

國立交通大學

電機學院 電機與控制學程

碩士論文

順滑控制在降壓型直流轉換器之應用



Sliding-Mode Control Applied to
Buck DC-DC Converter Design

研究生：吳 坤 祐

指導教授：陳 永 平 教授

中華民國九十六年六月

順滑控制在降壓型直流轉換器之應用

Sliding-Mode Control Applied to Buck DC-DC Converter Design

研究生：吳坤祐

Student：Kun-You Wu

指導教授：陳永平 教授

Advisor：Prof. Yon-Ping Chen

國立交通大學

電機學院 電機與控制學程

碩士論文

1896

A Thesis

Submitted to College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

in

Electrical and Control Engineering

June 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

順滑控制在降壓型直流轉換器之應用

研究生：吳坤祐

指導教授：陳永平 教授

國立交通大學 電機學院 電機與控制學程碩士班

摘 要

本文研製之順滑模態控制器應用在降壓型直流轉換器電路，改善過去使用誤差狀態方程式設計順滑模態控制器時必須掌握負載狀況的缺點，以及為了估測負載降低系統精確度與響應速度的缺點。我們利用轉換矩陣法選取一順滑函數，並額外加入輸出電壓與命令電壓之誤差函數的積分，使系統在順滑平面上是穩定的，再決定系統的控制法則，使系統軌跡在有限時間內接觸到順滑平面。本文利用此順滑模態控制器產生控制開關狀態的責任週期，經由固定頻率切換的脈波寬度調變控制 Buck 直流轉換器，使其輸出電壓到達期望值，並且不因負載變動影響系統之穩定。利用 MATLAB/SIMULINK 模擬上述直流轉換器與順滑模態控制器，由模擬結果驗證系統對於不同負載均能產生穩定的責任週期，使輸出電壓到達正確值，而且當負載變動時，控制器也具有不錯的暫態響應。

關鍵字：降壓型直流轉換器，順滑模態控制器，誤差函數之積分

Sliding-Mode Control Applied to Buck DC-DC Converter Design

Student : Kun-You Wu

Advisor : Prof. Yon-Ping Chen

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

A sliding mode controller with the error integration between output voltage and command voltage for PWM-based Buck DC-DC converter is proposed. Constant switching frequency can be achieved with the proposed approach. For the controller design, this thesis adopts sliding mode control theorem because of its well-know robustness for system uncertainty. Without load estimator in the controller, this closed-loop system ideally should convert power flow into the prescribed form in spite of the load variation. With the unknown load condition we choose a sliding function with an integral term of error function such that the system is stabilized on the sliding surface. Then design the control algorithm such that the system reaches the sliding mode in a finite time. The simulation of the proposed closed-loop control scheme is illustrated to process fast transient response and robustness to load variation.

Keywords : Buck DC-DC Converter , Sliding-Mode with Integral

致 謝

學如逆水行舟，一路癡頗行來，點滴在心，雖然自認這不是一部完美的論文，但這部論文的完成，要感謝的真人的人很多，僅以此文表達我的誠摯謝意。

首先要感謝陳永平教授引領我進入學術的殿堂，每當我遇到瓶頸時，總是引領我正確的思考方向，同時也啓發我人生的視野與生涯規劃。還要感謝兩位口試委員梁耀文老師及張浚林老師的指正和協助，使我獲益良多。

論文能順利付梓，幸賴許多學長協助。感謝聖棟，煥祺，建峰，世宏，福貴，秉儒學長們，與 VSSLAB 的全體同學。此外更有賴許多同事及摯友，感謝陳倫典先生與鄔家瑜先生兩位主管的推薦；同事提梵，耀文，厚億從旁鼓勵；摯友老雷，大頭東，思漢，璟照的協助。掛一漏萬，尚有未提及的朋友，在此均一併致謝。

最後要感謝內人宣君給了我一雙兒女，讓我在低潮時能夠看到佩芸與昱賢天使般的微笑，好像在訴說著：爸爸加油！一股振作的情緒就會再次油然而生！我知道，若不是他們長久以來的犧牲與支持，不可能有我今日的小小成果。

兩年碩士生活隨著論文結束而終止，還記得當初剛參與交大研究所考試之際，心情忐忑不安，一路走來憑靠著自己的努力及許多貴人的協助，使我能夠順利至此。對我而言，雖然這段旅程已經結束，但象徵著另一個階段的到來；學習的路不在誰走得快，而在誰走得遠，期許自己在下個階段能夠更加精進！

目 錄

	頁次
中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號說明	ix
第一章 緒論	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 文獻回顧.....	3
1.3 研究方法與本文架構.....	5
第二章 Buck DC-DC Converter 之數學模型	6
2.1 狀態空間平均法建立切換式電源轉換器之數學模型.....	6
2.1.1 電路結構.....	7
2.1.2 動作原理.....	8
2.1.3 狀態空間法建立模型.....	11
2.2 考慮非理想 Buck DC-DC Converter 之狀態方程式.....	14
2.2.1 片段線性模型.....	14
2.2.2 利用狀態空間法建立 Buck DC-DC Converter 之模型.....	16
2.3 模型分析.....	20
2.3.1 穩定性與控制性.....	20
2.3.2 不確定量分析.....	22
第三章 Buck DC-DC Converter 之順滑控制器設計	24
3.1 順滑模態控制理論介紹.....	24
3.1.1 順滑模態控制原理.....	25
3.1.2 順滑函數之選擇－以單輸入雙線性系統為例.....	31
3.2 設計 Buck DC-DC Converter 之順滑控制器.....	34
3.2.1 選擇順滑函數.....	35
3.2.2 誤差函數積分項在順滑函數中的影響.....	38
3.2.3 控制法則.....	41

第四章	Buck DC-DC Converter 之系統設計與模擬	43
4.1	系統規格與設計.....	43
4.1.1	電感設計.....	44
4.1.2	輸出電容設計.....	46
4.1.3	順滑模態控制器設計.....	48
4.2	數值模擬.....	50
4.2.1	數值模擬，未加入控制器輸出飽和函數.....	51
4.2.2	數值模擬，加入控制器輸出飽和函數.....	54
4.3	以 MATLAB/SIMULINK 的電力電子模組模擬.....	58
4.3.1	高負載模擬.....	59
4.3.2	低負載模擬.....	61
第五章	結論與未來展望	65
參考文獻	66
附 錄	69



表 目 錄

	頁次
表一 系統規格.....	43
表二 濾波器參數.....	48



圖 目 錄

	頁次
圖 1.1.1 行動媒體播放器(PMP, Portable Media Player)之電源規畫	2
圖 2.1.1 利用狀態空間平均法建立切換式電源轉換器之數學模型	6
圖 2.1.2 Buck DC-DC Converter.....	7
圖 2.1.3 理想 Buck DC-DC Converter 之等效電路.....	8
圖 2.1.4 點電壓 A 之波形.....	8
圖 2.1.5 Buck DC-DC Converter 電感電壓與電流波形.....	10
圖 2.1.6 不同責任週期與負載條件下，灰色區域為平衡點之集合..	11
圖 2.2.1 N 通道 MOS-FET 片段線性模型.....	12
圖 2.2.2 二極體片段線性模型.....	13
圖 2.2.3 以非理想模型取代之 Buck DC-DC Converter.....	15
圖 2.2.4 開關置於 1 之等效電路與電流方向.....	16
圖 2.2.5 開關置於 0 之等效電路與電流方向.....	15
圖 2.2.6 固定系統參數，方程式(21)之數值模擬結果.....	19
圖 3.1.1 切換函數與切換條件之關係圖.....	25
圖 3.1.2 迫近模態與順滑模態.....	26
圖 3.1.3 迫近條件式意圖.....	26
圖 3.1.4 當系統軌跡進入順滑平面，延遲 t_d 的時間才能切換輸入控制.....	28
圖 3.1.5 飽和函數改善(34)式造成的高頻跳切現象.....	30
圖 3.1.6 灰色區間為迫近與順滑區間.....	33
圖 3.2.1 加入積分器後，系統特徵值的變化.....	40
圖 3.2.2 灰色區間為 Buck 直流轉換器之迫近與順滑區間.....	42
圖 4.1.1 Buck 直流轉換器之狀態 (假設電感電流是連續的).....	44
圖 4.1.2 責任週期對電感電流曲線圖.....	45
圖 4.1.3 穩態時輸出電壓鏈波.....	46
圖 4.1.4 控制器輸出責任週期之範圍.....	49
圖 4.2.1 模擬系統方塊圖.....	50
圖 4.2.2 固定回授電壓.....	51
圖 4.2.3 高負載時系統狀態軌跡.....	52
圖 4.2.4 未加入飽和函數之控制器輸出.....	52
圖 4.2.5 順滑函數.....	53

圖 4.2.6	控制器加入飽和函數後之系統軌跡.....	54
圖 4.2.7	狀態輸出.....	54
圖 4.2.8	負載增加 500mA 時系統輸出之狀態.....	55
圖 4.2.9	負載減少 500mA 時系統輸出之狀態.....	55
圖 4.2.10	加入控制器飽和函數之平滑函數.....	56
圖 4.2.11	控制器輸出.....	57
圖 4.3.1	PWM 訊號產生器	58
圖 4.3.2	未加入正反器導致 PWM 產生器與控制器輸出產生追逐現象，無法關閉開關.....	58
圖 4.3.3	加入 PWM 產生器轉換責任週期為脈波調變信號時，系統軌跡.....	59
圖 4.3.4	高負載時系統輸出狀態.....	60
圖 4.3.5	高負載時平滑函數模擬結果.....	60
圖 4.3.6	高負載時控制器輸出模擬結果.....	61
圖 4.3.7	低負載時模擬系統軌跡.....	62
圖 4.3.8	低負載時模擬系統狀態輸出.....	63
圖 4.3.9	低負載時模擬系統平滑函數.....	63
圖 4.3.10	低負載時模擬系統控制器輸出.....	64
圖 4.3.11	不同目標電壓，系統之輸出電壓波型.....	64
圖 A.1	系統主方塊圖.....	69
圖 A.2	控制器.....	69
圖 A.3	系統數值模型.....	70
圖 A.4	以 SimPowerSystems 建立系統模型.....	70

符 號 說 明

- \mathbf{c} : 順滑函數之係數向量
- x_{2d} : 目標電壓
- ε : 順滑層單邊厚度
- β : 誤差函數積分項之係數
- \mathbf{A} : 系統狀態矩陣
- \mathbf{b} : 輸入向量
- \mathbf{N} : 雙線性項係數矩陣



第一章 緒論

1.1 研究背景

隨著科技的日新月異與無線網路的進步，數位資訊散布在我們生活周遭，來源不再僅限於書房的電腦，還有輕薄短小的手持式電子裝置，使得數位資訊唾手可得。電子產品體積隨著半導體製程技術的提升而縮小，然而其電源裝置不僅效率因為工作時間增加而提高，額定容量也因為系統的複雜度而提高。在電源電路的設計上，負載端的變化不再僅限於產品本身，還有可能必須提供外接產品足夠的電源。以 USB 2.0 為例，主機端 (host) 的電源設計必須提供每一條 USB 外部連接線至少 5V/500mA 的電源，並符合下列兩項規格[1, 2]：

- (1) 直流穩態電壓最小值，4.75V
- (2) 當外部 USB 周邊掛載(Hot Plug-in)，僅允許最小壓降(4.65V)與最短暫態(幾十微秒， μ Second)。

在 PC 主機板電源設計規範中，USB 連接器上面的電源範圍為 5.00V \pm 5%，換言之，主機端的最小電壓必須維持在 4.75V，當外部 USB 產品掛載後其最小壓降限制在 4.65V 以上，並在幾十微秒上升到最小電壓值(4.75V)。如圖一所示，在系統硬體設計初期評估電源需求，對每一個電壓準位(Bus)所提供的負載做設計，進而選用適當的電源電路與元件。從圖 1.1.1 可知，電源轉換器面對的負載是不確定量但是有界的，可以知道負載變化範圍。當外部裝置掛載，例如圖中 USB BusPower，在系統正常工作下額外提高 2.5W 的輸出，系統仍需維持穩定且壓降必須符合上述規範。

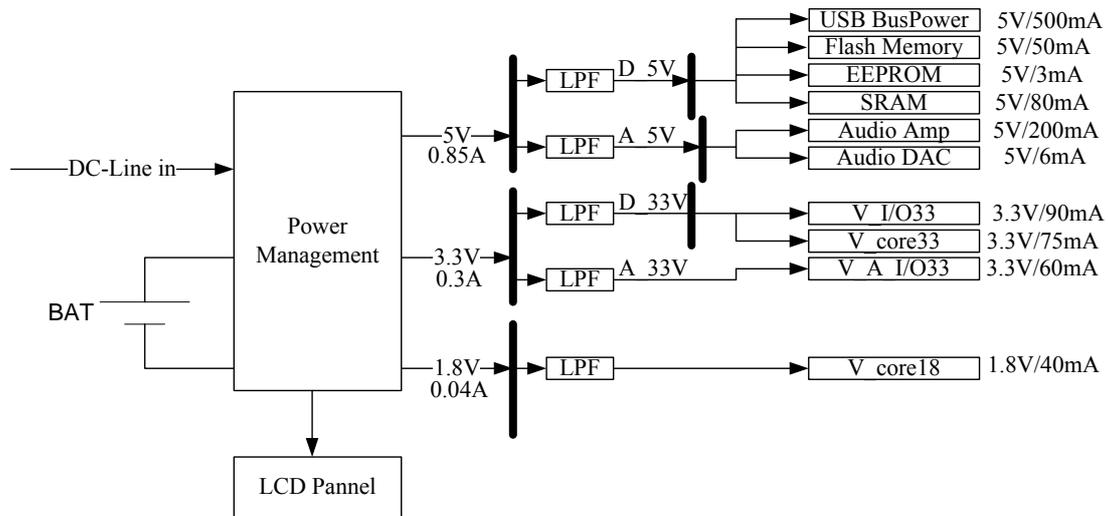


圖 1.1.1 行動式多媒體播放器(PMP, Portable Media Player)之電源規畫

隨著開關元件工作頻率的提高允許切換式電源供應器(SPS, Switching Power Supply)的工作頻率增加，不僅切換頻率造成的噪音因而降低，在低通濾波器的設計上電感值可選用較低感值元件，不僅體積更小，等效串連阻抗（ESR）也相對降低。故高頻切換式電源供應器具有以下特點：

- (1) 低功耗，效率高，可達 80%以上
- (2) 重量輕，體積小的優點。
- (3) 輸出與輸入電壓範圍大。
- (4) 反應時間短，較佳的暫態響應。
- (5) 高功率密度，高輸出電流能力。

對系統設計而言，電源系統必須有效率地提供精確且穩定的輸出電壓，容許系統負載在有限範圍內變化。從控制器的角度來看，系統面對負載的不確定與有限範圍的變化，系統必須是穩定的。

1.2 文獻回顧

由於半導體製程技術的進步以及電力電子相關控制理論的發展，切換式電源轉換器廣泛應用在電腦產品，消費性電子產品，直流馬達控制，與通訊裝置上 [3-5]。許多研究先進專注在切換式電源供應器的控制方法，並基於高速切換的脈波寬度調變(pulse width modulation, PWM)設計導通責任週期(duty cycle)[6]。

因為藉由改變脈波寬度影響開關切換的時間，直流切換式電源轉換器(DC-DC Converter)是一個非線性時變(Nonlinear Time-varying)系統[7]，過去控制方法的研究主要著重在線性控制，例如 PID 控制法 (proportional integral derivative control)，與其他非線性控制方法，例如順滑模態控制法 (Sliding mode control)，模糊控制法 (Fuzzy control)，以及結合上述方法與其他最佳控制之方法，將這些方法應用在線化直流電壓轉換器的控制器設計上。典型控制方法(P, PI, PID)在完整的線性化數學模型上可以設計出不錯的暫態響應與穩態響應，然而缺點是系統參數必須精確且固定，系統面對的負載也是已知的明確值，方可完成設計要求。

順滑模態控制在電力電子的領域中，已經被廣泛的研究與應用，特別是在切換式電源轉換器的設計上，其原因是，順滑模態控制不像典型控制方法建構在精確的數學模型上，且順滑模態控制允許參數在有界範圍內變動，亦即負載是在可知的範圍內變動，仍可維持系統的穩定，再者，系統因為開關的狀態切換成不同的子系統，就以系統的角度而言，系統隨著開關狀態是可變的，故可以思考可變結構控制理論在此領域的適用性。在過去順滑模態控制設計步驟中，採用狀態誤差做為新的狀態變數，利用此控制法則將誤差函數的軌跡控制到原點，則實際系統狀態輸出即被控制到狀態期望值(desired state)[8, 9]，或稱之為穩態平衡點，其缺點是必須知道負載值方可求出狀態期望值，而且負載改變將影響順滑平面在相

平面中的斜率[10]，因此順滑函數之斜率與負載有關，為此加入適應性控制 (Adaptive Sliding Mode Control)[7]來估測負載值並隨時修正系統的參數。

在無法估測平衡點位置的條件下，為了消除輸出電壓的穩態誤差，本論文引用[11, 12]具有積分之順滑函數(sliding mode control with integral)設計降壓型直流轉換器之順滑模態控制器，並採用飽和函數取代切換函數以降低系統跳切現象。相較於前述之控制器，此控制器除既有滑模態控制的優點，例如允許系統參數的變化與不確定值，還有無需估測負載與對負載變動具有強健性的優點，並且因為加入積分器，所以可以消除穩態誤差。

利用電腦模擬結果在今日電力電子與控制器的設計中占有極重要的部分 [13]，因為利用電腦模擬，可以降低開發成本與時程，並且在模擬過程中有助於驗證系統相關之規格，例如穩定性與單一參數變化對系統的影響。在電力電子領域的教授與研究者利用 PSPICE 模擬轉換器的行為[14-16]，所以 PSPICE 在電力電子的研究中占有極重要的部分。PSPICE 利用電路元件之物理特性模擬半導體或開關元件，其優點是，模擬結果接近實際電路的電路特性，然而模擬時時常遇到收斂性問題[17]。

在使用上，PSPICE 必須依據元件的規格書建立模型，或請廠商提供標準資料庫匯入 PSPICE 中使用，然而元件的行為僅與其中主要特性有關，線性化或採用片段線性的方式將有助於降低系統運算的資料量與記憶體需求，在 MATLAB/Simulink 這套模擬軟體具有此一優點[16-17]。在最新版 MATLAB 7/ Simulink[18, 19]中包含了 SIMPOWERSYSTEM 模組，裡面提供電力系統與電力電子相關之片段線性模型，優點是，建立模型的方式可以更有彈性，模擬時間遠小於前述模擬工具，可以視為數學模擬工具，也因此其缺點，相較於 PSPICE 電路模擬，與實際電路之行為仍有差距，然而對系統設計而言，這是相當不錯的設計輔助工具。

1.3 研究方法與本文架構

利用狀態空間平均法建立 Buck 直流轉換電路的模型，因為考慮開關元件之片段線性模型，所以建立之轉換器模型考慮實際電路的非理想特性，此系統不再是傳統的線性系統模型。

利用順滑模態控制的強健性與積分型控制器消除穩態誤差的優點，將此非線性的系統做適當的控制，並且因為系統參數的不確定項以順滑模態控制加以限制降低其影響，所以系統仍能穩定在平衡點。

在第二章中，先討論 Buck 直流轉換器之電路結構與動作原理，以及狀態空間平均法(State Space Average Method)建立此轉換電路之數學模型。第二節簡介開關原件之片段線性模型，亦即非理想模型，再由前述建立模型的方法建立非理想 Buck 直流轉換器之模型。第三節則針對此一模型做進一步分析。第三章的第一節，以介紹順滑模態控制為主，說明此一控制器之設計步驟。在第二節開始設計 Buck 直流轉換器之順滑模態控制器。

第四章設計模擬系統與相關參數之選定。第二節利用數值模擬的方式驗證控制器是否在數值分析上達到我們的設計目標。第三節加入脈波寬度調變以及利用 SimPowerSystems 以近似電路特性的模擬方試驗證控制器對負載不確定與負載變動的強健性。第五章為本文的結論與未來展望。

第二章 Buck DC-DC Converter 之數學模型

在本章的第一節將介紹目前普遍使用於切換式電源轉換器建立模型的方法，亦即以狀態空間平均法(State-space Average Method)建立 Buck DC-DC Converter 的數學模型，第二節說明非理想元件模型取代電路元件成為非理想 Buck DC-DC Converter，以及建立轉換器模型的詳細步驟，在第三節則針對此一模型做進一步分析。

2.1 狀態空間平均法建立切換式電源轉換器之數學模型

Middlebrook[8]提出一狀態空間平均法(state-space averaging technique)建立切換式電源轉換器的線性化模型，包含功率級電路與 PWM 控制器在穩態點的線性化數學模型。如圖 2.1.1 所示，摘錄自[8]說明應用於順滑模態控制所需之系統狀態方程式的建立流程。本節將依此流程建立 Buck 直流轉換器之數學模型。

