

# 運用二維對稱特性建構雙瓦片鋪磚之研究

學生：蕭慶利

指導教授：陳明璋 博士

國立交通大學網路學習學程碩士班

## 摘 要

Brian Wichmann (Surrey, UK)與 John Dawes (Berkshire, UK)首先提出雙瓦片鋪磚的概念[13]，以等面鋪磚(isohedral tiling)93 種規格中 53 種為基準，發展出一套雙瓦片鋪磚法，同時發現雙瓦片鋪磚共有 147 種規格。對一般人而言，繪製這類的圖樣有很大的障礙，必須在特殊軟體上方可有效進行。因此，本研究主要目的希望研究出一套簡易的方式，讓雙瓦片的構圖能夠在一般的平台上可以完成。本研究發展出一套新的雙瓦片鋪磚法，直接採用 10 種二維對稱構圖，完成雙瓦片鋪磚。最後我們將這套方法實踐在數學簡報系統(Mathematical Presentation System, MathPS)上；該系統提供以結構複製法(Structural Cloning Method, SCM)為核心的構圖環境，可繪製複雜結構。

**關鍵字：**二維對稱、雙瓦片鋪磚、isohedral tiling、數學簡報系統 MathPS、結構複製法

# The Tiling of Two Prototiles by The Two-Dimension Symmetrical Patterns

Student : Ching Li Hsiao

Advisors : Dr.Ming Jang Chen

Degree Program of E-Learning  
National Chiao Tung University

## ABSTRACT

Wichmann and Dawes developed 147 kinds of the tiling of two prototiles using 53 isohedral tiling out of 93 specifications. It is complicated to draw those tiling via general graphic software. The purpose of this study is to develop a simple method and interface based on 10 two-dimension symmetrical patterns to draw two prototiles tiling. As the result, 147 two prototiles tiling could be constructed based on 16 similar dissections.

Key word: Two-dimentional Symmetrical Patterns, tiling of two prototiles, isohedral tiling, MathPS, Structural Cloning Method(SCM)

## 誌 謝

還記得在剛考上專班時，內心可以說是五味雜陳；一方面很高興能有這進修機會，而另一方面，總覺得自己能力不足而惶恐了起來，於是便積極的找尋指導教授，為自己的研究方向及論文作準備。感謝陳明璋老師與黃大原老師在此時刻為我點了一盞明燈，為我指引了方向。

在兩年的研究生涯中，曾經苦思不著理論方法，不僅連續多日停滯不前，甚至動搖了研究方向而想要放棄，於是求援於陳明璋老師，印象深刻老師說了一句話：「解一道問題，能作出結果答案，固然高興，但提供一個解題方向給後人參考，也未嘗不是另一種形式答案」。而這句話也點醒了我，讓我走出了死胡同，更讓我有信心繼續走下去，完成這項研究。感謝老師在此重要關卡能扶我一把，讓我勇敢的走下去。口試期間承蒙莊祚敏主任、黃大原老師、邵錦昌老師的指教，使學生論文更趨完善，謝謝老師！

回顧這兩年的研究生涯，是我人生中重要的轉戾點。在此感謝專班的所有同學，給了我許多的經驗分享；感謝數學科同事碧蘭老師、治惠老師、亮偉老師、東獻老師、仲鈞老師、祐誠老師在各方面的協助；英文科同事祥宇老師的英文指導，最後，感謝內人慧雯，給了我最大的精神支柱，讓我無後顧之憂，義無反顧的完成此研究。

