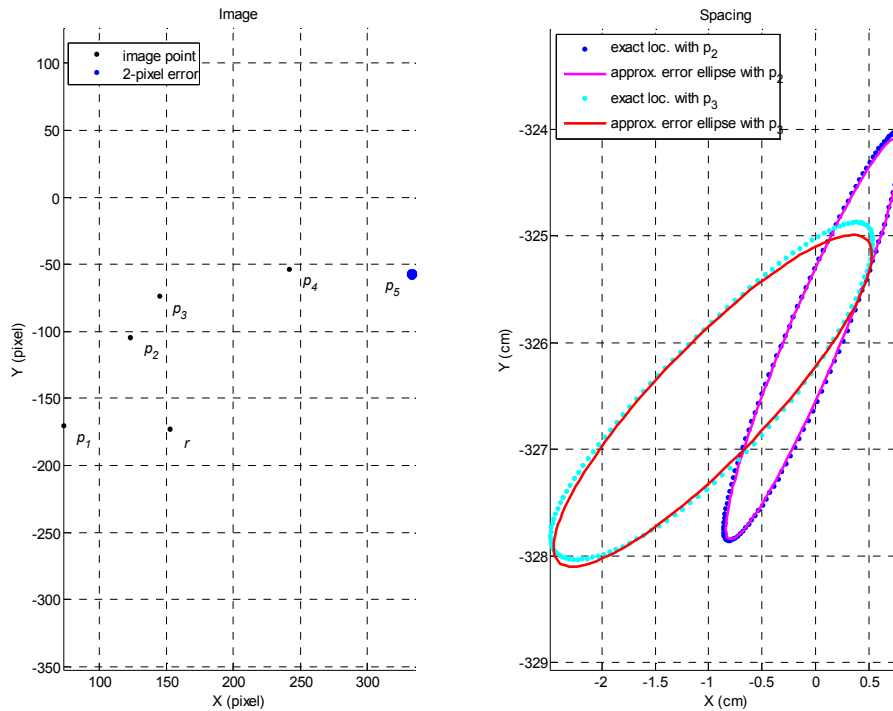
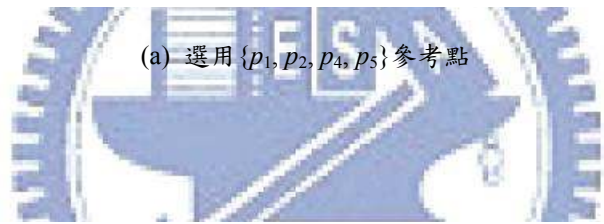
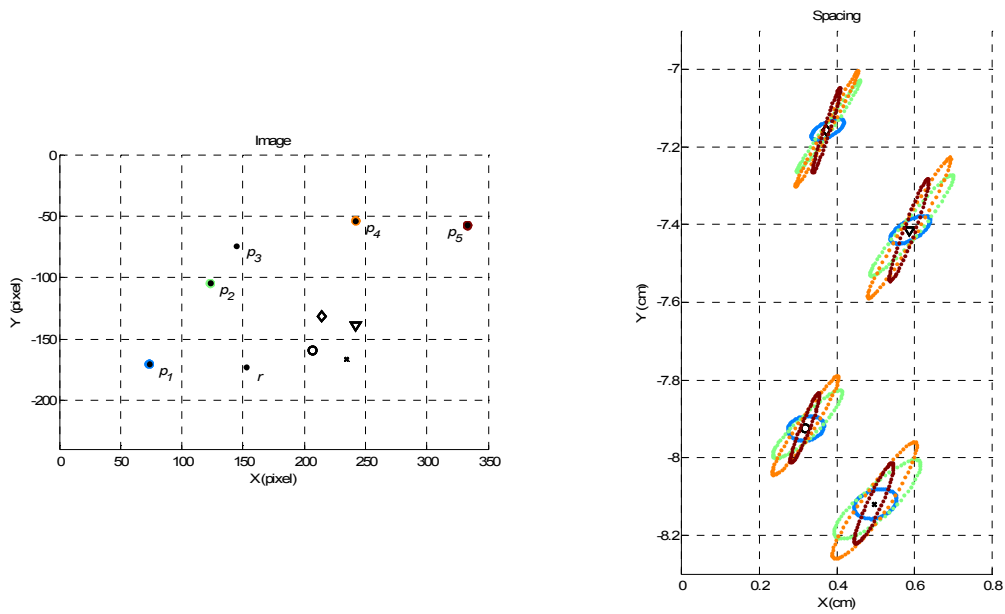