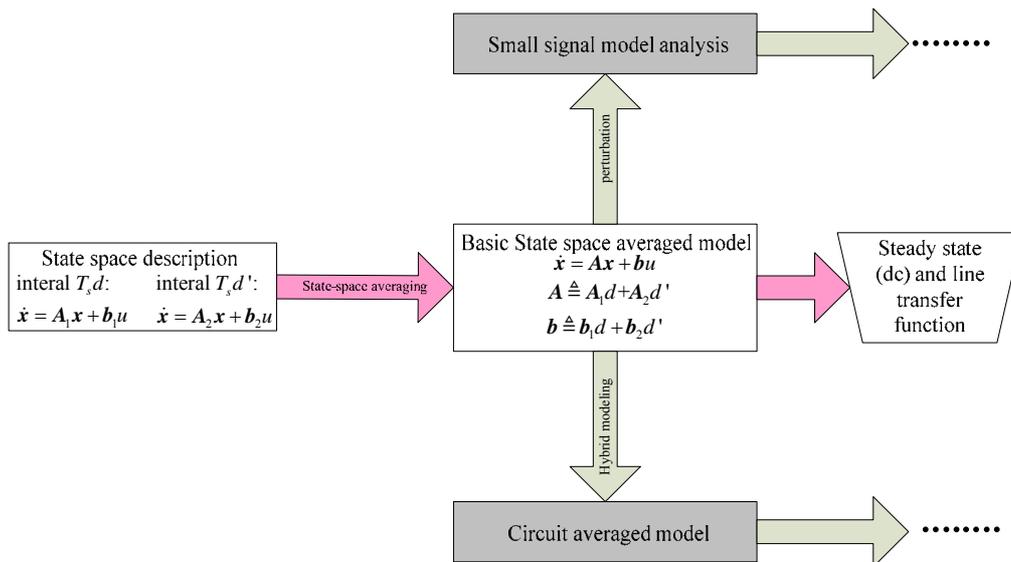


圖 2.1.1 利用狀態空間平均法建立切換式電源轉換器之數學模型[8]

2.1.1 電路結構

如圖 2.1.2 所示為 Buck DC-DC Converter 之基本電路型式，包含開關元件與低通濾波器兩部分，輸入端外接一理想直流電壓源 (E)，輸出端負載假設為一純電阻性負載，以電阻 (R_L) 表示之。在行動裝置系統電源設計實務上，我們會先評估某一電壓準位提供周邊主動元件所需的功率，可估算出此等效電阻之值。

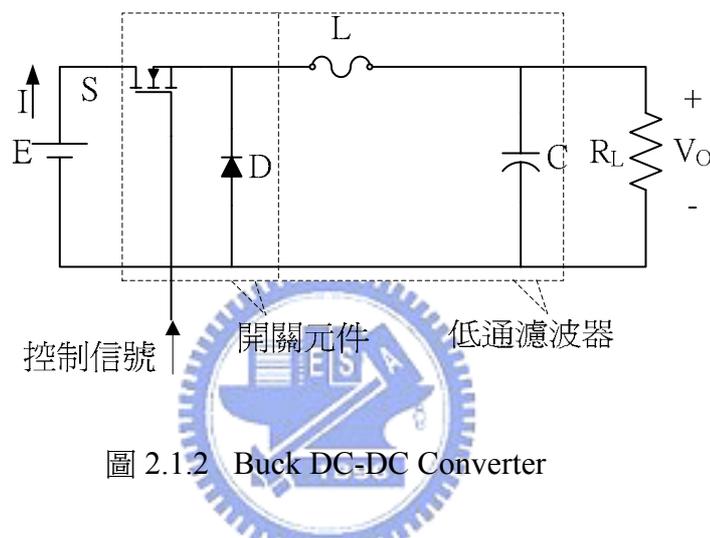


圖 2.1.2 Buck DC-DC Converter

開關元件之狀態由外部控制信號控制，當控制命令為導通狀態，代表開關 S (MOS-FET) 導通，開關 D (Diode) 則因為逆向偏壓而截止。反之若為截止狀態，則開關 S 為截止，開關 D 呈導通狀態。因為開關的導通與截止，開關元件的輸出端電壓波形可視為一週期性方波，除直流亦含有高頻交流諧波。

假設控制信號輸出 PWM 控制信號為固定頻率切換，且其切換頻率遠高於低通濾波器之截止頻率，故可以利用低通濾波器隔離上述之交流諧波，在系統輸出端獲得直流電壓輸出。因為半導體製程的進步，允許 MosFET 的操作頻率提高，所以開關元件之操作頻率可高達 MHz 等級，一般常見知電源轉換控制器其操作頻率為 100KHz~300KHz，為了增加模擬效率，本論文假設 PWM 控制信號工作於 40KHz 以增加模擬時的時間間隔(Time Steps)。

2.1.2 動作原理

在圖 2.1.3 為理想的 Buck DC-DC Converter 之等效電路，所謂理想的轉換器代表該電路中非電阻元件均無功率消耗。以 MOS-FET 為例，其等效電路可視為無損失單軸單輸出開關 (SPST, single pole single throw)，狀態由外部控制器控制該開關為導通或截止，而二極體之理想等效電路亦可以無損失單切開關取代。合併兩單軸單輸出開關後，圖 2.1.2 的開關元件以一個單軸雙輸出開關 (SPDT, single pole double throw) 取代 S 與 D，如下圖所示。

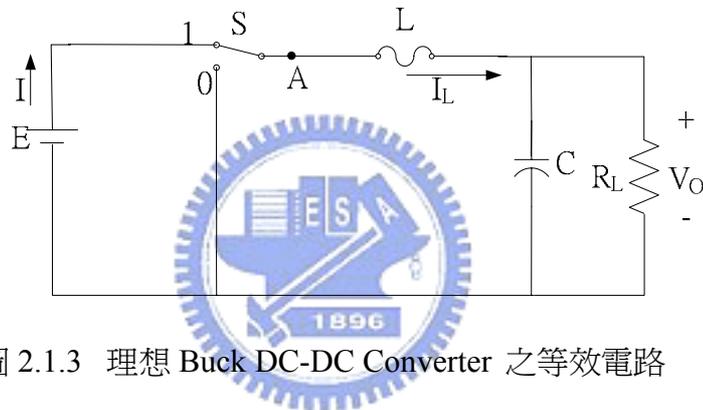


圖 2.1.3 理想 Buck DC-DC Converter 之等效電路

當開關 S 置於 1 為導通狀態，A 點電壓等於輸入電壓，反之若開關 S 置於 0 為截止狀態，A 點電壓等於零，波形如圖 2.1.4 所示。

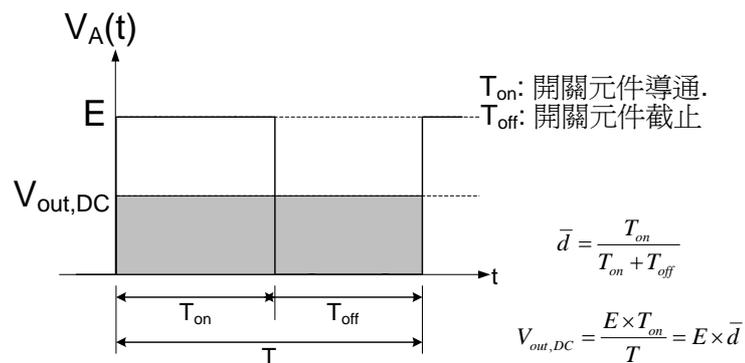


圖 2.1.4 A 點電壓之波形

\bar{d} 定義為開關元件導通責任週期(duty-cycle)，根據傅立葉分析可知，A 點電壓為一週期性方波，包含直流成份與奇次諧波，其直流成份可表示為

$$V_{A,DC} = \frac{1}{T} \int_0^{T_{on}} V_A(t) dt = E \times \bar{d} \quad (1)$$

為了在輸出端得到理想的直流電壓，利用低通濾波器隔離因為開關元件狀態切換所產生的高頻成分，可得 $V_{out,DC} = V_{A,DC}$ 。由此可知，輸出電壓等於輸入電壓乘上責任週期，又 $0 \leq \bar{d} \leq 1$ ，故理想輸出電壓值最高等於輸入電壓，最低等於零，此為降壓型直流轉換器之基本特性與原理。

隨著負載的改變，輸出電流的平均值也隨著變化，然而在低通濾波器的電感電流因為其磁場特性限制電流方向無法瞬間改變，此一類型轉換器可分為連續操作模式(CCM, continuous-conduction mode)與非連續操作模式(DCM, discontinuous-conduction mode)。如圖 2.1.5(a)所示，實線為電感電流波形，虛線為電感電壓波形，圖中電感電流恆正為連續導通模式(CCM)。當開關 S 為導通狀態時，如圖 2.1.5(c)所示，因電源對電感充電故電流上升，同時對電容充電且此時在負載上面就會有帶極性電壓產生，假設系統此時操作於穩態，電容充電時間可忽略，則電感上的壓降為 $E - V_o$ ，此時二極體 D 因為逆偏狀態而截止。若開關為截止狀態，如圖 2.1.5(d)所示，電感因磁場改變電壓反向，負載由電容提供能量，因此輸出電壓不變且電感兩端的壓降為 $-V_o$ ，此時二極體順向偏壓且提供電感電流通路徑，故此二極體 又稱之為飛輪(flywheel)或自由轉輪(free-wheeling)二極體。

在開關交替變化下，使得電感電流變化範圍在 $I_{L(max)}$ 與 $I_{L(min)}$ 之間。假設存在 $I_{L(min)} < 0$ ，如圖 2.1.5(b)所示，因為電感電流必須衡正，所以非連續導通模式(DCM)

存在第三種狀態，在此狀態下電感電流為零，換言之，電感電流是不連續的。當電感電流為零，此時負載所需的電流由輸出電容提供，所以負載端的電壓會迅速下降。

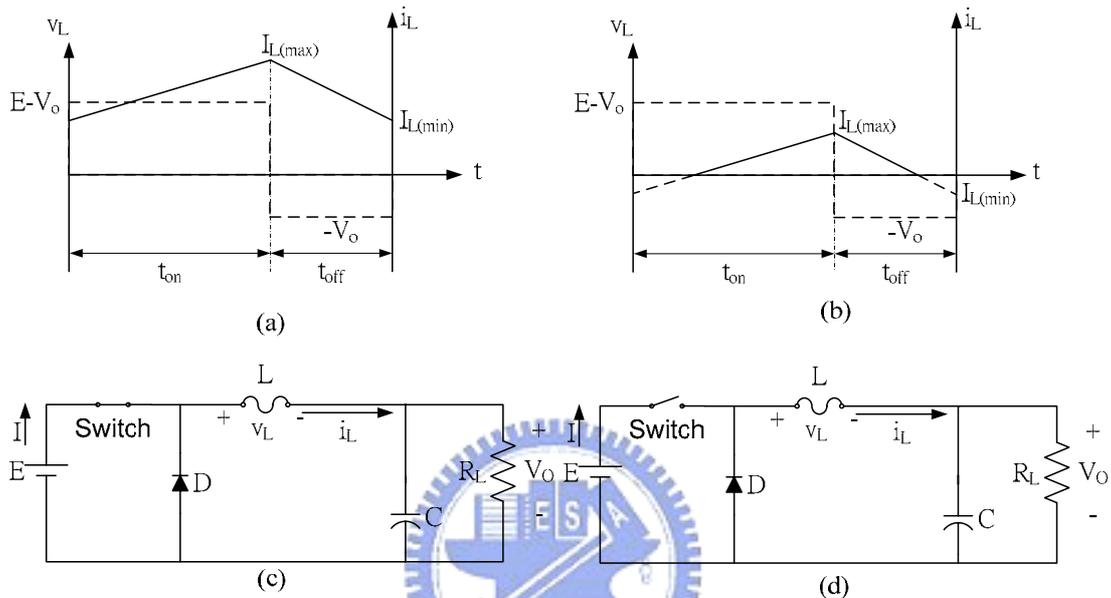


圖 2.1.5 Buck DC-DC Converter 電感電壓與電流波形

從圖 2.1.5(a)與(b)可知，電感電流存在一邊界值 $I_{L(\text{bound})}$ 使得系統分為連續與非連續操作模式，其中

$$i_L(t) = \frac{(E - V_o)}{L}t + I_{L(\text{min})} \quad (2)$$

令 $I_{L(\text{min})} = 0$ ，可得此一邊界條件：

$$I_{L(\text{bound})} = \frac{1}{2} \frac{(E - V_o)}{L} t_{on} = \frac{T_s E}{2L} \bar{d} (1 - \bar{d}) \quad (3)$$

其中 T_s 為開關時間且 $T_s = t_{on} + t_{off}$ 。

2.1.3 狀態空間法建立模型

本論文採用狀態空間平均法 (State-Space Averaging Approach) 建立 Buck DC-DC Converter 之模型[8]，該方法於 1977 年 Middlebrook 與 Ćuk 提出，為目前切換式電壓轉換器建立模型的主要方法。在單一的開關時間 T_s 內平均兩個因為開關切換而分別存在的狀態表示法，為狀態空間平均模型，包含穩態(Steady-State DC model)與小信號模型(Small signal AC model)。步驟如下：

步驟一：依開關狀態建立電路的狀態方程式

假設切換式電源轉換器工作於連續導通模式，存在兩種電路狀態：當開關導通時可得一狀態方程式，如(4)式所示；當開關截止時可得另一狀態方程式，如(5)式所示。若滿足開關之切換頻率遠高於低通濾波器之截止頻率，令狀態變數 \mathbf{x} 分別為電感上的電流 $x_1 = i_L(t)$ 與電容上面的電壓 $x_2 = v_C(t)$ 。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \\ v_o = \mathbf{c}_1 \mathbf{x} \end{cases} \quad \text{當開關為導通狀態} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \\ v_o = \mathbf{c}_2 \mathbf{x} \end{cases} \quad \text{當開關為截止狀態} \quad (5)$$

其中 \mathbf{A}_1 與 \mathbf{A}_2 為系統狀態矩陣， \mathbf{b}_1 與 \mathbf{b}_2 為輸入向量， \mathbf{c}_1 與 \mathbf{c}_2 為輸出向量。

步驟二：利用責任週期(d, duty-cycle)取狀態變數之平均

設開關導通時間為 $d \times T_s$ ，則截止時間為 $(1-d) \times T_s$ ，分別乘上該狀態之狀態方程式後取時間平均，可得

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 \times d + \mathbf{A}_2 \times (1-d)) \mathbf{x} + (\mathbf{b}_1 \times d + \mathbf{b}_2 \times (1-d)) \quad (6)$$

同理可得

$$v_o = [\mathbf{c}_1 d + \mathbf{c}_2 (1-d)] \mathbf{x} \quad (7)$$

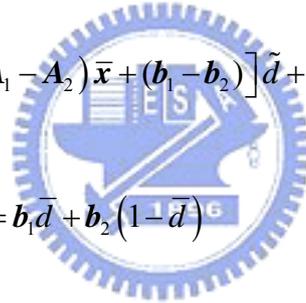
步驟三：分離狀態方程式為直流與交流兩部分

令 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ ，其中 $\bar{\mathbf{x}}$ 為狀態變數 \mathbf{x} 的穩態值， $\tilde{\mathbf{x}}$ 為狀態變數 \mathbf{x} 的時變擾動。

同理令 $d = \bar{d} + \tilde{d}$ ，其中 \bar{d} 為定值，可視為期望的責任週期(desired duty-cycle)， \tilde{d} 為時變責任週期，可視為期望責任週期的擾動量。代入(6)式可得

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)] \tilde{d} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{x}} \tilde{d} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \bar{d} + \mathbf{A}_2 (1-\bar{d})$ ， $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \bar{d} + \mathbf{b}_2 (1-\bar{d})$



(8)式為狀態空間平均模型，假設此一電路經過適當的控制到達平衡點，該平衡點上的狀態方程式即為直流模型(dc model)，如方程式(9)所示。

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = 0 \quad (9)$$

換言之，從(9)式可求得系統之平衡點。(9)式代入(8)式可以化簡為

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)] \tilde{d} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{x}} \tilde{d} \quad (10)$$

同理可得

$$v_o = V_o + \tilde{v}_o = [c_1 d + c_2 (1-d)](\bar{x} + \tilde{x}) = c\bar{x} + c\tilde{x} + [(c_1 - c_2)(\bar{x} + \tilde{x})]\tilde{d} \quad (11)$$

$$\text{其中 } c = c_1 \bar{d} + c_2 (1 - \bar{d})$$

穩態輸出電壓為

$$V_o = c\bar{x} = cA^{-1}b \quad (12)$$

在推導上述方程式的過程中，我們已經假設系統狀態在固定時間內被切換且工作於連續導通模式(Continuous Conduction Mode, CCM)。當系統以適當控制進入平衡點，從方程式(9)式可知，在固定輸出電壓的條件下可得責任週期與輸出電流一對一映射。換言之，進入平衡點後，假設(10)造成的擾動相較於穩態時平衡點的值可以被忽略[20]，從平均值的觀念來看，以該平衡點上對應的責任週期控制開關元件的狀態，系統將穩定在操作點上，亦即交流模型的平均值是為零。

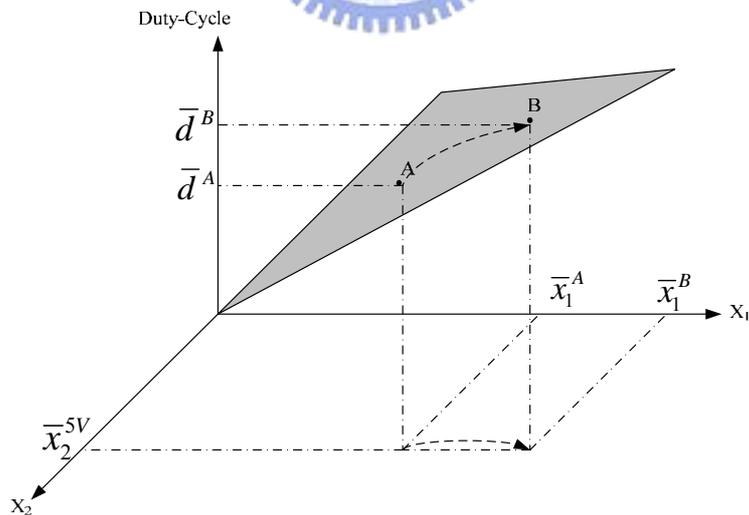


圖 2.1.6 不同責任週期與負載條件下，灰色區域為平衡點之集合

由方程式(9)繪製不同責任週期與負載的關係圖，如圖 2.1.6 所示。考慮負載變化在平衡點之間的輸出狀態變化情形，啟動後系統到達穩態平衡點 A，負載增

加後，系統穩態平衡點移動到下一個平衡點 B，固定輸出電壓的條件下(例如在這個例子中，輸出電壓固定在 \bar{x}_2^{5V})， $\bar{x}_1^B > \bar{x}_1^A$ 且 $\bar{d}^B > \bar{d}^A$ 。

2.2 考慮非理想 Buck DC-DC Converter 之狀態方程式

2.2.1 片段線性模型

所謂非理想之等效電路，就是考慮實際開關元件在導通時存在功率消耗，亦稱之為片段線性等效電路，而被動元件則是與元件本身特性有關，考慮其非理想的功率消耗。在 Buck DC-DC Converter 中，主要電子元件之非理想特性簡述如下 [21]：

- (a) MOS-FET：等效電路可視為一電壓控制開關，其狀態由閘-源極電壓控制。當開關截止時($v_{GS} < V_{GS(th)}$)，阻抗無限大，以一單軸單輸出開關(SPST)開路表示之。當開關導通時($v_{GS} > V_{GS(th)}$)，片段線性模型在源極(source)與汲極(drain)間視為一等效電阻，以 $r_{ds(on)}$ 表示之。N-通道 MOS-FET 之等效電路如圖 2.2.1(a)所示，轉移曲線如圖 2.2.1(b)所示。

