

第一章 簡介

1-1 動機與目的

根據 Brian Wichmann (Surrey, UK)與 John Dawes (Berkshire, UK)的研究[13]發現：雙瓦片(一正規的(regular)瓦片，另一個任意不規則的(irregular)瓦片)邊對邊(edge to edge)鋪磚方式，共有 147 種不同規格圖樣。圖 1-1 為編號第 60 號圖樣(由 Mirza Akber 所建構 [6])，其中正規瓦片為正方形，另一不規則瓦片為像鑰匙形狀的多邊形。這些對稱結構圖樣富有創意，耐人尋味。然而，在這邊我們所感興趣的是這些複雜圖樣背後理論方法為何？是由何種原始結構變形而來？結構是否可簡化？再者，這些圖樣的建構過程是如何建構？為何只有 147 類？是否有另外一套不一樣的方法來重新建構？這些複雜的圖樣又是如何繪出？是否能透過簡單操作、快速又精準的製圖？若這些問題能夠克服，學習者必定可以發揮更大的創意空間，創作出更多豐富而有趣的圖樣。

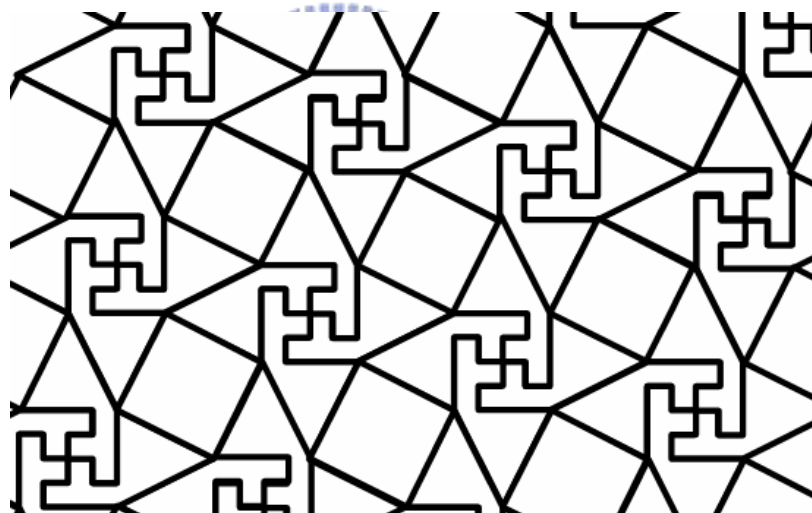


圖 1-1 Mirza Akber 所建構的圖樣

也由於這些對稱結構圖樣實在過於繁多、複雜，對於學習者而言，實在不易了解。建構圖樣的過程是直接運用前人所研究的 93 種單瓦片對稱結構之下，加深了其複雜度。所以本研究將用一套新的方法來重新建構這 147 種對稱結構圖樣，利用簡單的結構，透過簡單的構圖步驟方法來建構這些圖樣，進一步利用數學簡報系統(Mathematical Presentation System, MathPS)，配合結構複製法(Structural Cloning Method, SCM)[15]來快速精準製圖，讓學習者可以容易了解這些圖樣結構，進而可以自行創作建構新圖樣，發揮更大的創意空間。

1-2 等距變換(Isometry transformation)

平面上共有四種等距變換[4,11]，其分別是(1)平移(transformation)(2)旋轉(rotation)(3)鏡射(reflection)(4)滑動鏡射(glide-reflection)，其介紹如下：

(1) 平移

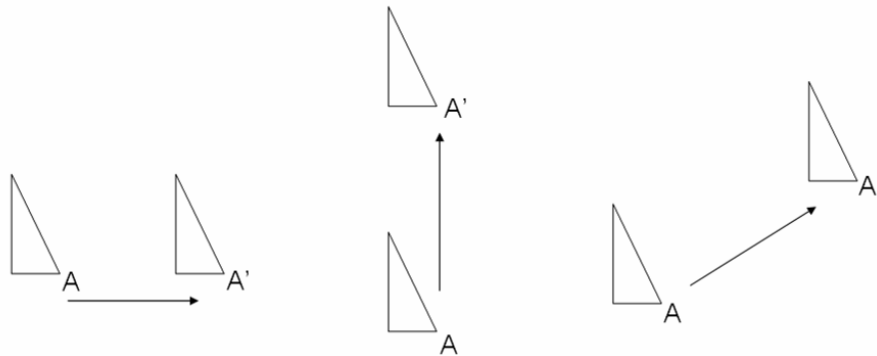


圖 1-2 A 點和三角形在不同方向的平移介紹

(2) 旋轉

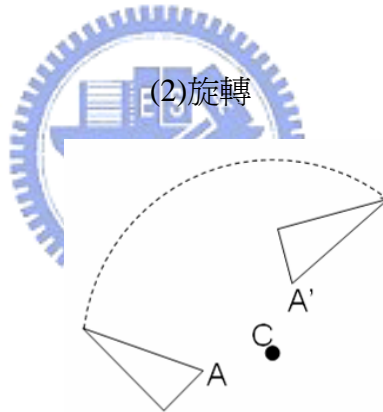


圖 1-3 A 點和三角形以 C 為旋轉中心的旋轉介紹

(3) 鏡射

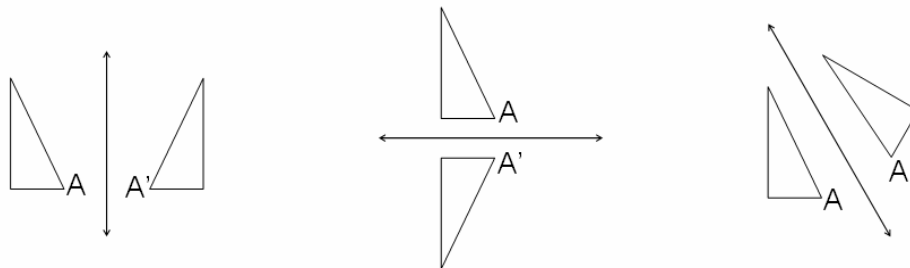


圖 1-4 A 點和三角形在不同方向的鏡射介紹

(4)滑動鏡射

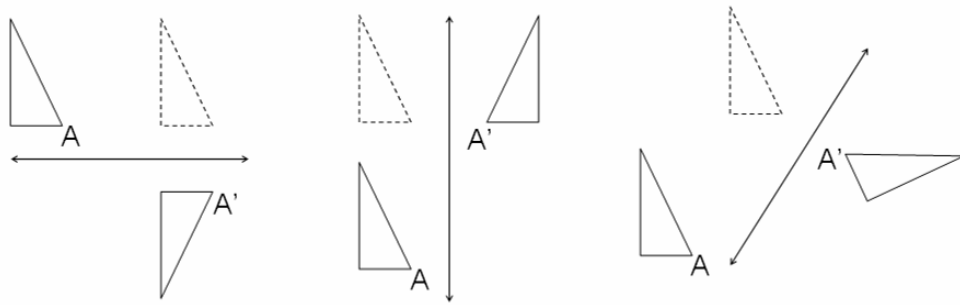


圖 1-5 A 點和三角形在不同方向的滑動鏡射介紹

1-3 五種網狀格線系統

一個二維的週期或重複連續圖樣背後必有一個網格或網狀系統，這些平行線相交使的整個平面被小平行四邊形所覆蓋，任何一個此種小平行四邊形形成一個單位格子 [14]，如圖 1-6 所示。

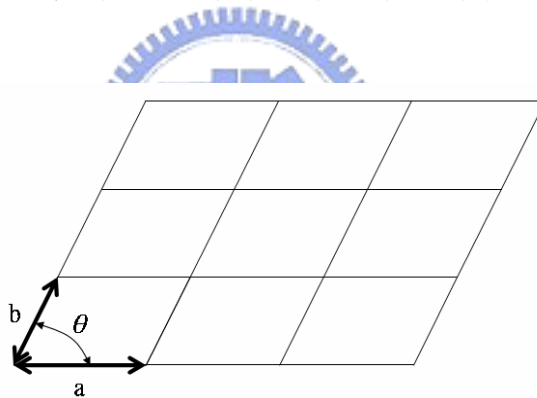


圖 1-6 平行線所形成的單位格子

若再將平行線所形成的單位格子作分類探討，可以分析歸納出五種不同的網狀格線系統[2,14]，如圖 1-7 所示：

- (1) 鄰邊不等之斜平行四邊形

即 $a \neq b, \theta \neq 90^\circ$ ，如圖 1-7(a)所示，其可能的對稱只有 180° 旋轉。

- (2) 矩形

即 $a \neq b, \theta = 90^\circ$ ，如圖 1-7(b)所示，其可能的對稱有 180° 旋轉，單邊或雙邊的鏡射及滑動鏡射。

- (3) 不含 60° 角之菱形（中心矩形網狀系統）

即 $a = b, \theta \neq 60^\circ, 90^\circ$ ，如圖 1-7(c)，由於菱形兩對角線是互相垂直且等分，可視為中心的矩形，故又稱「中心矩形網狀系統」，可能的對稱有 180° 旋轉與鏡射。

(4) 正方形

即 $a = b, \theta = 90^\circ$ ，如圖 1-7(d)所示，可能的對稱有 90° 或 180° 旋轉， 45° 或 90° 鏡射。

(5) 含 60° 角之菱形（六邊形網狀系統）

即 $a = b, \theta = 60^\circ$ 如圖 1-7(e)所示，這種特殊菱形可被分為兩個正三角形，而環繞一個點的六個正三角形可聚集成為一個六邊形，故又稱「六邊形網狀系統」，可能的對稱有 60° 、 120° 、 180° 旋轉與 60° 倍角之鏡射與滑動鏡射。

有了這五種網狀格線系統，下一節我們將介紹如何由這五種網狀系統衍生出十七種二維對稱結構圖樣。

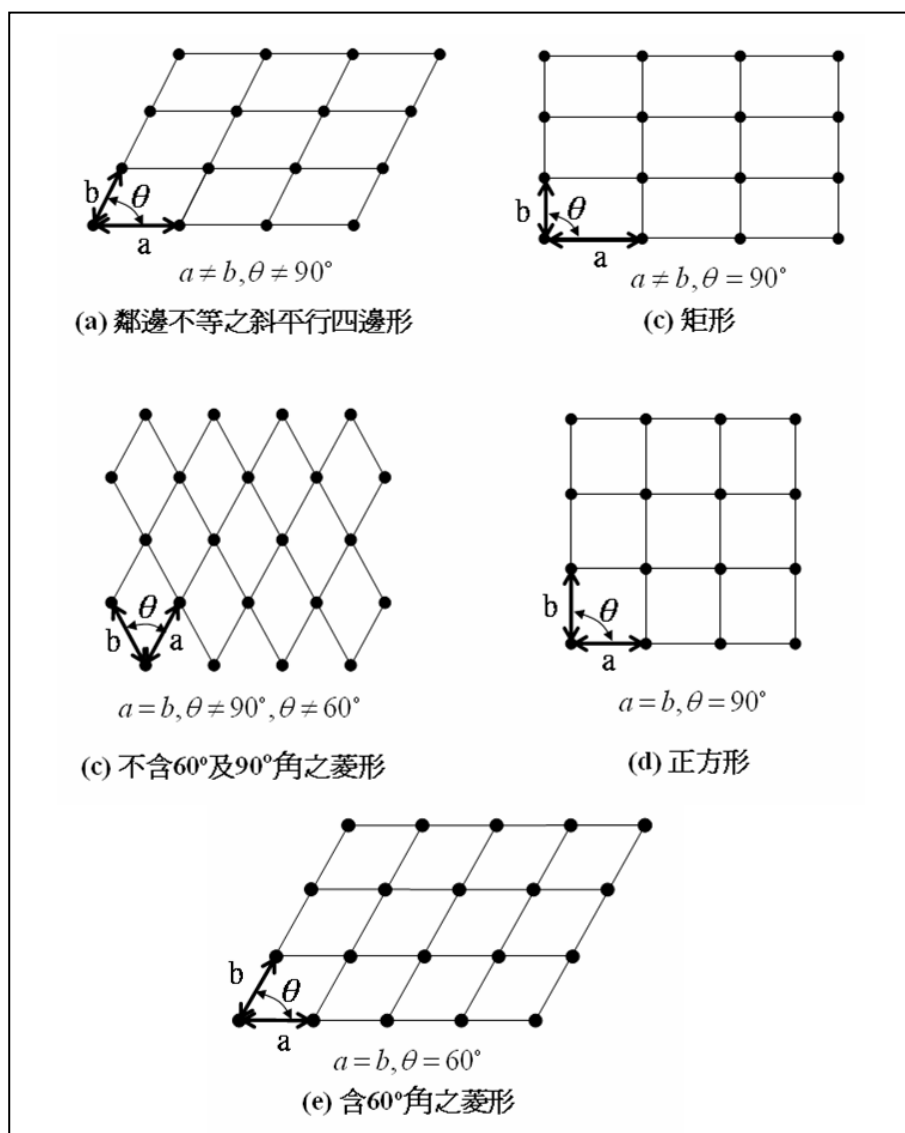


圖 1-7 五種網狀格線系統

資料來源：(1)伊斯蘭的幾何藝術，p97；(2)Geometric symmetry in patterns and tilings，p17

1-4 十七種二維圖樣型態

於上一節我們介紹了五種不同的平行四邊形網狀格線系統，我們可以進一步利用平面上的四種等距變換，去探討分析其內部的對稱可能情況^{1 2}，圖片中的箭頭表示瓦片是有向的；而各種幾何圖樣分別代表旋轉對稱中心，其旋轉對稱的重數如表 1-1 所示。

表 1-1 符號對照表

圖樣	說明
◆	180 度旋轉中心(即二重旋轉)
▲	120 度旋轉中心(即三重旋轉)
■	90 度旋轉中心(即四重旋轉)
⬠	60 度旋轉中心(即六重旋轉)

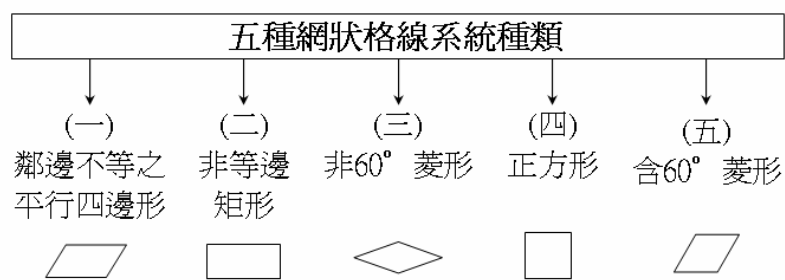


圖 1-8 五種網狀格線系統種類

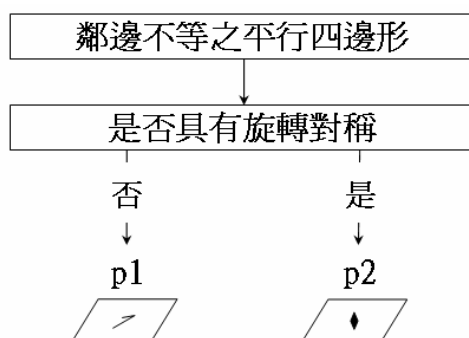


圖 1-9 鄰邊不等之斜平行四邊形分析

¹ 鄰邊不等之平行四邊形不具有鏡射及滑動鏡射

² 非 60 度之菱形及 60 度之菱形此兩類皆不具有滑動鏡射

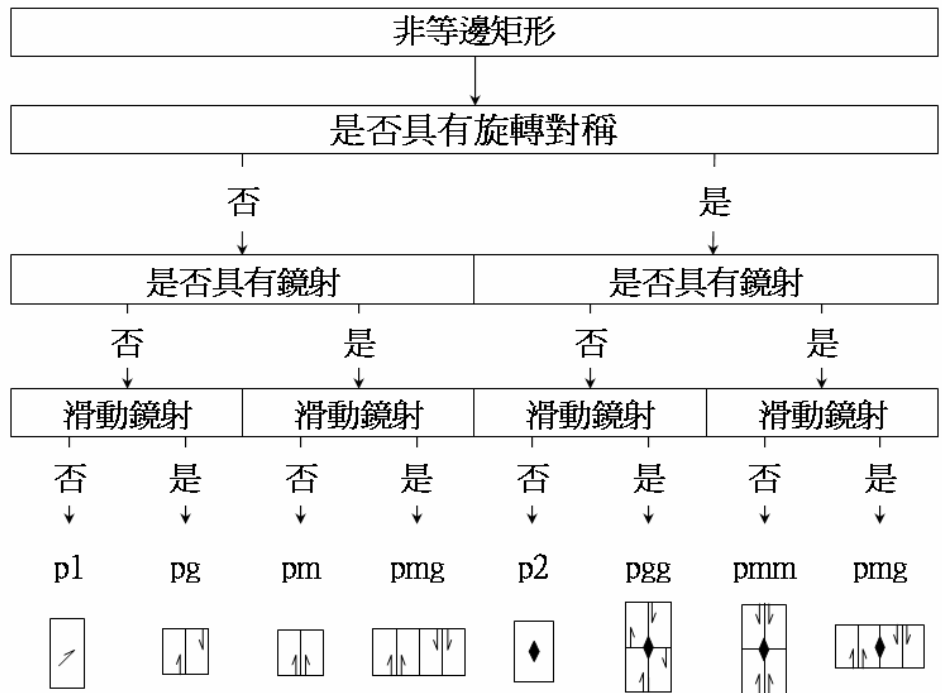


圖 1-10 非等邊矩形分析

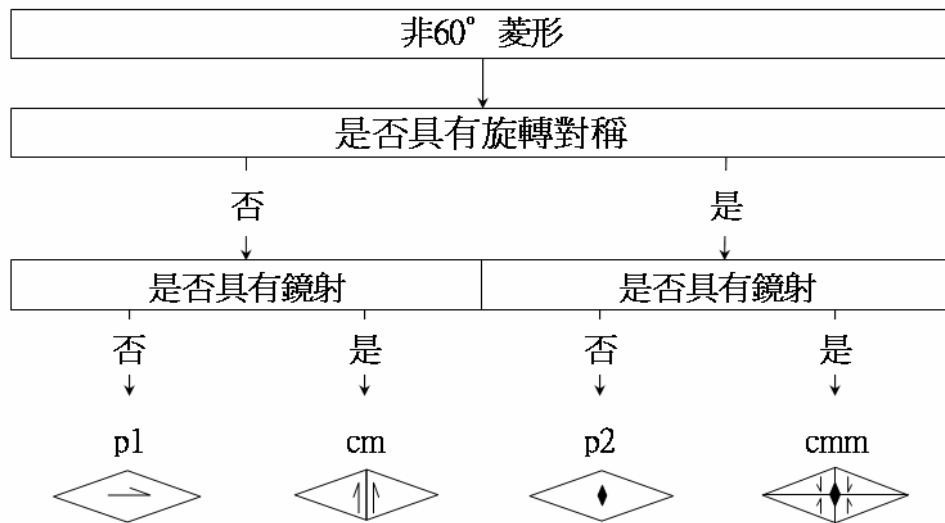


圖 1-11 非 60 度菱形之分析

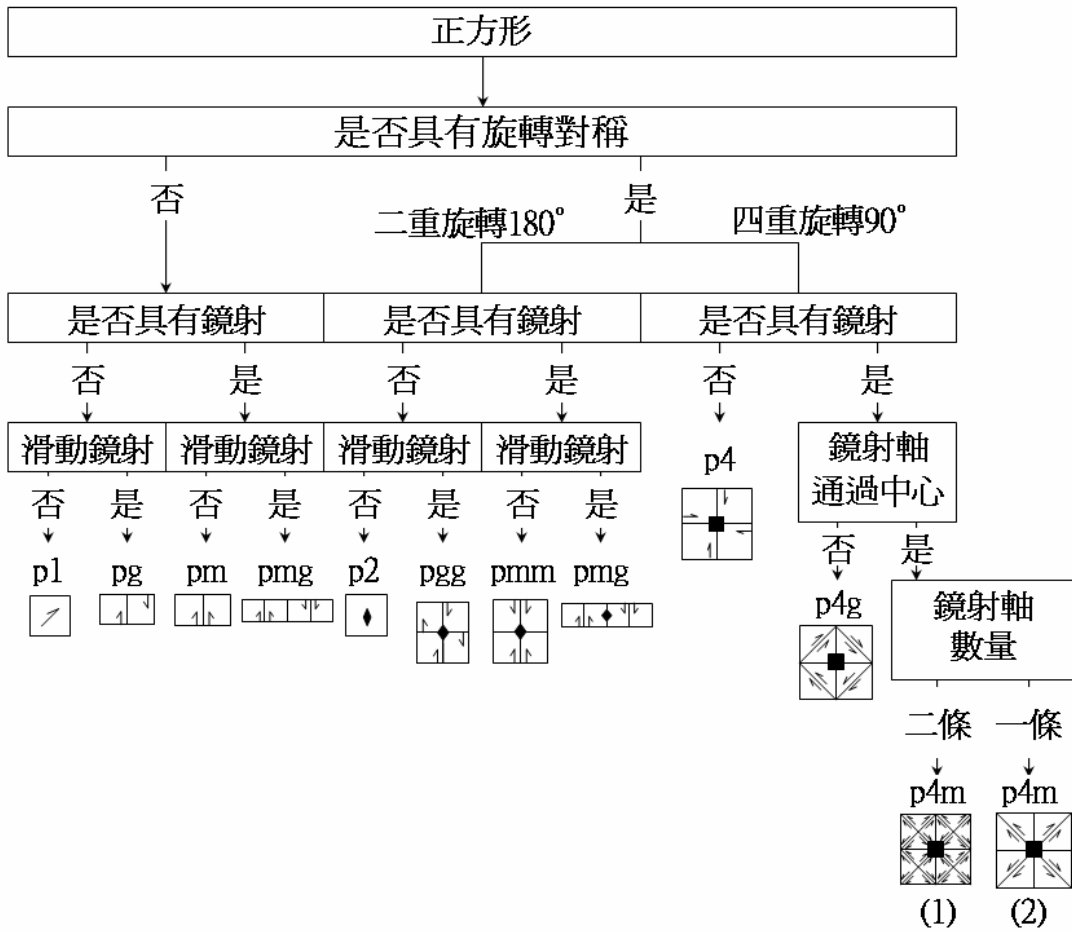


圖 1-12 正方形之分析

在圖 1-12 正方形網狀格線系統的分析中，(1)圖與(2)圖結構同為 $p4m$ ，其原因如圖 1-13 的結構分析，我們不難發現在(1)圖中的子結構與(2)相同，也就是說結構(2)在拼貼後可以得到結構(1)，兩者結構同為 $p4m$ 。

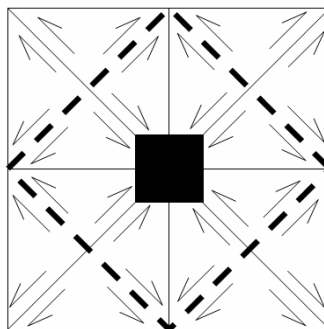


圖 1-13 結構分析

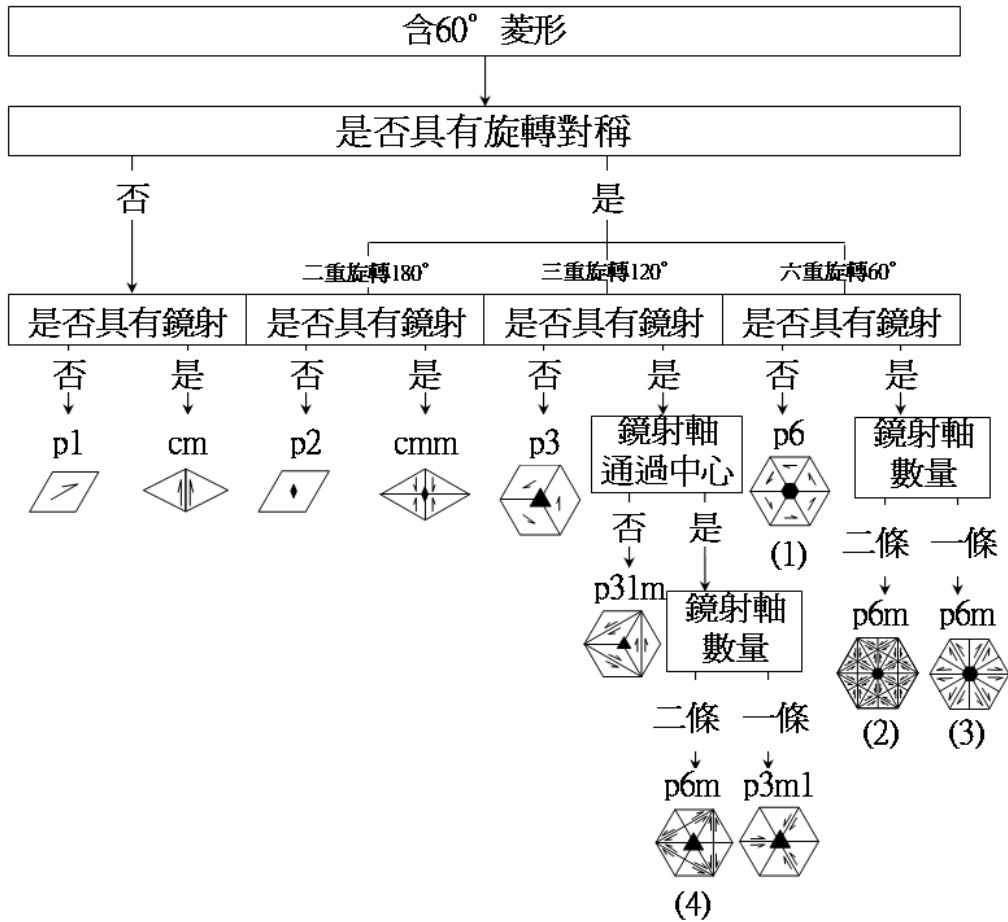
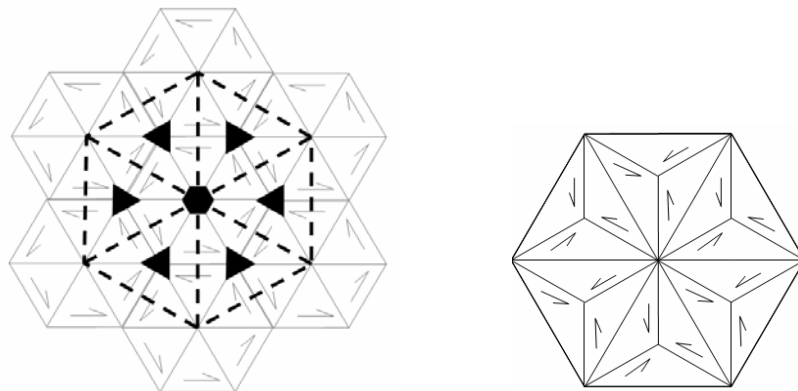