圖 5-1 挑選不同標記物的定位誤差橢圓

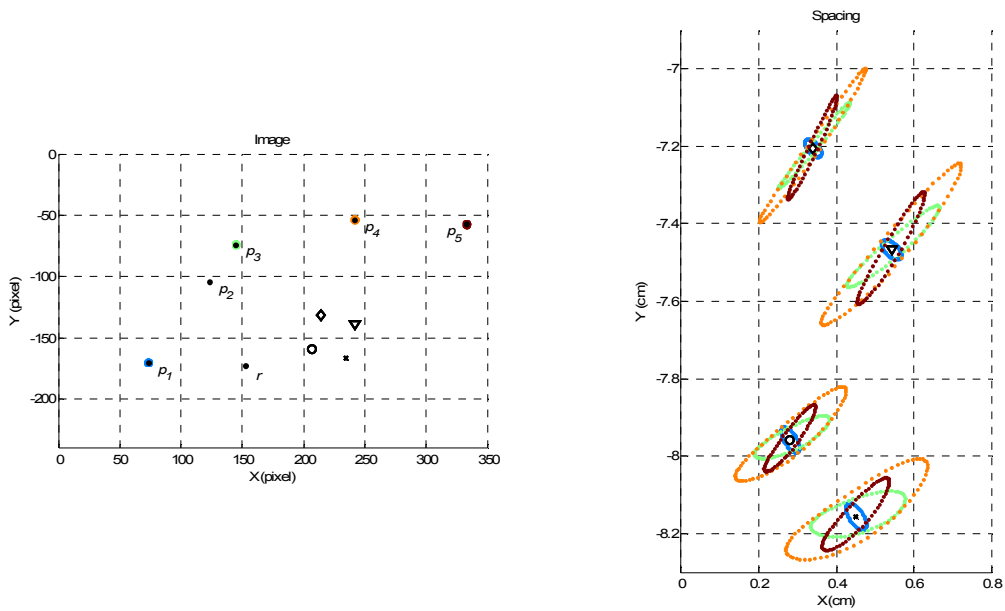
圖 5-2 與圖 5-1 使用同樣的實驗例子來模擬誤差，我們一樣著重在探討單一參考點誤差之情況。每一參考點的圓形誤差所對應之空間誤差橢圓，都是在假設其它參考點完全沒有誤差的情況下所推估出來的。空間平面的藍色、綠色、橘色及棕色誤差橢圓分別是在  $p_1, p_2$  (或  $p_3$ ),  $p_4, p_5$  上有一半徑為 2 pixel 之誤差圓，所推估出來的誤差橢圓結果。以圖 5-2 (a)和圖 5-2 (b)來比較，選用參考點  $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  所得的推估誤差橢圓其誤差範圍是較小的。

在這裡，我們也同時對不同的影像定位點(分別以符號「◇」、「○」、「×」、「▽」表示)做定位誤差模擬。以誤差範圍(亦即誤差橢圓之面積)或平均誤差來看，在「◇」位置的影像定位點所得到的重建結果是較穩定的。但以誤差分布行為來看(亦即誤差橢圓之長軸方向)，在「◇」位置的影像定位點對於一點鐘方向的誤差特別敏感，若是實驗環境在此方向上的可行走路徑很狹窄，那麼自動

車極有可能因為定位誤差過大而碰撞到牆壁或障礙物。上述觀察提供了自動車在導航路徑規劃 (Path Planning) 時一項有用的資訊。



(a) 選用  $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$  參考點



(b) 選用  $\{p_1, p_3, p_4, p_5\}$  參考點

圖 5-2 不同標記物選擇於不同影像定位點所造成之定位誤差範圍

## 5.2 多重影像參考點之誤差探討

接下來我們欲探討多重參考點之影像誤差對於空間定位誤差的影響。圖 5-3 是我們考慮  $p_2$  與  $p_4$  都有半徑為 2 pixel 之內的圓形誤差，每一圓上有 64 個誤差點，因此三維空間之對應平面上總共有  $64 \times 64$  個定位誤差點。觀察空間定位誤差點的形狀，我們發現多重參考點之影像誤差所形成空間定位誤差的分布情形，大致上是由兩個方向的橢圓所組成的。以下我們將之分為兩部份來看。