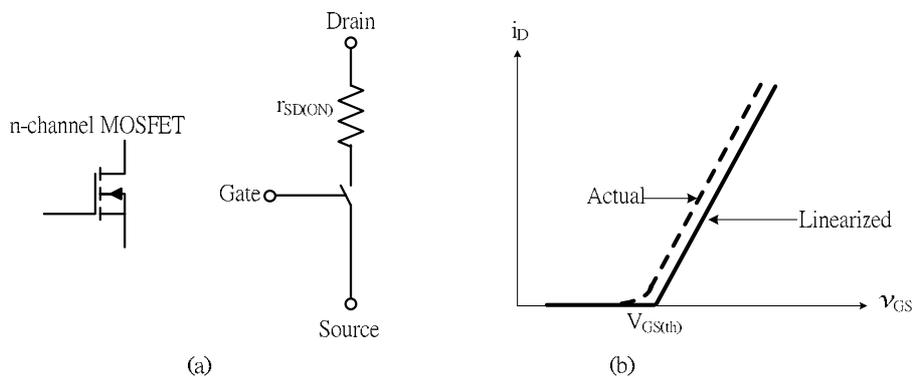


圖 2.2.1 N 通道 MOS-FET 片段線性模型

- (b) Diode：如圖 2.2.2 所示，為二極體片段線性模型，考慮切入電壓 V_{D0} ，導

通後電流-電壓曲線之斜率的倒數以一等效電阻 r_D 取代，如圖 2.2.2(b)所示。圖 2.2.2(a)之等效電路包含一理想二極體，其目的在限制順偏時的電流方向。

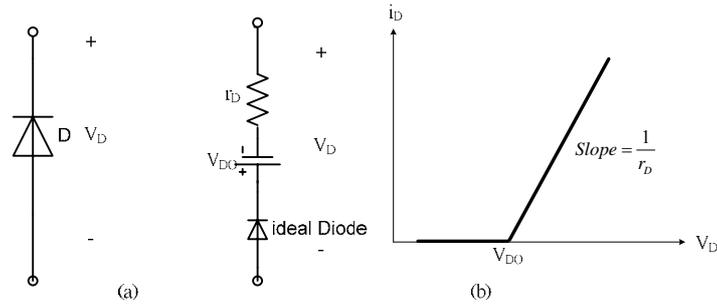


圖 2.2.2 二極體片段線性模型

- (c) 電感：等效電路除了理想電感外，考慮繞線長短所造成的銅損，繞線長度越長以及線徑越小，其等效串聯電阻(ESR, equivalent series resistance)值也越大，換言之，系統的效率越差。
- (d) 電容：實際的電容等效電路包含等效串聯電感(ESL)與等效串聯電阻(ESR)，前者可利用電路布局降低其非理想特性，後者則與電容本身材質與外觀設計有關。實務上輸出電壓的漣波必須小於輸出電壓的 1%，其中 90~95%的漣波來自於等效串聯電阻的非理想效應[22]，故設計上多採用具有較低等效串連阻抗的電容，例如表貼多層陶瓷電容(MLCC)，或採用多電容並聯以降低此一非理想效應。

若將片段線性模型取代圖一之被動元件，則成爲非理想之電源轉換器等效電路，如圖 2.2.3 所示。

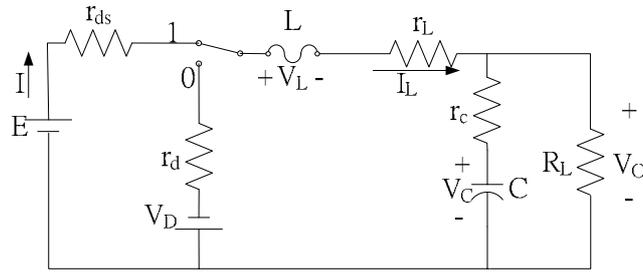


圖 2.2.3 以非理想模型取代之 Buck DC-DC Converter

2.2.2 利用狀態空間法建立 Buck DC-DC Converter 之模型

依據前述建立切換式電源轉換器之步驟，推導圖八之動態方程式。令流經電感器之電流 $i_L(t)$ 與電容器不考慮等效串聯電阻之端電壓 $v_C(t)$ 為狀態變數，即

$$\begin{cases} x_1 = i_L(t) \\ x_2 = v_C(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{di_L(t)}{dt} \\ \dot{x}_2 = \frac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \text{ 以及輸出變數 } y = v_o(t)。$$

步驟一：依開關狀態建立電路的狀態方程式

當圖 2.2.3 之 SPDT 開關切到位置 1，其等效電路與電流方向如圖 2.2.4 所示。

依據克西赫夫電壓定律(KVL, Kirchoff's voltage law)可知：

$$\begin{aligned} \therefore v_o(t) &= v_C(t) + i_C(t)r_c = v_C(t) + Cr_c \frac{dv_C(t)}{dt} \\ \text{and } E - i_L(t)(r_{ds} + r_L) - v_L(t) - v_o(t) &= 0 \\ \therefore L\dot{x}_1 + r_c C\dot{x}_2 &= -(r_{ds} + r_L)x_1 - x_2 + E \end{aligned} \quad (13)$$

根據電流定律(KCL, Kirchoff's current law)可知，

$$\begin{aligned} \therefore \frac{v_o(t)}{R_L} + i_C(t) &= i_L(t) \Rightarrow v_C(t) + C(R_L + r_c) \frac{d(v_C(t))}{dt} = i_L(t)R_L \\ \therefore C(r_c + R_L)\dot{x}_2 &= R_L x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (14)$$

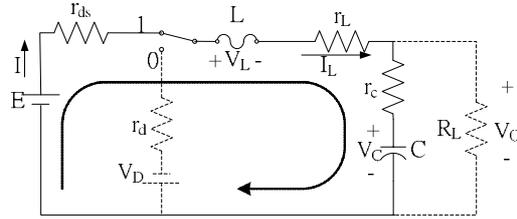


圖 2.2.4 開關置於 1 之等效電路與電流方向

結合(13)式與(14)式可得此開關狀態下之狀態方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_{ds} + r_L)}{L} + \frac{-r_C}{L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} & \frac{-1}{L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} \\ \frac{1}{C\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} & \frac{-1}{CR_L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \quad (15)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{r_C R_L}{r_C - R_L} & \frac{-R_L}{r_C - R_L} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{c}_1 \mathbf{x} \quad (16)$$

同理，當圖 2.2.3 之 SPDT 開關切到位置 0，其等效電路與電流方向如圖 2.2.5 所示。

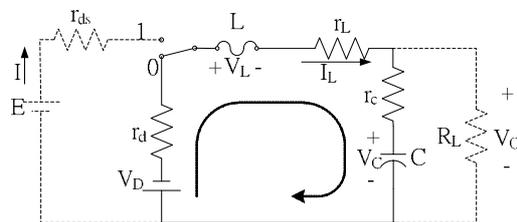


圖 2.2.5 開關置於 0 之等效電路與電流方向

根據 KVL 與 KCL 可知：

$$\because V_D - i_L(t)(r_d + r_L) - v_L(t) - v_o(t) = 0 \Rightarrow -V_D - x_1(r_d + r_L) - x_2 - Cr_C \dot{x}_2 = 0$$

$$\therefore L\dot{x}_1 + Cr_C \dot{x}_2 = -x_1(r_d + r_L) - x_2 - V_D \quad (17)$$

$$\because \frac{v_o(t)}{R_L} + i_c(t) = i_L(t) \Rightarrow v_c(t) + C(R_L + r_c) \frac{d(v_c(t))}{dt} = i_L(t)R_L$$

$$\therefore C(r_c + R_L) \dot{x}_2 = R_L x_1 - x_2 \quad (18)$$

結合(17)式與(18)式可得此開關狀態下之動態方程式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L)}{L} + \frac{-r_c}{L\left(1 + \frac{r_c}{R_L}\right)} & \frac{-1}{L\left(1 + \frac{r_c}{R_L}\right)} \\ \frac{1}{C\left(1 + \frac{r_c}{R_L}\right)} & \frac{-1}{CR_L\left(1 + \frac{r_c}{R_L}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-V_D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \quad (19)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{r_c R_L}{r_c - R_L} & \frac{-R_L}{r_c - R_L} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{c}_2 \mathbf{x} \quad (20)$$

步驟二：利用責任週期取狀態變數之平均

令 $v = [0, 1]$ 為控制開關元件導通與截止狀態之責任週期，利用(6)式平均(15)式與(19)式可得

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1 \times v + \mathbf{A}_2 \times (1 - v)) \mathbf{x} + (\mathbf{b}_1 \times v + \mathbf{b}_2 \times (1 - v)) \quad (21)$$

步驟三：分離狀態方程式為直流與交流兩部分

整理(21)式並將前述 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ 與 $v = \bar{v} + \tilde{v}$ 代入可得直流模型與交流模型：

DC Model:

$$(A_1\bar{v} + A_2(1-\bar{v}))\bar{x} + (b_1\bar{v} + b_2(1-\bar{v})) = 0 \quad (22)$$

AC Model:

$$\dot{\tilde{x}} = (A_1\bar{v} + A_2(1-\bar{v}))\tilde{x} + [(A_1 - A_2)\bar{x} + (b_1 - b_2)]\tilde{v} + (A_1 - A_2)\tilde{x}\tilde{v} \quad (23)$$

穩態輸出電壓與擾動分別為:

$$V_o = c\bar{x} = c(A_1V + A_2(1-V))^{-1}b \quad (24)$$

$$\tilde{V}_o = c\tilde{x} \quad (25)$$

圖 2.2.6 為固定系統參數下方程式(22)與(24)系統穩態之數值模擬結果，直線段構成的集合代表不同的責任週期與負載得到平衡點，而平面的位置代表固定輸出 5V，A 點與 B 點平面上兩平衡點，分別表示固定輸出電壓下不同負載(輸出電流)與責任週期。

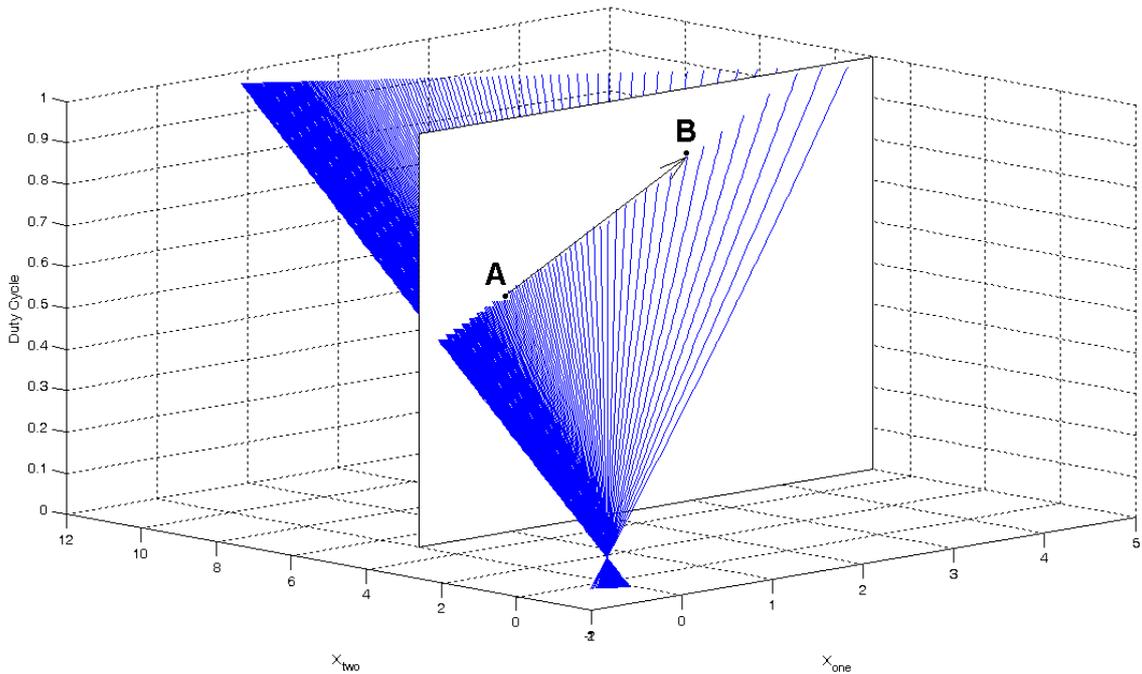


圖 2.2.6 固定系統參數，方程式(21)之數值模擬結果

2.3 模型分析

2.3.1 穩定性與控制性

上述 Buck DC-DC converter 在固定時間內被切換為兩個子系統，分別為：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 & \text{Subsystem 1: 當開關S爲導通狀態} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 & \text{Subsystem 2: 當開關S爲截止狀態} \end{cases} \quad (26)$$

假設兩輸入矩陣 \mathbf{b}_1 與 \mathbf{b}_2 分別代表兩子系統之輸入，系統矩陣 \mathbf{A}_1 與 \mathbf{A}_2 分別爲

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

則此子系統可視爲兩線性非時變系統(Linear Time Invariant system, LTI system)，滿足系統穩定的條件其系統極點必須位在 S-domain 的左半平面[23]，分別爲：

$$\text{Pole of Subsystem 1: } \text{Re}(\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_1)) < 0 \Rightarrow a_{11}^1 + a_{22}^1 < 0 \quad (27)$$

$$\text{Pole of Subsystem 2: } \text{Re}(\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_2)) < 0 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{22}^2 < 0 \quad (28)$$

由(15)與(19)式可知，元件參數大於零，所以兩子系統滿足有限輸入有限輸出(Bounded-input Bounded-output, BIBO)之穩定條件。

在討論 Buck DC-DC Converter 的控制器設計中，如果僅考慮理想 Buck DC-DC Converter 的狀態平均模型，則在兩個子系統的狀態方程式之間存在 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ 使得狀態空間平均模型(21)式結果爲線性模型。然而，若考慮非理想 Buck DC-DC converter，則 $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$ ，使得狀態空間平均模型爲

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L)}{L} + \frac{-r_C}{L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} & \frac{-1}{L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} \\ \frac{1}{C\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} & \frac{-1}{CR_L\left(1 + \frac{r_C}{R_L}\right)} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{E + V_D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}v + \begin{bmatrix} \frac{-V_D}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}v + \mathbf{N}\mathbf{x}v + \mathbf{d}_m \quad (29)$$

由上式(29)可知系統為單輸入之雙線性系統(Bilinear System)，針對此一雙狀態變數單輸入之雙線性系統，其可控性之必要條件為[24]：

- (C1) 矩陣 \mathbf{A} 具有相異實根，且與 \mathbf{N} 沒有相同的特徵向量(Eigenvector)
- (C2) 定義下列集合：

$$\mathbf{W}_A = \{ \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$\mathbf{W}_1 = \{ \mathbf{x} : \mathbf{N}\mathbf{x} = -\mathbf{b} \}$$

若此雙線性系統滿足可控性其必要條件為 $\mathbf{W}_A \cap \mathbf{W}_1 = \emptyset$

$$(C3) \quad \text{rank} \left(\left[\left(\mathbf{N}\mathbf{x}_{eq} + \mathbf{b} \right), \left(\mathbf{A} + \mathbf{N}v_{eq} \right) \left(\mathbf{N}\mathbf{x}_{eq} + \mathbf{b} \right), \mathbf{N} \left(\mathbf{N}\mathbf{x}_{eq} + \mathbf{b} \right) \right] \right) = 2 \quad (30)$$

其中，在每一個平衡點 \mathbf{x}_{eq} 具有對應之等效控制(equilibrium control) v_{eq} 。

由(29)式可知， \mathbf{A} 矩陣中元件參數不為零，則矩陣 \mathbf{A} 具有相異實根，且與 \mathbf{N} 沒有相同的特徵向量，滿足條件(C1)。狀態方程式之解集合包含原點，且(29)式代入條件(C2)滿足 $\mathbf{W}_A \cap \mathbf{W}_1 = \emptyset$ 。狀態方程式代入條件(C3)滿足方程式(30)，故此單輸入雙狀態變數之雙線性系統是可控的。

2.3.2 不確定量分析

由前述分析可知，非理想之 Buck DC-DC converter 的狀態方程式為單輸入雙狀態變數之雙線性系統，該系統是穩定且可控。以下分析則是針對系統不確定量對系統影響。

由狀態方程式可知，系統矩陣 \mathbf{A} 與負載有關，在設計上會採用低等效串聯阻抗之電容，故假設 $r_c \ll R_L$ ，且令

$$u = v + \frac{V_D}{E + V_D}$$

則狀態方程式(28)式可化簡為

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{N}xu \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L + r_c)}{L} + \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} \times \frac{V_d}{E + V_d} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{CR_L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{(E + V_d)}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 以及 } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上述方程式可知，負載與矩陣 \mathbf{A} 有關，換言之，當負載改變時，將影響系統極點，依據(27)與(28)式可知，此改變不影響系統的穩定性。令負載為 $R_L = R_L^0 + \tilde{R}_L$ 其中 R_L^0 為設計時預設負載(default value of the load)， \tilde{R}_L 為負載的不確定量。代入矩陣 \mathbf{A} ，可得

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\circ} + \Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L + r_c)}{L} + \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} \times \frac{V_d}{E + V_d} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{CR_L^{\circ}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_L^{\circ} - R_L}{CR_L^{\circ} R_L} \end{bmatrix} \quad (32)$$

上式代入(30)式，系統狀態方程式可以整理為

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mu + \mathbf{N}\mathbf{x}\mu + \mathbf{d} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L + r_c)}{L} + \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} \times \frac{V_d}{E + V_d} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{CR_L^{\circ}} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{N}\mathbf{x}u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_L^{\circ} - R_L}{CR_L^{\circ} R_L} x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

由(33)式可知，負載的不確定量與系統狀態有關，為非匹配不確定量(mismatched uncertainty)，且預設負載值(Default value of the load)與系統極點有關。在設計實務上，可以從電子產品的系統架構評估各電源所需之電源功率，所以負載的變動範圍可以利用此評估步驟決定(33)式中 R_L 之最大值與最小值，另一方面，狀態變數 x_2 是有界的(bounded)，所以此一非匹配不確定量是有界的。

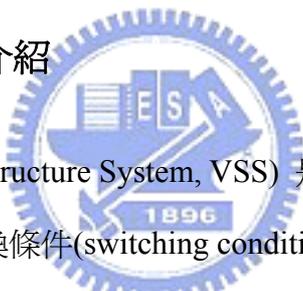
下一章將以(33)式所示之狀態方程式設計控制器，控制目標為在有界輸入(bounded input, [0,1])將系統輸出電壓控制到期望值(desired voltage level)且不受負載變化影響其閉迴路系統之穩定性。

第三章 Buck DC-DC Converter 之順滑控制器設計

在第二章中對整個 Buck 直流轉換電路的數學模型有完整的建構，如方程式 (33) 式所示，在本章中將討論順滑控制器之設計。第一節討論順滑控制基本理論與設計步驟。第二節設計應用於 Buck 直流轉換器之誤差積分型順滑控制。

下一章將依本章之控制器利用 MATLAB/Simulink 做數值模擬，以及 MATLAB/Simulink 中的 SimPowerSystems 模擬控制器在考慮接近電路物理特性下之模擬。

3.1 順滑模態控制理論介紹



可變結構系統(Variable Structure System, VSS) 是一種結構可以改變的系統，包含兩個以上的子結構與切換條件(switching condition)，使得系統在符合條件下呈現相對應的子結構。換言之，可變結構控制是先使受控系統產生兩個以上的子結構，再利用刻意加入的切換條件達成控制目的的一種技術[25]。

根據文獻上的記錄，在 1950 年代，前蘇聯就已經有學者與工程師將可變結構系統應用在馬達控制上，並發現了一個重要的系統行爲：順滑模態(sliding mode)，實際的高頻切換控制法則，使得系統的軌跡被控制到狀態空間中一個非線性與設計者選定的平面上，並使系統軌跡維持在此平面上，稱之為切換平面(switching surface)或順滑面(sliding surface)。被稱為切換平面是因為，當系統軌跡”低於”此一平面，在控制路徑上會得到強迫系統”上升”回到平面的增益，反之，若系統軌跡”高於”此一平面，控制路徑產生的增益強迫系統”下降”回到平面。簡而言之，順滑模態控制是，先使受控系統產生兩個以上的子結構，再利用刻意加入

的切換條件使系統穩定在切換平面上的一種技術[25]。

3.1.1 順滑模態控制原理

對一個單輸入系統 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$ 而言，通常切換條件 $u(\mathbf{x})$ 表示為：

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^+(\mathbf{x}) & s(\mathbf{x}) > 0 \\ u^-(\mathbf{x}) & s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (34)$$

其中， $s(\mathbf{x})$ 為一切換函數 (switching function)，對時間是一次可微的且

$u^+(\mathbf{x}) \neq u^-(\mathbf{x})$ ，切換函數與切換條件之關係如圖 3.1.1 所示。

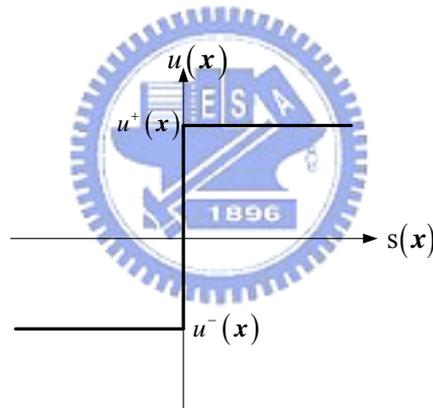


圖 3.1.1 切換函數與切換條件之關係圖

由圖 3.1.1 可知，切換函數將整個狀態空間分成三個子空間： $s(\mathbf{x}) > 0$ ， $s(\mathbf{x}) < 0$ ，與 $s(\mathbf{x}) = 0$ 。其中順滑平面 (sliding surface) $s(\mathbf{x}) = 0$ 必須是連續且包含平衡點 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，控制器的設計目標即是在順滑平面 $s(\mathbf{x}) = 0$ 中產生順滑模態，所以通常稱 $s(\mathbf{x})$ 為順滑函數 (sliding function)。