圖 1-14 60 度菱形之分析

在這邊要特別說明一點，在圖 1-14 中標示(1)的結構圖，若利用此結構來進行拼貼時，我們可以發現其每個外圍頂點皆為三重旋轉中心(如圖 1-15(a)所示)，而在伊斯蘭幾何藝術一書中 p6 的切法結構(如圖 1-15(b)所示)，其結構即圖 1-15(a)中利用虛線所切出來的六邊形結構，切法雖然不同，但結構的對稱性是一致的。



(a) 結構(1)拼貼時的結構解析 (b) 伊斯蘭幾何藝術中的 p6 結構切法

圖 1-15 p6 結構說明與比較

另一方面，在圖 1-14 中的圖(2)、(3)、(4)中，我們細部去分析其結構，我們不難發現圖(2)中的子結構即為(3)，也就是說，圖(3)此結構在進行拼貼時即可產生(2)。

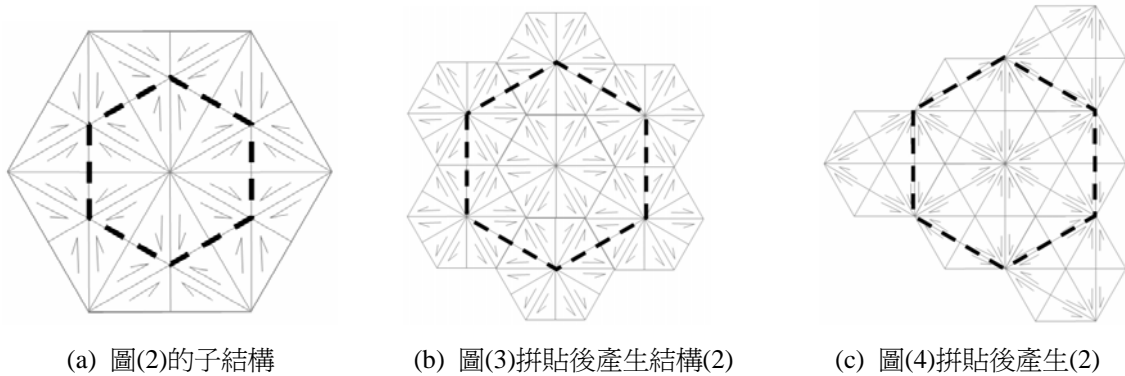


圖 1-16 圖 1-13 中的圖(2)、(3)、(4)其細部結構與拼貼後結構比較

綜合以上的分析，我們可以將 17 種二維圖樣型態的分類方法做一整理，其分類方法如圖 1-17 所示[1,3,12]。

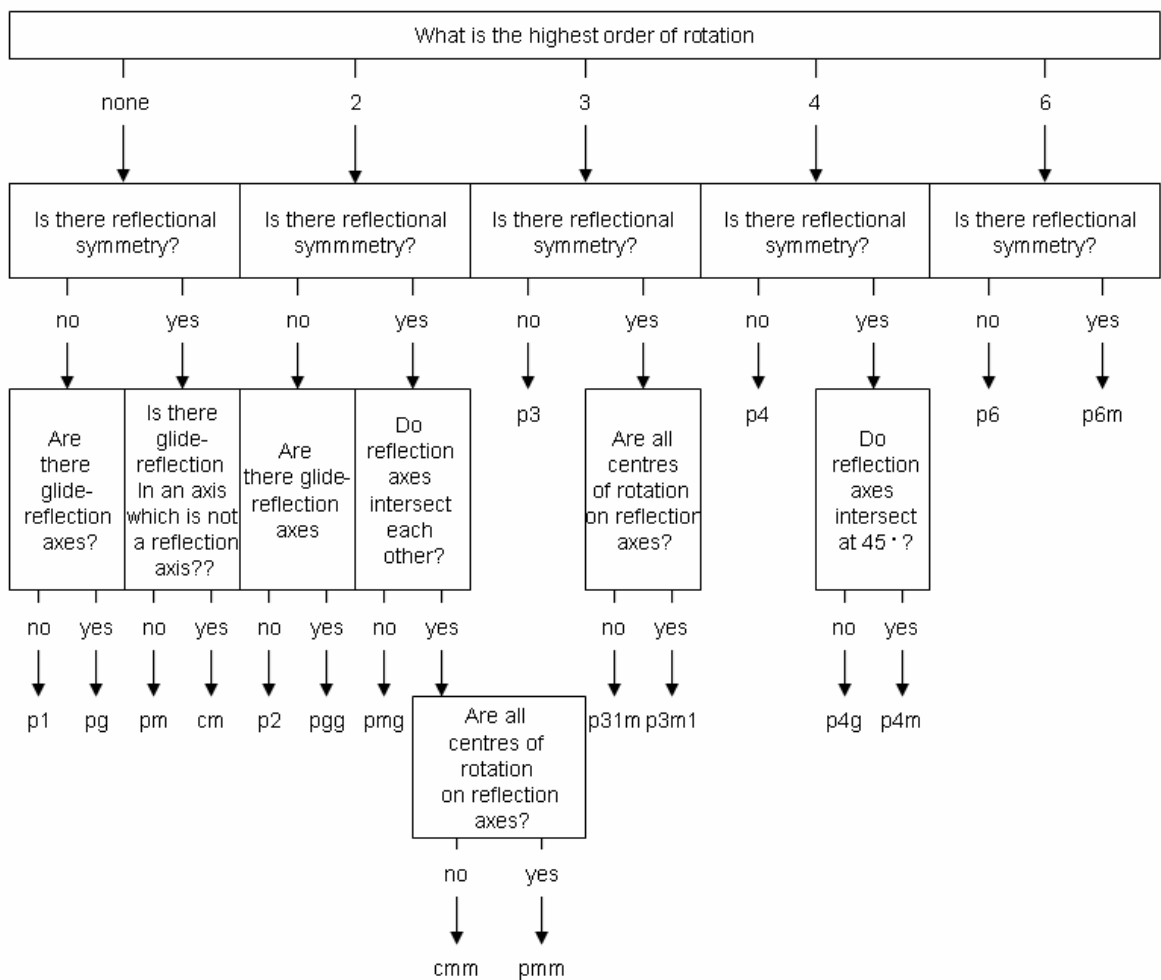


圖 1-17 十七種二維圖樣型態分類方法

資料來源：Geometric symmetry in patterns and tilings

而這十七種二維圖樣型態的命名方式是根據國際結晶學表示法[8,9]，由 S1-S2-S3-S4 四個連續符號所組成，各字母與數字代表的意義如下：

- (1) S1 = {c, p}，單位格子為中心矩形網狀系統時符號為「c」，其他為「p」。
- (2) S2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}，表示最高階旋轉對稱，「1」表無旋轉對稱。
- (3) S3 = {m, g, 1}，「m」表鏡射，「g」表滑動鏡射，「1」表無鏡射也無滑動鏡射。
- (4) S4 = {m, g, 1}，同 S3，表示另一方向的鏡射或滑動鏡射。

我們進一步將單位格子形狀與圖樣型態作一比對整理，如表 1-2 所示，而單位格子形狀其背後的應用將可以方便我們來作結構分析判斷的一準則方法。

表 1-2 單位格子形狀與圖樣型態之對應表

單位格子形狀	圖樣型態
平行四邊形	p1, p2
矩形	pm, pg, pmm, pmg, pgg, cm, cmm
菱形	cm, cmm
正方形	p4, p4m, p4g
六邊形	p3, p3m1, p31m, p6, p6m

資料來源：伊斯蘭的幾何藝術，p98

1-5 等面鋪磚(isohedral tiling)

在鋪磁磚中，Grunbaum 和 Shephard[5]對等面鋪磚做了以下的定義：

Two tiles T_1, T_2 of a tiling T are said to be equivalent if the symmetry group $S(T)$ contains a transformation that maps T_1 onto T_2 ; the collection of all tiles of T that are equivalent to T_1 is called the transitivity class of T_1 . If all tiles of T form one transitivity class we say that T is tile transitive or isohedral.

簡單的說，在一鋪磁磚中的任意兩瓦片 A、B，若存在一等距變換使的 A 可以映射至 B，則此鋪磁磚即稱為等面鋪磚(isohedral tiling)。以下我們舉兩個簡單的例子來做說明。

在圖 1-18 中為瓦片 A 與 B 連續平移拼貼所構成，若我們進一步對瓦片 A 與 B 的結構作解析，我們可以發現瓦片 A 與 B 的結構對稱性是相同的，故圖 1-17 為等面鋪磚。

再來我們看到圖 1-19，在圖中為 A、B、C、D、E、F 六瓦片連續平移拼貼所構成，然而瓦片 A、B 的對稱性並不相同，故圖 1-19 不是等面鋪磚³。

在這一節中，我們初步簡單的介紹等面鋪磚的判別方法，於下面章節中，我們將更深入的去介紹等面鋪磚背後的一些數學性質。

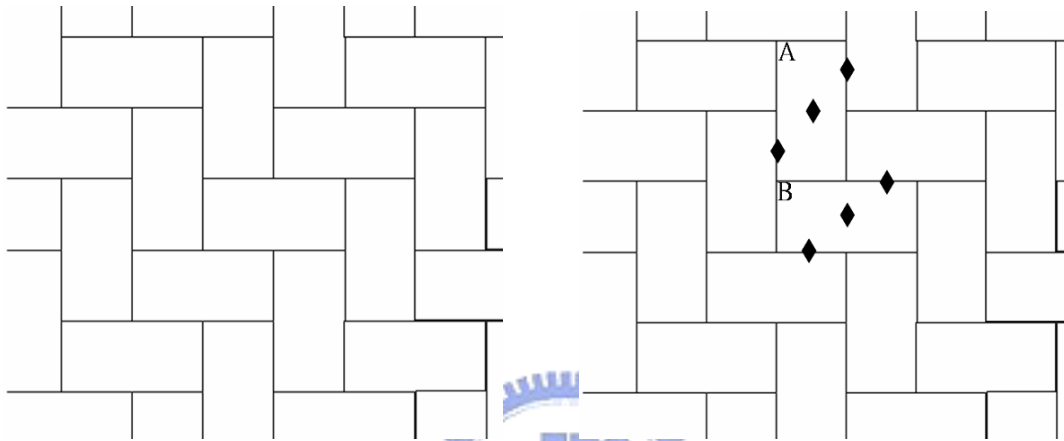


圖 1-18 等面鋪磚介紹

資料來源：Geometric symmetry in patterns and tilings

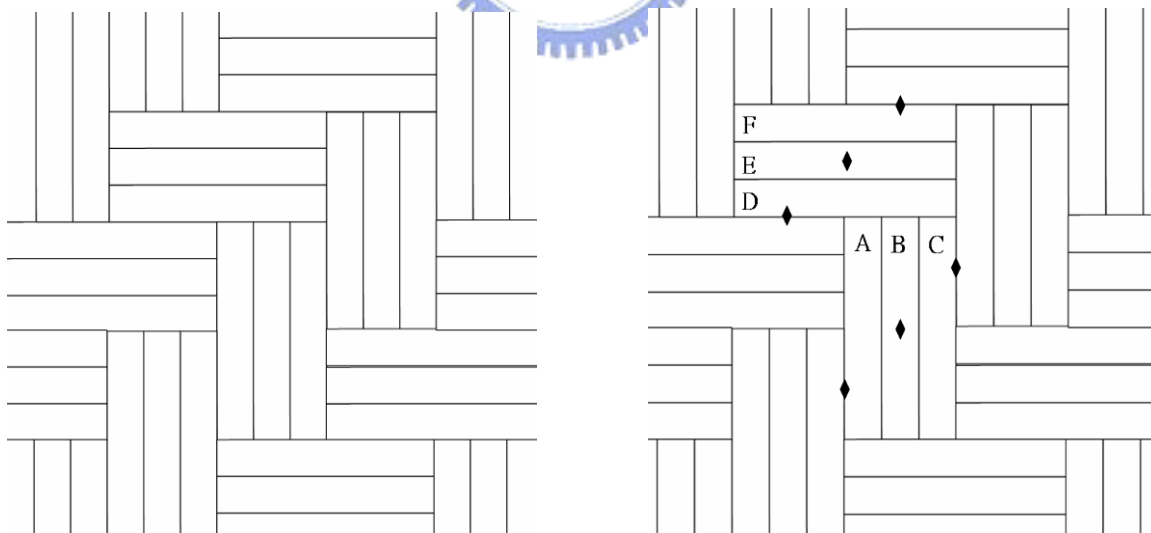


圖 1-19 非等面鋪磚介紹

資料來源：Geometric symmetry in patterns and tilings

³ 圖 1-19 是兩種瓦片的等面鋪磚(2-isohedral tiling)；另外，在圖中所有瓦片形狀與大小皆相同，像這樣的鋪磁磚，我們稱之為單形鋪磚(monoheral tiling)。

1-5 拓樸型態(topological type)

拓樸型態是在描述鋪磁磚中一瓦片每個頂點的狀態，在介紹概念之前，首先我們要先知道如何判斷瓦片的頂點及邊。在 *Tilings and Patterns* 一書中，作者 Grunbaum 和 Shephard 對於瓦片的頂點(vertex)和邊(edge)有作很詳盡的介紹[5]。以圖 1-20 為例，在圖中瓦片 T 的頂點只有 A、B、C、D、E、F 六個點，G 點並非瓦片的頂點。另一方面，瓦片 T 的邊只有 AB、BC、CD、DE、EF、AF 此六邊，AG 與 GF 並非瓦片 T 的邊，簡單的說，兩瓦片相接的部分只能有一個邊。

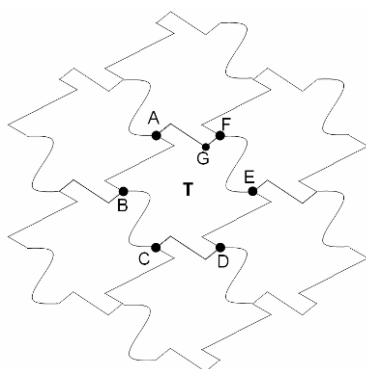


圖 1-20 瓦片的頂點與邊的介紹

瓦片頂點所連接的邊數即為該頂點的價數(valence)，而將瓦片每個頂點價數按同一方向(順時針或逆時針)依序所寫成的數列即為瓦片的拓樸型態⁴。其標示方式如下圖 1-21 所示：

<p>Topological type [3,3,3,3,3,3](簡寫[3⁶])</p>	<p>Topological type : [4,4,4,4](簡寫[4⁴])</p>	<p>Topological type : [4,6,12]</p>

圖 1-21 瓦片的拓樸型態標示方式

⁴一般拓樸型態寫法會按照數字由小至大方式填寫。

1-6 關聯符號(incidence symbols)

爲了更了解瓦片本身的對稱性以及瓦片與周圍鄰居的銜接情形，我們可以將瓦片的邊以符號表示，而關聯符號就是用來描述瓦片本身的對稱性以及其與周圍鄰居的銜接情形。其命名方式爲[L ; A]，其中 L 爲瓦片符號(tile symbol)，A 爲鄰接符號(adjacency symbol)[5]。首先，我們先來看瓦片符號的如何標示命名。

1-6-1 瓦片符號(tile symbol)

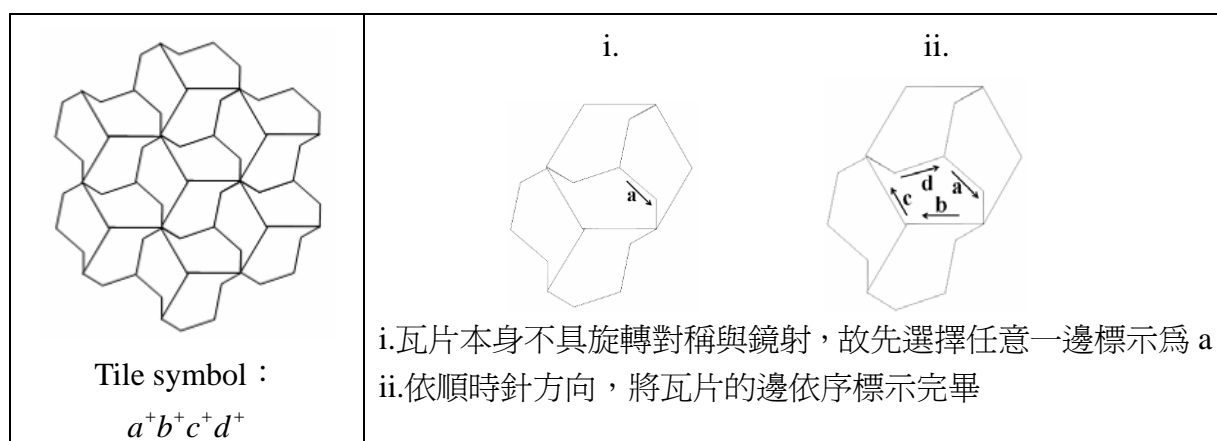
在瓦片符號的命名，以往皆是以圖像方式配合文字說明呈現[5,7]，而再這邊我們將瓦片符號的命名歸納出三個原則，以方便學習者可以遵循了解。

原則一：先判斷瓦片本身是否具有旋轉對稱或鏡射，若不具有旋轉對稱，亦不具有鏡射，則先任意選取一邊標示爲 a，再選擇依順時針或逆時針方向將所有瓦片的邊依序標示 b、c、d...下去，直到所有的邊標示完爲止，之後再將所有的符號右上方標示上方向符號「+」號即可。

原則二：若瓦片本身具有旋轉對稱，則先任取一邊標示爲 a，再將 a 邊旋轉對稱後所對應的邊皆標示上 a，若所有邊皆標示完畢，則動作停止；若尚未標示完畢，則再選擇依順時針或逆時針方向，將下一邊標示 b，再仿照剛剛的步驟下去，直到所有的邊標示完爲止，最後在標示上方向符號「+」號即可。

原則三：若瓦片本身具有鏡射，則在鏡射軸的兩側鏡射對稱邊其符號相同，方向相反（「+」→「-」），而被鏡射軸通過的邊其不具方向性，然後比照上述兩原則的標示方法即可。

底下我們舉幾個簡單的例子來做說明。



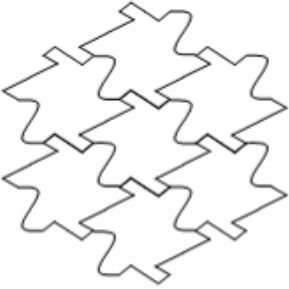
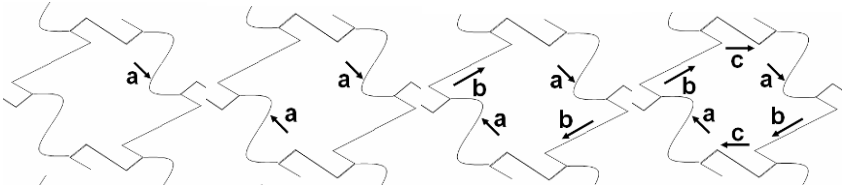
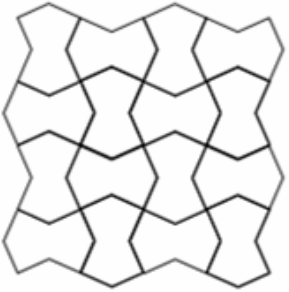
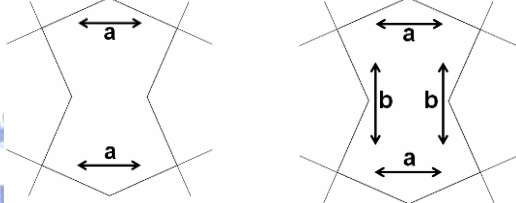
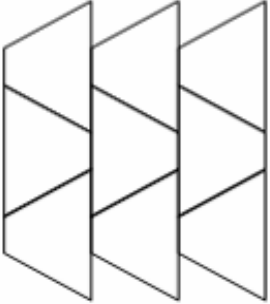
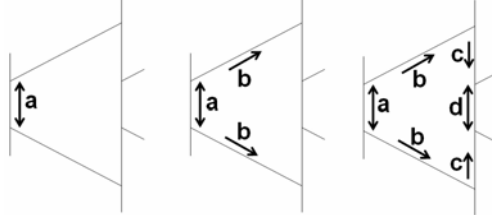
 <p>Tile symbol : $a^+b^+c^+a^+b^+c^+$ (簡寫 $(a^+b^+c^+)^2$)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> i ii iii iv </div>  <p>i.瓦片本身具有旋轉對稱，我們先任取一邊標示為 a ii.將 a 邊旋轉對稱後所對應的邊標示上 a，其方向相同 iii.依順時針方向，將 a 邊的下一邊標示上 b，並將其旋轉對稱後所對應的邊標示上 b iv.依順時針方向，將 b 邊的下一邊標示上 c，並將其旋轉對稱後所對應的邊標示上 c</p>
 <p>Tile symbol : $abab$ (簡寫 $(ab)^2$)</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> i ii </div>  <p>i.瓦片本身具鏡射與旋轉對稱，我們先將鏡射軸所通過的一邊標示上 a，並將其旋轉對稱後所對邊標示 a，其不具方向性 ii.依順時針方向將下一邊標示 b，由於 b 邊亦為鏡射軸所通過，故亦不具有方向性，在將其旋轉對稱所對應邊標示 b</p>
 <p>Tile symbol : $ab^+c^+dc^-b^-$</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> i ii iii </div>  <p>i.先將鏡射軸所通過邊標示上 a，其不具方向性 ii.再依順時針方向將下一邊標示 b，並將其鏡射對稱邊標示上 b iii 仿照上一動作直到所有邊標示完畢，由於 d 邊亦為鏡射軸所通過，故亦不具方向性</p>

圖 1-22 瓦片符號標示方法介紹

在瓦片符號的標示方面可能必須留意一點，瓦片符號的命名並非僅單單取決於瓦片本身的形狀，我們仍須考慮其與周圍邊界的銜接情況，如圖 1-23 所示，在圖中有 k 個不同型態的瓦片⁵，在這邊 k 有多少個並非我們的重點，特別留意圖中 A 處的正方形瓦片，其形狀雖然為正方形，但由於其周圍邊界的瓦片皆不具任何對稱性，所以 A 處的正方形瓦片並不具有旋轉對稱(其旋轉週期為 1)，故瓦片符號標示必須為四個不同符號來表示(圖 1-23 中，A 處的瓦片符號為 $a+b+c+d$)。

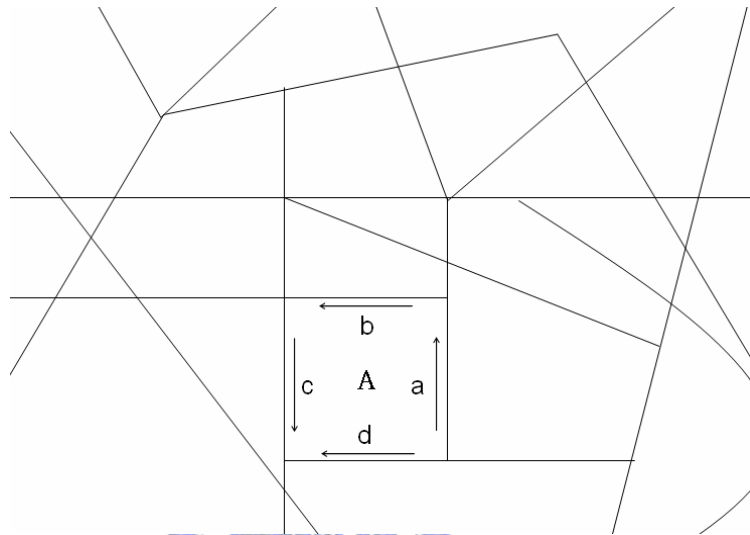
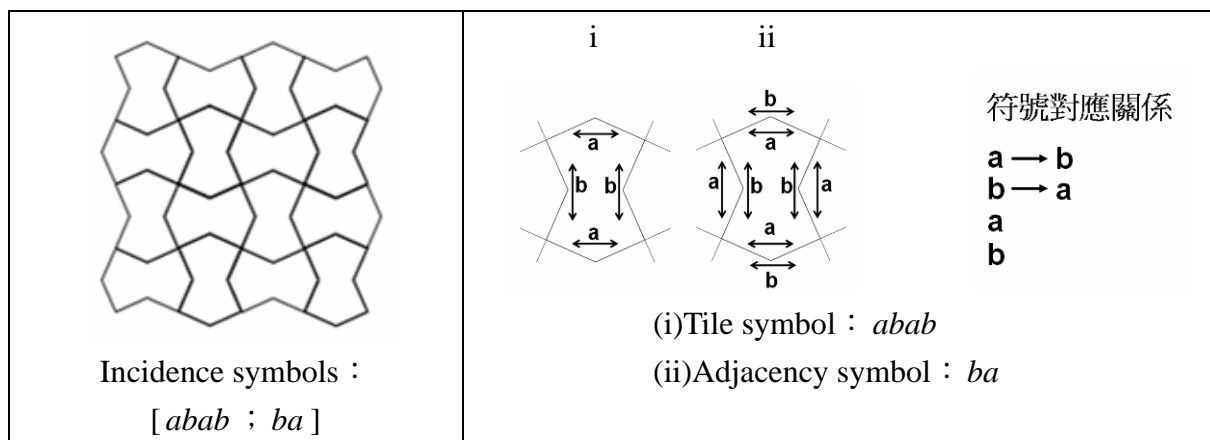


圖 1-23 瓦片符號標示注意事項

1-6-2 鄰接符號(adjacency symbol)

前一段落我們介紹了瓦片符號的標示命名，然而瓦片與周圍鄰居的銜接情況我們就需要利用鄰接符號來判斷，底下我們用上述的幾個例子來作鄰接符號(adjacency symbol)與關聯符號(incidence symbols)的標示說明。