感謝在求學過程中，所有陪伴我走過的人，謝謝你們！

# 目錄

中文摘要	.....	i
英文摘要	.....	ii
誌謝	.....	iii
目錄	.....	iv
圖目錄	.....	vi
表目錄	.....	x
第一章	簡介 .....	1
1-1	動機與目的 .....	1
1-2	等距變換(Isometry transformation) .....	2
1-3	五種網狀格線系統 .....	3
1-4	十七種二維圖樣型態 .....	5
1-5	等面鋪磚(isohedral tiling) .....	10
1-5	拓撲型態(topological type) .....	12
1-6	關聯符號(incidence symbols) .....	13
1-6-1	瓦片符號(tile symbol) .....	13
1-6-2	鄰接符號(adjacency symbol) .....	15
第二章	文獻探討 .....	17
2-1	11 種正多邊形密鋪圖樣 .....	17
2-2	11 種正規點鋪磚 .....	18
2-3	11 種拓撲型態 .....	20
2-4	93 種單瓦片等面鋪磚(isohedral tiling)圖樣 .....	22
2-5	雙瓦片的等面鋪磚(2-isohedral tiling) .....	24
2-5-1	相同的等面鋪磚判別 .....	24
2-5-2	147 種圖樣的建構方法 .....	25
第三章	雙瓦片的等面鋪磚(cmm、pmm) .....	29
3-1	方法介紹 .....	29
3-2	cmm 分析 .....	30
3-3	pmm 分析 .....	35

第四章	雙瓦片的等面鋪磚(p3、p4、p6).....	41
4-1	p3 分析.....	41
4-2	p4 分析.....	44
4-3	p6 分析.....	47
第五章	雙瓦片的等面鋪磚(p31m、p4g).....	53
5-1	p31m 分析.....	53
5-2	p4g 分析.....	58
第六章	雙瓦片的等面鋪磚(p3m1、p4m、p6m).....	63
6-1	p3m1 分析.....	63
6-2	p4m 分析.....	66
6-3	p6m 分析.....	71
第七章	快速精準製圖-結構複製法.....	79
7-1	拼貼法.....	79
7-2	定框複製法(Frame-Based).....	79
7-3	定線複製法(Line-Based).....	82
第八章	結論與未來展望.....	85
8-1	結論與討論.....	85
8-2	未來展望.....	87
參考文獻	.....	89
附錄一	：20 種雙瓦片的等面鋪磚(cmm).....	91
附錄二	：13 種雙瓦片的等面鋪磚(pmm).....	97
附錄三	：5 種雙瓦片的等面鋪磚(p3).....	101
附錄四	：7 種雙瓦片的等面鋪磚(p4).....	103
附錄五	：14 種雙瓦片的等面鋪磚(p6).....	107
附錄六	：13 種雙瓦片的等面鋪磚(p31m).....	113
附錄七	：13 種雙瓦片的等面鋪磚(p4g).....	119
附錄八	：7 種雙瓦片的等面鋪磚(p3m1).....	125
附錄九	：19 種雙瓦片的等面鋪磚(p4m).....	129
附錄十	：36 種雙瓦片的等面鋪磚(p6m).....	137
附錄十一	：93 種單瓦片等面鋪磚型態.....	149
附錄十二	：93 種單瓦片等面鋪磚圖樣.....	153

## 圖目錄

圖 1-1	Mirza Akber 所建構的圖樣.....	1
圖 1-2	A 點和三角形在不同方向的平移介紹.....	2
圖 1-3	A 點和三角形以 C 為旋轉中心的旋轉介紹.....	2
圖 1-4	A 點和三角形在不同方向的鏡射介紹.....	2
圖 1-5	A 點和三角形在不同方向的滑動鏡射介紹.....	3
圖 1-6	平行線所形成的單位格子.....	3
圖 1-7	五種網狀格線系統.....	4
圖 1-8	五種網狀格線系統種類.....	5
圖 1-9	鄰邊不等之斜平行四邊形分析.....	5
圖 1-10	非等邊矩形分析.....	6
圖 1-11	非 60 度菱形之分析.....	6
圖 1-12	正方形之分析.....	7
圖 1-13	結構分析.....	7
圖 1-14	60 度菱形之分析.....	8
圖 1-15	p6 結構說明與比較.....	8
圖 1-16	圖 1-13 中的圖(2)、(3)、(4)其細部結構與拼貼後結構比較.....	9
圖 1-17	十七種二維圖樣型態分類方法.....	9
圖 1-18	等面鋪磚介紹.....	11
圖 1-19	非等面鋪磚介紹.....	11
圖 1-20	瓦片的頂點與邊的介紹.....	12
圖 1-21	瓦片的拓樸型態標示方式.....	12
圖 1-22	瓦片符號標示方法介紹.....	14
圖 1-23	瓦片符號標示注意事項.....	15
圖 1-24	鄰接符號與關聯符號標示方法介紹.....	16
圖 2-1	11 種正多邊形密鋪圖樣.....	18
圖 2-2	正規點與非正規點介紹.....	18
圖 2-3	11 種單一形狀瓦片的正規點鋪磚及其圖樣.....	19
圖 2-4	三種正規點鋪磚的其他所有可能情況.....	20