順滑模態的產生，首先是要確保軌跡能在有限的時間內接觸到順滑平面，此

過程稱為迫近模態 (reaching mode)，而當系統進入順滑平面後，必須確保軌跡朝著平衡點逼近，在這個順滑平面中的系統行為即為順滑模態(sliding mode)，如圖 3.1.2 所示，概略描繪出順滑模態控制的兩個模態，當 $t = 0$ 時，系統初始狀態即被控制向順滑平面前進，並在有限的時間內到達，然後在往後的時間內，系統將不再脫離此順滑平面，且朝著平衡點移動，最終到達原點。

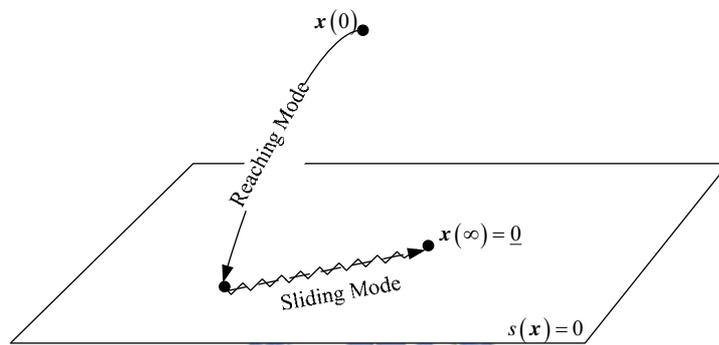


圖 3.1.2 迫近模態與順滑模態

保證系統軌跡進入順滑平面的條件，稱之為迫近條件(reaching condition)，說明如下：

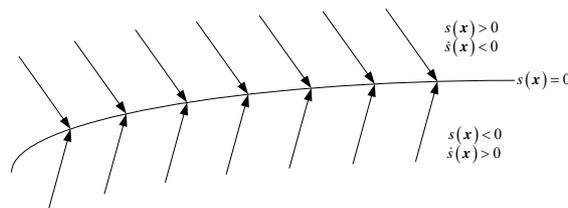


圖 3.1.3 迫近條件示意圖

如圖 3.1.3 所示，在順滑平面附近當 $s(\mathbf{x}) > 0$ 時，順滑函數隨時間增加而遞減 $\dot{s}(\mathbf{x}) < 0$ ；反之，當 $s(\mathbf{x}) < 0$ 時，順滑函數隨時間增加而增加 $\dot{s}(\mathbf{x}) > 0$ ，亦即若選定之順滑函數 $s(\mathbf{x})$ 滿足

$$\lim_{s \rightarrow 0} s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < 0 \quad (35)$$

不等式(35)稱之為順滑條件(Reaching and Sliding Condition)[26]代表順滑函數若滿足此一條件，則系統軌跡在順滑平面附近將保證迫近順滑平面。任一系統的順滑函數非唯一，但不論選擇何種型態的順滑函數，都必須滿足(35)式之條件方可確定系統可以迫近順滑平面，然而此一條件並無法說明系統之行爲能夠在有限時間內迫近順滑平面。以下介紹一個最常使用的迫近條件[25]：

$$s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < -\rho|s(\mathbf{x})| \quad \text{當 } s(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (36)$$

其中 $\rho > 0$ 。選擇一個函數：

$$V = \frac{1}{2}s^2(\mathbf{x}) \quad (37)$$

因爲 $s(\mathbf{x})$ 對時間是一次可微的，所以當迫近條件(36)式成立時，

$$\dot{V} = s(\mathbf{x})\dot{s}(\mathbf{x}) < -\rho|s(\mathbf{x})| = -\rho\sqrt{2V} < 0 \quad (38)$$

由(38)式可知， V 是一個 Lyapunov 函數，呈現遞減收斂的趨勢。整理(38)式可得：

$$\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{1}{\sqrt{2V}} dV < -2\rho t \quad (39)$$

上式整理後，可得：

$$0 \leq \sqrt{\frac{V(t)}{2}} < \sqrt{\frac{V(0)}{2}} - 2\rho t \Rightarrow t < \frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{V(0)}{2}} \quad (40)$$

因爲 t 小於一個有限大小的值，代表系統軌跡將在有限時間內進入順滑平面且保證順滑模態產生。

當系統軌跡進入順滑平面，將以順滑模態接近平衡點，需要無限大的切換頻

率，然而在實際的系統因為延遲或磁滯並無法實現，但仍在順滑平面上以較高的頻率切換並朝向平衡點前進，這樣的切換現象(震盪現象)稱之為跳切(chattering)。

上述過程知道，系統的迫近模態是屬於連續性軌跡接近順滑平面，然而進入順滑平面後，系統軌跡以不連續的切換條件連續的接近平衡點，換言之，如何證明跳切現象會朝向平衡點前進?一個最早與直接的近似概念，Filippov 法(the method of Filippov)引入的等效控制概念(the method of equivalent control)可獲得合理的解釋。

考慮下列單輸入線性系統之狀態方程式：

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (41)$$

當系統軌跡進入順滑平面，延遲 t_d 的時間才能切換輸入控制，假設第一次接觸到順滑平面時的時間為原點($t_0=0$)，系統軌跡如圖 3.1.4 所示。令控制輸入為

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{for } s > 0 \\ u^- & \text{for } s < 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{R}^+, \quad t_d + t_n < t < t_d + t_{n+1}, \quad t_d > 0, \quad u^+ \neq u^- \quad (42)$$

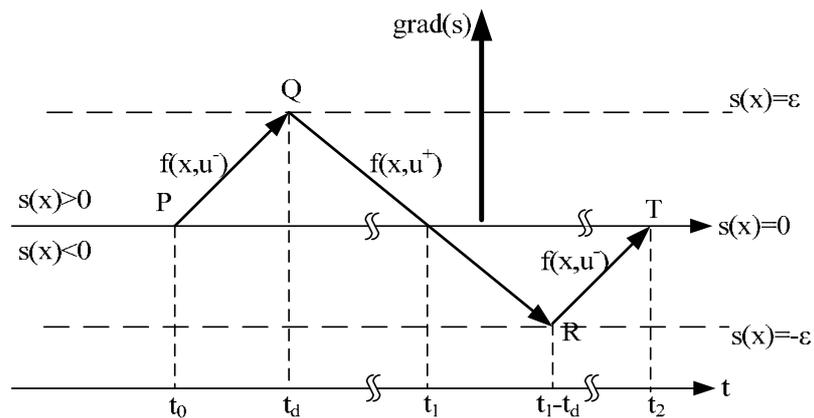


圖 3.1.4 當系統軌跡進入順滑平面，延遲 t_d 的時間才能切換輸入控制

順滑函數的一次微分如下：

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \text{grad}(s) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \text{grad}(S) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (43)$$

從圖十五可知，假設 $t_0=0$ 到 t_2 ， Δs 的變化量為

$$\Delta s = \text{grad}(s) \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+)(t_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)(t_2 - t_1)] = 0 \quad (44)$$

利用(41)式的微量表示式整理後可得

$$\therefore \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad \therefore \Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \cdot \Delta t \quad (45)$$

由 P-Q-R-T 的曲線路徑可得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)(t_d) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+)(t_1 + t_d - t_d) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)(t_2 - t_1 - t_d) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+)(t_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (46)$$

由 P-T 的直線路徑可得

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_{eq}) \Delta t \quad (47)$$

整理(46)與(47)式後可得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u_{eq}) = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+)(t_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-)(t_2 - t_1)] \quad (48)$$

令 $\mu = \frac{t_1}{t_2}$ ， $1 - \mu = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$ 帶入上式可得等效控制

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u_{eq}) = \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^+) + (1 - \mu) \mathbf{f}(\mathbf{x}, u^-) \quad (49)$$

換言之，順滑模態下的系統可以表式為

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_{eq}) \quad (50)$$

由於等效控制 u_{eq} 為連續，所以順滑模態也是連續。在圖十五中，為求得 $s(\mathbf{x}) = 0$

會令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 使得系統軌跡一旦接觸了順滑平面就被限制在此平面上並朝向平衡點前進，然而缺點是系統將呈現嚴重跳切現象。為改善此一缺點造成控制器無法實現，以一個飽和函數(saturation function)來改善(34)式造成的跳切現象。此一函數可視為在圖 3.1.4 中選取一個邊界層，當系統軌跡進入順滑平面，延遲 t_d 的時間才能切換輸入控制，如圖 3.1.5 所示。

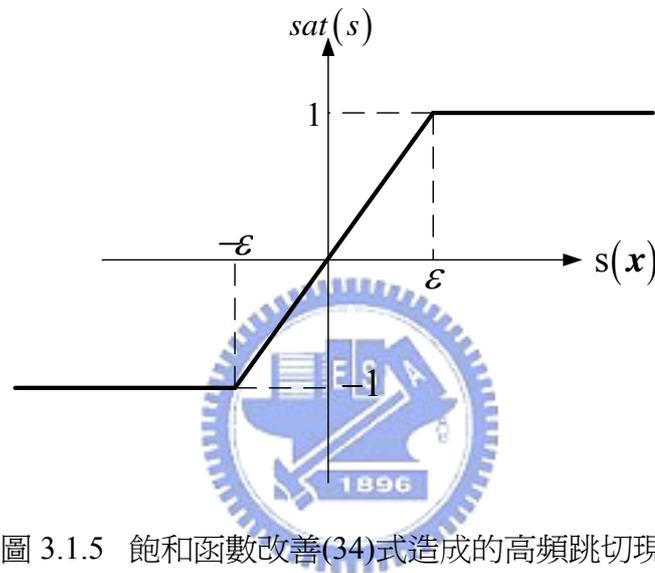


圖 3.1.5 飽和函數改善(34)式造成的高頻跳切現象

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1 & \text{when } \text{sat}(s) > \varepsilon \\ \frac{s}{\varepsilon} & \text{when } |\text{sat}(s)| \leq \varepsilon \\ -1 & \text{when } \text{sat}(s) < -\varepsilon \end{cases} \quad (51)$$

在還沒進入到邊界層時，亦即當 $|s| > \varepsilon$ ，可以得知 $\text{sat}(s) = \text{sgn}(s)$ ，換言之在系統軌跡尚未進入邊界層之前，系統滿足(38)式之迫近條件，軌跡將在有限時間內進入邊界層。一旦進入邊界層，系統切換條件由(51)式決定，軌跡將在順滑層內遊走，然而並不保證系統軌跡不會離開此一邊界層，因為順滑函數與系統狀態有關，一旦系統軌跡脫離此一邊界層，切換條件回到(38)式，在有限時間內再次回到邊界層。選取(51)式的飽和函數可以獲得降低高頻跳切現象的優點，然而付

出的代價是系統的精確度，系統軌跡將不再往原點逼近且真的進入原點，而是在原點周圍遊走，範圍由飽和層的厚度決定。再者，由於飽和層的厚度 ε 是有限值，因此不影響系統的穩定性。

從上述的推導過程可知，系統軌跡將由起始點朝向順滑平面前進，一旦進入順滑平面軌跡將延著順滑平面前進，因此順滑控制系統具備下列兩種系統型為：

- (1) 迫近模態：迫使系統軌跡在有限時間內接觸到順滑平面或包含順滑平面之飽和層。
- (2) 順滑模態：將系統軌跡限制在順滑平面或包含順滑平面之飽和層，且最後逼近平衡點。

根據此特性，在設計順滑模態控制器通常會依據下列兩個設計步驟：

(步驟一)選擇順滑函數 $s(\mathbf{x})$ 使得系統軌跡穩定在順滑平面 $s(\mathbf{x}) = 0$ 上。

(步驟二)決定控制法則使得系統在有限時間內迫近順滑平面。

以下將以一有限單輸入雙線性系統為例，介紹順滑模態控制器之設計步驟。

3.1.2 順滑函數之選擇—以單輸入雙線性系統為例

考慮下列單輸入雙線性系統(bilinear system)之狀態方程式(state equation)：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{N}\mathbf{x}u \quad (52)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ， $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ， $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ，以及 $u \in [0,1]$ 是一維變數(scalar input)。

根據上節介紹的設計步驟，此非線性系統之順滑模態控制器設計如下：

(步驟一)選擇順滑函數 $s(\mathbf{x})$ 使得系統在順滑平面軌跡是穩定的。

根據第二章所列出之可控性必要條件(C1)，(C2)，與(C3)，假設系統(52)滿足

此必要條件，系統是可控的，令 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ 為一行向量(row vector)使得順滑函數為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (53)$$

上式對時間微分可得

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x} + (\mathbf{c}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{N}\mathbf{x})u \quad (54)$$

假設 $\mathbf{c}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{N}\mathbf{x} \neq 0$ ，則在順滑平面 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$ 存在等效控制 u_{eq} 使得

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) \Big|_{u=u_{eq}} = 0 \quad (55)$$

其中，等效控制 u_{eq} 為

$$u_{eq} = -(\mathbf{c}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{N}\mathbf{x})^{-1} \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x} \quad (56)$$

將上式(56)代入(52)式，可得順滑平面上系統之動態方程式為

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - (\mathbf{c}\mathbf{b} + \mathbf{c}\mathbf{N}\mathbf{x})^{-1} (\mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x})\mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{A}}_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c})\mathbf{x} \quad (57)$$

由於 $\text{rank}(\mathbf{c}) = 1$ 且 $\mathbf{c}\bar{\mathbf{A}}_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$ ，所以 $\bar{\mathbf{A}}_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ 至少有一根為零，所以設計時選

取適當的順滑函數使得 $\bar{\mathbf{A}}_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ 之根集合為

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0\} \quad (58)$$

令 $\text{Re}\{\lambda_i | i = 1 \sim n-1\} < 0$ 使得順滑平面上系統之軌跡式穩定的，亦即 $\bar{\mathbf{A}}_{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ 是穩定的。

(步驟二)設計控制法則，使得系統在有限時間內到達順滑平面。

在步驟一假設在順滑平面存在等效控制 u_{eq} 使得(55)式成立，此時令控制器之

控制法則為

$$u = -(\mathbf{cb} + \mathbf{cNx})^{-1} (\mathbf{cAx} + \rho \operatorname{sgn}(s)) \quad (59)$$

其中 ρ 為大於零之任意數。將(59)式與(54)式代入(36)式，可得

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s(\rho \operatorname{sat}(s)) \leq -\rho |s| < 0 \text{ when } |s| \geq \varepsilon \\ s\dot{s} &= -\rho \frac{s^2}{\varepsilon} < 0 \text{ when } |s| < \varepsilon \end{aligned} \quad (60)$$

故滿足迫近與順滑條件(Reaching and Sliding Condition)，系統軌跡在有限時間內接觸到順滑層，當系統軌跡進入順滑層後，持續朝向順滑平面逼近。所以前述假設 $\mathbf{Cb} + \mathbf{CNx} \neq 0$ 成立，則選取此一控制法則，系統將實現順滑模態控制，也因此系統狀態空間存在區間使得此一假設成立，稱之為迫近與順滑區間(Reaching and Sliding Region, RAS-Region)，以二維相位平面(phase plane, 假設 $n=2$)為例並假設 $\mathbf{Cb} + \mathbf{CNx} > 0$ ，其迫近與順滑區間如圖 3.1.6 所示。

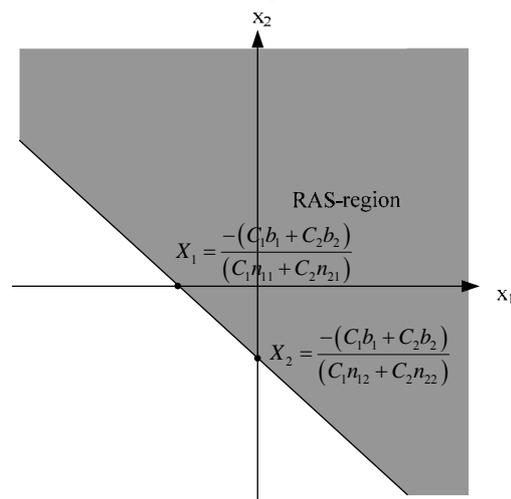


圖 3.1.6 灰色區間為迫近與順滑區間

3.2 設計降壓型直流轉換器(Buck DC-DC Converter)之順滑模態控制

在第二章中，我們推導出 Buck 直流轉換器之模型，因為考慮開關元件之非理想模型，故推導出之模型為雙線性型式(Bilinear Form)，且因為負載的變化，所以非匹配式不確定量與系統狀態有關，如方程式(61)所示。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{N}\mathbf{x}u + \mathbf{d} \quad (61)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_d + r_L + r_c)}{L} + \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} \times \frac{V_d}{E + V_d} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{CR_L^o} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{(E + V_d)}{L} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R_L^o - R_L}{CR_L^o R_L} x_2 \end{bmatrix} \text{ 以及 } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{-(r_{ds} - r_d)}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在第二章中說明系統因為開關切換而分成兩個穩定的子系統，不會因為負載變化而發散。由狀態方程式可驗證系統是可控，所以可以利用極點指定法(pole-placement method)得到唯一的增益向量 $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$ 使得矩陣 $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}$ 有 2 個指定的特徵值。此系統之雙線性項(bilinear term)是匹配於系統輸入矩陣 \mathbf{b} ，且遠小於系統矩陣 \mathbf{A} 。

以下設計步驟分為三部分，首先依據上述之步驟一選定順滑函數，使得系統軌跡在順滑平面上是穩定的。接著說明輸出電壓與命令電壓之誤差積分項在此順滑函數中的影響。最後討論此包含誤差積分之順滑函數之迫近特性，即前述步驟二。在過去的設計中，取誤差函數為狀態變數，其缺點是控制器必須確實掌握負載為何，故加入其他的估測與控制法則。我們的設計目標是，在負載不確定下仍

能正確控制系統輸出，且不因負載變化影響控制器之穩定性。

3.2.1 步驟一：選擇順滑函數使得系統在順滑平面軌跡是穩定的

已知 \mathbf{b} 是全秩矩陣(full rank)，且系統(61)式可控的，依據矩陣理論可以知道一定會找到一個非奇異(nonsingular)轉換矩陣(Transformation Matrix)使得

$$\mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

利用此轉換矩陣定義新的系統狀態 \mathbf{y} 如下：

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \quad (63)$$

其中 $z = y_1$ ，以及 $v = y_2$ 。

則原系統(61)成上轉換矩陣 \mathbf{T} 後成爲

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{Tbu} + \mathbf{TNT}^{-1}\mathbf{yu} + \mathbf{Td} \quad (64)$$

因爲雙線性項(Bilinear term)對系統輸入矩陣 \mathbf{b} 而言是匹配的，所以該項可以表式爲

$$\mathbf{Nx} = \mathbf{bf}(\mathbf{x}) \quad (65)$$

再由(62)式與(65)代入上式(64)繼續化爲

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(\mathbf{x})u + \begin{bmatrix} t_1\mathbf{d} \\ t_2\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (66)$$

其中 $\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ ，以及 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$

由(66)式可知，當系統經過矩陣轉換後，新的狀態方程式將分為兩部分，其一與原系統之輸入無關且僅受非匹配式雜訊 $t_1 \mathbf{d}$ 干擾；另一與原系統之輸入以及匹配式雙線性項有關。如下列兩方程式所示：

$$\dot{z} = H_{11}z + H_{12}v + t_1 \mathbf{d} \quad (67)$$

$$\dot{v} = H_{21}z + H_{22}v + u + f(\mathbf{x})u + t_2 \mathbf{d} \quad (68)$$

當系統被控制在順滑平面上，(68)式的輸入以等效控制取代，與系統的穩定性無關且順滑行為(sliding behavior)被限制在方程式(67)式，為了保證系統在順滑平面上的穩定性，(67)是必須是穩定的。在使用根值指定法設計(67)式之前，必須確認此狀態方程式是可控的。已知原系統滿足雙線性系統可控之必要條件，若在該條件之第三項中，(即第二章的(C3))，忽略雙線性矩陣(bilinear term)，則可控性矩陣可簡化為線性系統之可控性矩陣(controllability matrix)：

$$\text{rank}([\mathbf{b}, \mathbf{Ab}]) = 2 \quad (69)$$

(69)式乘上轉換矩陣 \mathbf{T} ：

$$\text{rank}([\mathbf{Tb}, \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{Tb}]) = \text{rank}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right) = \text{rank}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_{12} \\ H_{22} \end{bmatrix}\right]\right) = 2 \quad (70)$$