圖 5-4 與圖 5-5 分別顯示了圖 5-3 的部份定位誤差結果。圖 5-4 是我們在參考點  $p_4$  上放置 64 個誤差點所形成的誤差圓，以藍色點標示於(b)圖，然後在  $p_3$  上放置 16 個彩色的誤差點，標示於(a)圖，各點於影像中之相對位置顯示於(c)圖，而其定位結果則顯示於(d)圖。圖 5-5 則是在參考點  $p_3$  上放置 64 個誤差點所形成的誤差圓（標示於(a)圖的藍色點），然後在  $p_4$  上放置 16 個彩色的誤差點，標示於(b)圖，其定位結果顯示於圖 5-5 (d)。圖 5-4 (d)與圖 5-5 (d)的每一彩色點集合形成類似橢圓的軌跡，都是由對應的每一彩色誤差點與藍色圓誤差點定位出來的結果。可以發現兩圖的橢圓群之長軸方向皆朝向同一方向，而且兩群誤差橢圓所涵蓋的誤差範圍是相同的。

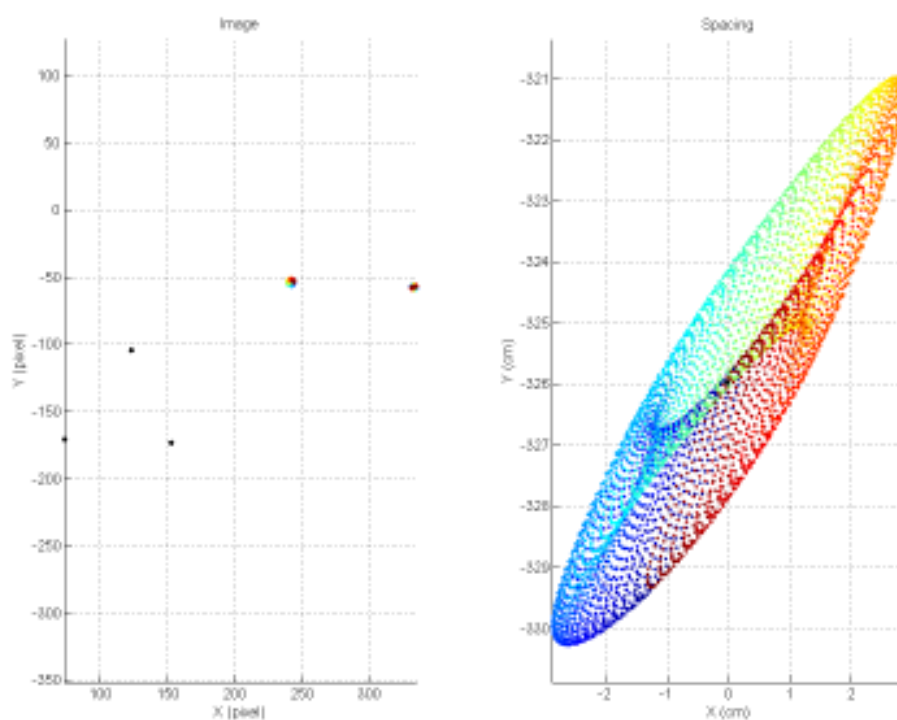


圖 5-3 多重參考點影像誤差（左）與空間定位誤差之分布（右）

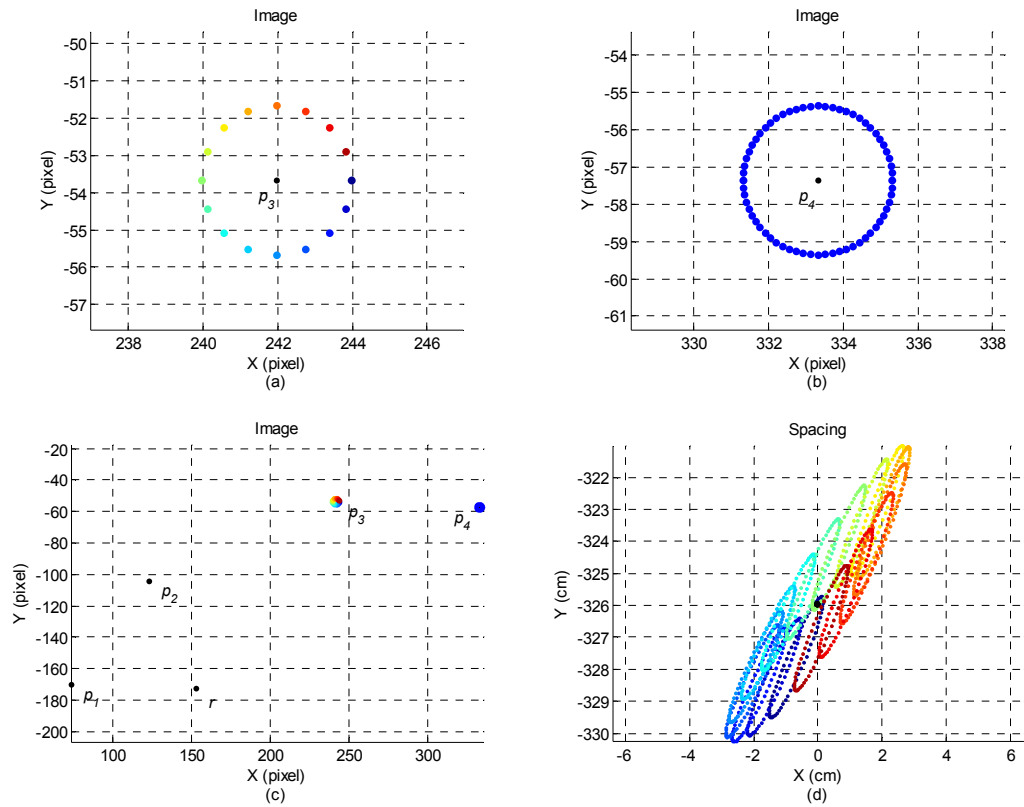