⁵ 圖 1-22 有 k 種不同型態的瓦片我們稱之為「 k -isohedral tiling」

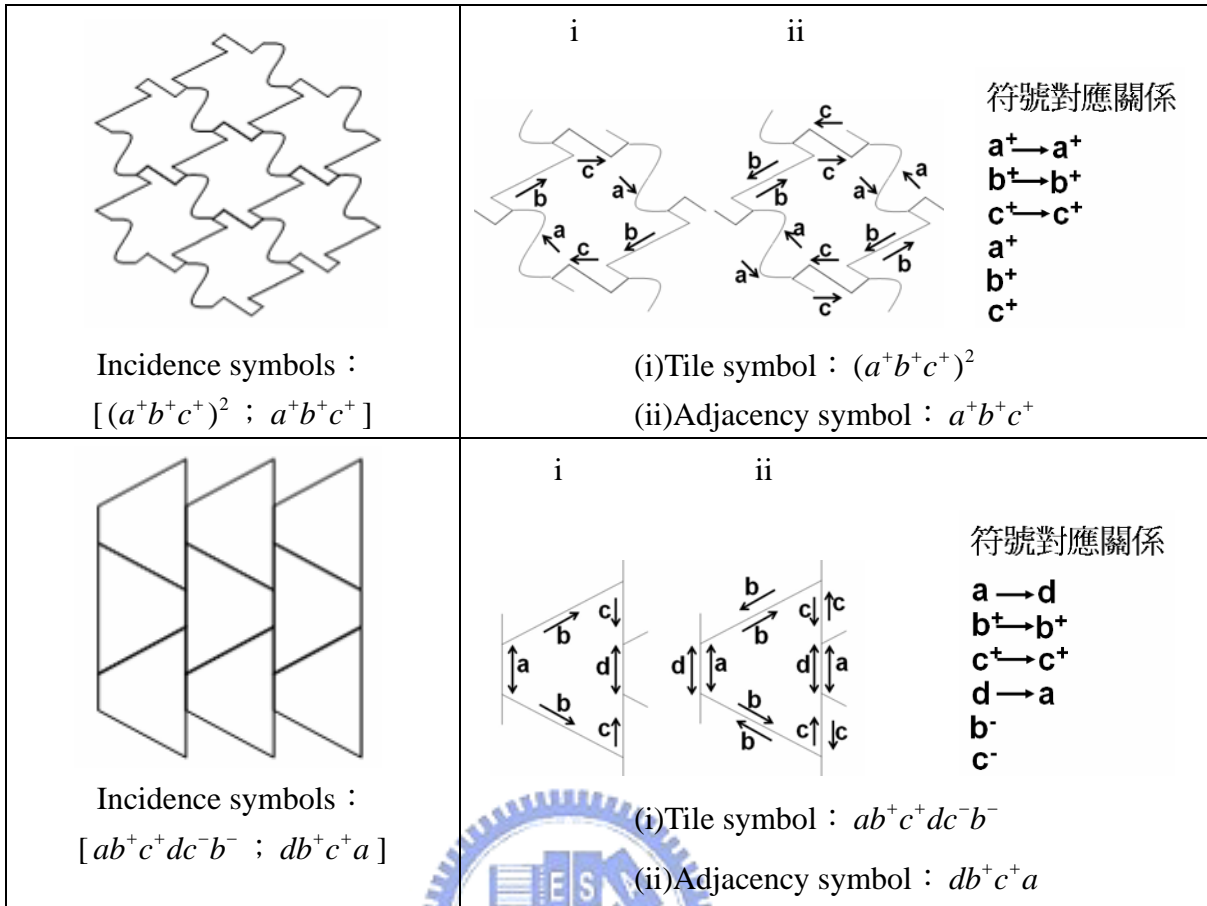


圖 1- 24 鄰接符號與關聯符號標示方法介紹

第二章 文獻探討

2-1 11 種正多邊形密鋪圖樣

假定有 r 個正多邊形(其邊數分別為 n_1, n_2, \dots, n_r)，而我們將這 r 個正多邊形的邊數以序列 (n_1, n_2, \dots, n_r) 來表示，由於這 r 個正多邊形可以密貼相遇在同一點，故角度和為 360 度，我們可以列出式(1)：

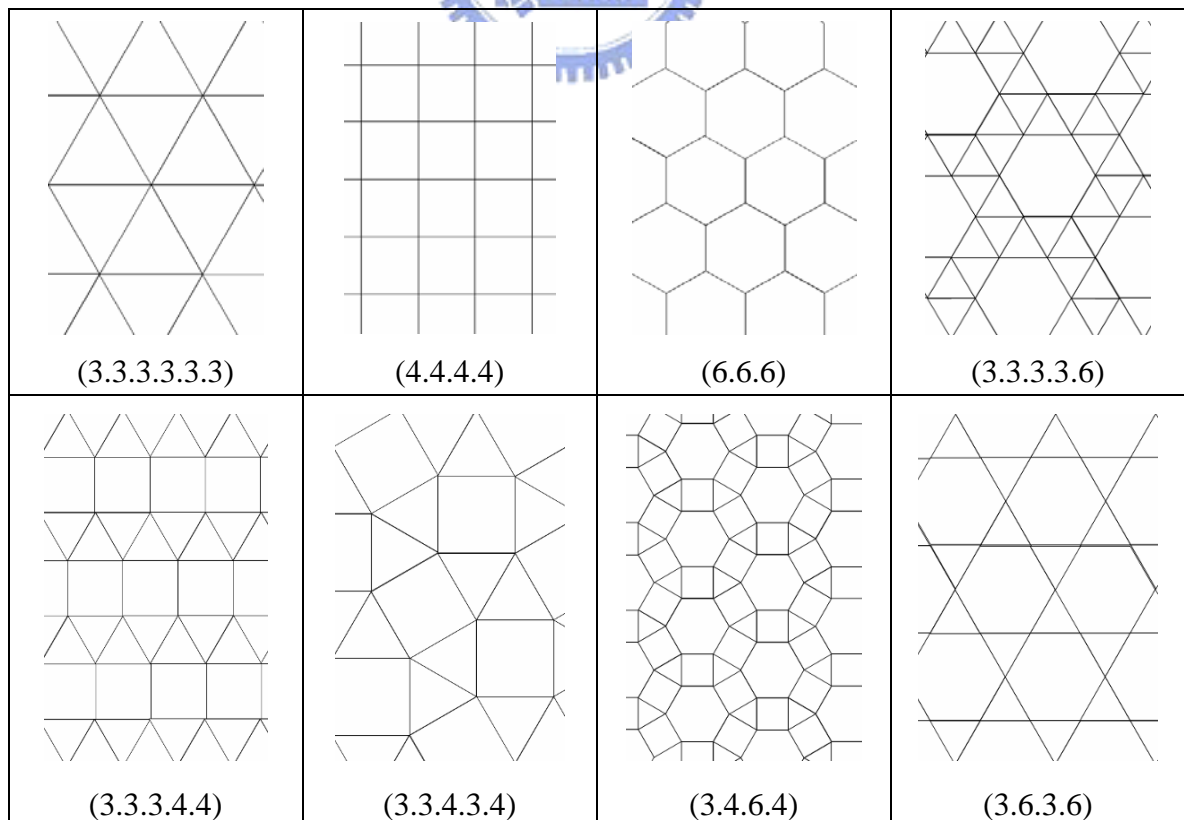
$$\frac{(n_1 - 2)\pi}{n_1} + \dots + \frac{(n_r - 2)\pi}{n_r} = 2\pi \quad (1)$$

經過化簡過後，我們可以得到式(2)。

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \dots + \frac{n_r - 2}{n_r} = 2 \quad (2)$$

將(2)經由討論可以得到(3.3.3.3.3.3)、(3.3.3.3.6)、(3.3.3.4.4)、(3.3.4.3.4)、(3.3.4.12)、(3.4.3.12)、(3.3.6.6)、(3.6.3.6)、(3.4.4.6)、(3.4.6.4)、(3.7.42)、(3.8.24)、(3.9.18)、(3.10.15)、(3.12.12)、(4.4.4.4)、(4.5.20)、(4.6.12)、(4.8.8)、(5.5.10)、(6.6.6)這 21 組解[5]。

將這 21 組解再經過繪圖分析後，可以歸納出 11 組可密鋪的圖樣[1]，其分別為(3.3.3.3.3.3)、(3.3.3.3.6)、(3.3.3.4.4)、(3.3.4.3.4)、(3.6.3.6)、(3.4.6.4)、(3.12.12)、(4.4.4.4)、(4.6.12)、(4.8.8)、(6.6.6)。其圖形分別如圖 2-1 所示：



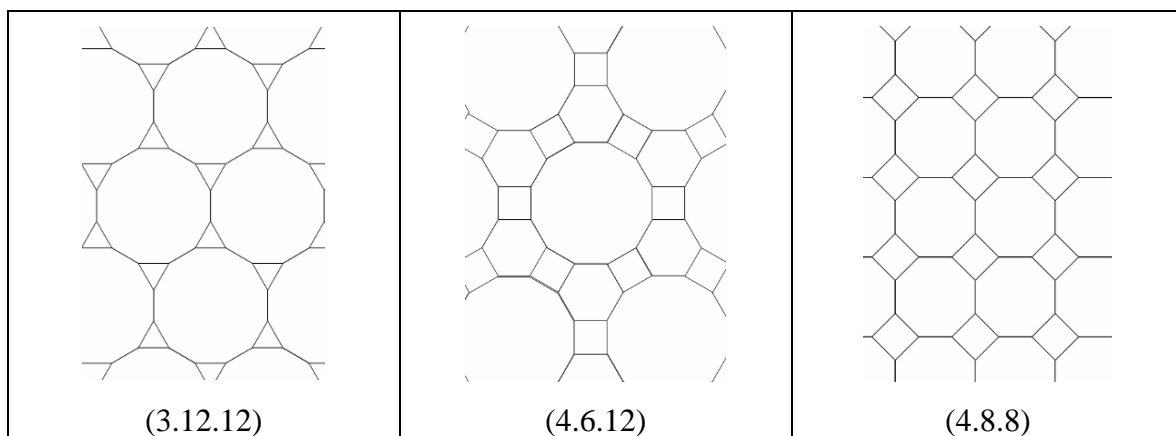


圖 2-1 11 種正多邊形密鋪圖樣

資料來源：Tilings and patterns

2-2 11 種正規點鋪磚

在一鋪磁磚中的點(假設有 v 個邊相遇在此點)，如果任兩個相鄰邊之間的夾角皆相同(也就是角度同為 $\frac{2\pi}{v}$)，則此點即稱為正規的(regular)[5]。如圖 2-2(a)、(b)兩圖所示，圖(a)中的所有點皆為正規的；然而圖(b)中的交於 A 點的三個邊其兩兩之間的夾角並不相同，所以圖(b)中的 A 點並非正規點。

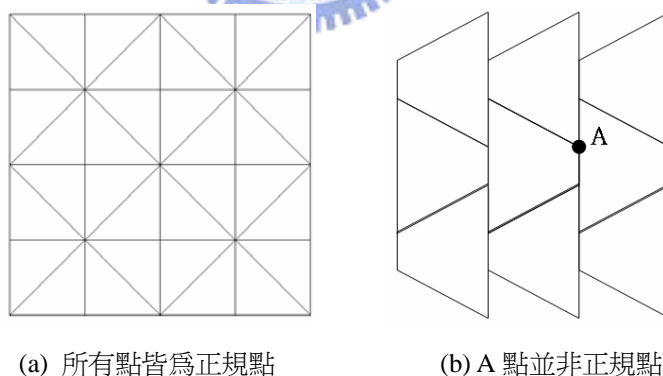


圖 2-2 正規點與非正規點介紹

底下我們將證明單一形狀鋪磚(瓦片中所有點皆為正規點)總共情況只有 11 種。

假設瓦片是一 r 個邊的多邊形，其 r 個點的價數分別是 v_1, v_2, \dots, v_r ，而我們將這 r 個點的價數以序列 $[v_1, v_2, \dots, v_r]$ 來表示，根據多邊形內角和定理，我可以列出式子(3)：

$$\frac{2\pi}{v_1} + \frac{2\pi}{v_2} + \dots + \frac{2\pi}{v_r} = (r-2)\pi \quad (3)$$

經過化簡後，我們可以得到關係式(4)。

$$\frac{v_1 - 2}{v_1} + \frac{v_2 - 2}{v_2} + \dots + \frac{v_r - 2}{v_r} = 2 \quad (4)$$

若我們將(4)與前一章節 2-1 中的(2)比較，我們可以發現這兩關係式是相同的，故其解也是相同的。又若我們再進一步去繪圖分析則可發現只有 11 組可以合乎要求[5]。其分別為[3.3.3.3.3.3]、[3.3.3.3.6]、[3.3.3.4.4]、[3.3.4.3.4]、[3.6.3.6]、[3.4.6.4]、[3.12.12]、[4.4.4.4]、[4.6.12]、[4.8.8]、[6.6.6]。¹其圖形分別如圖 2-3 所示。

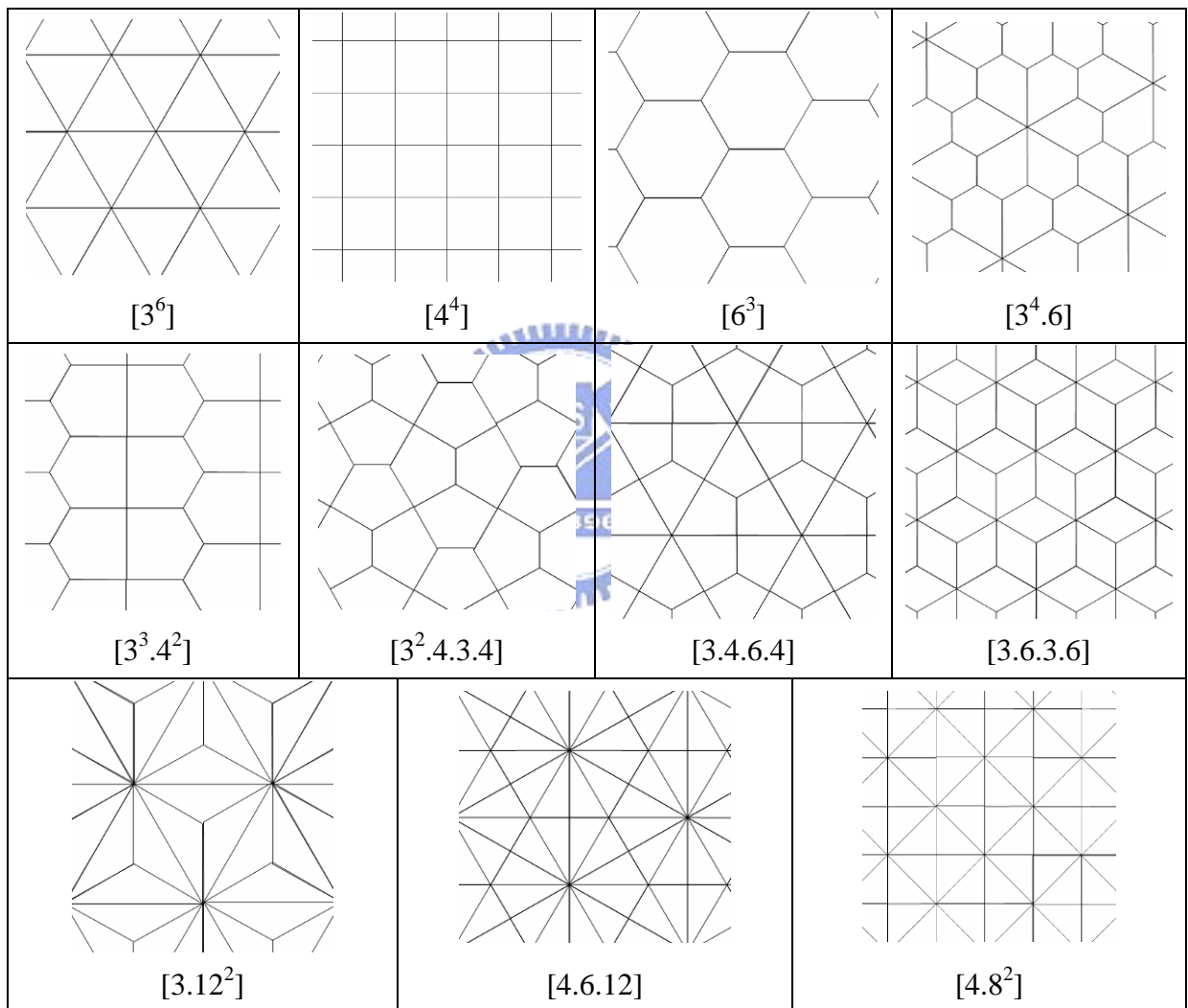


圖 2-3 11 種單一形狀瓦片的正規點鋪磚及其圖樣²

資料來源：Tilings and patterns

¹如同前面 1-5 所介紹：[3.3.3.3.3.3]也可簡寫為[3⁶]，其餘部分以此列推。

² 這 11 種鋪磁磚又叫做 Laves tilings。

在這邊要特別強調的是有些圖樣並非唯一，如圖 2-4 所示： $[3^3.4^2]$ 、 $[4^4]$ 、 $[3^6]$ 這三種正規點鋪磚的圖樣，其邊長是可以改變長度的(圖中的 α, β 值是可以改變的)，但其拓撲型態並不受影響。更有趣的事，在這 11 種正規點鋪磚圖樣中，也可以由前一節所介紹的 11 種正多邊形密鋪圖樣，透過點面互換(dual)，相鄰接的多邊形給予一條邊連接，構圖後我們可以發現其結果是相同的，其點面互換的結構如圖 2-5(a)、(b)兩例子所示。

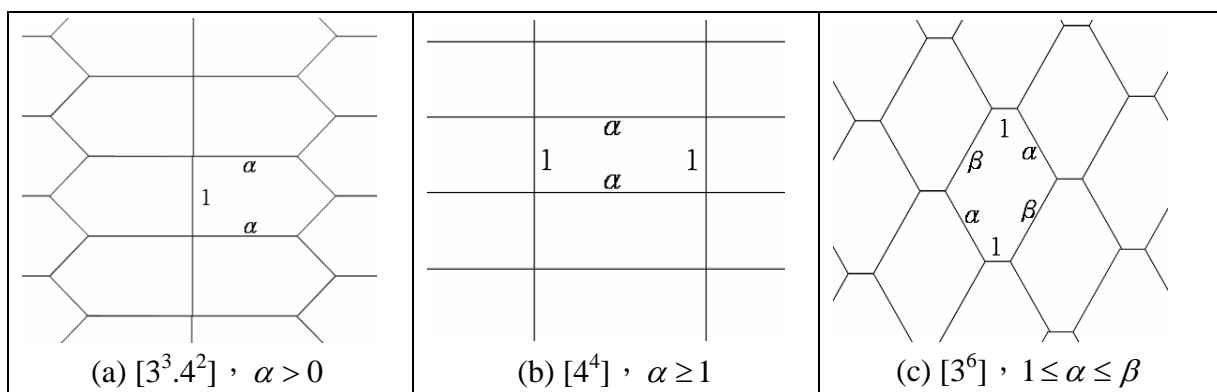


圖 2-4 三種正規點鋪磚的其他所有可能情況

資料來源：Tilings and patterns

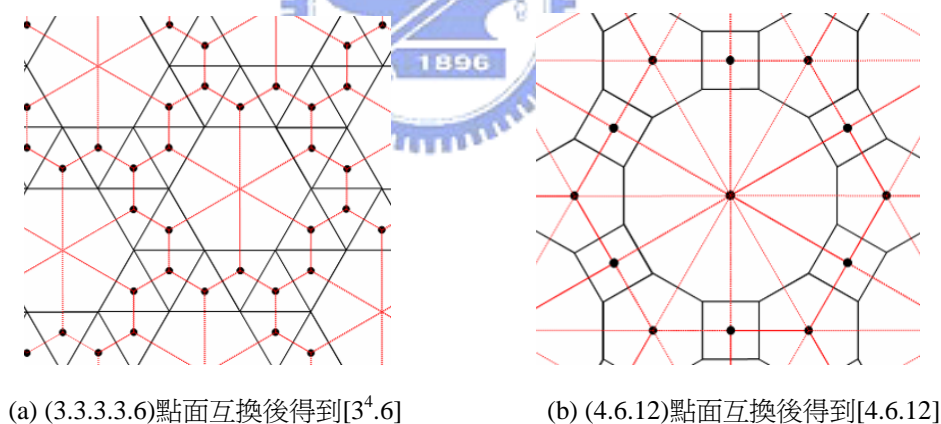


圖 2-5 正多邊形鋪磚與正規點鋪磚的關係探討

2-3 11 種拓撲型態

在一鋪磁磚中，若圖中的所有瓦片的拓撲型態皆相同，我們就稱此鋪磁磚為「齊次鋪磚」(homogeneous tiling)[5]。如圖 2-6(a)、(b)所示，(a)圖中的所有瓦片拓撲型態皆為 $[4^4]$ ，故圖(a)是齊次鋪磚，然而圖(b)中的瓦片 A 拓撲型態為 $[3^7]$ ，瓦片 B 的拓撲型態為 $[3^4]$ ，故圖(b)不是齊次鋪磚。

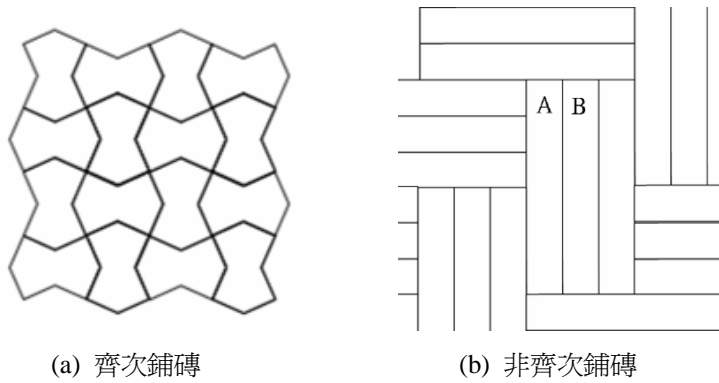


圖 2-6 齊次與非齊次的鋪磚介紹

底下我們簡單敘述證明齊次鋪磚其拓撲型態總共只有 11 種(詳細請見[5]的 4.3)。其證明必須用到 Euler's Theorem for Tiling(請見[5]中的 3.5)，定裡敘述如下：

If every tile of a normal tiling T has k vertices, and these vertices have valences j_1, \dots, j_k in some order, then
$$\sum_{i=1}^k \frac{j_i - 2}{j_i} = 2$$

有了這定理，我們再與 2-1 中的式子(2)做比較，可以得知共有[3.3.3.3.3.3]、[3.3.3.3.6]、[3.3.3.4.4]、[3.3.4.3.4]、[3.3.4.12]、[3.4.3.12]、[3.3.6.6]、[3.6.3.6]、[3.4.4.6]、[3.4.6.4]、[3.7.42]、[3.8.24]、[3.9.18]、[3.10.15]、[3.12.12]、[4.4.4.4]、[4.5.20]、[4.6.12]、[4.8.8]、[5.5.10]、[6.6.6]共 21 組解。接下來我們先對[3.3.4.12]此種情況做分析，從價數最小的點 3 來考量(如圖 2-7 所示)，不失一般性，我們將 T_1 的四個頂點依順時針方向標示上每點價數，再來我們考慮 T_2 中的 A 點，由於是齊次鋪磚，所以 A 點價數必須為 3，因此造成 T_3 的拓撲型態無法為[3.3.4.12]，故導致矛盾[1]。

其他的情況，透過同上分析可以知道齊次鋪磚只有 $[3^6]$ 、 $[3^4.6]$ 、 $[3^3.4^2]$ 、 $[3^2.4.3.4]$ 、 $[3.6.3.6]$ 、 $[3.4.6.4]$ 、 $[3.12^2]$ 、 $[4^4]$ 、 $[4.6.12]$ 、 $[4.8^2]$ 、 $[6^3]$ 這 11 種存在。

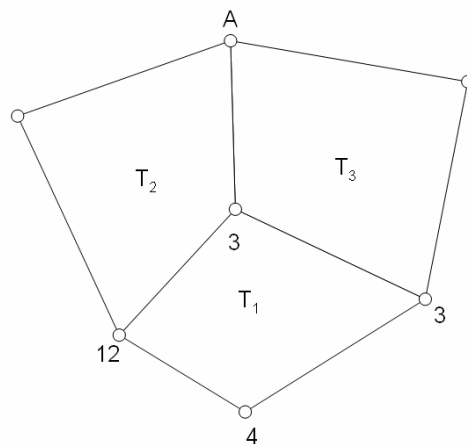


圖 2-7 [3.3.4.12]的矛盾分析

2-4 93 種單瓦片等面鋪磚(isohedral tiling)圖樣

在前一節中我們介紹了 11 種拓撲型態，由於單瓦片的齊次鋪磚其瓦片的拓撲型態必為這 11 種情況中的其中之一，故我們可以由這 11 種拓撲型態圖樣，去探討瓦片本身的對稱性以及與鄰居的銜接關係。

底下我們針對其中的一種拓撲型態去分析(以 $[4.8^2]$ 為例，推導出 IH78~82)，並繪出其圖樣；其餘的拓撲型態分析，以及如何導出 93 種等面鋪磚(簡稱 93 種 IH)圖樣，請見 [5] 書的 6.2。

首先，我們先看拓撲型態 $[4.8^2]$ 的圖樣結構(如圖 2-8(a))，其瓦片的對稱情況我們僅需考量是否具鏡射即可，其結構與瓦片符號分別如圖 2-8(b)、(c)所示：

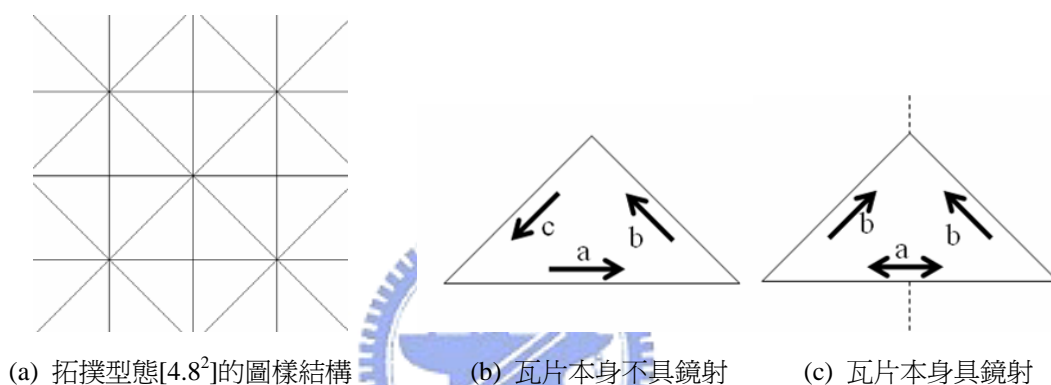
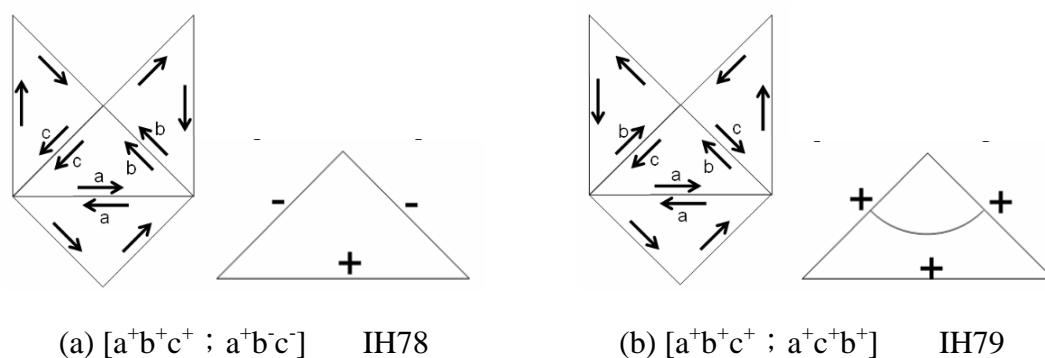