則(67)式之可控性矩陣為 $[H_{12}, H_{22}H_{12}]$ ，因為 $H_{12} \neq 0$ ，所以

$$\text{rank}([H_{12}, H_{22}H_{12}]) = 1 \quad (71)$$

(67)式是可控的，可以利用根值指定法設計(67)式。令系統狀態為 z ，輸入為 v ，

選擇

$$v = -\Gamma z \quad (72)$$

使得

$$\dot{z} = (H_{11} - \Gamma H_{12})z + t_1 d \quad (73)$$

其中 $(H_{11} - \Gamma H_{12})$ 必須是穩定的。選擇順滑函數為

$$s = v + \Gamma z \quad (74)$$

在順滑平面 $s = 0$ 時， $v = -\Gamma z$ 使得(67)式是穩定的。由於(63)，可將上式改寫為

$$s = [\Gamma \quad 1]T\mathbf{x} = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (75)$$

所以順滑函數之係數 \mathbf{c} 為

$$\mathbf{c} = [\Gamma \quad 1]T \quad (76)$$



上述的過程中，我們利用轉換矩陣 T 將原系統狀態方程式將原系統狀態方程式分為兩部分，其一是與系統輸入無關的(67)式，另一是與系統輸入有關的(68)式。利用根值指定法使(67)式穩定，指定 $(H_{11} - \Gamma H_{12})$ 的特徵值後解得 Γ ，得到順滑函數(75)式。

在順滑平面 $s = 0$ 存在等效控制 u_{eq} 使得 $\dot{s}|_{u=u_{eq}} = 0$ ：

$$\dot{s} = \dot{v} + \Gamma \dot{z} = (H_{21}z + H_{22}v + (1 + f(\mathbf{x}))u_{eq} + t_2 d) + \Gamma(H_{11}z + H_{12}v + t_1 d) = 0 \quad (77)$$

$$\Rightarrow u_{eq} = (1 + f(\mathbf{x}))^{-1} (-(H_{21}z + H_{22}v + t_2 d) - \Gamma(H_{11}z + H_{12}v + t_1 d)) \quad (78)$$

因此，在順滑平面上系統成為

$$\dot{z} = (H_{11} - \Gamma H_{12})z + t_1 d \quad (79)$$

$$\dot{s} = 0 \quad (80)$$

其中(80)式與系統的穩定性無關。

3.2.2 誤差積分項在順滑函數中的影響

上述順滑模態控制器的控制目標是把系統軌跡控制到原點，然而在直流轉換電路中，如果系統是鬆弛的(relaxed system)，意味著系統初始值為零，若選取上述順滑函數，則系統軌跡在系統起始點就位在順滑平面上，並不能把系統軌跡帶到期望狀態(desired state)，所以先前的研究採用誤差函數為新的狀態變數，利用順滑模態控制將誤差函數控制到原點，然而此控制方法的缺點必須知道系統負載，且系統負載變動時，便無法將系統軌跡維持在期望狀態上，為此系統必須加入負載估測或結合其他控制法則。

再者，上述的控制器在傳統的設計上以離散式磁滯控制來實現，主要缺點是切換頻率隨著系統參數改變，無法以固定的頻率做切換。如(78)所示，此一等效控制可以視為穩態時期望的責任週期，其切換頻率可以經由固定頻率的三角波與比較器電路產生固定頻率的脈波寬度調變的非線性控制。然而此等效控制並沒有命令電壓的控制輸入[8]，在本論文中提出的順滑模態控制器，加入誤差函數與誤差函數的積分項於(75)中，即為：

$$s = c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_{2d}) + \beta \int_0^t (x_2 - x_{2d}) dt = \mathbf{c} \mathbf{x} + \beta \int_0^t (x_2 - x_{2d}) dt - c_2 x_{2d} \quad (81)$$

其中 x_2 為系統輸出電壓， x_{2d} 為命令電壓。

此順滑函數之一次微分為

$$\dot{s} = \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} + \beta(x_2 - x_{2d}) = \dot{v} + \Gamma\dot{z} + \beta(x_2 - x_{2d}) \quad (82)$$

在順滑平面上，存在等效控制 u_{eq} 使得 $\dot{s}|_{u=u_{eq}} = 0$ ：

$$u_{eq} = (1 + f(\mathbf{x}))^{-1} (\mathbf{cAx} + \mathbf{cd} + \beta(x_2 - x_{2d})) \quad (83)$$

將此等效控制代回經過轉換矩陣變換後的系統(68)式：

$$\dot{v} = -\Gamma\dot{z} - \beta(x_2 - x_{2d}) \quad (84)$$

因此，在順滑平面上系統成爲

$$\dot{z} = (H_{11} - \Gamma H_{12})z + t_1 d \quad (85)$$

$$\dot{s} = 0 \quad (86)$$

其中(86)式與系統的穩定性無關。

比較(75)式與(81)式兩個順滑函數，前者利用轉換矩陣求得順滑函數的係數矩陣 \mathbf{c} ，將使得 $\mathbf{cb} = 1$ ，且等效控制 u_{eq} 代入原系統(61)式，可整理得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{eq}\mathbf{x} + \left(\mathbf{I} - (\mathbf{b} + \mathbf{Nx})(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{c} \right) \mathbf{d} \quad (87)$$

其中，令 $\mathbf{A}_{eq} = \left(\mathbf{I} - (\mathbf{b} + \mathbf{Nx})(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{c} \right) \mathbf{A}$ ，特徵方程式爲：

$$\lambda^2 + \left(\frac{c_2}{c_1} a_{21} - a_{22} \right) \lambda = 0 \quad (88)$$

由(88)式可知，其特徵值已經因爲順滑函數控制到指定的一個特徵值與零。

若將(81)式獲得的等效控制 u_{eq} 代回原系統(61)式，可整理得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'_{eq} \mathbf{x} + \left(\mathbf{I} - (\mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x})(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{c} \right) \mathbf{d} + (\mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x})(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} x_{2d} \quad (89)$$

其中，令 $\mathbf{A}'_{eq} = \mathbf{A}_{eq} - (\mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x})(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} [0 \ \beta]$ ，特徵方程式為：

$$\lambda^2 + \left(\frac{c_2}{c_1} a_{21} - a_{22} \right) \lambda + \frac{\beta}{c_1} a_{21} = 0 \quad (90)$$

其特徵值會因為 β 值的變化而移動，如圖 3.2.1 所示，當 β 值增加， \mathbf{A}'_{eq} 的特徵值為共軛負根且虛部會隨著增加，並未使特徵值往負數平面的右半平面移動，所以系統仍是穩定的，唯震盪現象的振幅會隨著 β 增加而增加。

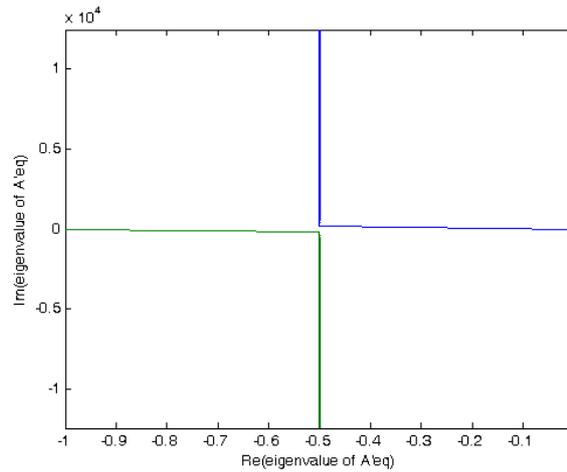


圖 3.2.1 加入積分器後， \mathbf{A}'_{eq} 特徵值的變化

加入誤差積分項後，假設系統是鬆弛系統，初始值為零，當此系統啟動時，系統軌跡即在順滑平面上，然而因為誤差項為負值，隨著時間增加，會將系統軌跡帶離順滑平面，直到誤差項為正值且積分值抵消先前的積分結果，軌跡方能朝向順滑平面前進。然而系統若僅存在如切換函數(34)形成的順滑平面，方程式(81)的解是不存在的，因為切換函數形成的解適用於(75)式，使得狀態變數 $\mathbf{x} = 0$ ，然而我們的控制目標並非把電感電流與電容電壓控制到零。再者，因為順滑函數的

係數值遠小於 β ，故我們選用順滑層的概念，允許系統軌跡回到順滑層後在順滑層內遊走。由(81)式可知，當順滑函數穩定時在順滑層內，因為 $c_1 \mathbf{x}_1 \neq 0$ ，使得順滑函數值不為零，換言之，積分項讓系統軌跡回到順滑層後，積分值為定值且約等於 $c_1 \mathbf{x}_1$ 。

3.2.3 步驟二：設計控制法則使得系統在有限時間內到達順滑平面

在 3.2.1 的步驟一假設在順滑平面 $s(\mathbf{x}) = 0$ 存在等效控制 u_{eq} 使得(55)式成立，此時令控制器之控制法則為

$$u = -(1 + f(\mathbf{x}))^{-1} (\mathbf{cAx} + \beta(V_{out} - V_{ref}) + \rho \text{sat}(s)) \quad (91)$$

其中 ρ 為大於零之任意數。可得，當 $|s| \geq \varepsilon$ 時，

$$s\dot{s} = s(\mathbf{cAx} + \beta(V_{out} - V_{ref}) - (\mathbf{cAx} + \beta(V_{out} - V_{ref}) + \rho \text{sat}(s))) \leq -\rho|s| < 0 \quad (92)$$

如前述，當系統未到達順滑層時滿足迫近與順滑條件(Reaching and Sliding Condition)，系統軌跡在有限時間內接觸到順滑層並持續維持在此範圍內。所以前述假設 $\mathbf{Cb} + \mathbf{CNx} \neq 0$ 成立，則選取此一控制法則，系統將實現順滑模態控制，也因此系統狀態空間存在區間使得此一假設成立，稱之為迫近與順滑區間(Reaching and Sliding Region, RAS-Region)，以二維相位平面(phase plane, 假設 $n=2$)為例並假設 $\mathbf{Cb} + \mathbf{CNx} > 0$ ，其迫近與順滑區間如圖 3.2.2 所示。

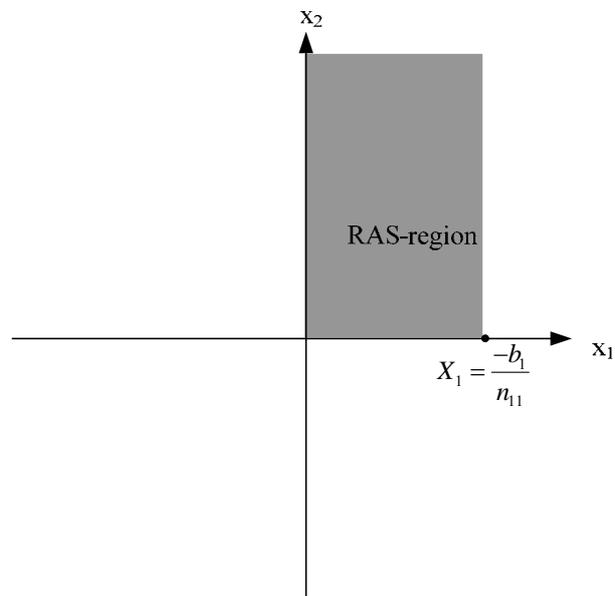


圖 3.2.2 灰色區間為 Buck 直流轉換器之迫近與順滑區間

相較於圖 3.1.6，此一迫近與順滑區間的條件除了 $Cb + CNx > 0$ 外，還必須考慮電路本身之特性，即電感電流恆正與電壓電壓恆正之條件，故迫近與順滑區間限制在第一象限。

在本章中，我們簡述順滑控制理論與設計步驟，並在選取一順滑函數使系統穩定後，加入誤差函數與誤差函數的積分，修正切換函數為飽和函數後，設計控制法則，讓系統在有限時間內到達順滑層，並在順滑層內遊走。因為順滑函數與系統狀態有關，並不保證系統軌跡進入順滑層後不會再離開順滑層，但是由方程式(92)可知，一旦系統軌跡不在飽和層內，其軌跡移動方向將朝著順滑層前進。在下一章中將對此系統與控制器進行相關模擬與討論。

第四章 Buck DC-DC Converter 之系統設計與模擬

在本章的第一節，將討論此直流轉換電路之規格與元件設計，第二節利用數值模擬的方式驗證控制器輸出責任週期在數學模型上計算的結果。第三節利用 Matlab/SimPowerSystems 軟體模擬加入脈波寬度調變後系統軌跡與狀態輸出。

4.1 系統規格與設計

在本章的模擬設計中，我們依據以下規格探討元件的選用，並討論元件參數對系統之影響，並依據第三章所設計之控制法則設計控制器。

Parameters	Symbol	min	Typ	Max	Unit
Supply Voltage	V_{cc}		12		V
Operation Frequency	f_{osc}		40		kHz
Feedback Voltage	V_{feb}		1.25		V
Output Ripple Voltage	V_{ripple}/V_{out}			1	%
Static Drain-Source On Resistance	$R_{DS(on)}$		0.22	0.27	Ω
On Resistance of Diode	$R_{diode(on)}$		5		m Ω
Voltage drop of Diode	V_{diode}		0.75		V
Load	R_{Load}	5		30	Ω
Voltage drop during Load Change	V_{drop}			0.25	V
Sliding Layer	ϵ		10^{-3}		

表一 系統規格

前述之控制器假設工作於連續導通模式(CCM)，換言之，穩態時電感上的電流恆大於零。為簡化元件設計過程，僅考慮系統之理想模型，功率消耗的部分均不考慮，亦即 $r_d = 0$ ， $r_{ds} = 0$ ， $r_L = 0$ ，以及 $V_D = 0$ 。此外，電容的等效電容(equivalent serial resistance, ESR)在下面的推導中不能被忽略，因為該非理想特性將影響電容元件的選擇。

4.1.1 電感設計

效率，輸出功率，與操作頻率是選擇電感的主要參數。以下公式推導後會以一個簡單的例子介紹元件的選用。如圖 4.1.1 所示，假設電路操作於平衡點(穩態)，圖(a)中 t_{on} 代表該時間內開關為導通狀態，如圖(b)所示，電感電流上升，因為考慮粒像電感，所以電感電壓等於輸入電壓減去輸出電壓， $V_L = E - V_o$ 。圖(a)中 t_{off} 代表該時間內開關為截止狀態，如圖(c)所示，電感電流下降，因為考慮理想二極體，所以電感電壓反向， $V_L = -V_o$ 。

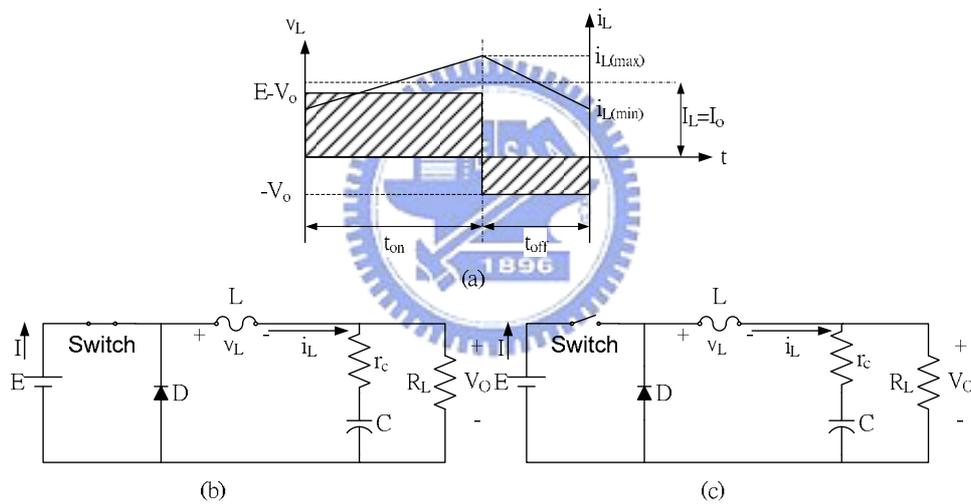


圖 4.1.1 Buck 直流轉換器之狀態 (假設電感電流是連續的)

圖 4.1.1 簡單繪出穩態連續導通模式下電感電壓(斜線部分)與電感電流(三角波)，從圖中可以看出，電感電流是連續的， $i_L(t) > 0$ 。在第二章中，我們推導出存在一個邊界值 $I_{L(bound)}$ 使得系統分為連續與非連續操作模式，其中

$$I_{L(bound)} = \frac{1}{2} \frac{(E - V_o)}{L} t_{on} = \frac{T_s E}{2L} D(1 - D) \quad (93)$$

已知責任週期 D 的值介於 0~1 之間，帶入(93)式可繪出如圖 4.1.2 之責任週期對電

感電流曲線圖，其中灰色區域代表電感電流操作於連續導通模式。電感電流的最大值發生在責任週期為 0.5 處。所以電感值可以下列公式選擇：

$$L > \frac{T_s E}{\Delta I_o} D(1-D) \quad (94)$$

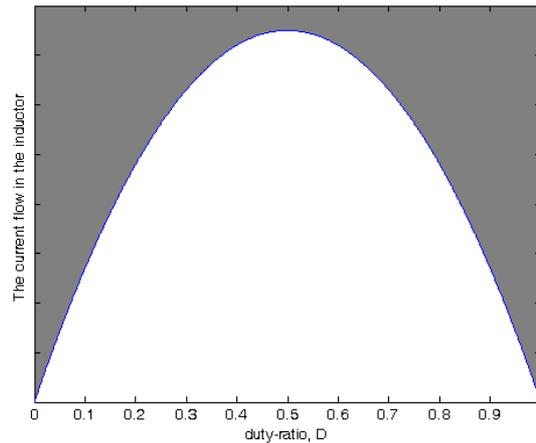


圖 4.1.2 責任週期對電感電流曲線圖

為了符合最小輸出電壓鏈波的需求，一般電感鏈波大小限制在輸出電流的 20%至 50%。例如，輸入直流電壓為 12V，輸出電壓 5v，操作頻率為 40kHz，負載電阻為 10Ω，依據(94)式可得最小電感值為：

$$L > \frac{T_s E}{\Delta I_o} D(1-D) = \frac{\left(\frac{1}{40 \times 10^3}\right) 12}{\frac{5}{10} \times 0.5} 0.5(1-0.5) = 300 \mu\text{H} \quad (95)$$

在實際的應用上，較低的電感值可以利用較小體積的鐵芯來實現，但缺點是，電感量不足造成較大的電流鏈波與輸出鏈波電壓。另一方面，如果以較大的電感值來設計降壓型轉換器，其濾波器之自然頻率(natural frequency of low pass filter)較低，但缺點是直流等效串聯電阻 (D.C. ESR)因為銅損增加而加大。

4.1.2 輸出電容設計

先前的設計中，假設輸出電容的等效串聯阻抗為零，根據(94)選擇最小的電感值，其中假設電容值夠大所以得到 $v_o(t) = V_o$ 。然而，實際的輸出鏈波如圖 4.1.3 所示，實際的電容值可由以下的分析求得。

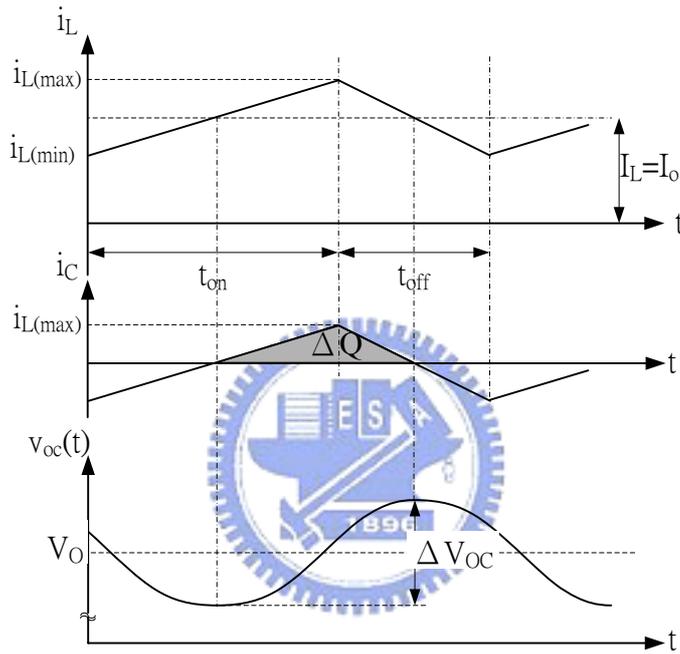


圖 4.1.3 穩態時輸出電壓鏈波

在操作頻率點的交流等效阻抗遠小於負載電阻，所以假設所有在電感上的鏈波均經由電容與地迴路(ground return path)回到電源端且電感的平均值均流向負載端。電容的充電電荷量 ΔQ 標示於圖廿一灰色區域，其數學表示式為：

$$\Delta Q = C \times \Delta V_{oc} = \frac{1}{2} \left(\frac{t_{on}}{2} + \frac{t_{off}}{2} \right) \left(\frac{i_{L(max)} - i_{L(min)}}{2} \right) = \frac{(i_{L(max)} - i_{L(min)}) T_S}{8} \quad (96)$$