圖 2-5	正多邊形鋪磚與正規點鋪磚的關係探討.....	20
圖 2-6	齊次與非齊次的鋪磚介紹.....	21
圖 2-7	[3.3.4.12]的矛盾分析.....	21
圖 2-8	[4.8 <sup>2</sup> ]的圖樣及瓦片的可能結構.....	22
圖 2-9	瓦片本身不具鏡射時的四種與鄰居銜接情況.....	23
圖 2-10	瓦片本身具鏡射時與鄰居銜接情況.....	23
圖 2-11	IH78~82 圖樣.....	23
圖 2-12	雙瓦片鋪磚例子說明.....	24
圖 2-13	同構的雙瓦片等面鋪磚圖樣.....	25
圖 2-14	拓樸型態比較.....	25
圖 2-15	關聯符號比較.....	25
圖 2-16	作者建構 147 種圖樣的方法.....	26
圖 2-17	作者建構 147 種圖樣的方法(II).....	27
圖 3-1	設計基本單元的思考流程圖.....	29
圖 3-2	我們的分析方法創造編號 49 號圖之流程.....	29
圖 3-3	cmm 結構解析.....	30
圖 3-4	cmm 的可能三種切法.....	30
圖 3-5	結構說明.....	30
圖 3-6	二頂點處有正規瓦片將導致四處頂點皆有正規瓦片之矛盾.....	31
圖 3-7	cmmC 分析流程圖.....	32
圖 3-8	基本單元中線條以曲線連接及鋪磚圖樣.....	34
圖 3-9	基本單元中線條以折線連接及其鋪磚圖樣.....	34
圖 3-10	基本單元改變其外圍結構及其鋪磚圖樣.....	34
圖 3-11	pmm 結構解析.....	35
圖 3-12	局部結構正規瓦片可能出現的位置編號.....	35
圖 3-13	pmmC 分析流程圖.....	38
圖 4-1	p3 結構解析與正規瓦片標示.....	41
圖 4-2	切法一在鋪磚時將產生切法二.....	42
圖 4-3	p3C 分析流程圖.....	42
圖 4-4	[p3C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚.....	43
圖 4-5	p4 結構解析.....	44

圖 4- 6	p4 的三種可能切法 .....	44
圖 4- 7	切法一在鋪磚時產生切法二 .....	44
圖 4- 8	p4C 分析流程圖 .....	45
圖 4- 9	[p4C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚 .....	46
圖 4- 10	p6 結構解析 .....	47
圖 4- 11	p6 可能的兩種切法 .....	47
圖 4- 12	p6C 分析流程圖 .....	48
圖 4- 13	[p6C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚 .....	49
圖 4- 14	p6V 分析流程圖 .....	50
圖 4- 15	兩種不合要求的鋪磚說明 .....	51
圖 5- 1	p31m 結構解析 .....	53
圖 5- 2	p31m 的兩種可能切法 .....	53
圖 5- 3	p31mC 分析流程圖 .....	54
圖 5- 4	p31mV 分析流程圖 .....	56
圖 5- 5	p4g 結構解析 .....	58
圖 5- 6	p4g 的兩種可能切法 .....	58
圖 5- 7	p4gC 分析流程圖 .....	59
圖 5- 8	p4g $E_m$ 分析流程圖 .....	61
圖 6- 1	p3m1 結構解析與正規瓦片標示 .....	63
圖 6- 2	同構說明與結構解析說明 .....	64
圖 6- 3	符號位置圖 .....	64
圖 6- 4	p3m1C 分析流程圖 .....	65
圖 6- 5	p4m 結構解析 .....	66
圖 6- 6	p4m 的四種切法 .....	66
圖 6- 7	各種切法同構說明 .....	66
圖 6- 8	符號位置圖 .....	67
圖 6- 9	p4mC 分析流程圖 .....	68
圖 6- 10	p4m $E_m$ 分析流程圖 .....	69
圖 6- 11	p6m 結構解析 .....	71
圖 6- 12	p6m 的三種切法 .....	71
圖 6- 13	符號位置圖 .....	72