圖 5-4 多重參考點影像誤差 ( $p_3$  誤差點—16 個;  $p_4$  誤差點—64 個) 與空間定位誤差之分布

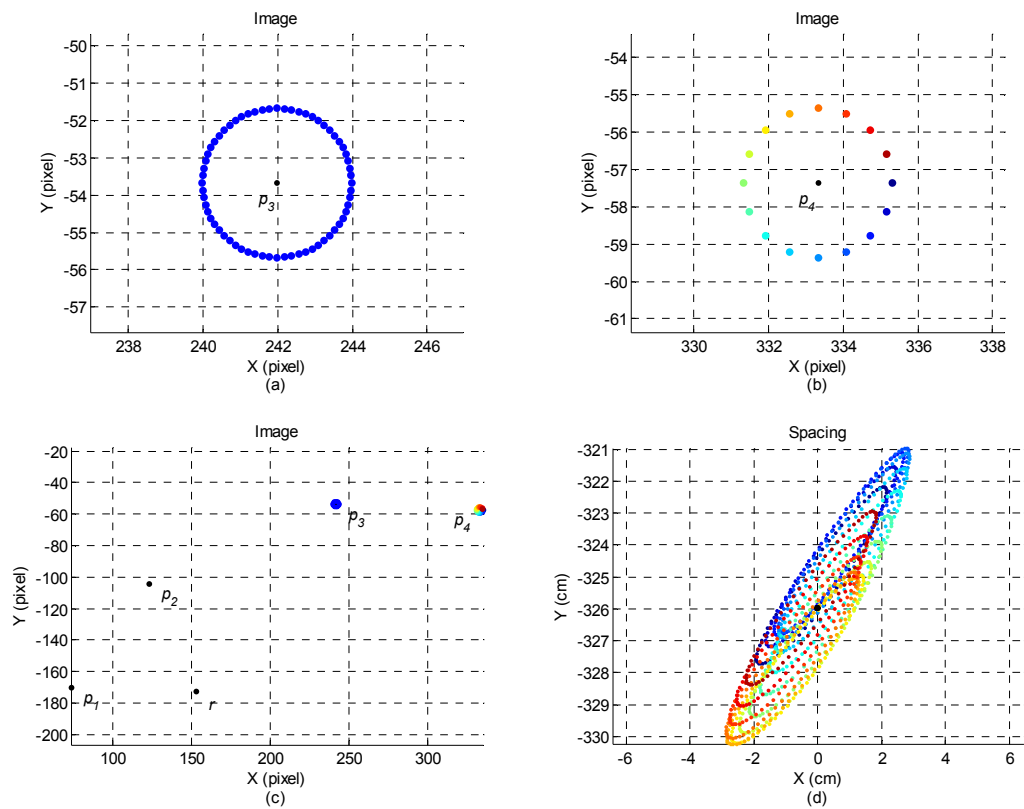


圖 5-5 多重參考點影像誤差 ( $p_3$  誤差點—64 個;  $p_4$  誤差點—16 個) 與空間定位誤差之分布

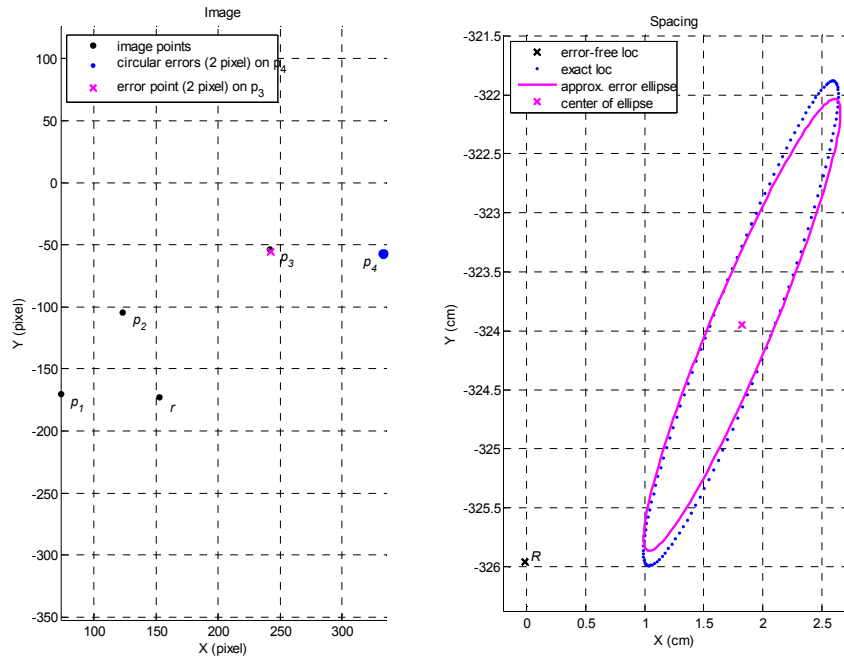
### 5.3 定位誤差分佈的線性組合

由於 5.2 節的觀察，讓我們有興趣去探討：如果分別對兩個影像點誤差圓找出對應的兩群推估之誤差橢圓，對兩群橢圓交互做線性組合（Linear Combination），是否也會涵蓋出一個近似於因兩參考點之影像誤差所造成實際定位誤差的範圍。

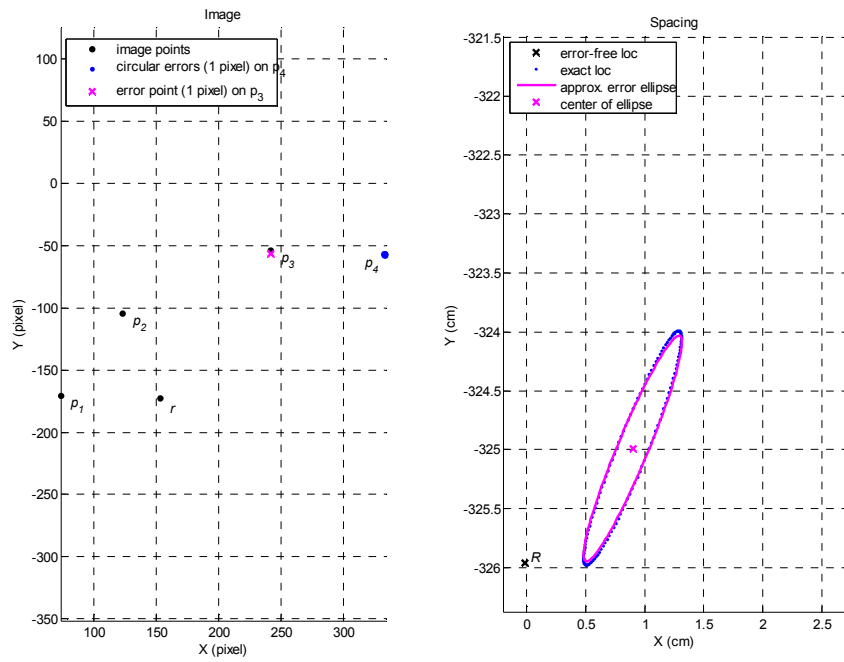
線性組合是一個線性代數中的概念，代表一些抽象的向量各自乘上一個純量後再相加。而在我們的定位誤差分析裡，基於線性組合的概念是：每一參考點之影像誤差對於空間定位誤差皆是線性的轉換關係（Linearity）。

圖 5-6 是模擬多重影像參考點於空間定位誤差之線性組合的結果。圖 5-6 (a) 的影像平面上，距離參考點  $p_3$  有一個為 2 pixel 的誤差點（以紫紅色「x」表示），在假設其他參考點皆沒有誤差的情況下，我們所得到的空間定位結果以紫紅色「x」標示在場景示意圖上。然後若假設影像參考點  $p_4$  上另有半徑為 2 pixel 的誤差圓（藍色圓形），我們則可以利用第四章提出的一次近似的方法找到空間定位誤差橢圓。接下來將誤差橢圓中心平移到紫紅色「x」的位置，即為空間示意圖之紫紅色橢圓。藍色橢圓則是同時考慮  $p_3$  及  $p_4$  都有誤差的情況下，以 Cross-Ratio 定位方法進行實際定位的結果。圖 5-6 (b) 則是誤差範圍皆在 1 pixel 的模擬結果。我們可以發現定位誤差經過線性組合的結果後，縱然近似結果的偏差較之於單一參考點誤差之定位估計要大一些，但其估計之誤差橢圓與實際定位誤差之軌跡與範圍仍是相似的，而在 1 pixel 誤差範圍的模擬結果中二者之軌跡則是幾乎重疊的。