圖 2-8 $[4.8^2]$ 的圖樣及瓦片的可能結構

再來我們去考慮瓦片與鄰居銜接的情況，先考慮瓦片本身不具鏡射的情況。 a 邊的鄰居只可能有 a^+ 、 a^- 兩種³， b 邊的鄰居有 2 種選擇(b 邊或 c 邊)，由於是等面鋪磚的關係，當 b 邊若決定鄰居是 c 邊，則三角形中的第三邊 c 邊也因此被決定鄰居為 b 邊，由排列組合我們可以算出有 2×2 共 4 種情況。其與鄰居的銜接情況及關聯符號如圖 2-9 所示。



³ a 邊的鄰居只能為 a 邊，否則無法接合

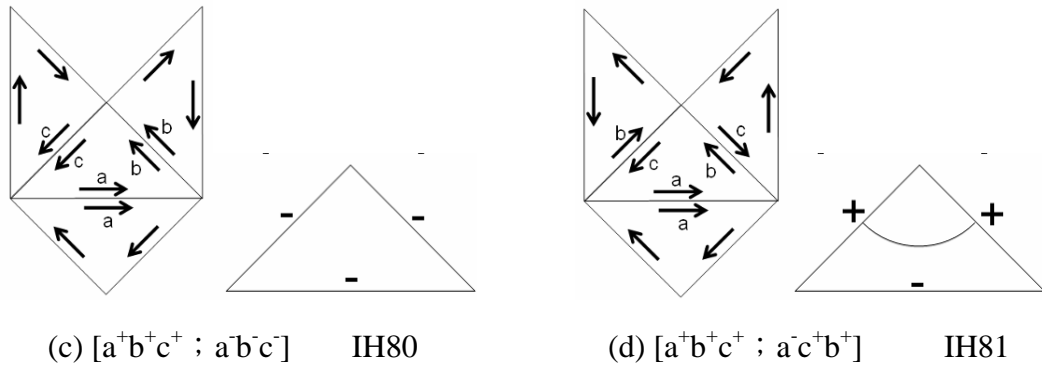


圖 2-9 瓦片本身不具鏡射時的四種與鄰居銜接情況

再來我們考慮瓦片本身具鏡射的情況。由於瓦片本身具鏡射，所以 a 邊不具方向性，b 邊的鄰居也只能為 b，故只有 1 種情況，其與鄰居的銜接情況及關聯符號如圖 2-10 所示。我們將 IH78~IH82 的結構進一步繪製圖樣，如圖 2-11 所示。

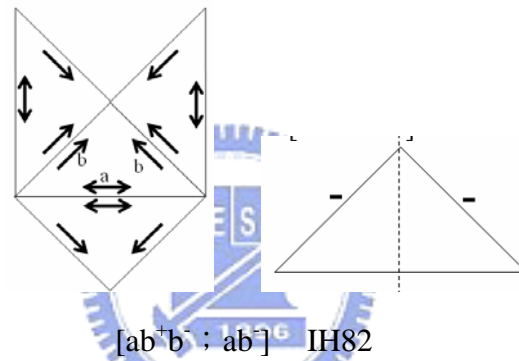


圖 2-10 瓦片本身具鏡射時與鄰居銜接情況

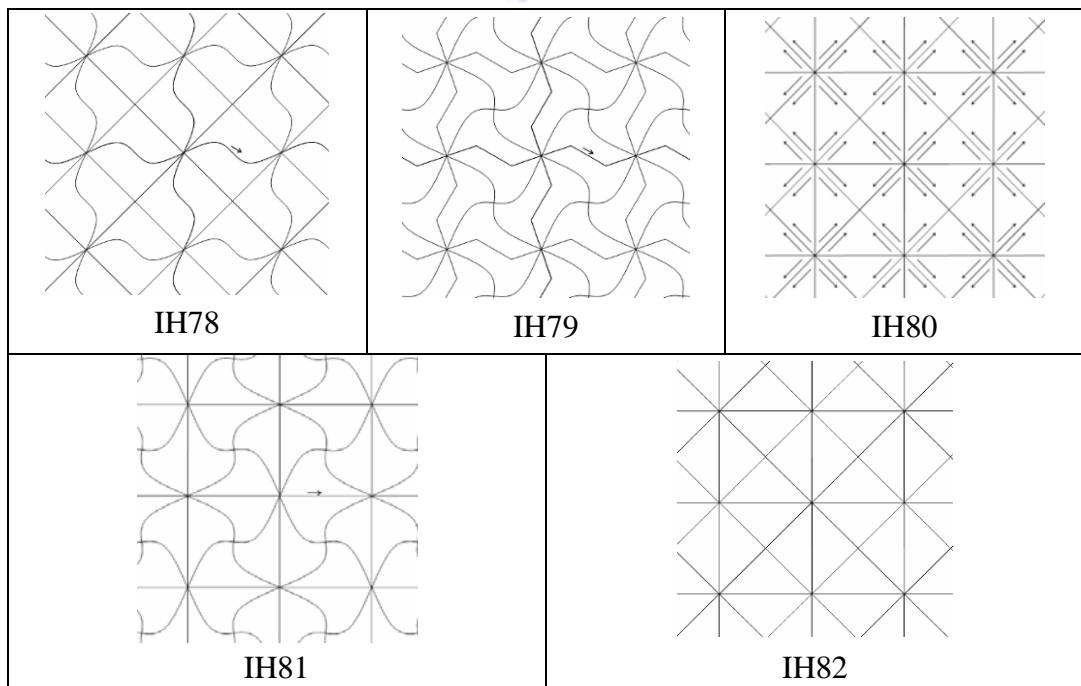


圖 2-11 IH78~82 圖樣

2-5 雙瓦片的等面鋪磚(2-isohedral tiling)

Brian Wichmann (Surrey, UK)與 John Dawes (Berkshire, UK)研究發現[13]: 雙瓦片(一正規的(regular)瓦片, 另一個任意不規則的(irregular)瓦片)密鋪方式, 共有 147 種不同規格的對稱圖樣。在研究過程中, 作者作了以下的條件限制:

- (1) 正規瓦片必須具有三重旋轉或 2 次鏡射以上
- (2) 正規瓦片和不規則瓦片皆必須是等面的(isohedral)

舉例來說, 在圖 2-12 中由兩種不同瓦片所密鋪構成, 一為正方形(正規瓦片), 另一則為不規則的多邊形(不規則瓦片)。在這圖中正方形具四重旋轉對稱, 不規則多邊形則不具旋轉對稱, 而這整張圖的結構則為 $p4$ 。

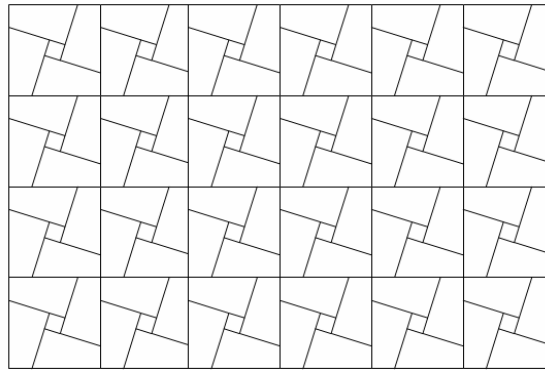


圖 2-12 雙瓦片鋪磚例子說明

底下的章節我們將對作者如何建構這 147 種圖樣以及如何判定兩圖為相同的等面鋪磚作詳細說明。

2-5-1 相同的等面鋪磚判別

在第一章中, 我們介紹了關聯符號與拓樸型態的標示與命名方法。而 Grunbaum 和 Shephard 在 *Tilings and Patterns* 一書中提到兩密鋪的重複連續圖樣為相同的等面鋪磚若且為若其關聯符號和拓樸型態皆相同[5]。舉例來說, 兩連續圖樣如圖 2-13 所示, 在這兩連續圖樣中都有兩種瓦片, 一個為正方形, 另一則為不規則多邊形。若我們將兩連續圖樣其局部放大如圖 2-14 所示, 其正規瓦片的拓樸型態皆為 $[3^4]$, 不規則瓦片的拓樸型態皆為 $[3^4.4.3]$, 為了更清楚, 我們再將其局部圖形放大如圖 2-15 所示, 兩圖案其正規瓦片的關聯符號皆為 $[(A^+)^4]$, 不規則瓦片則皆為 $[a^+b^+c^+d^+e^+f^+; A^+f^+c^+e^+d^+b^+]$, 綜合以上, 我們了解圖 2-13 中兩圖樣之關聯符號以及拓樸型態皆相同, 因此兩連續圖樣為相同的等面鋪磚。

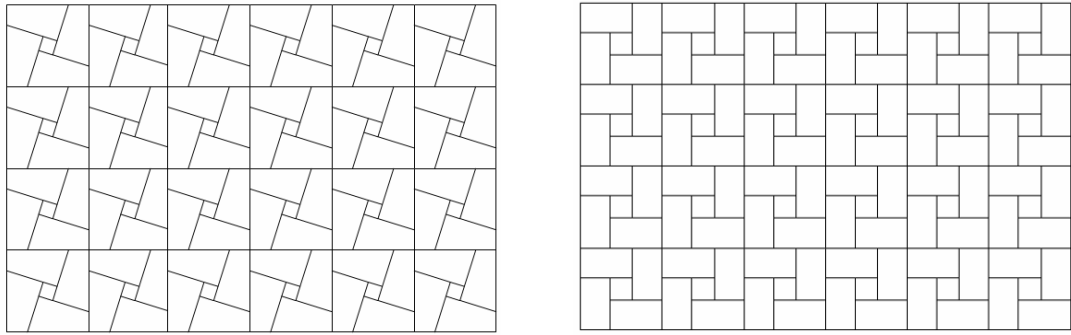


圖 2-13 同構的雙瓦片等面鋪磚圖樣

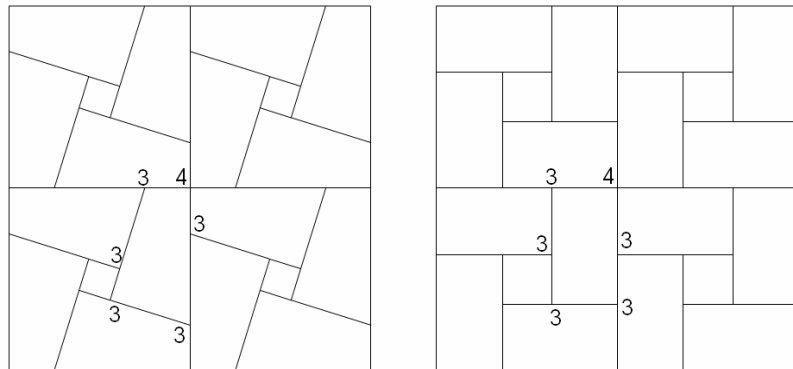


圖 2-14 拓樸型態比較

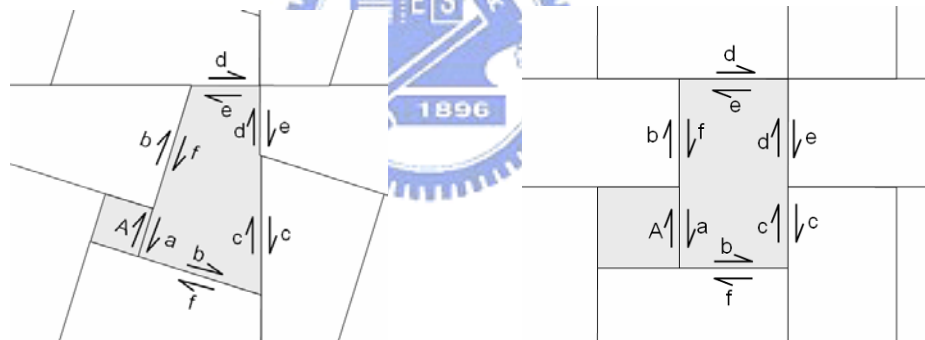


圖 2-15 關聯符號比較

2-5-2 147 種圖樣的建構方法

由於單瓦片的等面鋪磚共有 93 種(請見[5]書的 6.2)，在這理論基礎下，作者利用這結論進一步去建構雙瓦片的等面鋪磚，並做了以下條件限制：

- (1) 正規瓦片必須具有三重旋轉或 2 次鏡射以上
- (2) 正規瓦片和不規則瓦片皆必須是等面的(isohedral)

概觀 17 種二維圖樣特性中，由於正規瓦片必須具備三重旋轉或 2 次鏡射以上，因此正規瓦片不可能出現在 $cm, p1, p2, pg, pgg, pm, pmg$ 等七種二維重複圖樣型態中，因此作者從 93 種等面鋪磚中挑出 $cmm, pmm, p3, p31m, p3m1, p4, p4m, p4g, p6, p6m$ 等十種二維圖

樣型態(共 53 種)，編號如下表 2-1 所示⁴：

表 2-1 作者用來建構 147 種圖樣的 53 種等面鋪磚編號

類別	isohedral tiling type(IH)	類別	isohedral tiling type(IH)
cmm	17, 26, 54, 60*, 67, 74, 78, 91	pmm	48*, 65*, 72
p3	7, 10, 33	p31m	16, 18, 30, 36, 38, 89*
p3m1	19*, 35*, 87*	p4	28, 55, 61, 62, 79
p4g	29, 56, 63*, 71, 73, 81	p4m	70*, 75*, 76, 80*, 82
p6	11, 21, 31, 34, 39, 88, 90	p6m	20, 32, 37, 40, 77, 92*, 93

在建構圖樣的過程中，由於正規瓦片並須具備三重旋轉或 2 次鏡射以上，所以作者在價數 3 以上的點作為正規瓦片的中心，覆蓋上正規瓦片，如圖 2-16(a)所示，在 IH89 圖樣中，以價數 6 的點為中心，覆蓋上三角星形，便得到編號第 49 號的對稱結構圖樣，其完成圖如圖 2-16(b)所示。

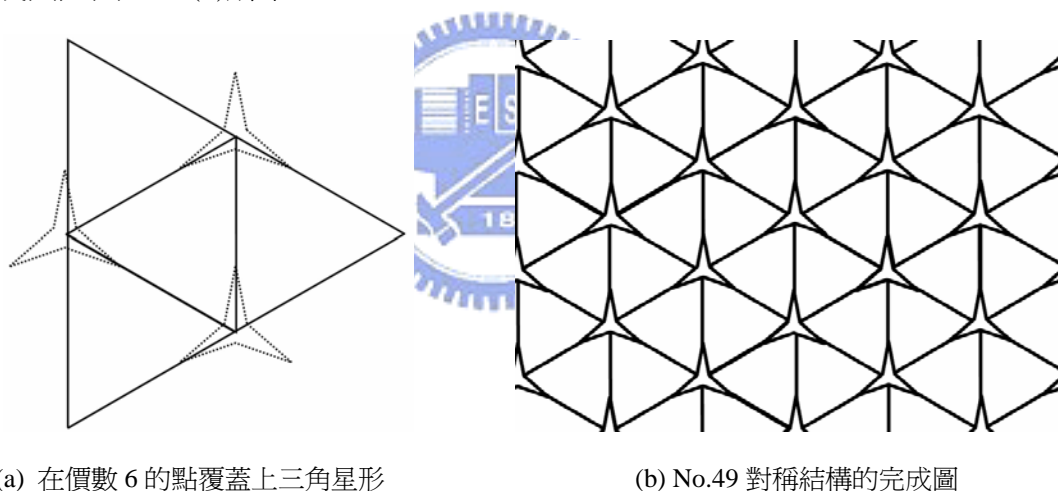
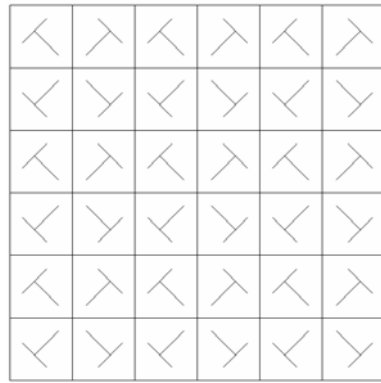


圖 2-16 作者建構 147 種圖樣的方法

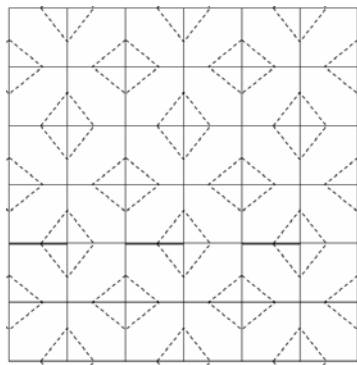
資料來源：A New Class of Tilings with Two Prototiles [3]

為了更清楚，我們再以 IH70(如圖 2-17(a))為例作說明，這邊要特別留意的是 IH70 有四次鏡射對稱處以及二次鏡射對稱處，作者在二次鏡射對稱處覆蓋上小菱形得到編號 81 號圖(如圖 2-17(b))，若菱形大時可得到 82 號圖(如圖 2-17(c))；在四次鏡射對稱處覆蓋上小四角星形得到編號 89 號圖(如圖 2-17(d))，若四角星形大時可得到第 90 號圖(如圖 2-17(e))。

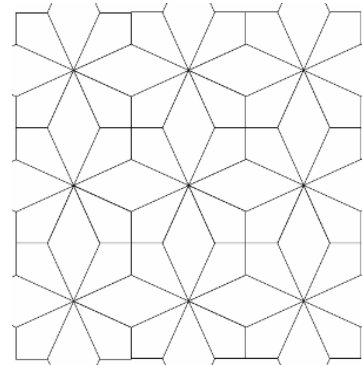
⁴ 星號「*」表示該編號的鋪磁磚是具標識方向性的



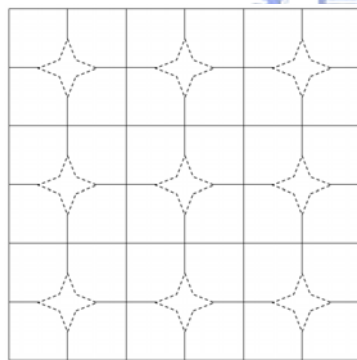
(a) IH70 圖樣的對稱性



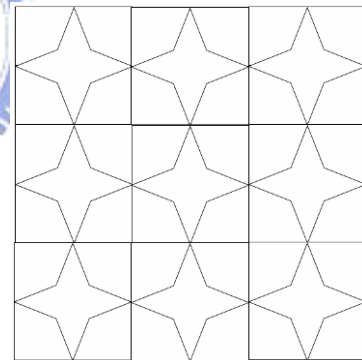
(b) 在二次鏡射處覆蓋上小菱形(No.81)



(c) 在二次鏡射處覆蓋上大菱形(No.82)



(d) 在四次鏡射覆蓋上小四角星(No.89)



(e) 在四次鏡射覆蓋上大四角星(No.90)

圖 2-17 作者建構 147 種圖樣的方法(II)

也由於作者的建構圖樣的方法來自於 93 種單瓦片等面鋪磚結構圖樣中的 53 種，對於學習者而言，實在過於繁多複雜，符號與圖樣之間不易了解。在下一章節中將用一套新的方法來重新建構此 147 種對稱結構圖樣，將結構作簡化，並化思考邏輯為操作程序(此方法我們稱為「繪圖程序方法」)，讓學習者可以容易了解這些圖樣結構，進而可以自行創作建構新圖樣，發揮更大的創意空間。



第三章 雙瓦片的等面鋪磚(cmm、pmm)

3-1 方法介紹

數學上可以證明二維重複圖樣型態共有 17 種[10,11]。概觀這 17 種圖樣結構，由於正規瓦片必須具備三重旋轉或是二次鏡射以上，因此正規瓦片不可能出現在 cm, p1, p2, pg, pgg, pm, pmg 等七種圖樣結構中，因此我們從僅剩下的 10 種結構出發思考 (cmm,pmm,p3,p31m,p3m1,p4,p4m,p4g,p6,p6m)，以設計基本單元作的想法建構這 147 種不同規格圖樣。以下是我們簡要設計基本單元的思考流程圖，如圖 3-1 所示：(詳細的分析將在下一節作說明)。

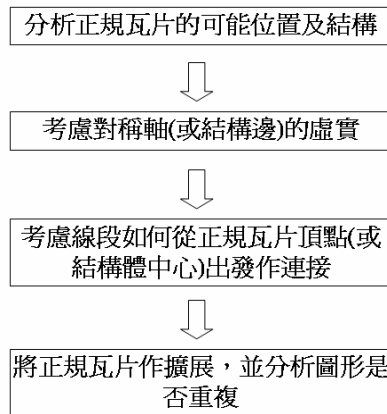


圖 3-1 設計基本單元的思考流程圖

我們以作者的編號 49 號圖為例來做介紹，透過圖 3-1 的流程分析我們可以產生基本單元，如圖 3-2 所示：

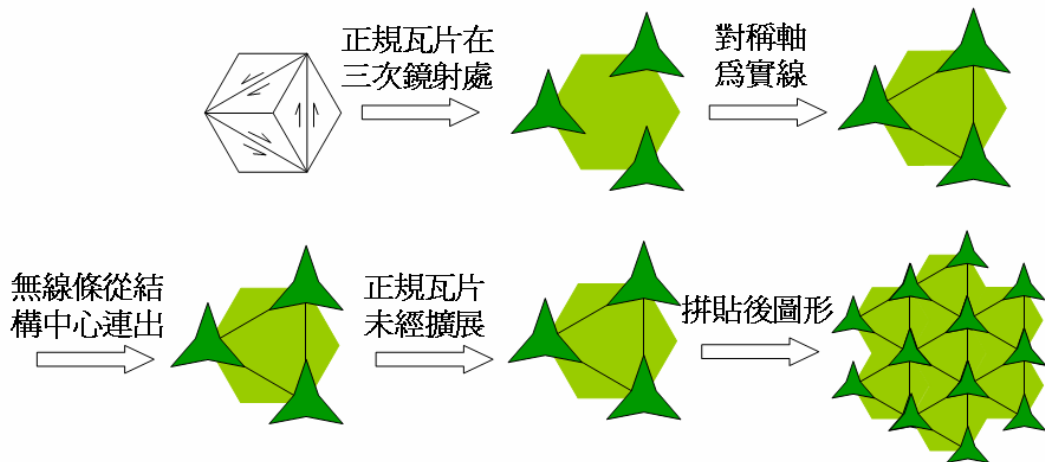


圖 3-2 我們的分析方法創造編號 49 號圖之流程

3-2 cmm 分析

首先，我們先對 **cmm** 結構作一解析(如圖 3-3 所示)，其中虛線部分表示其鏡射軸，結構中小黑色菱形為二重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 **cmm** 結構，正規瓦片結構只可能為二次鏡射(出現在 **cmm** 結構頂點或中心處，形狀為菱形)，再根據 **cmm** 的對稱性質，可以歸納出三種切法¹，如圖 3-4(a)、(b)、(c)所示。由於切法一可以產生切法二(如圖 3-5(a)所示)；切法三中的 A、B 兩處正規瓦片樣式不同²(如圖 3-5(b)所示)，故我們只需探討切法一即可。

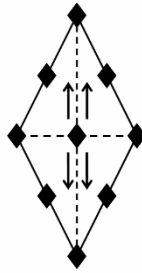
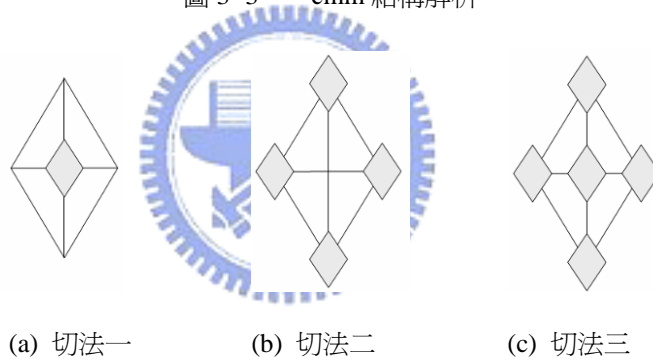
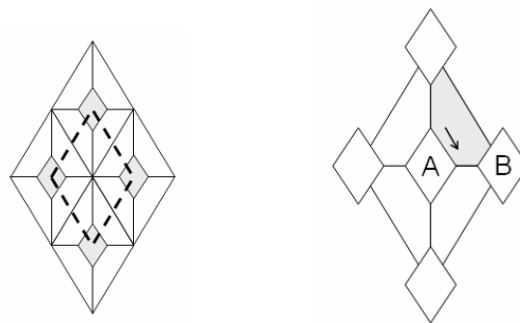


圖 3-3 cmm 結構解析



(a) 切法一 (b) 切法二 (c) 切法三

圖 3-4 cmm 的可能三種切法



(a) 切法一可以產生切法二 (b) A、B 兩處正規瓦片樣式不同

圖 3-5 結構說明

¹ 再這邊要特別注意的是 **cmm** 結構中若在一頂點放置上菱形，則另外三頂點也必定需放置上菱形，這現象我們可以在鋪瓷磚時發現，否則會導致矛盾，如圖 3-6 所示。

² 由於不規則瓦片不具鏡射軸，故 A、B 兩處瓦片鄰居不相同，將導致 A、B 兩瓦片關聯符號不相同。

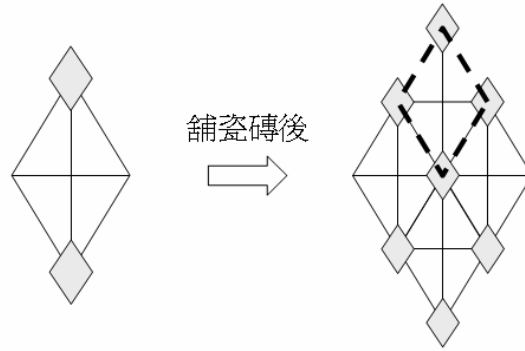


圖 3-6 二頂點處有正規瓦片將導致四處頂點皆有正規瓦片之矛盾

我們將切法一命名為「 $cmmC$ 」，接著，我們開始分析 $cmmC$ 對稱軸虛實以及線條如何連接，以下是我們的分析步驟(演算法)，如下表 3-1 所示：

表 3-1 $cmmC$ 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構
(1) 二實線： $F(s)$
(2) 一實一部分虛： $P_1(s)$ 、 $P_1'(s)$
(3) 一實一虛： $P_2(s)$
(4) 一虛一部份實： $P_3(s)$ 、 $P_3'(s)$
(5) 二虛線： $N(s)$
↓
步驟二：考慮外圍結構
(1) 外圍結構為實線： $F(O)$
(2) 外圍結構為虛線，但有線段從斜邊中點連出： $L(e_m, s)$ 、 $L(e_m, v)$
(3) 外圍結構為虛線，且無線段從斜邊中點連出： $N(O)$
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1) 不作擴展： S
(2) 上下方向擴展： B_1
(3) 左右方向擴展： B_1'
(4) 二方向同時擴展： B_2