輸出電壓鏈波的峰對峰值 ΔV_o 可表式為

$$\Delta V_o = (i_{L(\max)} - i_{L(\min)}) \times r_c + \frac{T_s^2 ED(1-D)}{8LC} = \Delta I_L \times r_c + \frac{T_s^2(1-D)}{8LC} V_o \quad (97)$$

$$\text{其中} \quad \Delta I_L = i_{L(\max)} - i_{L(\min)} = \frac{T_s E}{L} D(1-D)$$

$$V_o = ED$$

在切換式電源轉換器設計中，輸出電壓的漣波必須小於輸出電壓的 1%，而其中的 90%~95% 的輸出電壓漣波是因為輸出電流的等效串聯電阻造成，所以方程式(97)可以簡化為：

$$\frac{\Delta V_o}{V_o} = \frac{\Delta I_L \times r_c}{V_o} < 1\% \quad (98)$$

此外，最小輸出電容量可以下列之方程式求出：

$$\frac{\Delta V_{oc}}{V_{oc}} = \frac{T_s^2(1-D)}{8LC} = \frac{\pi^2(1-D)}{2L} \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2 \ll 1\% \quad (99)$$

其中 $\omega_s = 2\pi \frac{1}{T_s}$ ，控制器的操作頻率

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，濾波器之截止頻率

由(99)式可知，輸出電壓漣波可以透過選擇適當的操作頻率對截止頻率的比值來減小，所以電容器的選擇可以以下列方程式來選擇：

$$C > \frac{12.5 \times T_s^2 (1-D)}{L} \quad (100)$$

$$r_c = ESR < \frac{V_o \times 1\%}{\Delta I_L} \quad (101)$$

選擇電容器的必要條件為(100)式，當電容值決定後，再由(101)式與電容器的

規格書做比較，找出適當的元件。如果電容器的 ESR 值超過規格，就一般的電容器的特性而言，同一耐壓下電容值越高，其 ESR 越低，同一電容值的條件下，耐壓越高，其 ESR 越低。在實際的設計中，相較於電感的選擇，有更多條件必須被考慮，例如額定電壓，ESR，突波電壓(surge voltage)，散逸因數，漣波電壓，環境溫度，機構設計等條件必須滿足方可使用。上述條件缺一不可，一但選擇的不適當的電容值，造成的危險不僅是電路的損壞，還會造成生命財產上的威脅。

例如前述例子，電感選用 $300\mu\text{H}$ ，所以最小電容值為 $13\mu\text{F}$ ，串聯等效電阻必須小於 0.2Ω 。

4.1.3 順滑模態控制器設計

至此 Buck 直流轉換器之電路參數已經獲得，整理如下：

Component	Value	Unit	ESR	Note
inductance	680	μH	1.2 Ω	
Output capacitance	220	μF	0.117	

表二 濾波器參數

將表一與表二之元件參數代入方程式(33)，可得 Buck 直流轉換器之模型。代入(87)式可得順滑模態控制器之控制法則。然而控制器之輸出是圖 2.1.1 中開關元件的導通責任週期，故輸出值限制在 0~1 之間。如圖 4.1.4 所示，為數值模擬控制器在系統穩態時輸出之範圍，斜面代表不同輸出電壓與輸出電流在此一系統之責任週期，垂直於 X_{two} 之白色平面代表輸出電壓 5V 時，與此一斜面之關係。

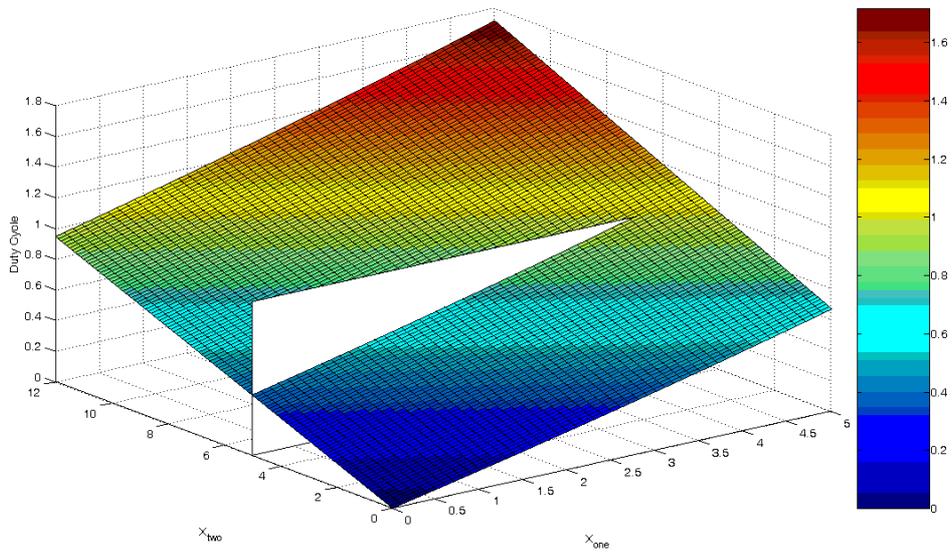


圖 4.1.4 控制器輸出責任週期之範圍

控制法則為：

$$u = -(\mathbf{cb} + \mathbf{cNx})^{-1} (\mathbf{cAx} + \beta(V_{out} - V_{ref}) + \rho \operatorname{sgn}(s)) \quad (102)$$

若控制器輸出限制在 0~1 之間，則 $(\mathbf{cb} + \mathbf{cNx})$ 與 $(\mathbf{cAx} + \beta(V_{out} - V_{ref}) + \rho \operatorname{sgn}(s))$ 之比值必須在 1 附近，在此一直流轉換器中，因為 \mathbf{cNx} 與 \mathbf{cAx} 之值很小， $\mathbf{cb} = 1$ ，所以控制器的輸出可以被限制在 0~1 之間。從圖中亦可看出，固定輸出電壓 5V 時，最大輸出電流發生在責任週期等於 1 時，約莫在 4 安培處。當輸出電流缺近於零時，責任週期並非如第二章中以傅立葉分析之(1)式所推算之理想值，原因是因為系統存在非理想之損失，為得到固定之輸出電壓，故需要增加責任週期克服線路上之損失。

4.2 數值模擬

本文的模擬分為兩部分，在數值模擬的部分即利用 MATLAB 之數學方程式模擬器之優點檢視第二章與第三章之模型與控制器，在第二部分保留第三章之控制器，數學模型直接置換成 SimPowerSystems 的內建模型。兩者的差異在於，第一部分驗證有限輸入的條件下，利用片段線性模型建立的轉換器模型是否仍然能夠被控制器成功的控制到期望狀態。在第二部分則加入脈波寬度調變控制以 Sim-powerSystems 建立之模型，驗證開關元件的狀態對系統的影響。

模擬系統之方塊圖 4.2.1 所示，完整系統方塊圖如附錄所示。

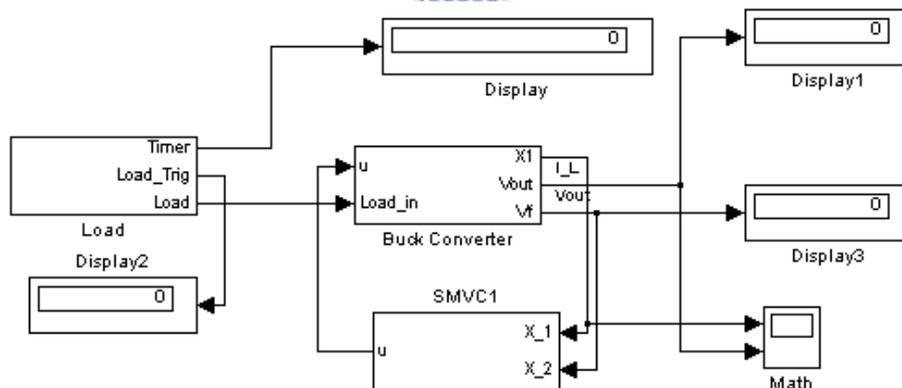


圖 4.2.1 模擬系統方塊圖

系統分為三個主要方塊，在 Buck Converter Module 方塊中建構轉換器之數學模型，在 SMVC1 Module 中則為順滑模態控制器，另外一個為模擬負載 Load Module。在模擬的系統中，我們建構固定電壓回授的方式使得控制器的控制目標顧定再回授電壓，外部利用如圖 4.2.2 所示之分壓電阻的方式提高輸出電壓準位的设计方便性。換言之，改變輸出電壓值時，僅需更換分壓電阻值使得回授電壓固定在一定值，例如 1.25V，如方程式(103)所示。此方法為目前工業界多數電壓轉換器之設計方法。此外，為了不使回授分壓電阻造成輸出電壓之負載效應，一般

選用分壓電阻為 $k\Omega$ 級之電阻。

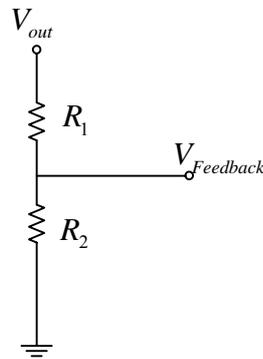


圖 4.2.2 固定回授電壓

$$V_{out} = V_{Feedback} \times \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad (103)$$

以下模擬負載電流為 3.5 安培變化至 4 安培，分別從系統狀態軌跡，狀態輸出，以及控制器輸出討論此控制器之特性。如同上一節中討論控制法則的邊界值，因為 $(cb + cNx)$ 與 $(cAx + \beta(V_{out} - V_{ref}) + \rho \operatorname{sgn}(s))$ 之值並不會很大，所得之責任週期可以一飽和函數限制在 0~1 之間，唯缺點是，輸出電壓無法到達如方程式(1)所示，最高輸出電壓為系統輸入電壓。此外，因為系統的非理想考慮元件的損失，所以元件的壓降亦造成輸出電壓無法達到輸入電壓值。

4.2.1 數值模擬，未加入控制器輸出飽和函數

如圖 4.2.3 所示，為系統未加入輸出飽和函數之狀態軌跡，當系統啟動後，軌跡將以漸進式穩定朝向平衡點前進，觀察圖 4.2.4 之控制器輸出，其值在系統啟動時震盪範圍在 ± 5 之間，隨時間增加收斂在 0~1 之間，隨著負載變化，控制器之輸出並不會因此發散。

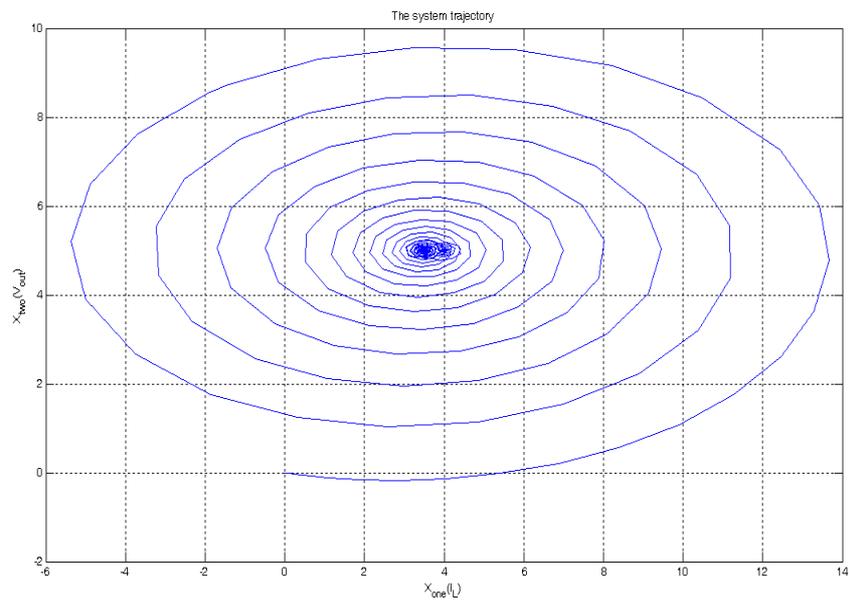


圖 4.2.3 高負載時系統狀態軌跡

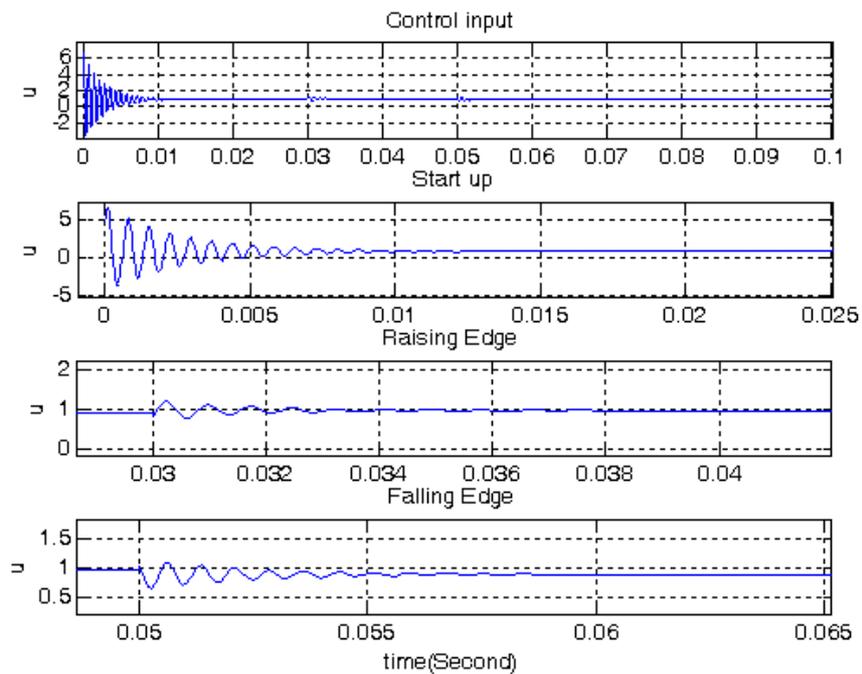


圖 4.2.4 未加入飽和函數之控制器輸出

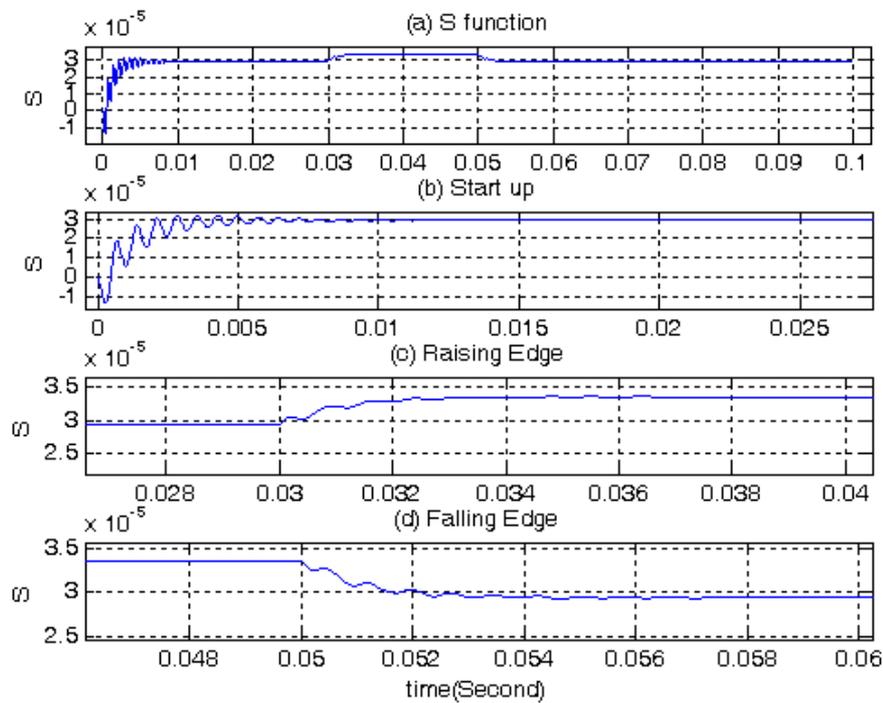


圖 4.2.5 順滑函數

圖 4.2.5 所示為此控制器之順滑函數，其中順滑函數在系統啓動時已經在順滑層中，因為選取順滑層，故順滑函數在順滑層內遊走而不會真的進入順滑平面，也因此[7]稱此控制器為類順滑模態控制器(Sliding-Mode-Like Controller)。

加入飽和函數的目的有二，其一是使得系統設計符合實際 Buck 直流轉換器之開關責任週期控制，另一是，當控制器輸出值大於 1 時，讓轉換器的開關週期為最大，小於零時則為最小。所以在後續的模擬中，在控制器的輸出端加入飽和函數使得控制器的輸出符合實際 Buck 直流轉換器之開關責任週期控制。