(a) 2-pixel 誤差範圍



(b) 1-pixel 誤差範圍

圖 5-6 兩影像參考點誤差於空間定位誤差之線性組合

圖 5-7 與圖 5-8 是在兩個影像參考點均有誤差時，所造成空間的定位誤差範圍。圖 5-7(a)中是在  $p_3$  上放置 64 個誤差點所形成的誤差圓， $p_4$  上則有 16 個彩色的誤差點，二者之誤差大小均為一個像素；圖 5-7 (b)則顯示對應的每一彩色誤差點與前述誤差圓所獲得之定位結果。圖 5-8 (a)則在  $p_4$  上放置 64 個誤差點所形成的誤差圓， $p_3$  上則有 16 個彩色的誤差點；定位誤差分析結果顯示於圖 5-8 (b)。

圖 5-9 顯示兩點影像誤差在空間中的定位誤差範圍。圖 5-9(a)在  $p_3$  與  $p_4$  上分別有 64 個誤差點形成的誤差圓。每一誤差點與在另一參考點上的誤差圓在空間中的定位誤差形成一個誤差橢圓，因此會有  $64 \times 64$  個誤差橢圓。考慮同時有兩點影像誤差欲模擬定位誤差的情況，我們利用本節所述之定位誤差線性組合的方法，將這些誤差橢圓群以紫紅色橢圓顯示在圖 5-9 (b)上，藍色點則是實際定位的結果。紫紅色橢圓群所涵蓋的範圍，就是我們以定位誤差分析方法加上線性組合的概念，在兩點參考點有影像誤差時，去模擬定位誤差所估計出來的定位誤差範圍。在這個例子裡， $X$  方向與  $Y$  方向的定位誤差範圍分別在  $\pm 3$  公分和  $\pm 5$  公分以內。比較實際定位誤差範圍與以我們的方法所模擬的定位誤差範圍，可以發現我們模擬的誤差範圍相當接近於實際的定位誤差範圍，且定位誤差分佈的方向與大小都能有很好的估計結果。

影像參考點誤差於空間定位誤差之線性組合，提供了一個有效率的、且能進行多重影像參考點（兩點以上）誤差對於空間定位誤差之影響的分析方法。更進一步地，我們可以由此推估出在多個參考點上有誤差的情況，其定位誤差的範圍（Global Error Bound），這對於自動車定位導航之應用會是一項相當有用的資訊。