以下我們用一簡單例子作介紹，如下流程圖 3-7 所示：

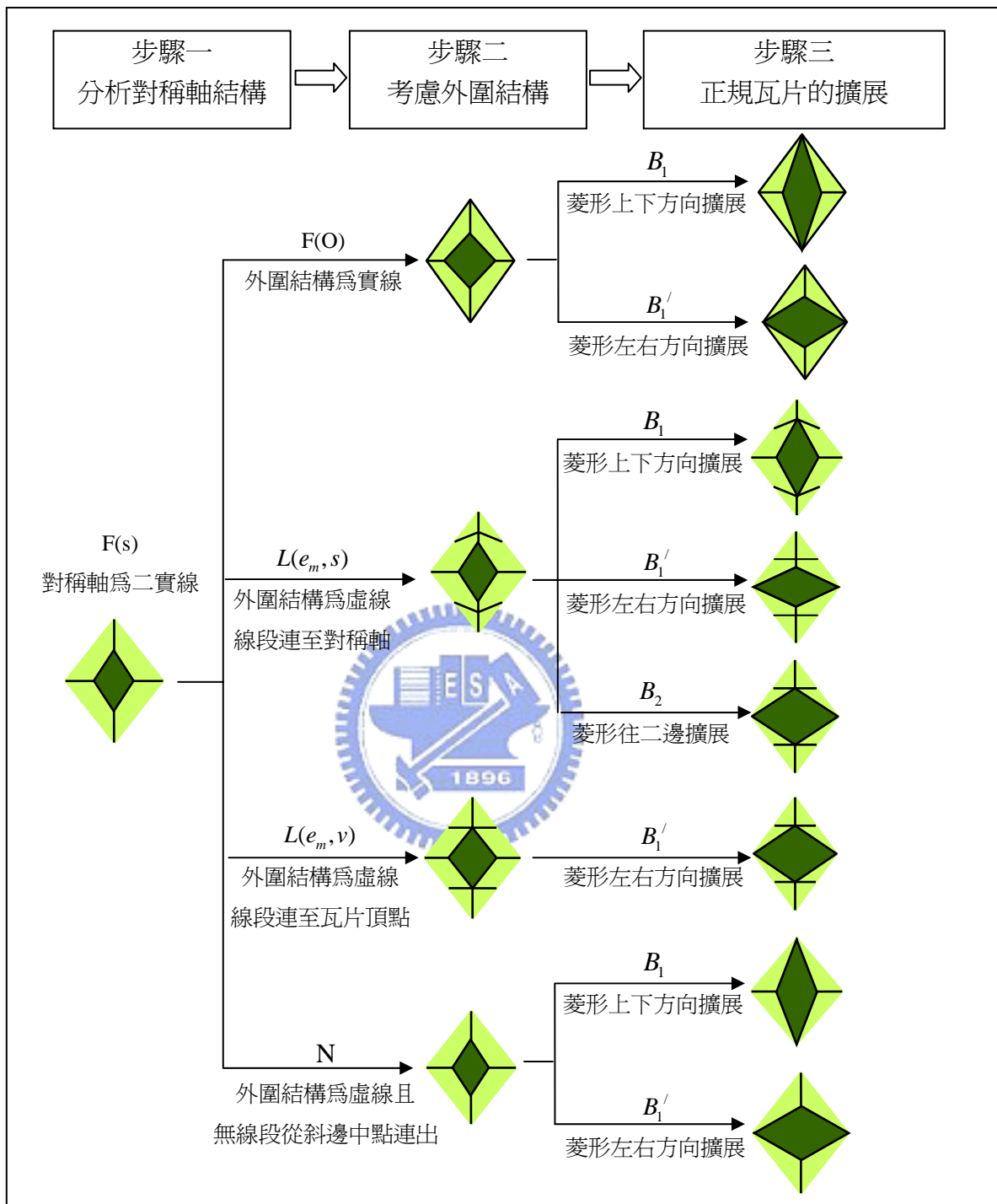


圖 3-7 cmmC 分析流程圖

我們進一步將 $cmmC$ 的所有未擴展之基本單元列表以便比較，如表 3-2 所示，其符號之意義請參照表 3-3 符號對照表。

表 3-2 $cmmC$ 的所有未擴展之基本單元列表

步驟一	$F(s)$	$P_1(s)$	$P'_1(s)$	$P_2(s)$	$P_3(s)$	$P'_3(s)$	$N(s)$
步驟二							
$F(O)$		無	無		無	無	
$L(e_m, s)$							
$L(e_m, v)$		無	無		無	無	
$N(O)$		無	無		無	無	

表 3-3 $cmmC$ 符號對照表

第一步驟(分析對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(分析外圍結構)符號介紹
(1) $F(s)$ ：對稱軸為二實線	(1) $F(O)$ ：外圍結構為實線
(2) $P_1(s)$ ：對稱軸一實一部分虛(情況一)	(2) $L(e_m, s)$ ：外圍結構虛線，線段從斜邊中點連接至對稱軸
(3) $P'_1(s)$ ：對稱軸一實一部分虛(情況二)	(3) $L(e_m, v)$ ：外圍結構虛線，線段從斜邊中點連接至正規瓦片頂點
(4) $P_2(s)$ ：對稱軸一實一虛	(4) $N(O)$ ：外圍結構為虛線，且沒有線段從斜邊中點連出
(5) $P_3(s)$ ：對稱軸一虛一部分實(情況一)	
(6) $P'_3(s)$ ：對稱軸一虛一部分實(情況二)	
(7) $N(s)$ ：對稱軸為二虛線	

在這邊要特別強調的是線可以分直線、折線及曲線，在分析方法步驟二中， $L(e_m, s)$ 與 $L(e_m, v)$ 這兩個指令並不一定要連接直線，也可以是曲線或是折線³，以繪圖程序方法 $[cmmC, F(s), L(e_m, s), S]$ 為例，其基本單元及密鋪後圖樣如圖 3-8、圖 3-9 所示；當然，外圍邊線結構 $F(O)$ 也是可以根據 cmm 的結構對稱性來做變化(如圖 3-10(a)、(b)所示)，正規瓦片、不規則瓦片的關聯符號與拓撲型態並不因此而改變。因此，在這套方法下，圖樣本身的設計變化又更多元，更具創意，然而卻不會因此改變圖樣的對稱結構。

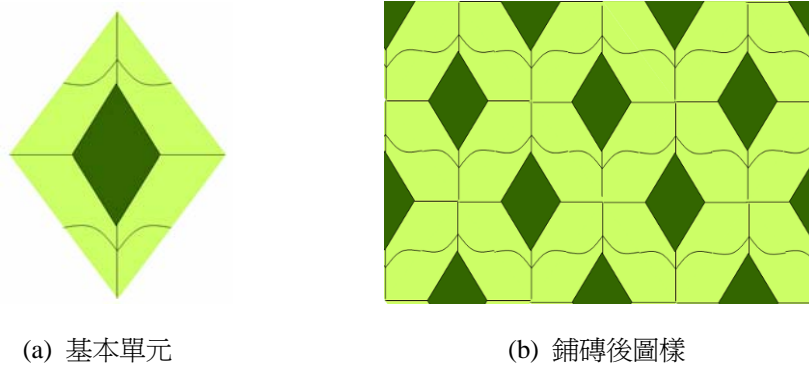


圖 3-8 基本單元中線條以曲線連接及鋪磚圖樣

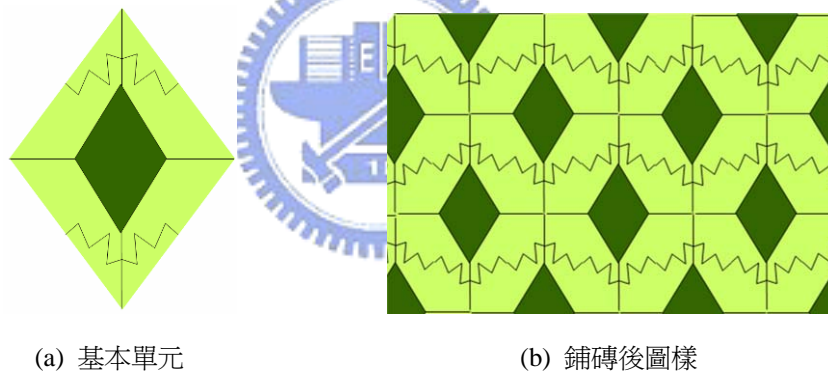


圖 3-9 基本單元中線條以折線連接及其鋪磚圖樣

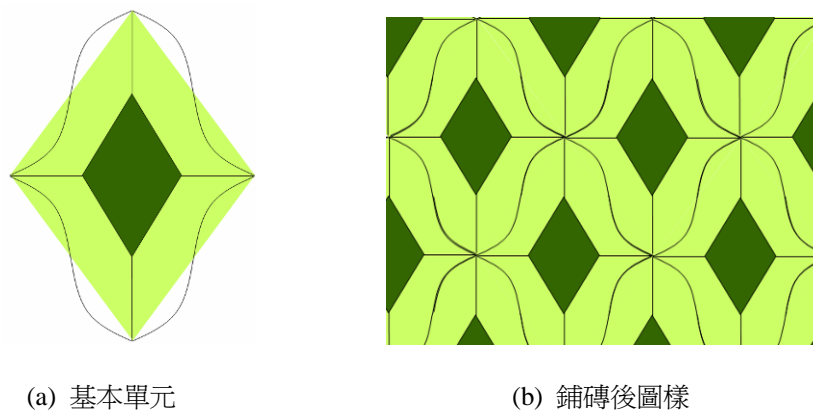


圖 3-10 基本單元改變其外圍結構及其鋪磚圖樣

³ 鏡射軸就只能是直線，不能做任何變化。

3-3 pmm 分析

首先，我們先對 pmm 結構作一解析(如圖 3-11 所示)，其中虛線部分表示其鏡射軸，結構中小黑色菱形為二重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 pmm 結構，正規瓦片結構只可能為二次鏡射(出現在 pmm 結構頂點，形狀為菱形)，可能出現的位置共九處，位置同圖 3-11 中的二重旋轉中心。由於 pmm 結構的對稱性，當局部的正規瓦片數目與位置被決定後，其他位置的正規瓦片也將因此被決定。為了有系統的分析，我們將這局部可能出現正規瓦片的位置編號 A、B、C、D(如圖 3-12 所示)。

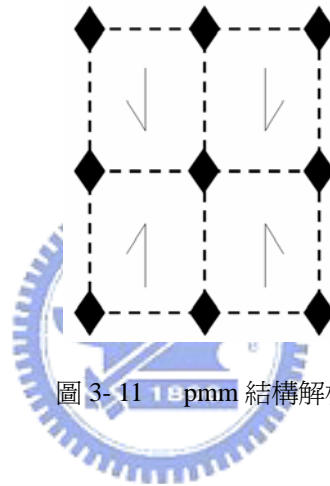


圖 3-11 pmm 結構解析

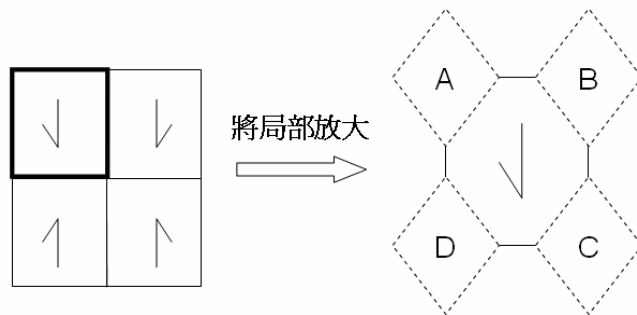


圖 3-12 局部結構正規瓦片可能出現的位置編號

以下是我們利用排列組合列舉出所有可能情況的分析。正規瓦片出現的可能位置與情況共 15 種($C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 15$)，而這 15 種切法經分析篩選後只有正規瓦片在位置 C 的切法滿足我們的要求(分析如表 3-4 所示)，我們也將此切法命名為「pmmC」。

表 3-4 pmm 所有切法分析

正規瓦片位置	A	B	C	D	AB
基本單元圖樣					
密鋪局部圖樣			此切法我們將它命名為 pmmC		
正規瓦片位置	AC	AD	BC	BD	CD
基本單元圖樣					
密鋪局部圖樣					
正規瓦片位置	ABC	ABD	ACD	BCD	ABCD
基本單元圖樣					
密鋪局部圖樣					
	正規瓦片樣式不同	正規瓦片樣式不同	正規瓦片樣式不同	正規瓦片樣式不同	與 C 同構

接著，我們開始分析 $pmmC$ 此切法的對稱軸及結構虛實，以下是我們的分析步驟(演算法)，如表 3-5 所示：

表 3-5 $pmmC$ 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析內部對稱軸結構
(1)二實線：F(s)
(2)一實一虛：P(s)
(3)二虛線：N(s)
↓
步驟二：考慮外圍結構
(1)外圍結構為實線：F(O)
(2)外圍結構部份虛線：P(O)
(3)外圍結構皆為虛線：N(O)
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)上下方向擴展： B_1
(3)左右方向擴展： B_1'
(4)二方向同時擴展： B_2

以下我們用一簡單例子作介紹，如下流程圖 3-13 所示：

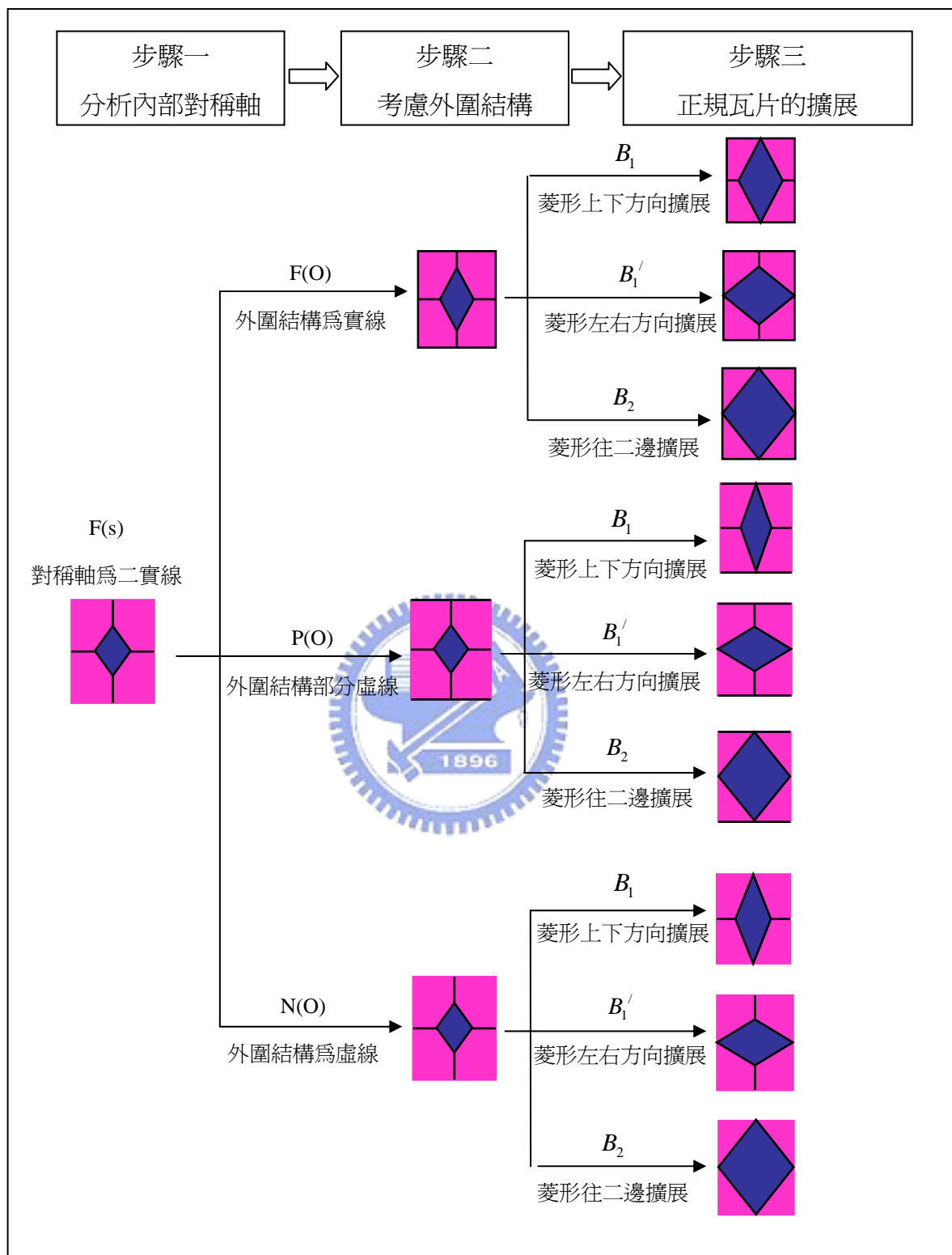


圖 3-13 pmmC 分析流程圖

我們進一步將 $pmmC$ 的所有未擴展基本單元列表以便比較，如表 3-6 所示，其符號之意義請參照表 3-7 符號對照表。

表 3-6 $pmmC$ 的所有未擴展之基本單元列表

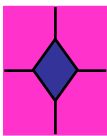
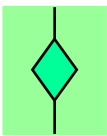
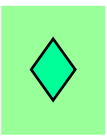
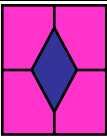
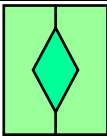
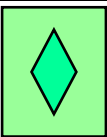
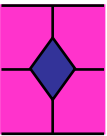
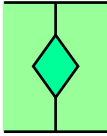
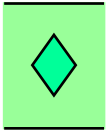
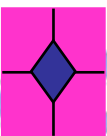
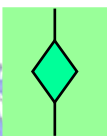
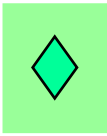
步驟一	F(s)	P(s)	N(s)
步驟二			
F(O)			
P(O)			
N(O)			

表 3-7 $pmmC$ 符號對照表

第一步驟(分析內部對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(分析外圍結構)符號介紹
(1) F(s)：對稱軸為二實線	(1) F(O)：外圍結構為實線
(2) P(s)：對稱軸一實一虛	(2) P(O)：外圍結構部分虛線
(3) N(s)：對稱軸為二虛線	(3) N(O)：外圍結構皆虛線



第四章 雙瓦片的等面鋪磚(p3、p4、p6)

4-1 p3 分析

首先，我們先對 p3 結構作一解析(如圖 4-1(a)所示)，結構中小黑色正三角形為三重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p3 結構，正規瓦片結構只可能為三重旋轉(出現在 p3 結構頂點，形狀為正三角形)，為了方便做分析，我們將正規瓦片做標示(如圖 4-1(b))，由於 p3 結構的對稱性，標示相同的正規瓦片必須同時出現或同時不出現，因此可以歸納出 7 種切法¹(如表 4-1 所示)，又由於兩種瓦片的條件限制，切法二結構同切法一(如圖 4-2 所示)，故我們只需分析切法一即可，而切法一我們也將它命名為「p3C」。

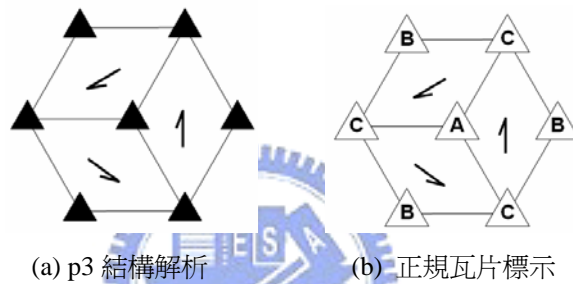


圖 4-1 p3 結構解析與正規瓦片標示

表 4-1 p3 所有切法分析

切法	切法一(A)	切法二(B)	切法三(C)	
切法圖樣				
	此切法我們命為 p3C	結構同 A 處放置瓦片	1、2 兩處瓦片樣式不同	
切法	切法四(AB)	切法五(AC)	切法六(BC)	切法七(ABC)
切法圖樣				
	1、2 兩處瓦片樣式不同	1、2、3 三處瓦片樣式不同	1、2、3 三處瓦片樣式不同	1、2、3、4 處瓦片樣式皆不同

¹ p3 結構為含 60° 菱形以頂點為旋轉中心旋轉 120° 複製三次而得到，而其中局部含 60° 之菱形不具任何對稱性質，因此若局部 60° 菱形頂點上有 2 個正規瓦片以上，則這些正規瓦片樣式必然不同。

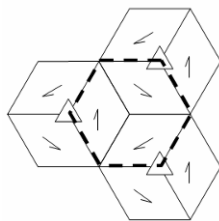


圖 4-2 切法一在鋪磚時將產生切法二

以下是 $p3C$ 的分析步驟(演算法)，如表 4-2 所示，我們也用一簡單例子作介紹，如下流程圖 4-3 所示²：

表 4-2 $p3C$ 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析外圍結構
(1)外圍結構實線：F(O)
(2)外圍結構虛線：N(O)
↓
步驟二：線條如何從正規瓦片連出
(1)從正規瓦片頂點連至外圍邊上：L(v,e)
(2)從正規瓦片頂點連至外圍頂點：L(v,v)
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B

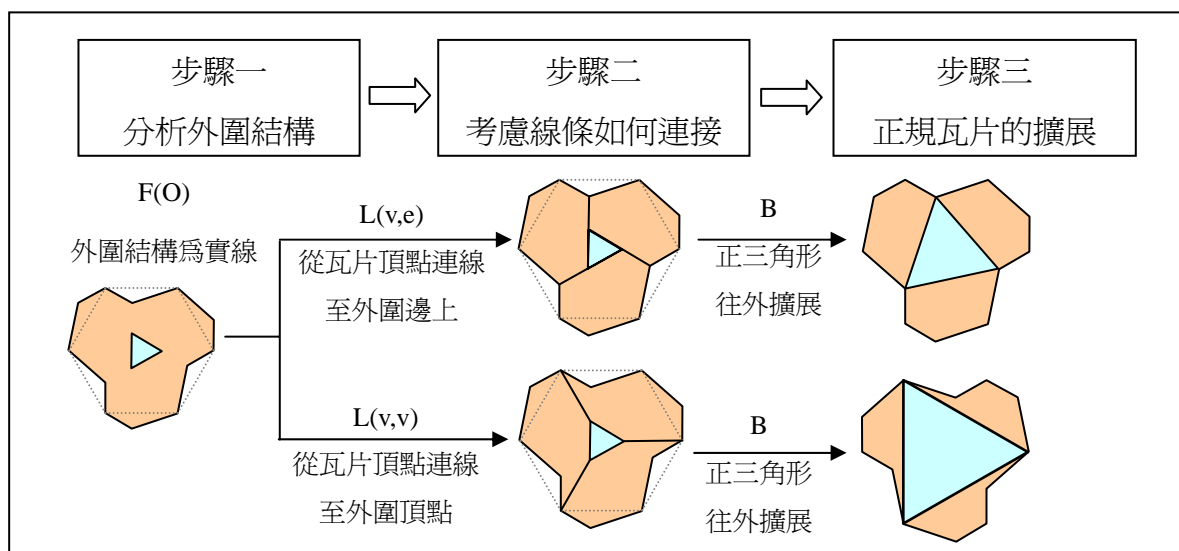
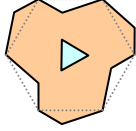
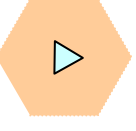
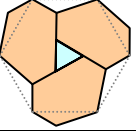
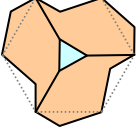
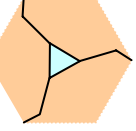


圖 4-3 $p3C$ 分析流程圖

²同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條一樣可以用折線或曲線連接，甚至外圍結構也可以做變化。圖 4-3 即是如此，由於結構為 $p3$ ，故需改變外圍結構，以避免線條連接或擴展後結構改變

我們進一步將所有未擴展之基本單元列出，如表 4-3 所示，其符號之意義請參照表 4-4 符號對照表。在這邊要留意的是[p3C,N(O),L(v,e),S]此基本單元鋪磚時將與鄰居無法銜接，如圖 4-4 所示。

表 4-3 p3C 的所有未擴展之基本單元列表

步驟一	F(O)	N(O)
步驟二		
L(v,e)		將與鄰居 無法銜接
L(v,v)		

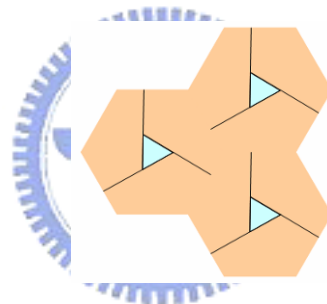


圖 4-4 [p3C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚

表 4-4 p3C 符號對照表

第一步驟(分析外圍結構)符號介紹	第二步驟(分析線條如何連接)符號介紹
(1) F(O)：外圍結構為實線	(1) L(v,v)：線條從正規瓦片頂點連至外圍頂點
(2) N(O)：外圍結構為虛線	(2) L(v,e)：線條從正規瓦片頂點連至外圍邊上

4-2 p4 分析

首先，我們先對 p4 結構作一解析(如圖 4-5 所示)，結構中黑色菱形為二重旋轉中心，黑色正方形為四重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p4 結構，正規瓦片結構只可能為四重旋轉(出現在圖 4-5 結構中四重旋轉處，形狀為正方形)。由 p4 結構的對稱性，我們可以歸納出三種切法(如圖 4-6 所示)，其中切法三中的 A、B 兩處正規瓦片樣式不同³，而切法二結構同切法一(如圖 4-7 所示)，故我們只需分析切法一即可，而切法一我們也將它命名為「p4C」。

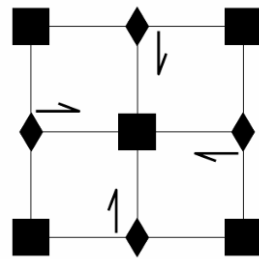
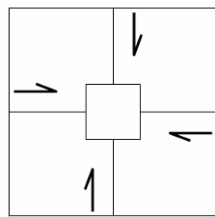
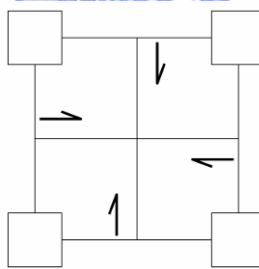