4.2.2 數值模擬，加入控制器輸出飽和函數

加入控制器輸出飽和函數後，系統軌跡如圖 4.2.6 所示。系統啓動後朝平衡點前進，當負載變化時進入下一個平衡點。輸出狀態如圖 4.2.7 所示。

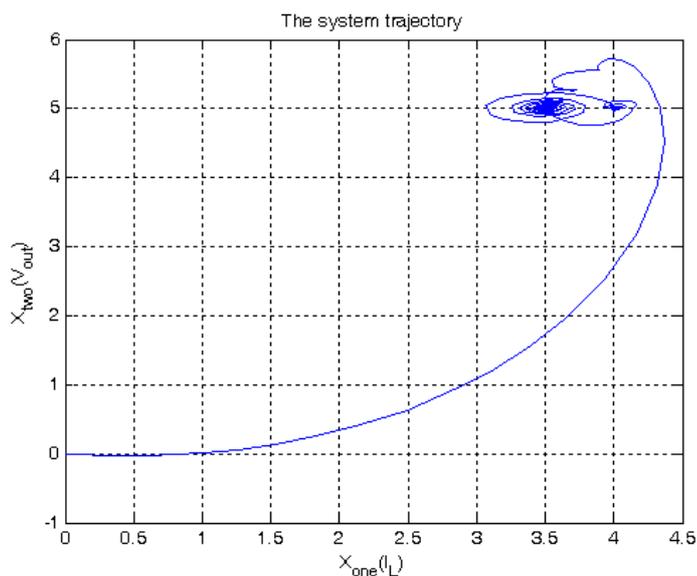


圖 4.2.6 控制器加入飽和函數後之系統軌跡

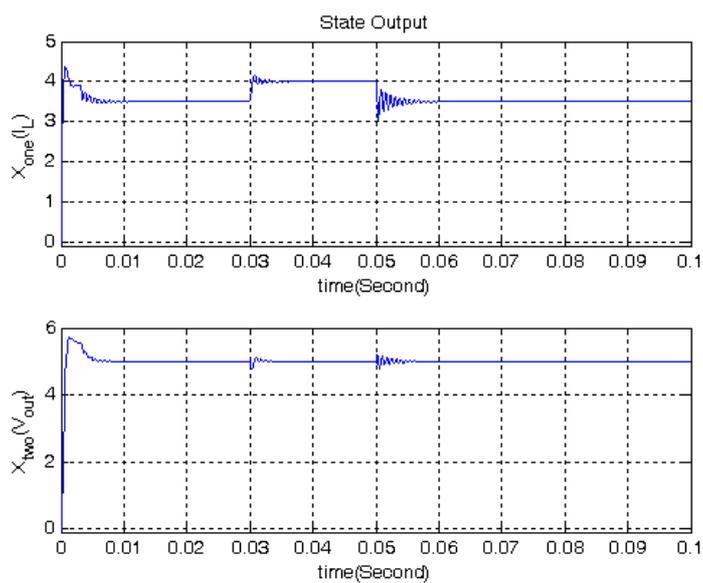


圖 4.2.7 狀態輸出

在本模擬中，假設負載變化為 500mA，如圖 4.2.8 與 4.2.9 所示。

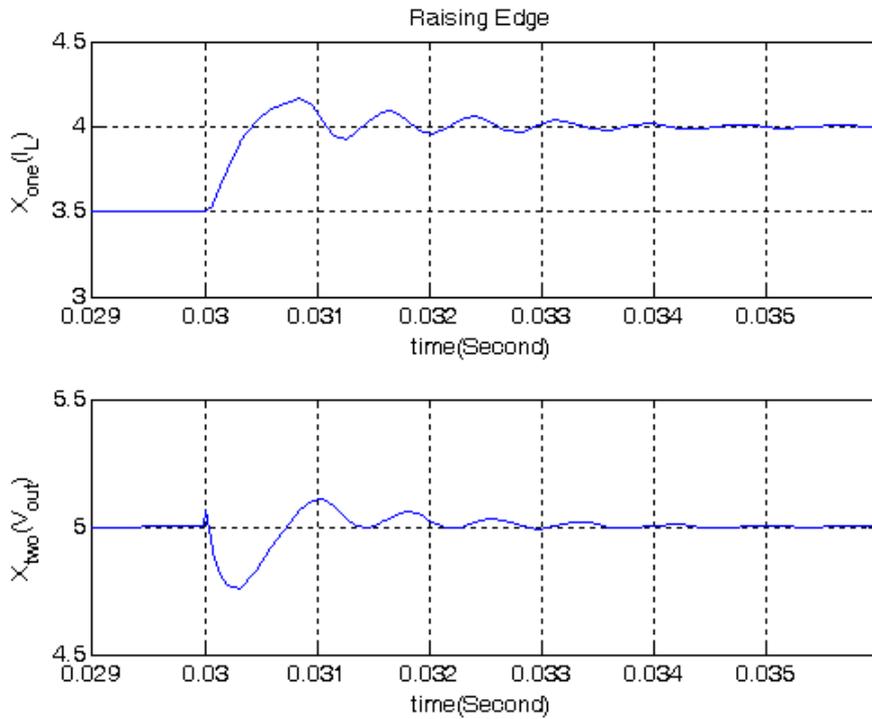


圖 4.2.8 負載增加 500mA 時系統輸出之狀態

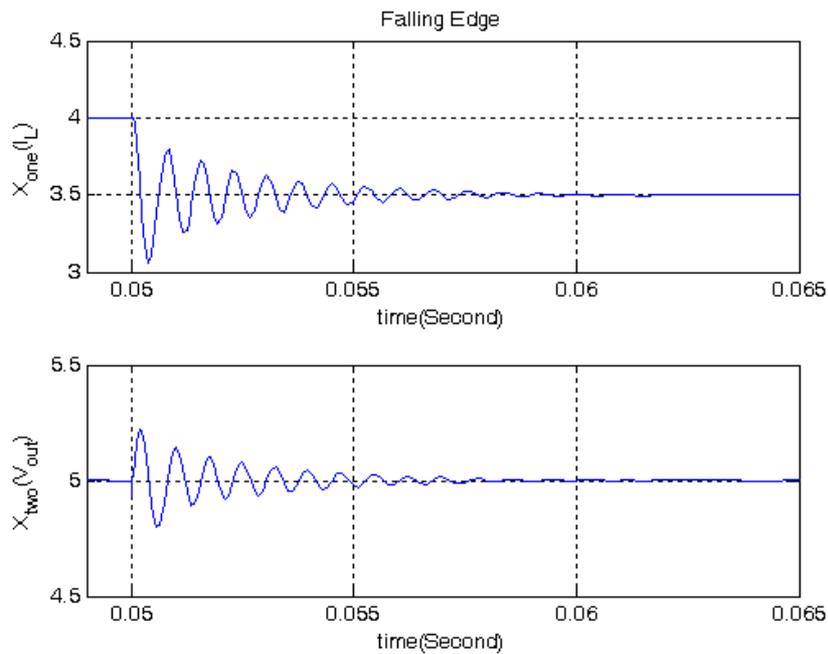


圖 4.2.9 負載減少 500mA 時系統輸出之狀態

順滑函數的模擬結果如圖 4.2.10(a)所示。順滑函數在系統啓動時已經在順滑層中，然而因為加入控制器輸出飽和函數，其控制輸出在系統啓動時以最大責任週期使系統輸出狀態值不斷上升，造成順滑函數脫離順滑層，如同第三章對飽和函數的說明，一旦離開順滑層，將在有限時間內回到順滑層，如圖 4.2.10(b)所示。當負載增加，亦為著輸出電流增加，使得輸出電壓因為電容提供額外電流而下降，順滑函數值在順滑層隨時間增加而遞減，如圖 4.2.7 與圖 4.2.10(c)所示。

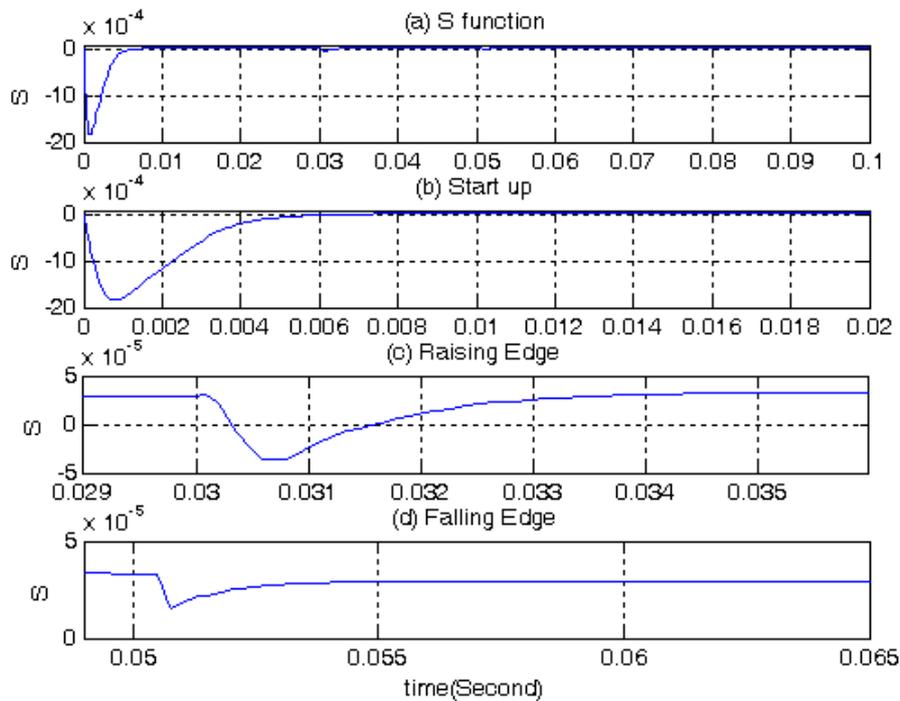


圖4.2.10 加入控制器飽和函數之順滑函數

在圖 4.2.11 中，繪出控制器輸出，很明顯的可以看出，系統啓動時因為飽和所以 Buck 直流轉換器工作於最大責任週期。負載變化時，負載增加所以提高導通週期，然而因為飽和函數所以 Buck 直流轉換器工作於最大責任週期，負載減少時，減少導通週期釋放電路中多餘的能量。

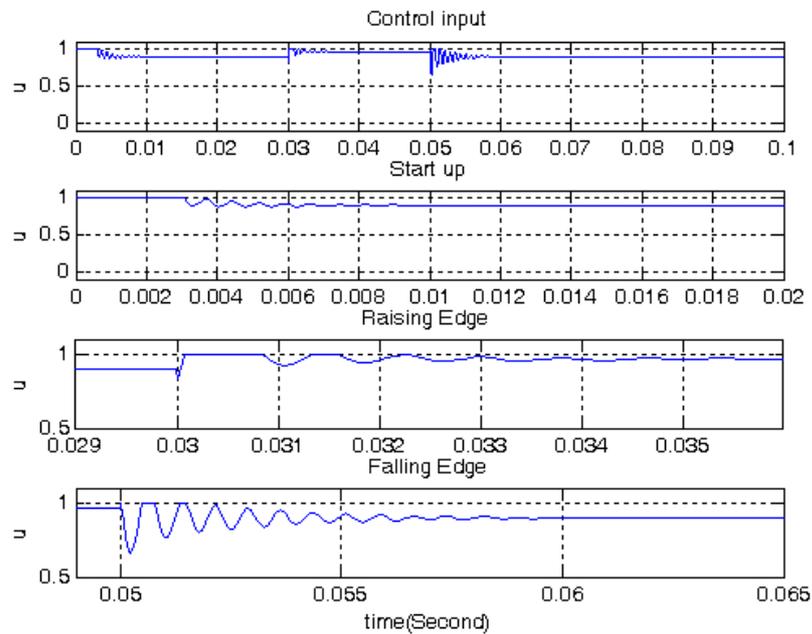


圖 4.2.11 控制器輸出

在本節中，我們利用第二章中建立 Buck 直流轉換器的數學模型做數值模擬，可以驗證系統在負載變動時是否穩定，以及平滑函數與控制器加入飽和函數後對系統之影響。然而在輸出狀態中，並無法確定系統在定頻切換時是否能夠正確控制系統輸出狀態，特別是流經電感上的電流，並無法看出因為開關導通與截止造成的變化。

在下一節將以一三角波與比較器將本節的導通責任週期轉換成脈波寬度變信號，控制 Buck 直流轉換器開關元件的導通與截止，並對高負載與低負載，以及不同輸出電壓準位做模擬。

4.3 以 MATLAB/SIMULINK 的電力電子模組模擬

在本節將討論固定頻率切換之 Buck 直流轉換器，該電路的開關狀態由控制器輸出的責任週期經由脈波寬度調變(PWM)控制，為此利用三角波(或鋸齒波)與比較器將一界於 0~1 之值轉換成 PWM 信號，如圖 4.3.1 所示。

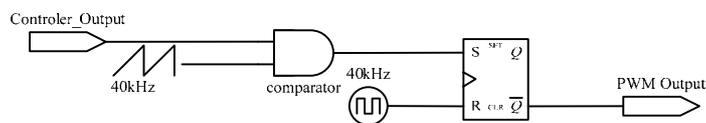


圖 4.3.1 PWM 訊號產生器

加入 S-R 正反器是因為如果比較器直接將三角波與控制器輸出之責任週期比較後輸出，會造成系統“追逐”現象產生，如圖 4.3.2 五所示，PWM 產生器將無法正確產生定頻開關的信號。加入正反器以避免系統，控制器與 PWM 產生器三者之間產生此一不理想的現象，此外，這樣的現象在模擬時，會造成模擬系統以極低的計算間隔計算，導致模擬時間增加。

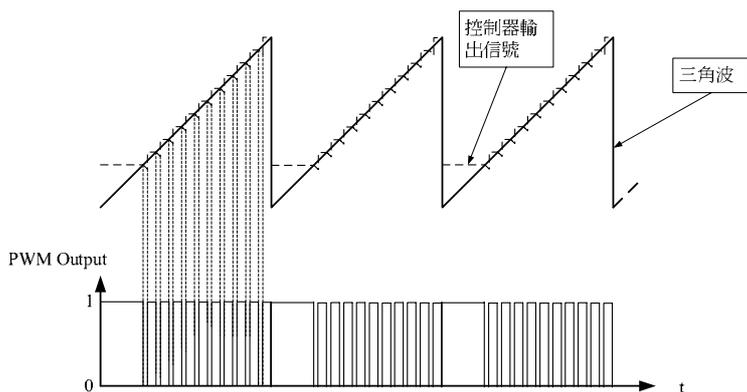


圖4.3.2 未加入正反器導致 PWM 產生器與控制器輸出產生追逐現象，無法關閉開關

以下模擬分為兩部分，首先模擬高負載狀態，亦即導通週期接近 1，並與上

一節模擬節過做比較。接著模擬低負載狀態，其導通週期趨近於 0。以上兩部分皆有負載變化 500mA 以確認系統是否穩定。

4.3.1 高負載模擬

加入 PWM 控制後，系統軌跡如圖 4.3.3 所示。與圖 4.2.6 比較，其結果是類似的，差異是系統啓動時，狀態輸出恆大於零。此外，從圖 4.3.3 可以看出，系統啓動時 PWM 產生開關導通的控制信號使得 Buck 直流轉換器之開關呈現導通狀態，電壓與電流上升。當負載變化時，系統軌跡往下一個平衡點前進並穩定在新的平衡點上。

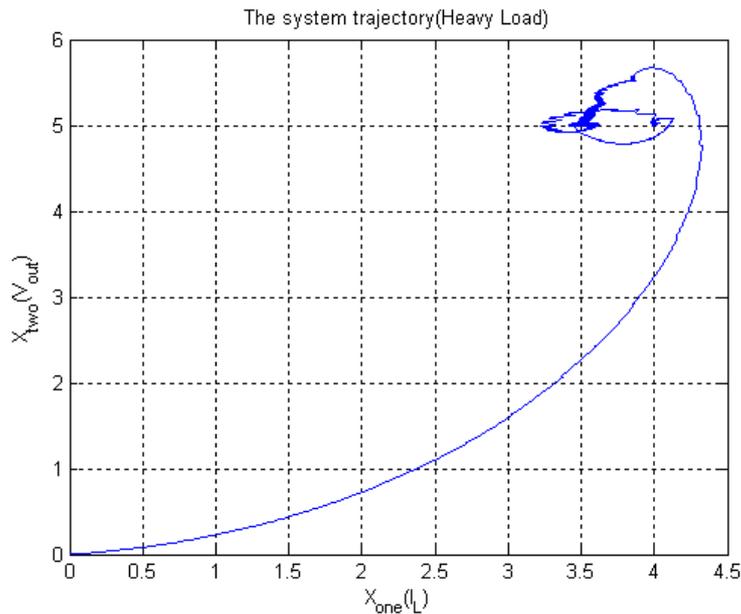


圖 4.3.3 加入 PWM 產生器轉換責任週期為脈波調變信號時，系統軌跡

如圖 4.3.4 所示，為高負載時系統輸出狀態。相較於圖 4.2.7，在電感上面的電流因為開關的狀態而有增減之勢。

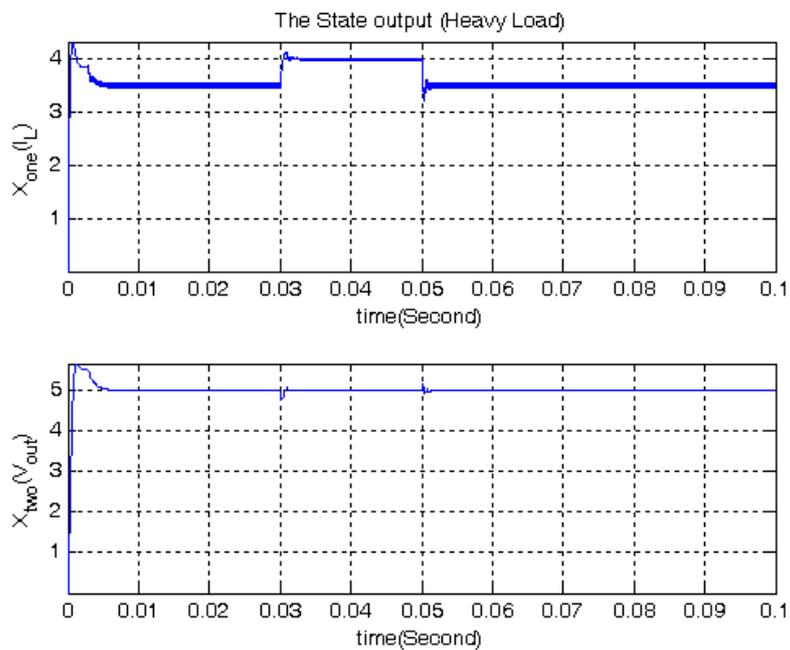


圖4.3.4 高負載時系統輸出狀態

圖 4.3.5 與圖 4.3.6 為此時系統之順滑函數與控制器輸出。

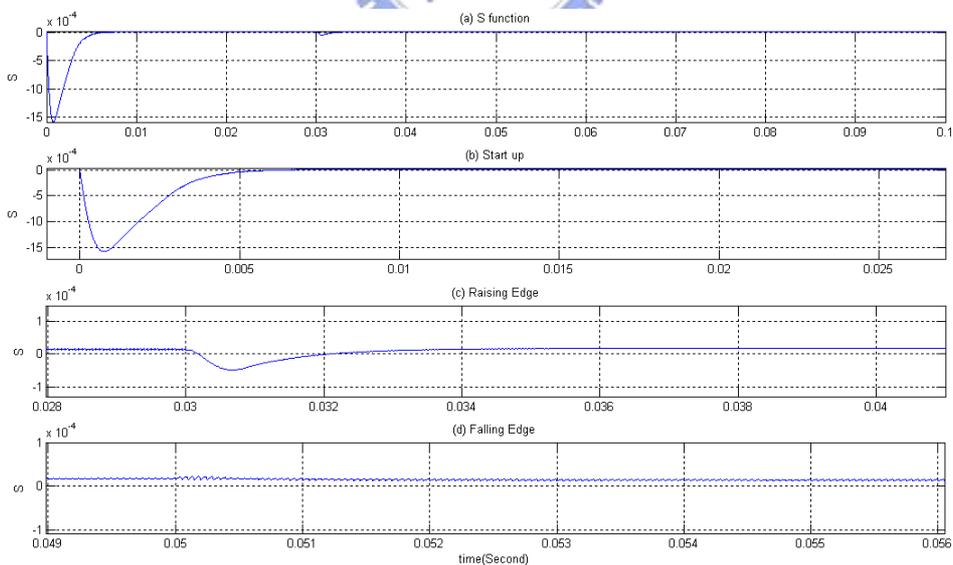


圖 4.3.5 高負載時順滑函數模擬結果

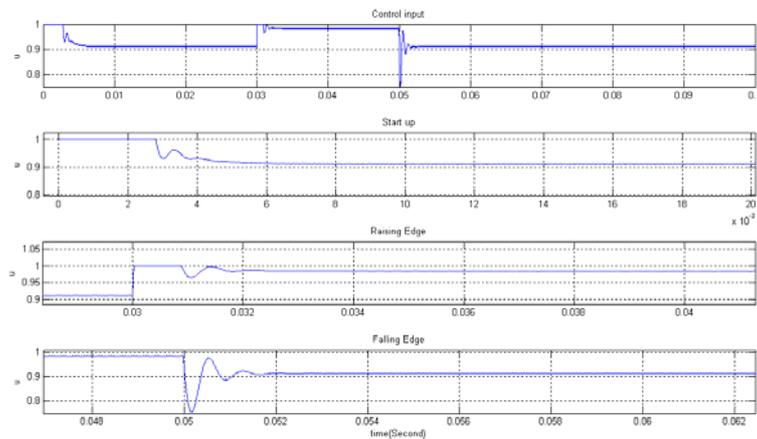


圖 4.3.6 高負載時控制器輸出模擬結果

由模擬結果可知，加入 PWM 產生器並不影響系統之穩定，而且其電路行為更接近實際電路。因為模擬時控制法則使用順滑層，所以系統之順滑函數不會真的停留在順滑平面上，而是在順滑層內遊走，即使系統在啟動時因為控制器以最大責任週其輸出使得系統軌跡離開順滑層，在有限時間內系統軌跡還是會回到順滑層中。

4.3.2 低負載模擬

前述設計的控制器並未做負載估測，利用輸出電壓與命令電壓之間的誤差，積分後加入順滑函數，而且原順滑函數之係數遠小於此積分項之係數，故系統啟動時控制器的輸出會因為積分項的正負影響導通責任週期的輸出，又因為控制器輸出飽和函數的加入，使得 Buck 直流轉換器的開關狀態因為輸出電壓小於命令電壓而全開(責任週期為 1)，反之大於命令電壓而全關(責任週期為 0)，此現象在低負載模擬時更為明顯。

低負載意味著系統輸出電流較小，在此我們仍然假設負載電流的平均值不使得電感上面的電流在穩態時進入不連續的操作模式，換言之，在設計時我們選用電感已經考慮最小電流仍大於第二章中提到的邊界電流 $I_{L(\text{bound})}$ 。

相較於高負載狀況，一旦系統狀態越過順滑平面，控制器因為控制法則中變號，導通責任週期減少，低負載必須以更低的導通週期減少電源的能源繼續提供給輸出負載，不僅如此，還需要因為系統與負載本身的電路消耗，讓系統軌跡回到順滑平面。如圖 4.3.6 所示，系統啓動時以最大導通責任週期工作，狀態上升，當輸出電壓遠大於命令電壓，控制器以最小導通責任週期做，亦即開關狀態為截止，由系統本身的電阻元件消耗多餘的能量，從圖 4.3.7 系統模擬狀態輸出與圖 4.3.8 系統模擬順滑函數可以更明顯的看出，啓動時輸出電壓與電感電流迅速上升，超過命令電壓時，因為積分項隨時間積分其值遠大於 cx ，所以控制器輸出之導通責任週期為零(關閉開關元件，因為控制器輸出有飽和函數)。當電感電流為零，代表此時輸出負載的能量由電容提供，使得輸出電壓以更快的速度下降。當系統軌跡回到順滑層，控制器的輸出責任週期不再全開或全關，而是漸進式增加使得系統軌跡往平衡點前進。