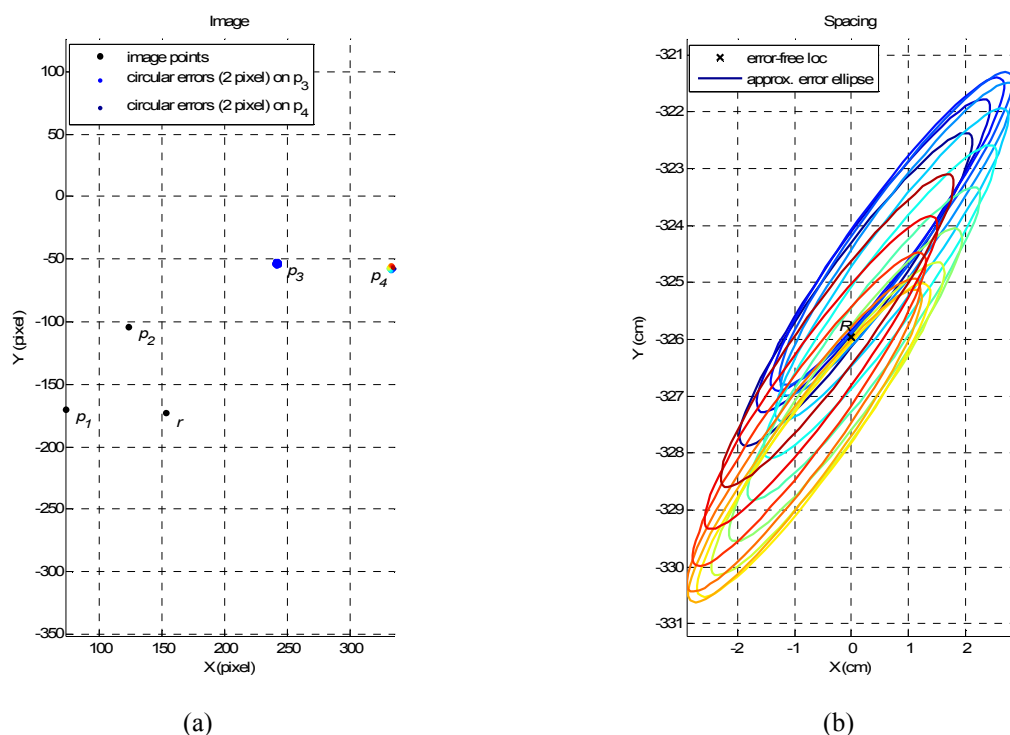
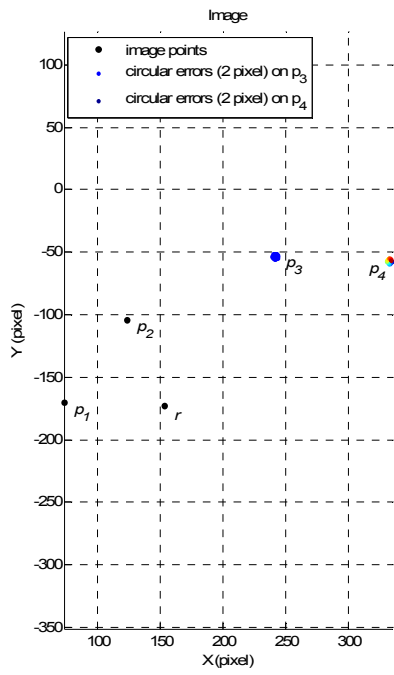
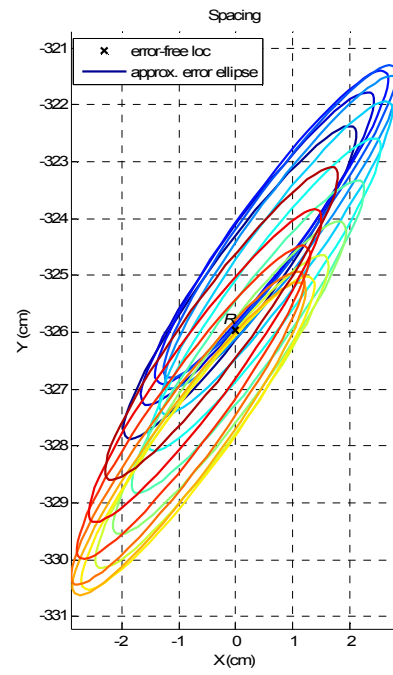


圖 5-7 兩點影像誤差(a)所造成之定位誤差(b)

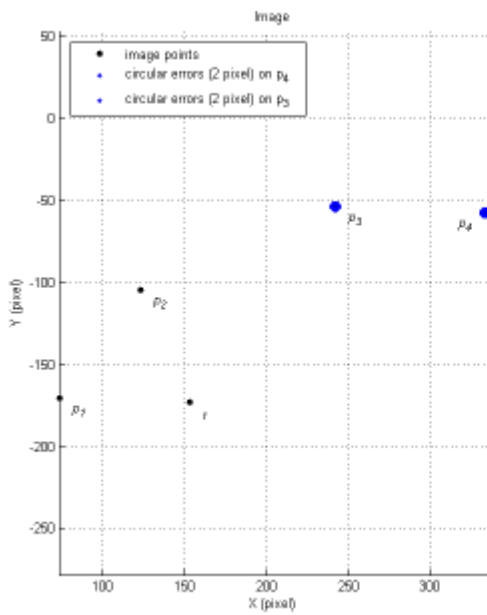


(a)

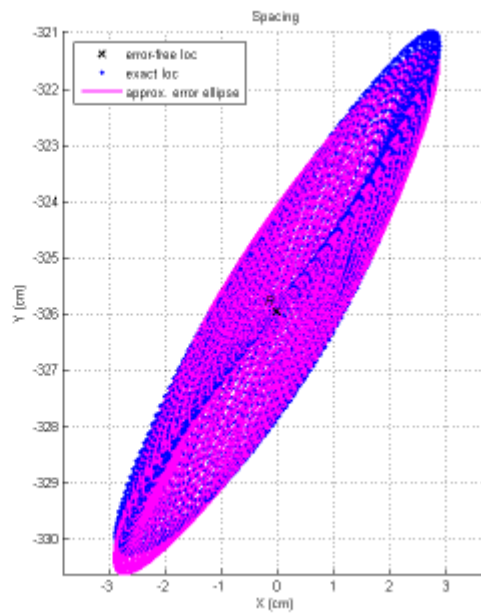


(b)