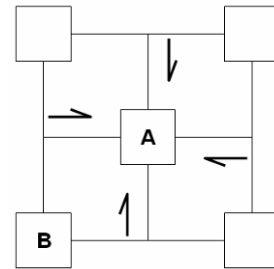
圖 4-5 p4 結構解析



(a) 切法一



(b) 切法二



(c) 切法三

圖 4-6 p4 的三種可能切法

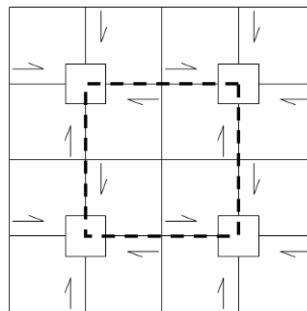


圖 4-7 切法一在鋪磚時產生切法二

³ 由於 p4 結構是由局部正方形以頂點為旋轉中心，旋轉 90° 複製四次而得到，其中局部正方形不具任何對稱性質，導致 A、B 兩處的正規瓦片與不規則瓦片銜接面必然不同，故 A、B 兩處正規瓦片樣式不同。

以下是 p4C 的分析步驟(演算法)，如下表 4-5 所示，我們也用一簡單例子作介紹，如下流程圖 4-8 所示⁴：

表 4-5 p4C 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析外圍結構
(1)外圍結構實線：F(O)
(2)外圍結構虛線：N(O)
↓
步驟二：線條如何從正規瓦片連出
(1)從正規瓦片頂點連至外圍邊上：L(v,e)
(2)從正規瓦片頂點連至外圍頂點：L(v,v)
(3)從正規瓦片頂點連至外邊中點：L(v, e _m)
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B

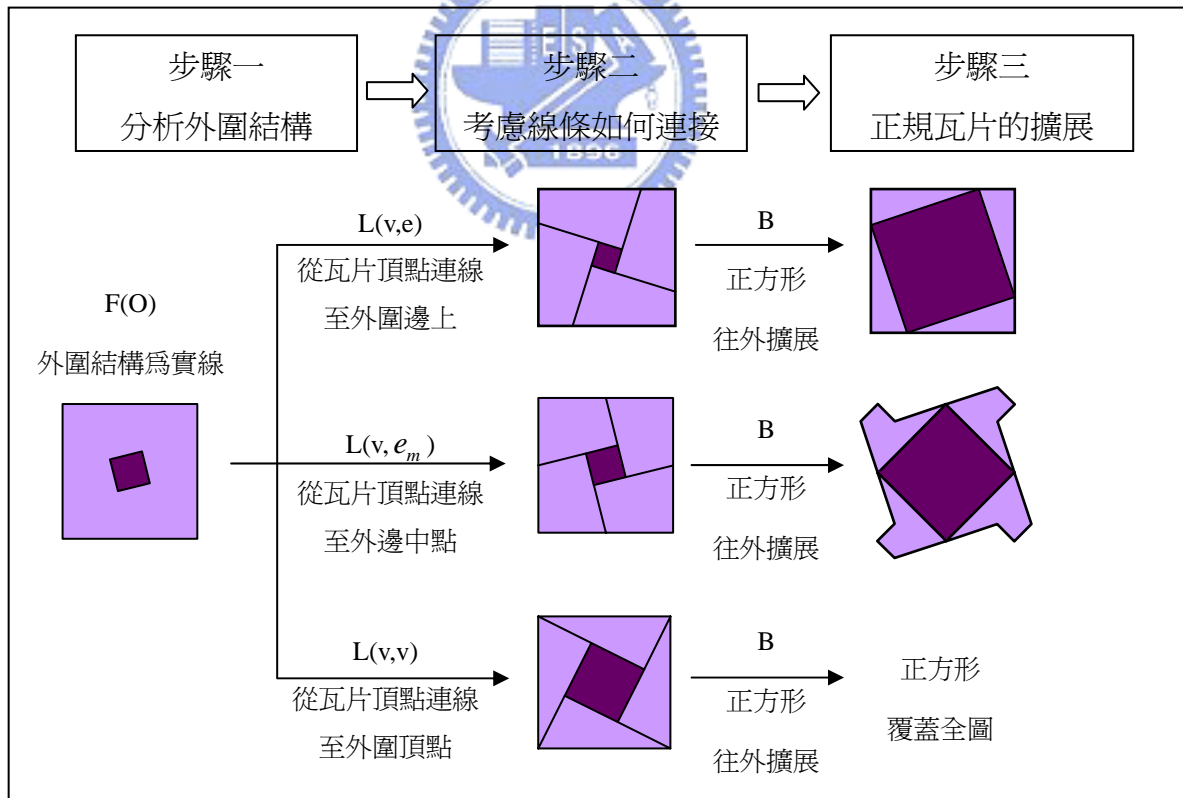
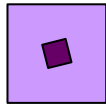
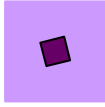
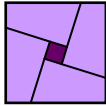
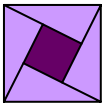
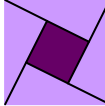
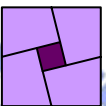
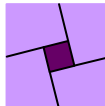


圖 4-8 p4C 分析流程圖

⁴同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條一樣可以用折線或曲線連接，外圍結構也可以做變化。在圖 4-8 中，[p4C,F(O),L(v, e_m),B]此基本單元其外邊線條需作改變，否則結構會改變為 p4m

我們進一步將所有未擴展之基本單元列出，如表 4-6 所示，其符號之意義請參照表 4-7 符號對照表。在這邊要留意的是[p4C,N(O),L(v,e),S] 此基本單元在鋪磚時將與鄰居無法銜接，如圖 4-9 所示。

表 4-6 p4C 所有未擴展之基本單元列表

步驟一	F(O) 	N(O) 
步驟二		
L(v,e)		將與鄰居 無法銜接
L(v,v)		
L(v, e _m)		

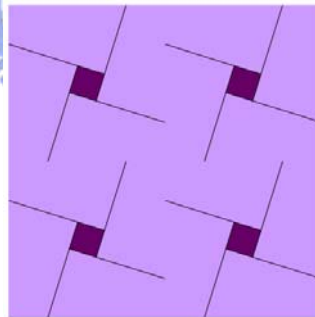


圖 4-9 [p4C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚

表 4-7 p4C 符號對照表

第一步驟(分析外圍結構)符號介紹	第二步驟(分析線條如何連接)符號介紹
(1) F(O)：外圍結構為實線 (2) N(O)：外圍結構為虛線	(1) L(v,v)：線條從正規瓦片頂點連至外圍頂點 (2) L(v,e)：線條從正規瓦片頂點連至外圍邊上 (3) L(v, e _m)：線條從正規瓦片頂點連至外邊中點

4-3 p6 分析

首先，我們先對 p6 結構作一解析(如圖 4-10 所示)，結構中黑色菱形為二重旋轉中心，黑色正三角形為三重旋轉中心，黑色正六邊形為六重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p6 結構，正規瓦片結構可能為正三角形(出現在圖 4-10 結構中三重旋轉處)或正六邊形(出現在圖 4-10 結構中六重旋轉處)。由 p6 結構的對稱性，我們可以歸納出二種切法(如圖 4-11 所示)，其中切法一我們將它命名為「p6C」，而切法二則將它命名為「p6V」。

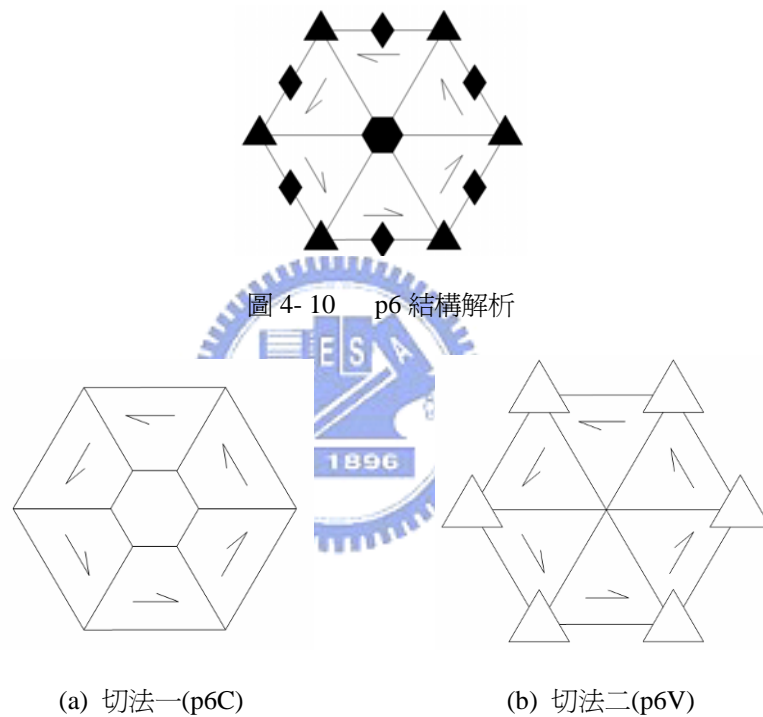


圖 4-11 p6 可能的兩種切法

以下是 p6C 及 p6V 的分析步驟(演算法)，由於分析方法相同，所以我們將它整理在一起，如下表 4-8 所示⁵；在步驟二中，p6C 是考慮線條如何從中心的正規瓦片頂點連出，而 p6V 則是考慮線條如何從結構中心點連出，兩者相近。底下我們也將分別用一簡單例子作介紹，我們先看 p6C 分析(如圖 4-12 所示)。其中[p6C,F(O),L(v, e_m),B]此基本單元之外圍線條必須作變化，否則將導致結構非 p6，而是 p6m。

⁵ 在表 4-8 步驟二中標示星號「*」的部分((4)、(5)兩情況)只有在 p6V 此切法才有。

表 4-8 p6C 及 p6V 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析外圍結構
(1)外圍結構實線：F(O)
(2)外圍結構虛線：N(O)
↓
步驟二：線條如何從正規瓦片(中心點)連出
(1)從瓦片頂點(中心點)連至外圍邊上：L(v,e)
(2)從瓦片頂點(中心點)連至外圍頂點：L(v,v)
(3)從瓦片頂點(中心點)連至外邊中點：L(v, e _m)
* (4)從瓦片頂點(中心點)連至外邊中點+頂點：L(v, v+ e _m)
* (5)無線條從瓦片頂點(中心點)連出：N
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B

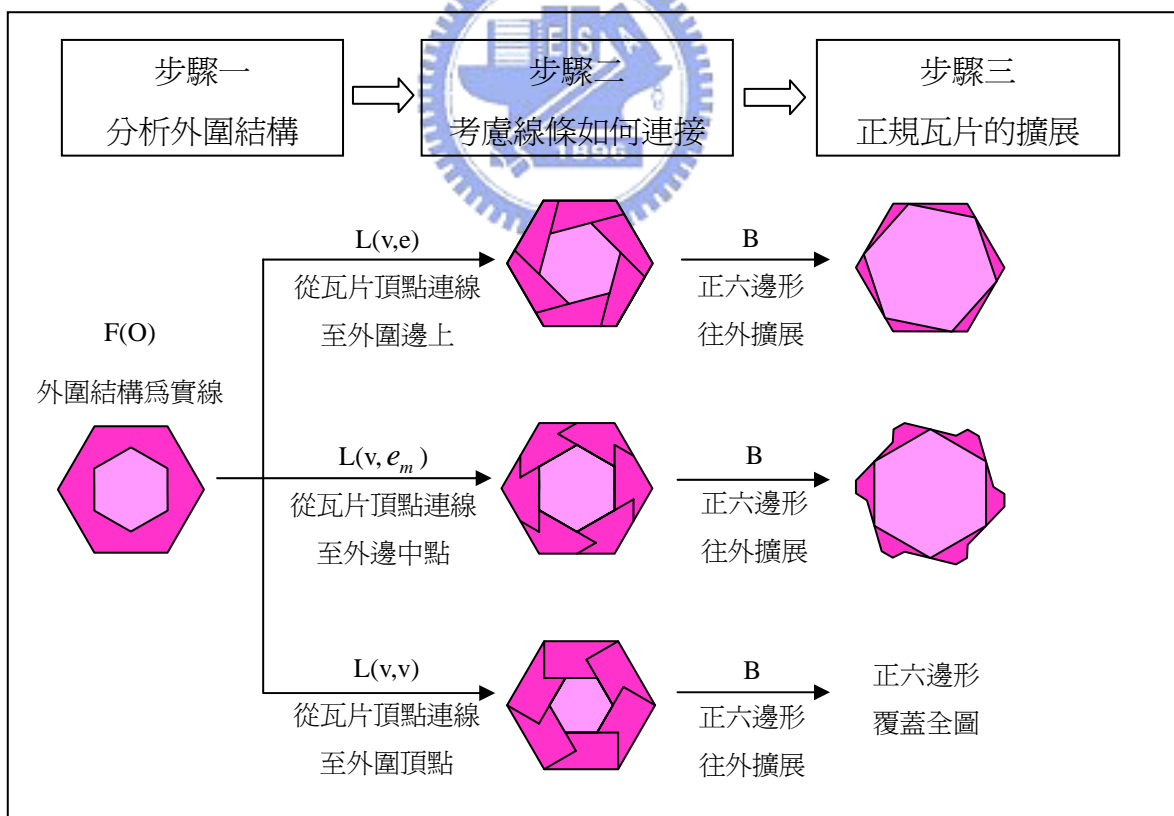
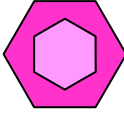

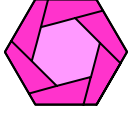
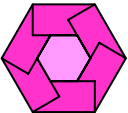
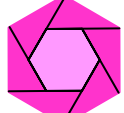




圖 4-12 p6C 分析流程圖⁶

⁶同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條一樣可以用折線或曲線連接，外圍結構也可以做變化，但不可改變結構對稱性

我們進一步將所有未擴展之基本單元列出，如表 4-9 所示，其符號之意義請參照表 4-10 符號對照表。在這邊要留意的是[p6C,N(O),L(v,e),S] 此基本單元在鋪磚時將與鄰居無法銜接，如圖 4-13 所示。

表 4-9 p6C 所有未擴展之基本單元列表

步驟一	F(O)	N(O)
步驟二		
L(v,e)		將與鄰居 無法銜接
L(v,v)		
L(v, e _m)		

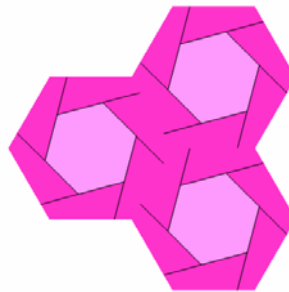


圖 4-13 [p6C,N(O),L(v,e),S]之鋪磚

表 4-10 p6C 符號對照表

第一步驟(分析外圍結構)符號介紹	第二步驟(分析線條如何連接)符號介紹
(1) F(O)：外圍結構為實線	(1) L(v,v)：線條從正規瓦片頂點連至外圍頂點
(2) N(O)：外圍結構為虛線	(2) L(v,e)：線條從正規瓦片頂點連至外圍邊上
	(3) L(v, e _m)：線條從正規瓦片頂點連至外邊中點

接著我們來看 $p6V$ 的分析，在這邊要特別強調，由於我們是研究邊對邊的密鋪方式，故需將原正六邊形外部結構作改變(由正三角形頂點連線至另一正三角形頂點)；此外 $[p6V, F(O), L(v, e_m), B]$ 此基本單元需將連線的線條作變化，否則結構將改變為 $p6m$ ，而非 $p6$ 。

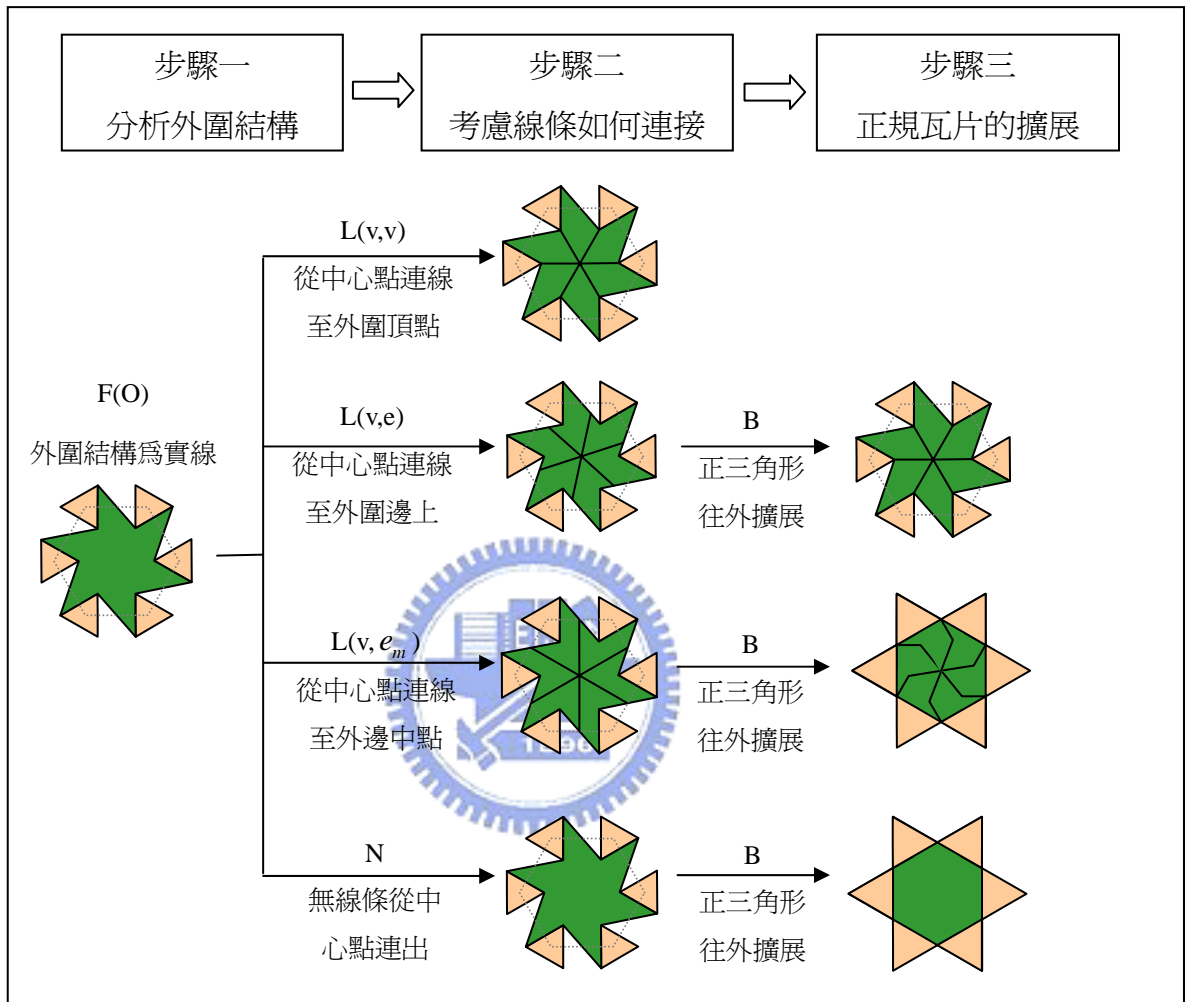
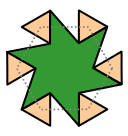
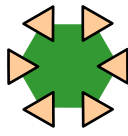
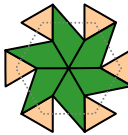
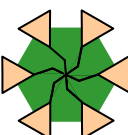
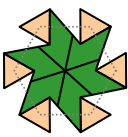
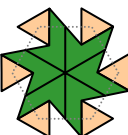



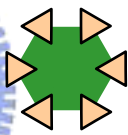


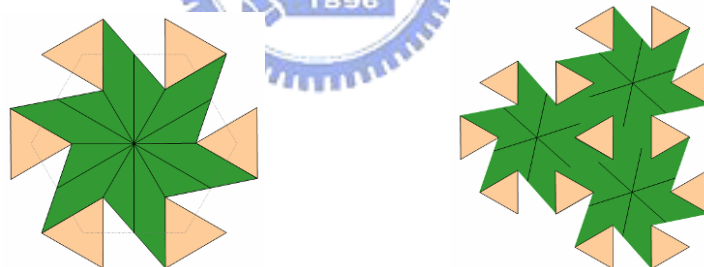
圖 4-14 $p6V$ 分析流程圖⁷

我們進一步將所有未擴展之基本單元列出，如表 4-11 所示，其符號之意義請參照表 4-12 符號對照表。在這邊要留意的是 $[p6V, F(O), L(v, v+e_m), S]$ 此基本單元在鋪磚時也將產生三種不同瓦片(一正規瓦片、二不規則瓦片)，如圖 4-15(a)所示，而 $[p6V, N(O), L(v, e), S]$ 此基本單元在鋪磚時將與鄰居無法銜接，如圖 4-15(b)所示。

⁷同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條一樣可以用折線或曲線連接，外圍結構也可以做變化，但不可改變結構對稱性

表 4-11 p6V 所有未擴展之基本單元列表

步驟一	F(O)	N(O)
步驟二		
L(v,v)		
L(v,e)		將與鄰居 無法銜接
L(v, e _m)		
L(v, v+ e _m)	三種不同 瓦片	
N		



(a) 此連接法產生三種不同瓦片 (b) 此基本單元鋪磚時無法與鄰居銜接

圖 4-15 兩種不合要求的鋪磚說明

表 4-12 p6V 符號對照表

第一步驟(分析外圍結構)符號介紹	第二步驟(分析線條如何連接)符號介紹
(1) F(O)：外圍結構為實線	(1) L(v,v)：線條從中心點連至外圍頂點
(2) N(O)：外圍結構為虛線	(2) L(v,e)：線條從中心點連至外圍邊上
	(3) L(v, e _m)：線條從中心點連至外邊中點
	(4) L(v, v+ e _m)：線條從中心點連至外邊中點及頂點
	(5) N：無線條從中心點連出



第五章 雙瓦片的等面鋪磚(p31m、p4g)

5-1 p31m 分析

首先，我們先對 p31m 結構作一解析(如圖 5-1 所示)，結構中虛線為鏡射軸，黑色正三角形為三重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p31m 結構，正規瓦片結構可能為正三角形(出現在圖 5-1 結構中三重旋轉但不具鏡射對稱處)或三角星形(出現在圖 5-1 結構中三鏡射軸交會處)。由 p31m 結構的對稱性，我們可以歸納出二種切法(如圖 5-2 所示)，其中切法一我們將它命名為「p31mC」，而切法二則將它命名為「p31mV」，接著，我們開始進一步分析 p31mC 及 p31mV 的對稱軸虛實以及線條如何連接。

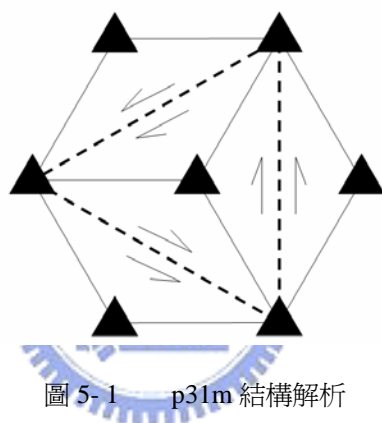
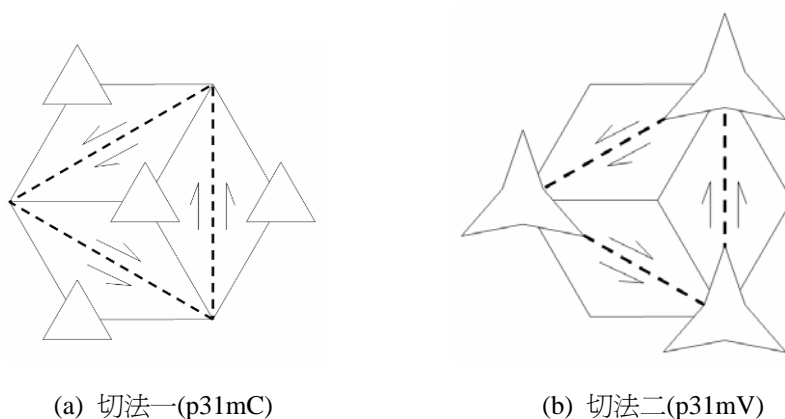


圖 5-1 p31m 結構解析



(a) 切法一(p31mC)

(b) 切法二(p31mV)

圖 5-2 p31m 的兩種可能切法

由於 p31mC 與 p31mV 分析方法相同，所以將它整理在一起，如表 5-1 所示¹；在步驟二中，p31mC 是考慮線條如何從中心的瓦片頂點連出，而 p31mV 則是考慮線條如何從結構中心點連出。底下分別用一例子作介紹，我們先看 p31mC 分析(如圖 5-3 所示)。

¹ 步驟三中標示星號「*」的部分為 p31mV 才有的正規瓦片擴展方式

表 5-1 p31mC 及 p31mV 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構
(1)對稱軸皆實線：F(s)
(2)對稱軸有部分虛線：P(s)
(3)對稱軸皆虛線：N(s)
↓
步驟二：線條如何從中央正規瓦片(中心點)連出
(1)從瓦片頂點(中心點)連至對稱軸上：L(v,s)
(2)從瓦片頂點(中心點)連至對稱軸頂點：L(v,v)
(3)無線條從瓦片頂點(中心點)連出：N
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B
*(3)更往外擴展：B'

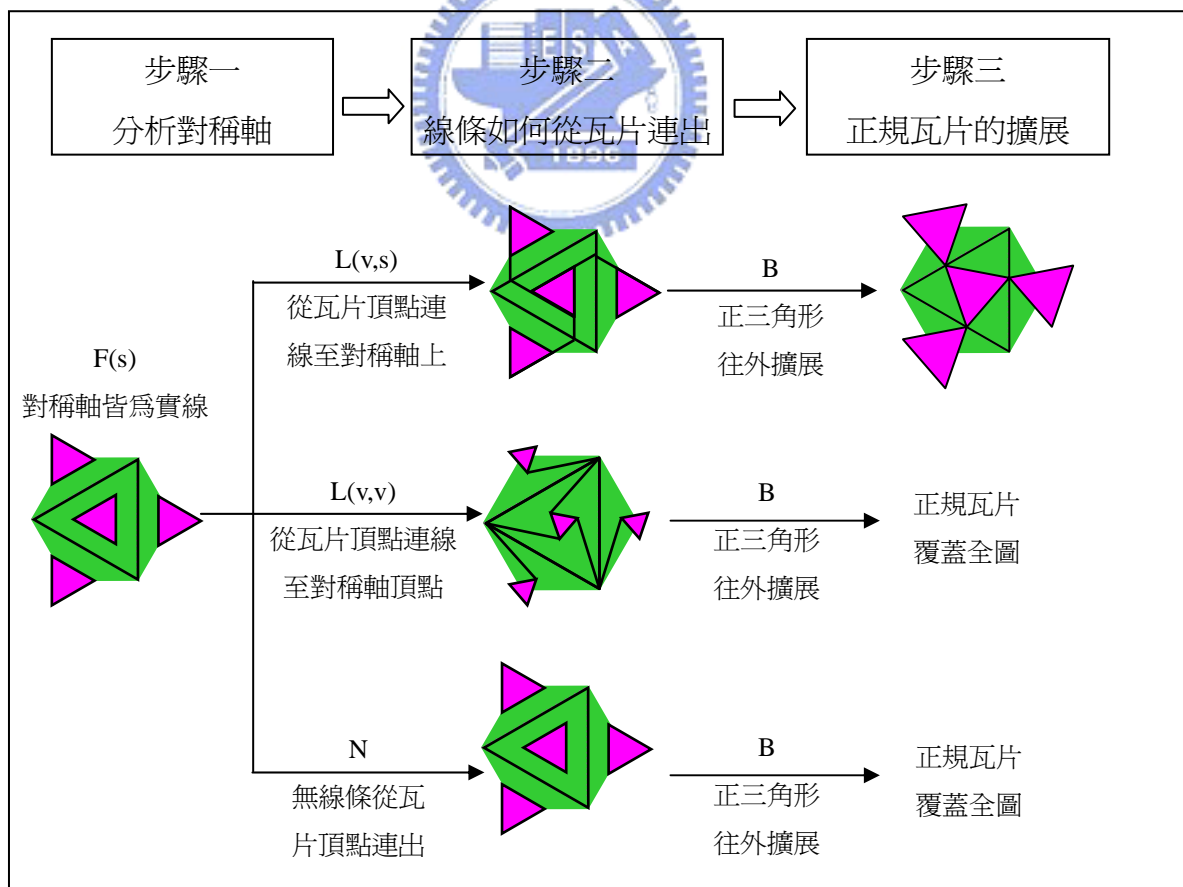


圖 5-3 p31mC 分析流程圖

在這邊要特別強調同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條一樣可以用折線或曲線連接，我們進一步將 p31mC 所有未擴展之基本單元列出，如表 5-2 所示，其符號之意義請參照表 5-3 符號對照表。