圖 6- 14	p6mC 分析流程圖 .....	73
圖 6- 15	p6mV 分析流程圖 .....	74
圖 6- 16	p6m $E_m$ 分析流程圖 .....	75
圖 7- 1	拼貼法介紹 .....	79
圖 7- 2	各種巨型網狀結構 .....	80
圖 8- 1	圖樣建構方法比較 .....	85
圖 8- 2	[p4C,N(O),L(v,v),S]此基本單元變化前後之圖樣 .....	86



## 表目錄

表 1-1	符號對照表.....	5
表 1-2	單位格子形狀與圖樣型態之對應表.....	10
表 2-1	作者用來建構 147 種圖樣的 53 種等面鋪磚編號.....	26
表 3-1	cmmC 的分析步驟與符號列表.....	31
表 3-2	cmmC 的所有未擴展之基本單元列表 .....	33
表 3-3	cmmC 符號對照表 .....	33
表 3-4	pmm 所有切法分析.....	36
表 3-5	pmmC 的分析步驟與符號列表 .....	37
表 3-6	pmmC 的所有未擴展之基本單元列表 .....	39
表 3-7	pmmC 符號對照表 .....	39
表 4-1	p3 所有切法分析.....	41
表 4-2	p3C 的分析步驟與符號列表 .....	42
表 4-3	p3C 的所有未擴展之基本單元列表 .....	43
表 4-4	p3C 符號對照表 .....	43
表 4-5	p4C 的分析步驟與符號列表 .....	45
表 4-6	p4C 所有未擴展之基本單元列表 .....	46
表 4-7	p4C 符號對照表 .....	46
表 4-8	p6C 及 p6V 的分析步驟與符號列表.....	48
表 4-9	p6C 所有未擴展之基本單元列表 .....	49
表 4-10	p6C 符號對照表 .....	49
表 4-11	p6V 所有未擴展之基本單元列表 .....	51
表 4-12	p6V 符號對照表.....	51
表 5-1	p31mC 及 p31mV 的分析步驟與符號列表.....	54
表 5-2	p31mC 所有未擴展之基本單元列表 .....	55
表 5-3	p31mC 符號對照表 .....	55
表 5-4	p31mV 所有未擴展之基本單元列表 .....	57
表 5-5	p31mV 符號對照表 .....	57
表 5-6	p4gC 及 p4g $E_m$ 的分析步驟與符號列表.....	59
表 5-7	p4gC 所有未擴展之基本單元列表 .....	60

表 5- 8	p4gC 符號對照表 .....	60
表 5- 9	p4g $E_m$ 所有未擴展之基本單元列表 .....	62
表 5- 10	p4g $E_m$ 符號對照表 .....	62
表 6- 1	p3m1 的所有可能切法.....	63
表 6- 2	p3m1C 分析步驟與符號列表 .....	64
表 6- 3	p3m1C 所有未擴展之基本單元列表 .....	65
表 6- 4	p4mC 及 p4m $E_m$ 的分析步驟與符號列表.....	67
表 6- 5	p4mC 所有未擴展之基本單元列表 .....	70
表 6- 6	p4m $E_m$ 所有未擴展之基本單元列表 .....	70
表 6- 7	p6mC、p6mV 及 p6m $E_m$ 的分析步驟與符號列表.....	72
表 6- 8	p6mC 所有未擴展之基本單元 .....	76
表 6- 9	p6mV 所有未擴展之基本單元 .....	76
表 6- 10	p6m $E_m$ 所有未擴展之基本單元 .....	77
表 7- 1	各巨型網狀結構套用基本型作定框複製法後之結果對照.....	80
表 7- 2	定線複製法做結構式自我複製的流程步驟.....	82