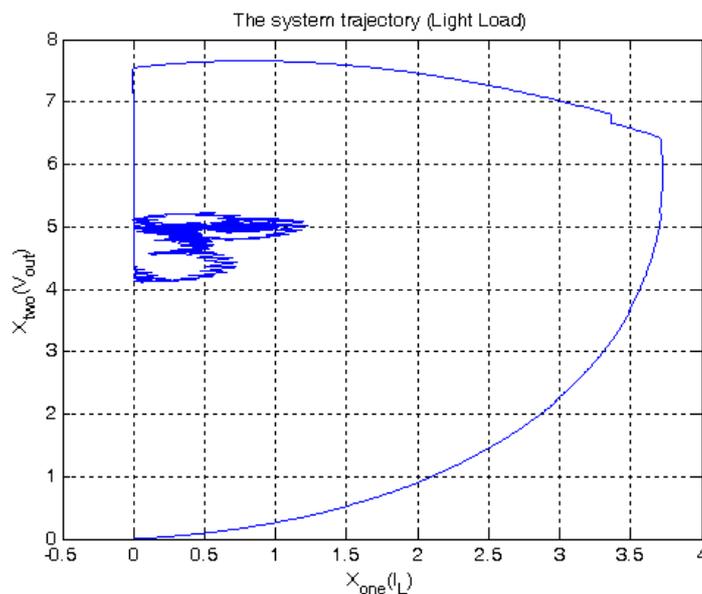


圖 4.3.7 低負載時模擬系統軌跡

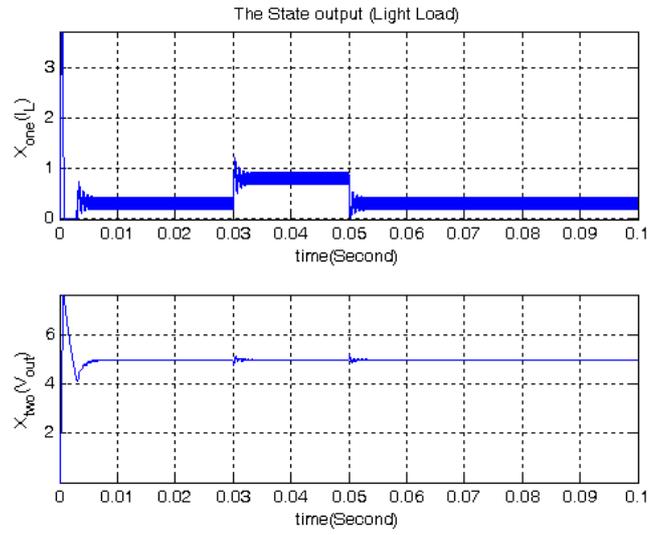


圖 4.3.8 低負載時模擬系統狀態輸出

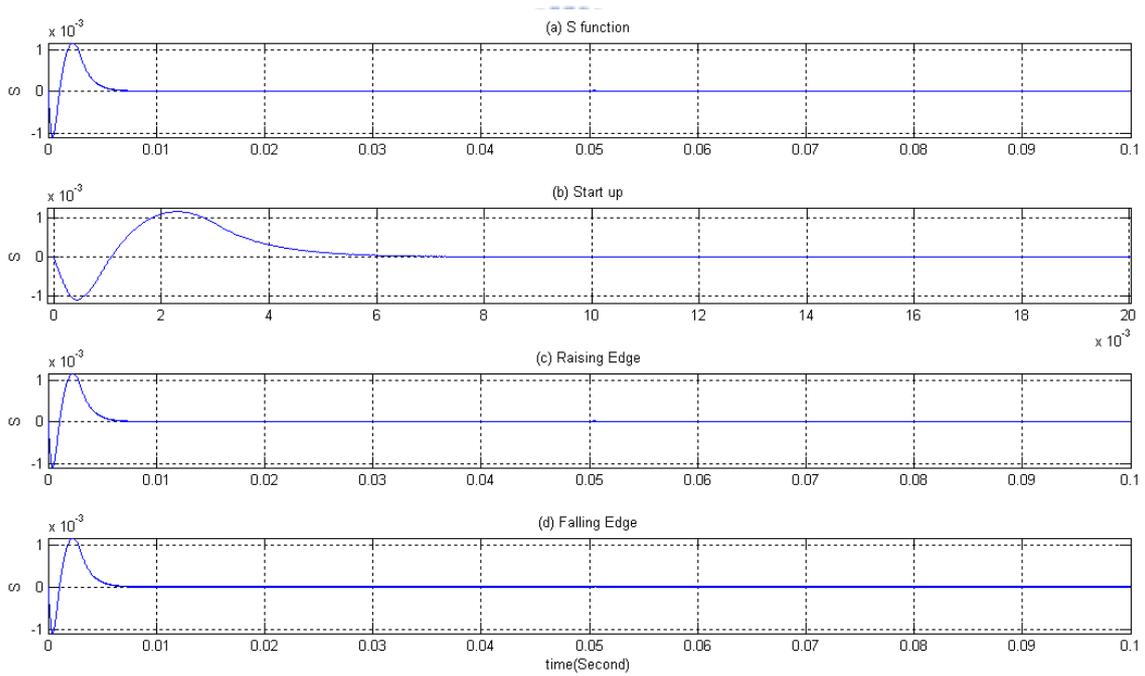


圖 4.3.9 低負載時模擬系統平滑函數

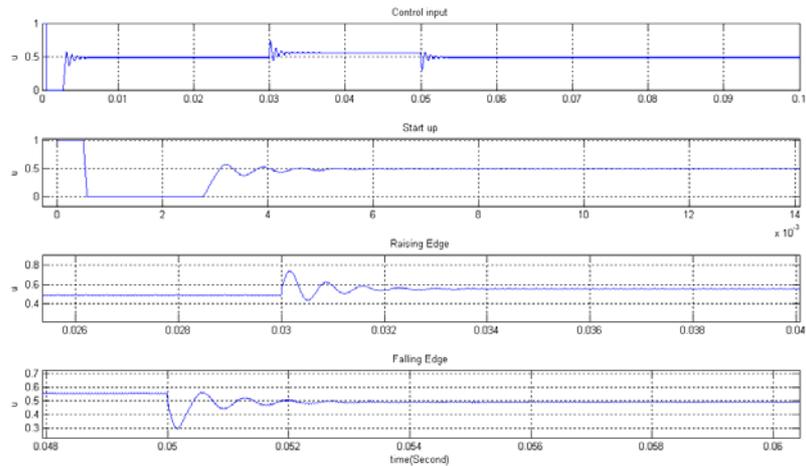


圖 4.3.10 低負載時模擬系統控制器輸出

以下模擬回授電阻改變使得輸出電壓為其他準位時，驗證系統輸出電壓是否正確且穩定。目標電壓分別為 1.5V，3.3V，5V，7V 以及 10V 時，依據方程式(103)式可分別求出回授分壓電阻值，模擬結果如圖 4.3.11 所示。

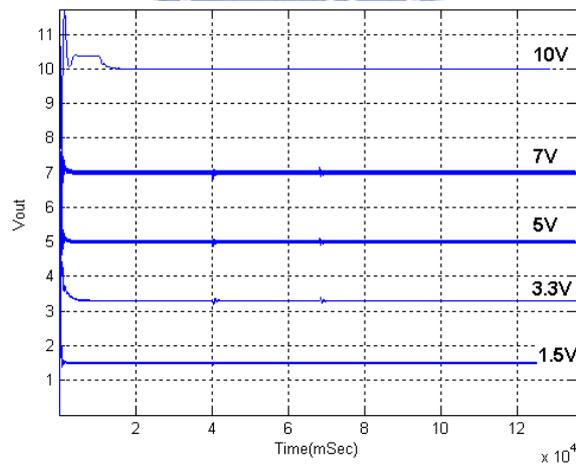


圖 4.3.11 不同目標電壓，系統之輸出電壓波型

在本章中，我們利用第二章建構的 Buck 直流轉換器數學模型做數值模擬，在第二節加入 PWM 產生器以及利用 SimPowerSystems 模擬控制器與轉換器之電路行為，由結果可知，系統穩定不會因為負載變化以及附載的不確定導致系統無法控制。在低負載時，系統行為也依據第三章設計的順滑模態控制器正確的控制並穩定在平衡點上。目標電壓改變時，系統亦能正確控制到目標電壓值上。

第五章 結論與未來展望

因為切換式電源供應器具有較佳的效率與適用於行動式電子產品，故此類型之電源設計為未來電源設計的主流[27]。

本論文修改過去積分式順滑模態控制設計，提出具有積分之順滑函數(sliding mode control with integral)設計降壓型直流轉換器之順滑模態控制器，並採用飽和函數取代切換函數以降低系統跳切現象。相較於先前之控制器，此控制器除既有滑模態控制的優點，例如允許系統參數的變化與不確定值，還有無需估測負載與對負載變動具有強健性的優點，並且因為加入積分器，所以可以消除穩態誤差。

在第二章建立模型的過程中，採用非理想之片段模型建立系統模型，有別於過去元件理想模型推導出之線性模型。從第四章的模擬可知，在負載不確定的情況下，仍能將輸出電壓控制到期望值，負載瞬變時，也能穩定在平衡點上，且目標電壓改變時，輸出電壓也能正確將輸出電壓控制到目標電壓值。此一模型與其他類型之直流轉換器相似，可以整理成為雙線性系統，未來的研究可以參考第三章之設計步驟設計其他類型之電壓轉換器。

因為採用根值指定法選用順滑函數之係數，其獲得之值極小，很難利用現有運算放大器實現，利用數位控制的方式其解析度需求極高，故未來研究方向可採用此類型之積分型順滑函數控制，調整適合的係數以符合實作之可行性。此外，加入積分器，使得系統響應速度與震盪現象並不如預期，所以消除此非理想現象亦為未來研究之方向。

參考文獻

- [1] Datasheet, *USB Voltage Droop and Droop Measurement*: Intel Corp., Nov. 1996.
- [2] D. Anderson, *Universal Serial Bus System Architecture*, second ed. Boston: Addison Wesley, 2001.
- [3] N. Mohan, Undeland, and Robbins, *Power electronics : Converters, applications, and Design*, second ed. New York: Wiley, 1995.
- [4] R. W. Erickson and D. Maksimović, *Fundamentals of Power Electronics*, second ed. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [5] G. C. Chryssis, *High-Frequency Switching Power Supply*, second ed. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [6] F.-H. Hsieh, N.-Z. Yen, and Y.-T. Juang, "Optimal Controller of a Buck DC-DC Converter Using the Uncertain Load as Stochastic Noise," *IEEE Transactions on circuit and system*, vol. 52, Feb. 2005.
- [7] Y. He and F. L. Luo, "Design and analysis of adaptive sliding-mode-like controller for DC-DC Converter," *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, vol. 153, May 2006.
- [8] S. C'uk and R. D. Middlebrook, "A general unified approach to modeling switching DC-to-DC converters in discontinuous conduction mode," in *IEEE PESC Conf*, Jun. 1977.
- [9] A. J. Forsyth and S. V. Mollov, "Modeling and Control of DC-DC Converter," *Power Engineering Journal*, Oct. 1998.
- [10] S. Chong, Y. M. Lai, C. K. Yse, and M. K.H.Cheung, "An Adaptive Sliding Mode Controller For Buck Converter in Continuous Mode," in *Proceedings, IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, Anaheim, U.S.A., February 2004.
- [11] Y. P. Chen, "Sliding-Mode Controller for Flexible Multi-link Manipulator," in *Electronic Engineering Department*. vol. Ph. D. in Arlington: University of Texas, 1989.
- [12] Y. P. Chen, "Sliding-mode controller design of a single-link flexible manipulator

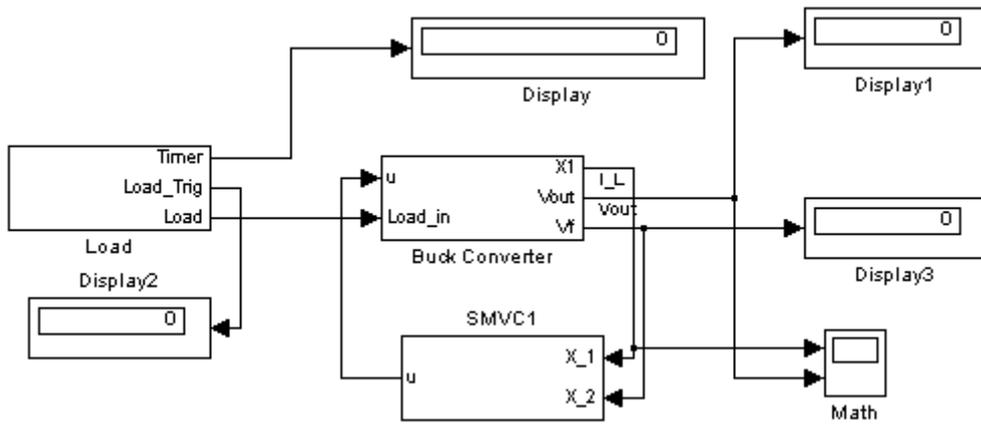
- under gravity," *International Journal of Control*, vol. 52, pp. 101-117, 1990.
- [13] V. F. Pires and A. Fernando, "Teaching Nonlinear Modeling, Simulation, and Control of Electronic Power Converter Using MATLAB/SIMULINK," *IEEE Transactions on Education*, vol. 45, Aug. 2002.
- [14] M. H. Rashid, *SPICE for Circuits and Electronics Using PSPICE*, first ed. NJ: Englewood Cliffs Prentice-Hall, 1990.
- [15] N. Mohan, *Power electronics : Computer simulation, analysis, and education using PSPICE*. Minnesota: Minnesota Power Electronic Research and Education, 1992.
- [16] 鄭大森, *Pspice 視窗版 Design Center 在電力電子上的應用*, 修訂版 ed.: 全華科技圖書, 民國八十七年.
- [17] B. Baha, "Modeling of resonant switching-mode converters using SIMULINK," *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, vol. 145, May 1998.
- [18] D. Hanselman and B. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. New Jersey: Pearson Education International, 2005.
- [19] J. B. Dabney and T. L. Harman, *Mastering Simulink*. New Jersey: Pearson Education International, 2004.
- [20] N.A.Rahim, M.Saad, and M. R. Mamat, "State Space Averaging Technique of Power Converter with Fuzzy Logic Controller," in *IEEE Power Electronics and Driver System, Conf. Rec.*, 1997.
- [21] A. S. Sedra, *Microelectronic Circuit*, Fourth ed. New York: Oxford, 1998.
- [22] Datasheet, *RT8101/A 12V Synchronous Buck PWM DC-DC Converter*: RichTek Technology Corp., 2007.
- [23] C. T. Chen, *Linear system Theory and design*, 3rd ed.: Oxford University Press, 1999.
- [24] R. R. Mohler, *Nonlinear Systems, Vol.II Applications to Bilinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [25] 陳永平 and 張浚林, *可變結構控制設計*, 修訂版 ed.: 全華科技圖書, 2002.
- [26] E. Baily and A. Arapostathis, "Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulator," *Internation Journal of Control*, vol. 45, pp. 1197-1209, 1987.

- [27] V. S. C. Raviraj and P. C. Sen, "Comparative Study of Proportional–Integral, Sliding Mode, and Fuzzy Logic Controllers for Power Converters," *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRY APPLICATIONS*, vol. 33, pp. 518-524, MARCH/APRIL 1997.



附錄 A MATLAB/SIMULINK 模擬方塊圖

如圖 A.1 所示，為系統主方塊圖，分為三部分，系統模型，控制器，以及負載控制器。



圖A.1 系統主方塊圖

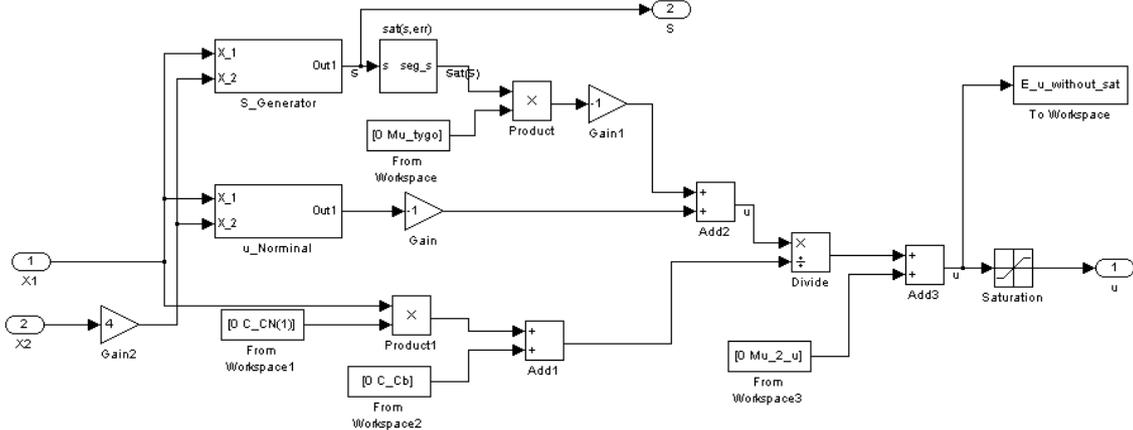


圖 A.2 控制器

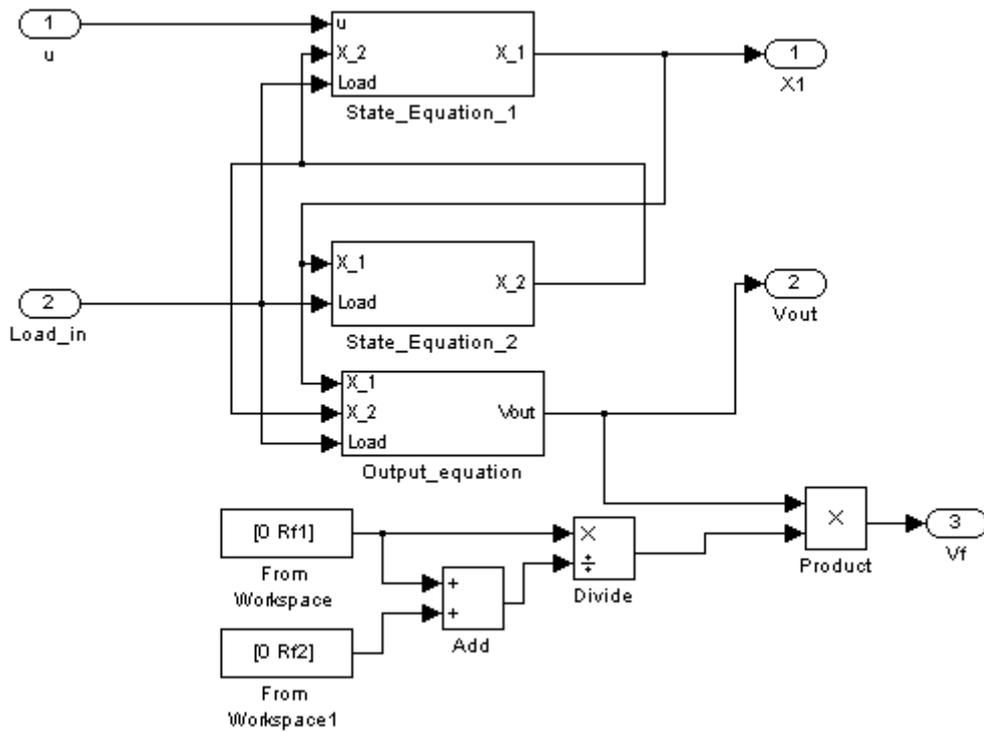


圖 A.3 系統數值模型

SMVC controller for Buck DC-DC PWM Converter

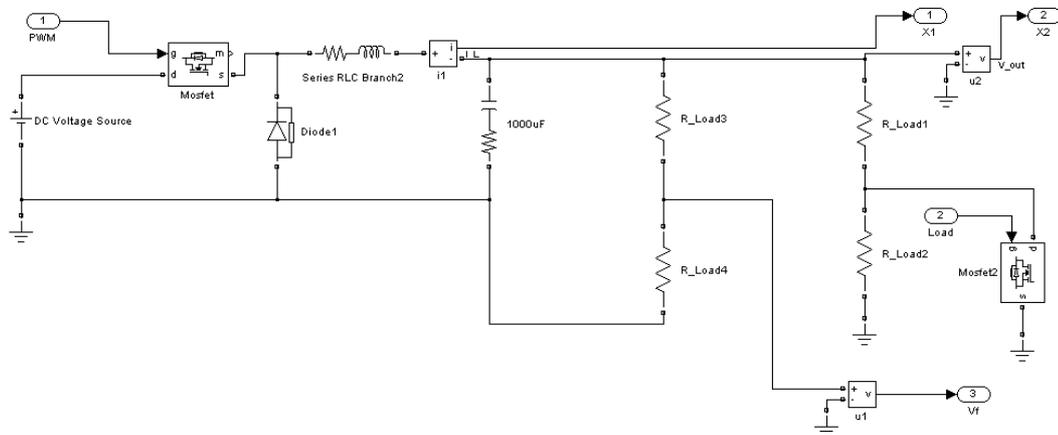


圖 A.4 以 SimPowerSystems 建立系統模型