表 5-2 p31mC 所有未擴展之基本單元列表

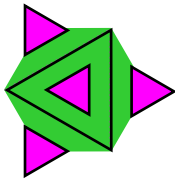
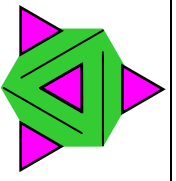
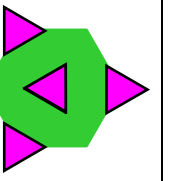
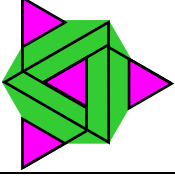
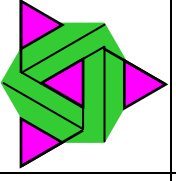
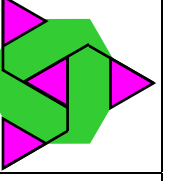
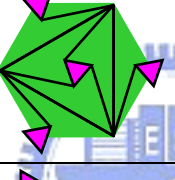
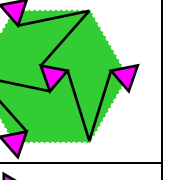

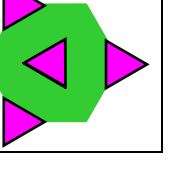
步驟一	F(s)	P(s)	N(s)
步驟二			
L(v,s)			
L(v,v)		無	
N		無	

表 5-3 p31mC 符號對照表

第一步驟(分析對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(線條如何從中央瓦片連出)符號介紹
(1) F(s)：對稱軸皆實線	(1) L(v,s)：線條從瓦片頂點連至對稱軸上
(2) P(s)：對稱軸有部分虛線	(2) L(v,v)：線條從瓦片頂點連至對稱軸頂點
(3) N(s)：對稱軸皆虛線	(3) N：無線條從瓦片頂點連出

接下來我們來看 p31mV 分析(如流程圖 5-4 所示)。另外，同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條的连接一樣可以用折線或曲線连接。

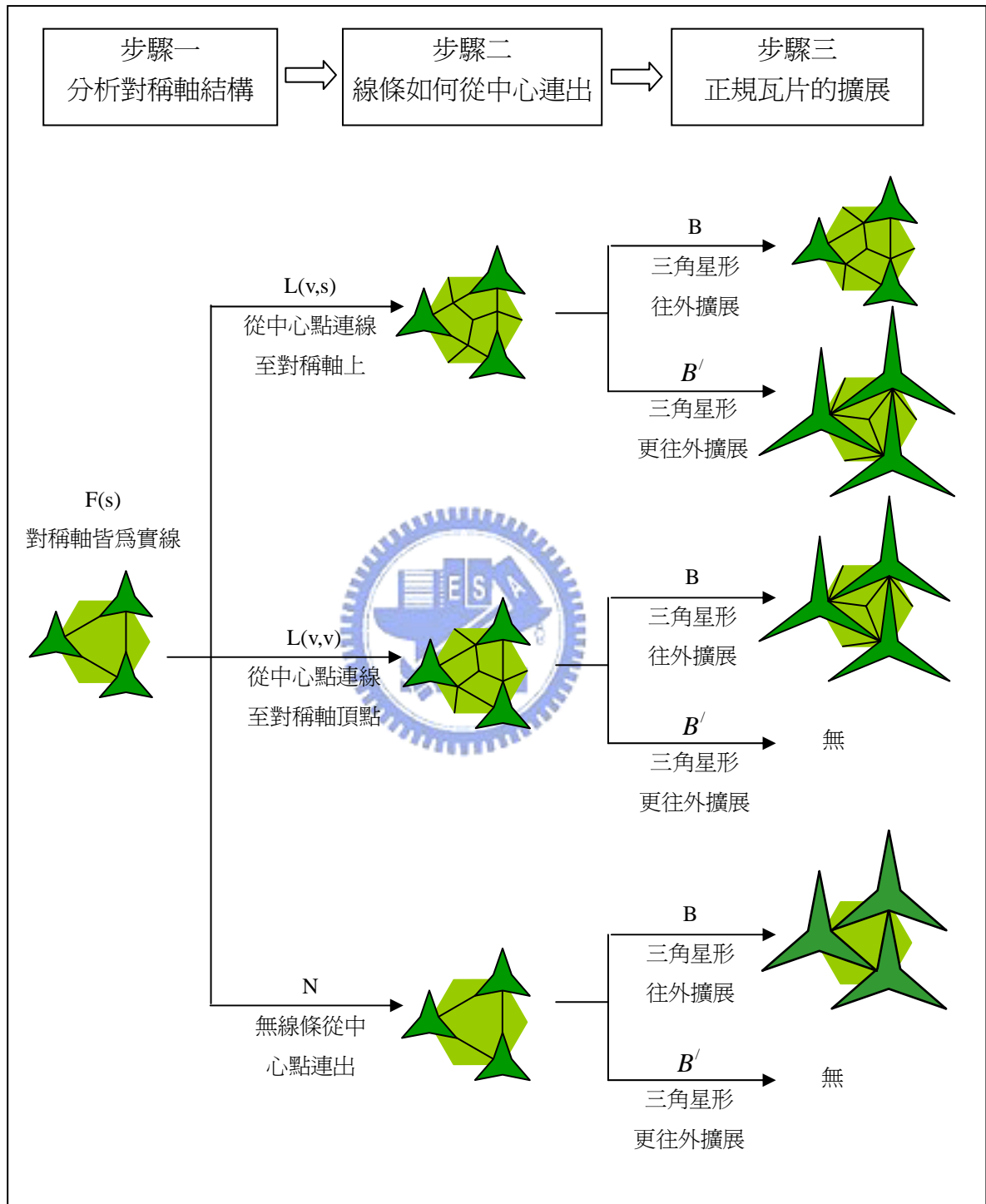


圖 5-4 p31mV 分析流程图

我們進一步將 p31mV 所有未擴展之基本單元列出，如表 5-4 所示，其符號之意義請參照表 5-5 符號對照表。

表 5-4 p31mV 所有未擴展之基本單元列表








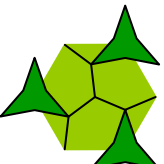


步驟一	F(s)	P(s)	N(s)
步驟二			
L(v,s)			
L(v,v)		無	
N		無	

表 5-5 p31mV 符號對照表

第一步驟(分析對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(線條如何從中心點連出)符號介紹
(1) F(s)：對稱軸皆實線	(1) L(v,s)：線條從中心點連至對稱軸上
(2) P(s)：對稱軸有部分虛線	(2) L(v,v)：線條從中心點連至對稱軸頂點
(3) N(s)：對稱軸皆虛線	(3) N：無線條從中心點連出

5-2 p4g 分析

首先，我們先對 p4g 結構作一解析(如圖 5-5 所示)，結構中虛線為鏡射軸，黑色正方形為四重旋轉中心，黑色菱形為二重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p4g 結構，正規瓦片結構可能為正方形(出現在圖 5-5 結構中四重旋轉處)或菱形(出現在圖 5-5 結構中鏡射軸交會處)。由 p4g 結構的對稱性，我們可以歸納出二種切法(如圖 5-6 所示)，其中切法一我們將它命名為「p4gC」，而切法二則將它命名為「p4gE_m」，接著，我們開始進一步分析 p4gC 及 p4gE_m 的對稱軸虛實以及線條如何連接。

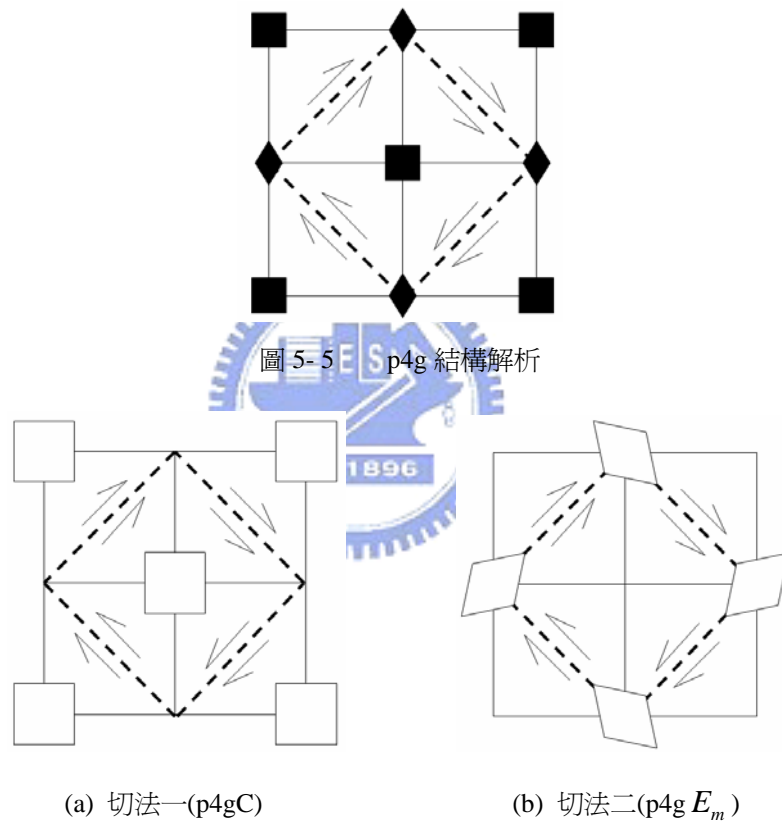


圖 5-5 p4g 結構解析

圖 5-6 p4g 的兩種可能切法

由於 p4gC 與 p4gE_m 分析方法相同，所以我們將它整理在一起，如下表 5-6 所示²；在步驟二中，p4gC 是考慮線條如何從中心的正規瓦片頂點連出，而 p4gE_m 則是考慮線條如何從結構中心點連出。底下我們分別用一例子作介紹，我們先看 p4gC 分析(如圖 5-7 所示)。

²在表 5-6 步驟三中標示星號「*」的部分(3)、(4)兩情況)為 p4gE_m 正規瓦片的擴展方式，而(2)則為 p4gC 的擴展方式。

表 5-6 p4gC 及 p4g E_m 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構
(1)對稱軸皆實線：F(s)
(2)對稱軸有部分虛線：P(s)
(3)對稱軸皆虛線：N(s)
↓
步驟二：線條如何從中央正規瓦片(中心點)連出
(1)從瓦片頂點(中心點)連至對稱軸上：L(v,s)
(2)從瓦片頂點(中心點)連至對稱軸頂點：L(v,v)
(3)無線條從瓦片頂點(中心點)連出：N
↓
步驟三：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B
* (3)菱形一邊擴展： B_1
* (4)菱形二邊擴展： B_2

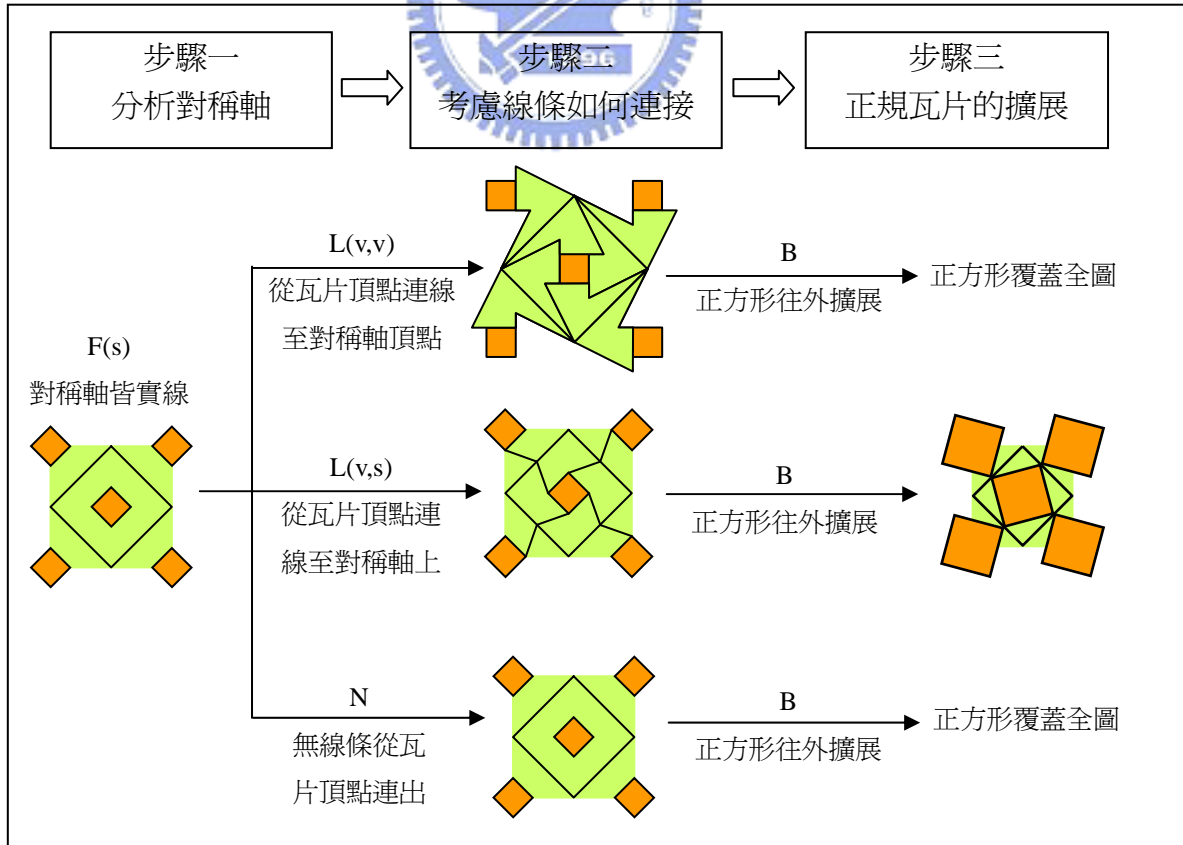


圖 5-7 p4gC 分析流程圖

我們進一步將 p4gC 所有未擴展之基本單元列出，如表 5-7 所示，其符號之意義請參照表 5-8 符號對照表。

表 5-7 p4gC 所有未擴展之基本單元列表

步驟一	F(s)	P(s)	N(s)
步驟二			
L(v,s)			
L(v,v)		無	
N		無	

表 5-8 p4gC 符號對照表

第一步驟(分析對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(線條如何從中央瓦片連出)符號介紹
(1) F(s)：對稱軸皆實線	(1) L(v,s)：線條從瓦片頂點連至對稱軸上
(2) P(s)：對稱軸有部分虛線	(2) L(v,v)：線條從瓦片頂點連至對稱軸頂點
(3) N(s)：對稱軸皆虛線	(3) N：無線條從瓦片頂點連出

接下來我們來看 $p4g E_m$ 分析(如流程圖 5-8 所示)。另外，同前 3-2 所述，線包含直線、折線、曲線，在這邊線條的連接一樣可以用折線或曲線連接。

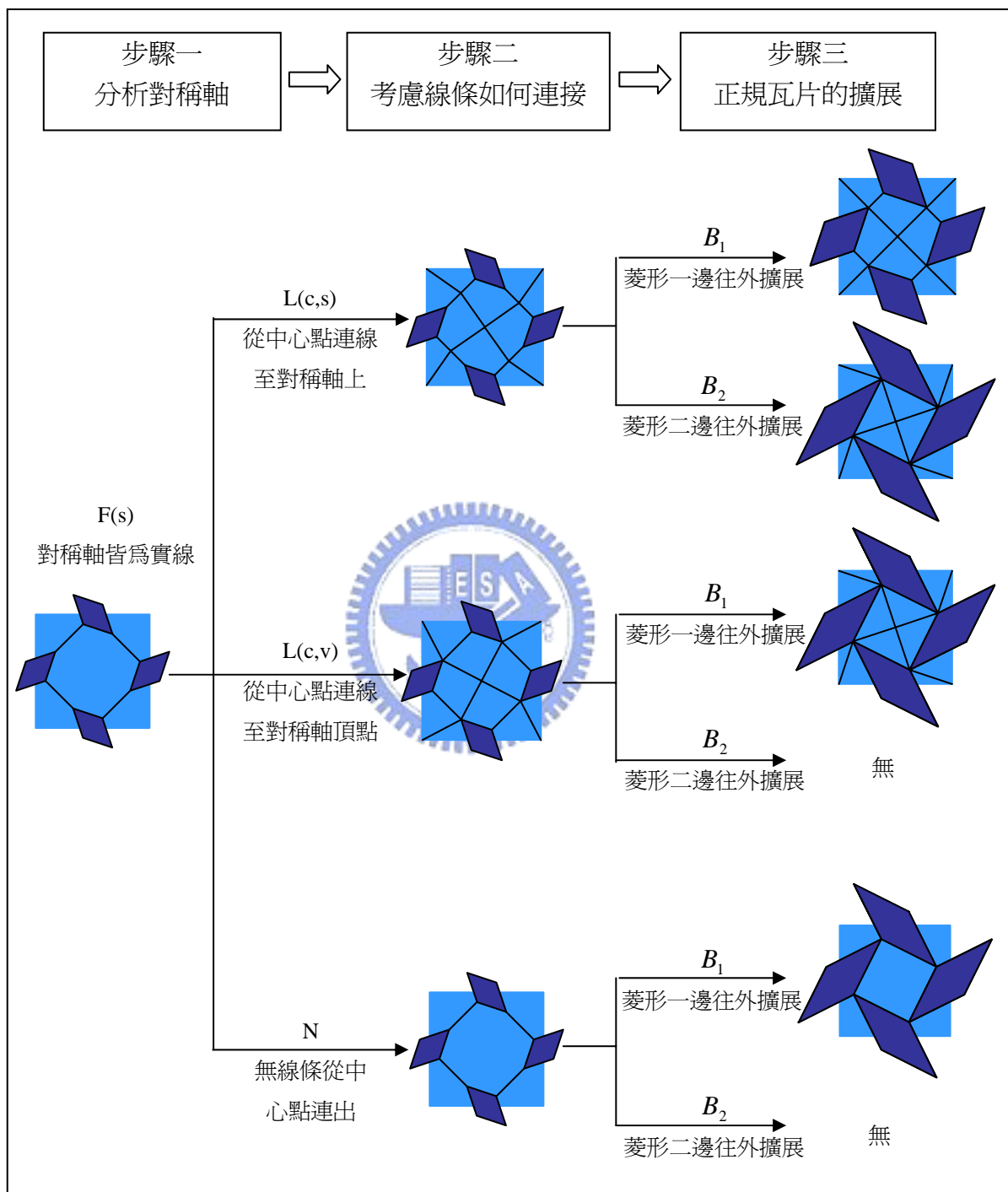


圖 5-8 $p4g E_m$ 分析流程圖

我們進一步將 $p4g E_m$ 所有未擴展之基本單元列出，如表 5-9 所示，其符號之意義請參照表 5-10 符號對照表。

表 5-9 $p4g E_m$ 所有未擴展之基本單元列表

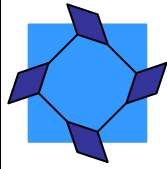
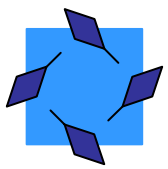
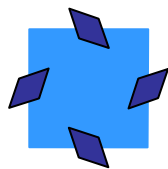
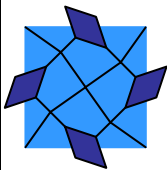
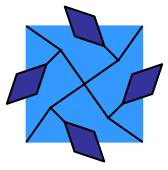
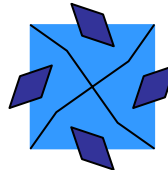
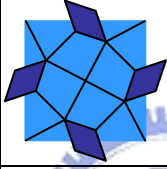
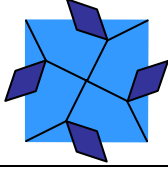
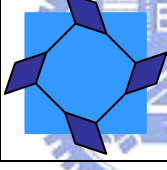
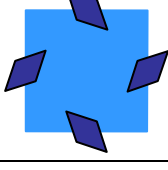
步驟一	F(s)	P(s)	N(s)
步驟二			
L(v,s)			
L(v,v)		無	
N		無	

表 5-10 $p4g E_m$ 符號對照表

第一步驟(分析對稱軸結構)符號介紹	第二步驟(線條如何從中心點連出)符號介紹
(1) F(s)：對稱軸皆實線	(1) L(v,s)：線條從中心點連至對稱軸上
(2) P(s)：對稱軸有部分虛線	(2) L(v,v)：線條從中心點連至對稱軸頂點
(3) N(s)：對稱軸皆虛線	(3) N：無線條從中心點連出

第六章 雙瓦片的等面鋪磚(p3m1、p4m、p6m)

6-1 p3m1 分析

首先，我們先對 p3m1 結構作一解析(如圖 6-1(a)所示)，結構中虛線為鏡射軸，黑色正三角形為三重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p3m1 結構，正規瓦片結構可能為三角星形(出現在圖 6-1(a)結構中三鏡射軸交會處)。為了方便做分析，我們將正規瓦片做標示(如圖 6-2(b)所示)，由於 p3m1 結構的對稱性，標示相同的正規瓦片必須同時出現或同時不出現，因此可以歸納出 7 種切法(如表 6-1 所示)。

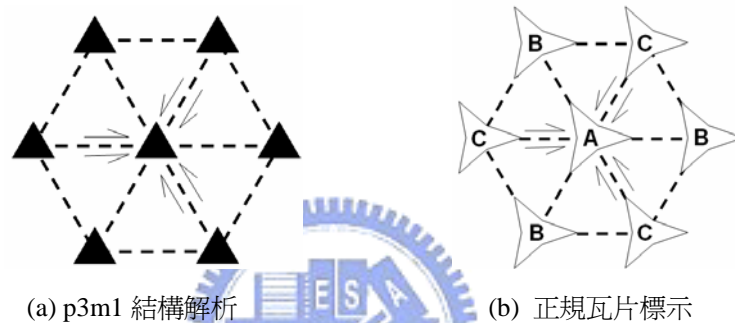


圖 6-1 p3m1 結構解析與正規瓦片標示

表 6-1 p3m1 的所有可能切法

切法	切法一(A)	切法二(B)	切法三(C)	
切法圖樣				
	此切法我們命為 p3C	結構同 A 處放置瓦片	結構同 A 處放置瓦片	
切法	切法四(AB)	切法五(AC)	切法六(BC)	切法七(ABC)
切法圖樣				
	1、2 兩處瓦片樣式不同	1、2 兩處瓦片樣式不同	1、2 兩處瓦片樣式不同	結構在 p31m 時已討論

在這七種切法中，其中切法二、切法三結構同切法一(如圖 6-2(a)所示)；而切法四、五、六中，因為在 $p3m1$ 結構中，局部小正三角形中不具有任何的旋轉對稱或鏡射對稱，因此結構中的 1、2 兩處正規瓦片樣式必然不同；而切法七將造成結構改變為 $p31m$ (如圖 6-2(b)之結構解析)，與前面 $p31m$ 分析重複討論，故我們只需分析切法一即可，而切法一我們將它命名為「 $p3m1C$ 」，其分析步驟如表 6-2 所示。在步驟一中，我們以序列(x,y,z)來表示局部正三角形三線段的虛實(x、y、z 的位置如圖 6-3 所示)，其中「F」表示該位置的線段為「實線(Full line)」，「N」則表示該位置的線段為「虛線(Null line)」。

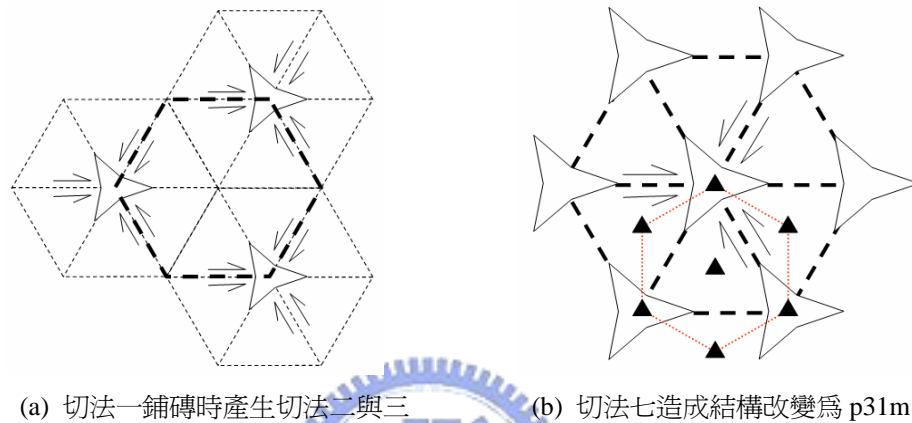


圖 6-2 同構說明與結構解析說明

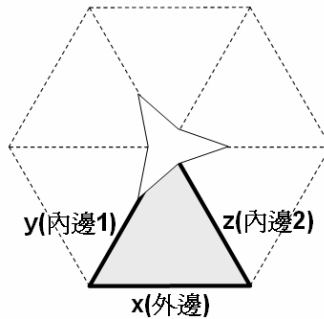


圖 6-3 符號位置圖

表 6-2 $p3m1C$ 分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構(外邊,內邊 1,內邊 2)
(1)三實線：(F,F,F)
(2)二實線：(F,F,N)、(F,N,F)、(N,F,F)
(3)一實線：(F,N,N)、(N,F,N)、(N,N,F)
(4)無實線：(N,N,N)