圖 5-8 兩點影像誤差(a)所造成之定位誤差(b)



(a)



(b)

圖 5-9 兩點影像誤差(a)所造成的空間定位誤差範圍(b)

## 第六章 結論與未來展望

在本篇論文當中，我們介紹了奠基於 Cross-Ratio 的投影不變 (Projective Invariant) 性質來定位自動車的方法，並據此進行誤差分析。同時我們根據實際的定位實驗，探討 Cross-Ratio 定位方法所會產生的誤差。對於影像上單一參考點誤差所造成的空間定位誤差，我們由一次近似來簡化定位誤差之估計，更進一步地，我們也導出了在合理的誤差範圍內，二維影像誤差與空間定位誤差間的線性轉換關係。如此一來，我們便可以利用一個有效率的誤差分析方式，來估測並模擬自動車之定位誤差。

由於用來定位的標記物的幾何分布對於 Cross-Ratio 定位方法的計算誤差有相當的影響，因此參考點的選擇便成為 Cross-Ratio 定位方法的重要課題，而模擬結果的觀察與分析，即可以提供自動車在定位時對於參考點選擇的重要依據。藉由線性轉換關係，我們可以相當準確地描述影像誤差所造成的空間定位誤差橢圓，包括橢圓的長短軸大小與長短軸之方向。這些資訊提供了量化的指標，例如誤差範圍、最大誤差方向等，因此可以幫助我們發展出有效率且穩定可靠的自動車定位系統。

另一方面，在多個影像參考點有誤差的情況，我們也利用各別參考點所造成的空間定位誤差之線性組合，有效率地描述多重影像參考點 (兩點以上) 誤差對於空間定位誤差之影響。未來的研究方向，我們將探討誤差發生於 Cross-Ratio 計算原點所造成的定位誤差，是否會比在非原點上敏感。另外，也將探討所有參考點皆有誤差情況下的定位誤差的範圍 (Global Error Bound)，這對於使用 Cross-Ratio 做定位，例如自動車即時定位及導航，會是一項相當有效率且實用的資訊。

## 參考文獻

- [1] M. Rous, H. Lupschen, and K. F. Kraiss, "Vision-Based Indoor Scene Analysis for Natural Landmark Detection," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 342-347, 2005.
- [2] J. B. Hayet, F. Lérale, and M. Devy, "Visual Landmarks Detection and Recognition for Mobile Robot Navigation," *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, pp. 313-318, 2003.
- [3] L. Andrade, M. Campos, and R. Carceroni, "A Video-Based Support System for Nighttime Navigation in Semi-Structured Environments," *IEEE Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pp. 178-185, 2004.
- [4] E. Rivlin, I. Shimshoni, and E. Smolyar, "Image-Based Robot Navigation in Unknown Indoor environments," *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2736-2742, 2003.
- [5] R. Basri, E. Rivlin, and I. Shimshoni, "Image-Based Robot Navigation Under the Perspective Model," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3578-2583, 1999.
- [6] F. Chenavier and J. L. Crowley, "Position Estimation for a Mobile Robot Using Vision and Odometry," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2588-2593, 2002.
- [7] N. X. Dao, B. J. You, and S. R. Oh, "Visual Navigation for Indoor Mobile Robots Using a Single Camera," *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1992-1997, 2005.
- [8] D. C. Herath, S. Kodagoda, and G. Dissanayake, "Simultaneous Localisation and Mapping: A Stereo Vision Based Approach," *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 922-927, 2006.
- [9] V.S. Tsonis, K. V. Chandrinow, and P. E. Trahanias, "Landmark-Based Navigation Using Projective Invariants," *IEEE International Conference on*

*Intelligent Robots and Systems*, pp. 342-347, 1998.

- [10] K. S. Roh, W. H. Lee, and I. S. Kweon, "Obstacle Detection and Self-Localization without Camera Calibration Using Projective Invariants," *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1030-1035, 1997.
- [11] N. Georis, M. Petrou, and J. Kittler, "Error Guided Design of A 3D Vision System," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, vol. 20, pp. 366-379, 1998.
- [12] J.-S. Liu and J.-H. Chuang, "A Geometry-Based Error Estimation for Cross-Ratios," *Pattern Recognition*, vol. 35, pp. 155-167, 2002.