步驟二：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往外擴展：B

接下來我們來看 p3m1C 分析(如流程圖 6-4 所示)。我們也進一步將 p3m1C 所有未擴展之基本單元列出如表 6-3 所示。

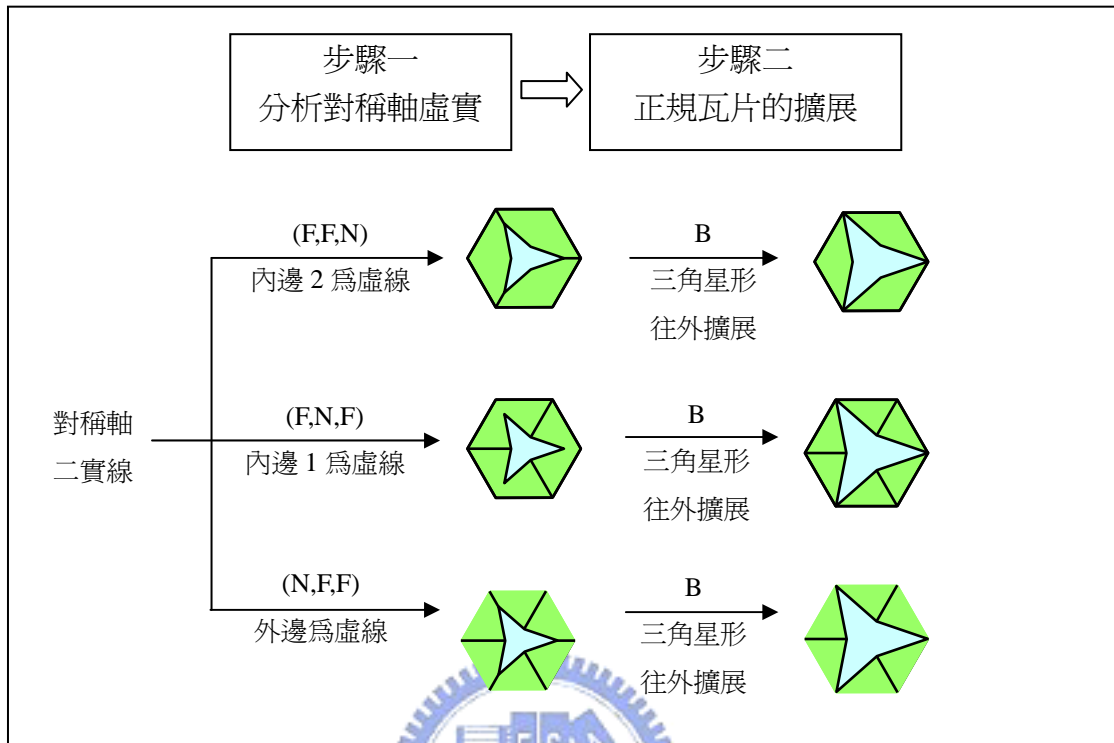


圖 6-4 p3m1C 分析流程圖

表 6-3 p3m1C 所有未擴展之基本單元列表

對稱軸虛實類別(外邊,內邊 1,內邊 2)			
F : 實線(Full line) ; N : 虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
(F,F,F)	(F,F,N)	(F,N,N)	(N,N,N)
	(F,N,F)	(N,F,N)	
	(N,F,F)	(N,N,F)	

6-2 p4m 分析

首先，我們先對 p4m 結構作一解析(如圖 6-5 所示)，結構中虛線為鏡射軸，黑色正方形為四重旋轉中心，黑色菱形為二重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p4m 結構，正規瓦片結構可能為四角星形(出現在圖 6-5 結構中四鏡射軸交會處)或菱形(出現在圖 6-5 結構中二鏡射軸交會處)。由於 p4m 結構的對稱性，我們可以歸納出 4 種切法(如圖 6-6(a)、(b)、(c)、(d)所示)，其中切法二結構同切法一(如圖 6-7(a)所示)，切法三由對稱性可以發現更小的 p4m 結構(如圖 6-7(b))，其結構同切法一，故切法二、三與切法一結構同切法一。而我們將切法一命名為「p4mC」，切法四則命為「p4mE_m」。

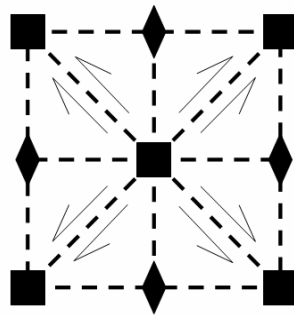
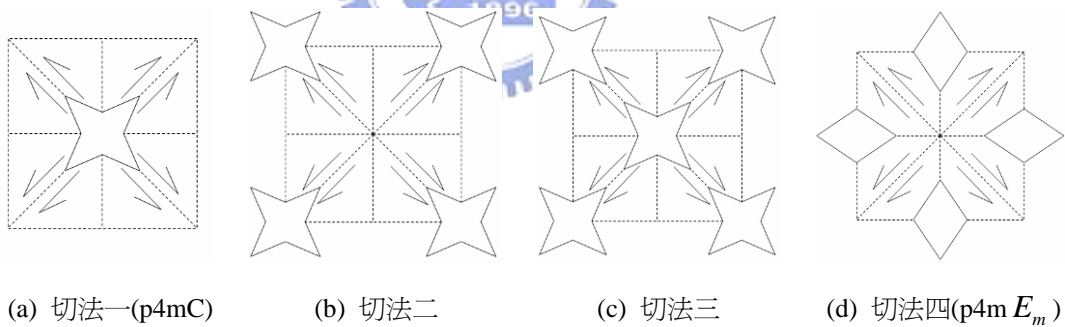
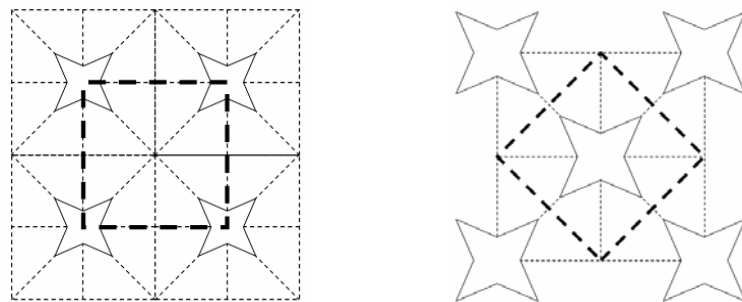


圖 6-5 p4m 結構解析



(a) 切法一(p4mC) (b) 切法二 (c) 切法三 (d) 切法四(p4mE_m)

圖 6-6 p4m 的四種切法



(a) 切法一鋪磚時產生切法二 (b) 切法三中可找到更小 p4m 結構(切法一)

圖 6-7 各種切法同構說明

接著，我們先來看 $p4mC$ 及 $p4mE_m$ 的分析，由於分析方法相同，故我們將它整理在一起(如表 6-4 所示)。在步驟一中，我們以序列(x,y,z)來表示局部等腰直角三角形三線段的虛實(x、y、z 的位置如圖 6-8 所示)，其中「F」表示該位置的線段為「實線(Full line)」，「N」則表示該位置的線段為「虛線(Null line)」。而在步驟二中， $p4mC$ 的擴展方式有(2)、(3)兩種， $p4mE_m$ 的擴展方式則為(3)、(4)兩種。

表 6-4 $p4mC$ 及 $p4mE_m$ 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構(外股,內股,斜邊)	
(1)三實線：(F,F,F)	
(2)二實線：(F,F,N)、(F,N,F)、(N,F,F)	
(3)一實線：(F,N,N)、(N,F,N)、(N,N,F)	
(4)無實線：(N,N,N)	
↓	
步驟二：正規瓦片的擴展	
(1)不作擴展：S	
(2)往邊中點擴展： B_{e_m} (for $p4mC$)	
(3)往頂點擴展： B_v (for $p4mC$ 、 $p4mE_m$)	
(4)往中心擴展： B_c (for $p4mE_m$)	

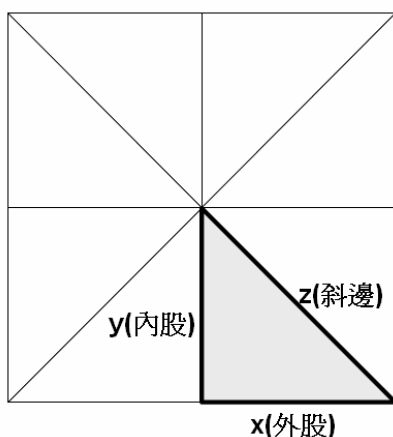


圖 6-8 符號位置圖

底下各舉一例來做說明 $p4mC$ 及 $p4mE_m$ 的分析，(如圖 6-9 及圖 6-10 所示)。

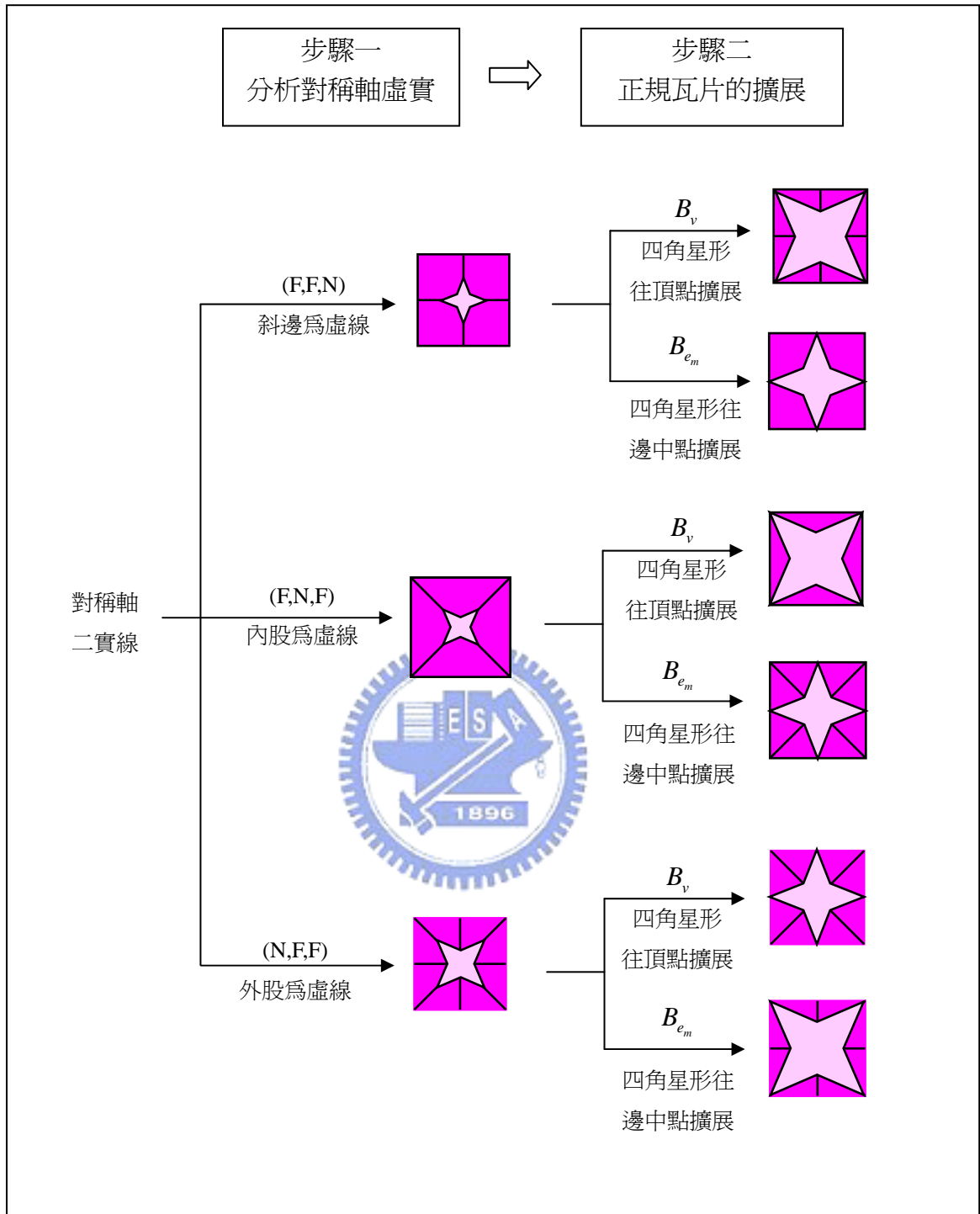


圖 6-9 p4mC 分析流程圖

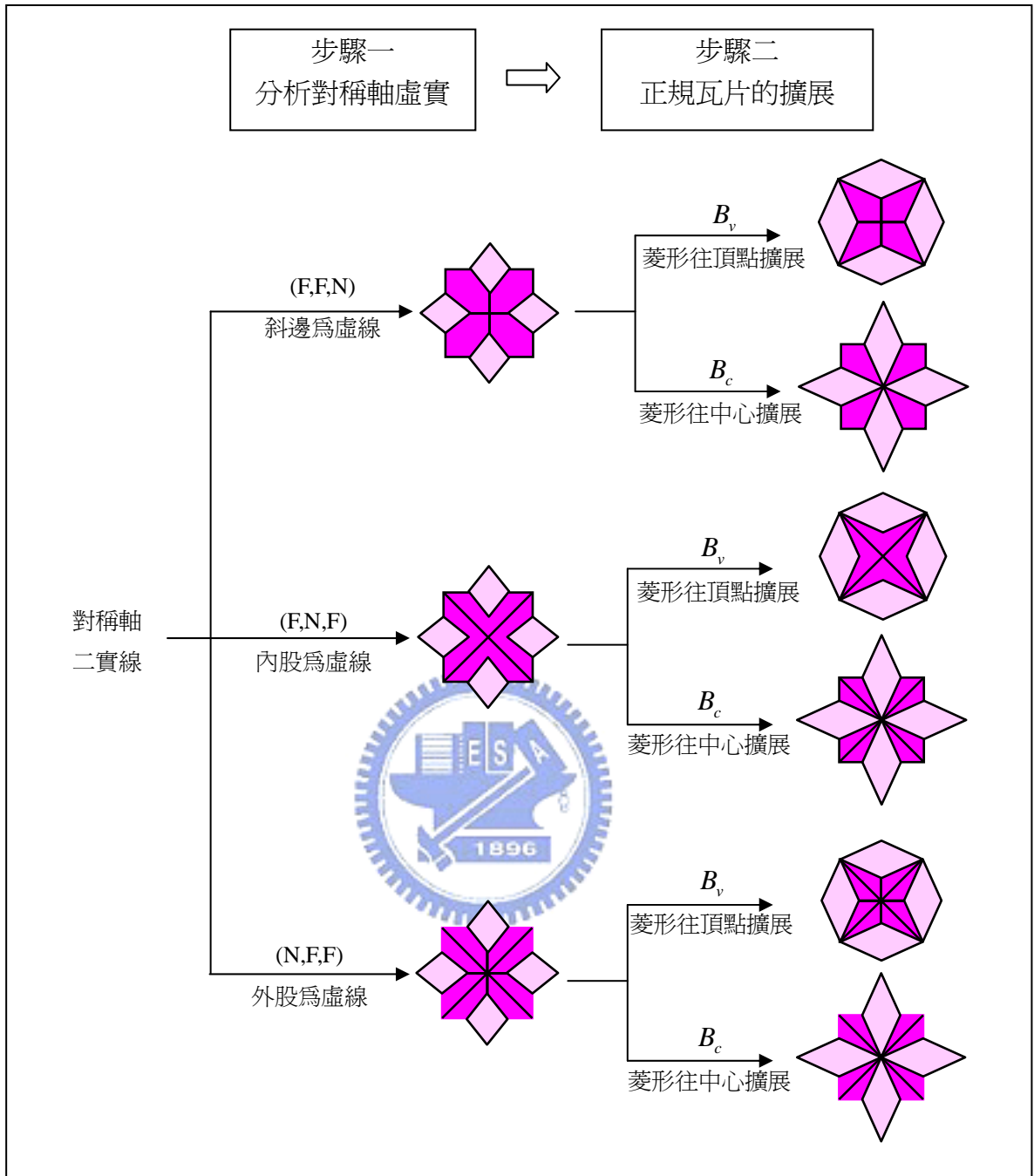


圖 6-10 $p4m E_m$ 分析流程圖

我們也進一步將 $p4mC$ 及 $p4mE_m$ 所有未擴展之基本單元列出，分別如表 6-5 及表 6-6 所示。

表 6-5 $p4mC$ 所有未擴展之基本單元列表

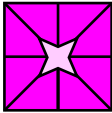
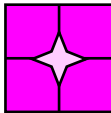
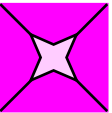
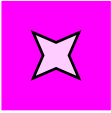
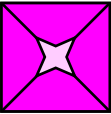
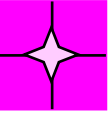

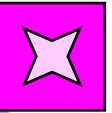
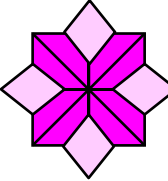
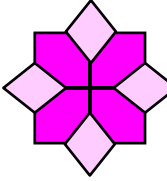
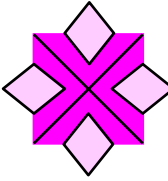
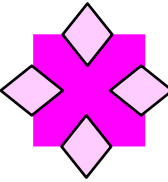
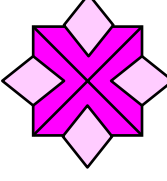
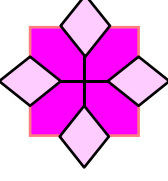
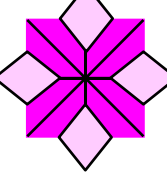
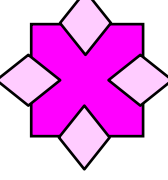
對稱軸虛實類別(外股,內股,斜邊)			
F : 實線(Full line) ; N : 虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
 (F,F,F)	 (F,F,N)	 (N,N,F)	 (N,N,N)
	 (F,N,F)	 (N,F,N)	
	 (N,F,F)	 (F,N,N)	

表 6-6 $p4mE_m$ 所有未擴展之基本單元列表

對稱軸虛實類別(外股,內股,斜邊)			
F : 實線(Full line) ; N : 虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
 (F,F,F)	 (F,F,N)	 (N,N,F)	 (N,N,N)
	 (F,N,F)	 (N,F,N)	
	 (N,F,F)	 (F,N,N)	

6-3 p6m 分析

首先，我們先對 p6m 結構作一解析(如圖 6-11 所示)，結構中虛線為鏡射軸，黑色菱形為二重旋轉中心，黑色正三角形為三重旋轉中心，黑色正六邊形為六重旋轉中心(如前面章節 1-4 中表 1-1 所示)。由於正規瓦片必須具備三重旋轉或二次鏡射以上；概觀 p6m 結構，正規瓦片結構可能為六角星形(出現在圖 6-11 結構中六鏡射軸交會處)或三角星(出現在圖 6-11 結構中三鏡射軸交會處)或菱形(出現在圖 6-11 結構中二鏡射軸交會處)。由於 p6m 結構的對稱性，我們可以歸納出 3 種切法(如圖 6-12(a)、(b)、(c)所示)，我們將切法一命名為「p6mC」，切法二則命為「p6mV」，而切法三則命為「p6mE_m」。

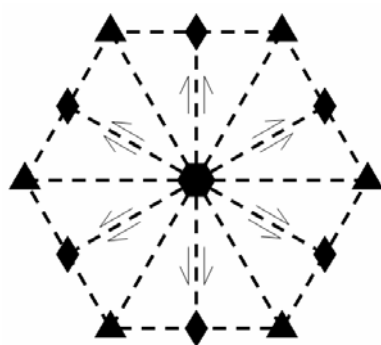
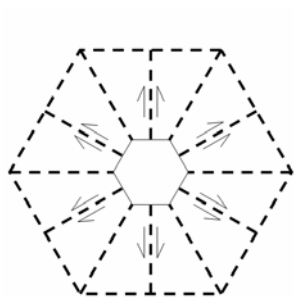
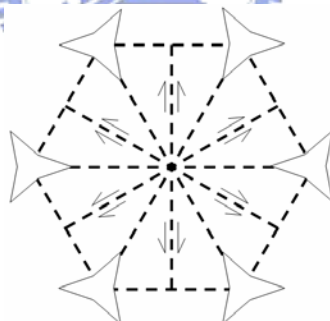


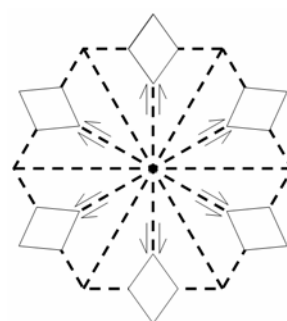
圖 6-11 p6m 結構解析



(a) 切法一(p6C)



(b) 切法二(p6V)



(c) 切法三(p6E_m)

圖 6-12 p6m 的三種切法

接著，我們先來看 p6mC、p6mV 及 p6mE_m 的分析，由於分析方法相同，故我們將它整理在一起(如表 6-7 所示)。在步驟一中，我們以序列(x,y,z)來表示局部直角三角形三線段的虛實(x、y、z 的位置如圖 6-13 所示)，其中「F」表示該位置的線段為「實線(Full line)」，「N」則表示該位置的線段為「虛線(Null line)」。而在步驟二中，p6mC 的擴展方式有(2)、(3)兩種，p6mV 擴展方式則有(3)、(4)兩種，而 p6mE_m 的擴展方式也是(3)、(4)兩種。

表 6-7 $p6mC$ 、 $p6mV$ 及 $p6mE_m$ 的分析步驟與符號列表

步驟一：分析對稱軸結構(外股,內股,斜邊)
(1)三實線：(F,F,F)
(2)二實線：(F,F,N)、(F,N,F)、(N,F,F)
(3)一實線：(F,N,N)、(N,F,N)、(N,N,F)
(4)無實線：(N,N,N)



步驟二：正規瓦片的擴展
(1)不作擴展：S
(2)往邊中點擴展： B_{e_m} (for $p6mC$)
(3)往頂點擴展： B_v (for $p6mC$ 、 $p6mV$ 、 $p6mE_m$)
(4)往中心擴展： B_c (for $p6mV$ 、 $p6mE_m$)

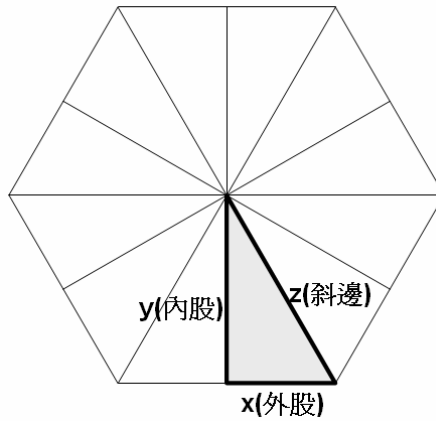


圖 6-13 符號位置圖

底下各舉一例來做說明 $p6mC$ 、 $p6mV$ 及 $p6mE_m$ 的分析，(如圖 6-14、圖 6-15 及圖 6-16 所示)。

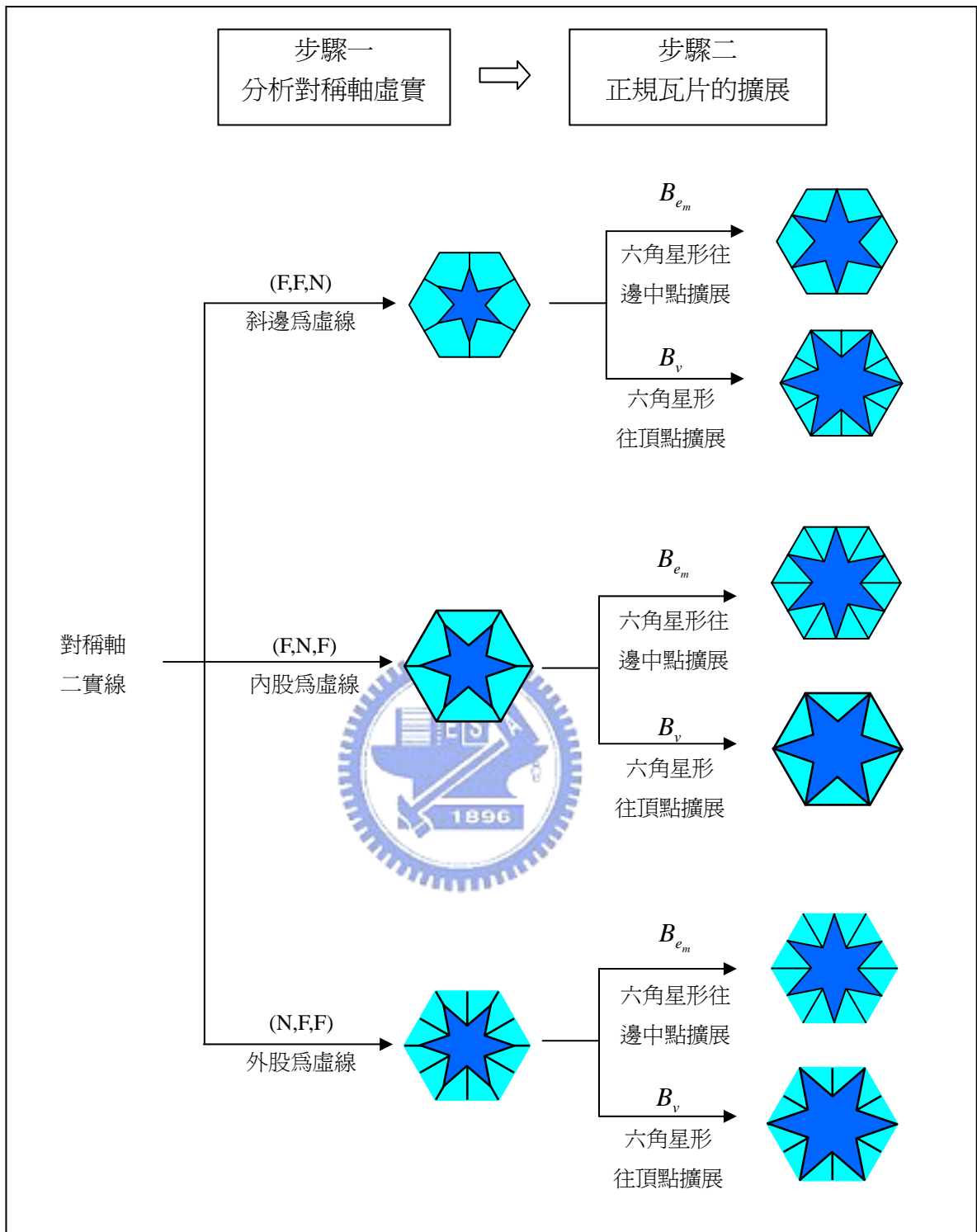


圖 6-14 p6mC 分析流程圖

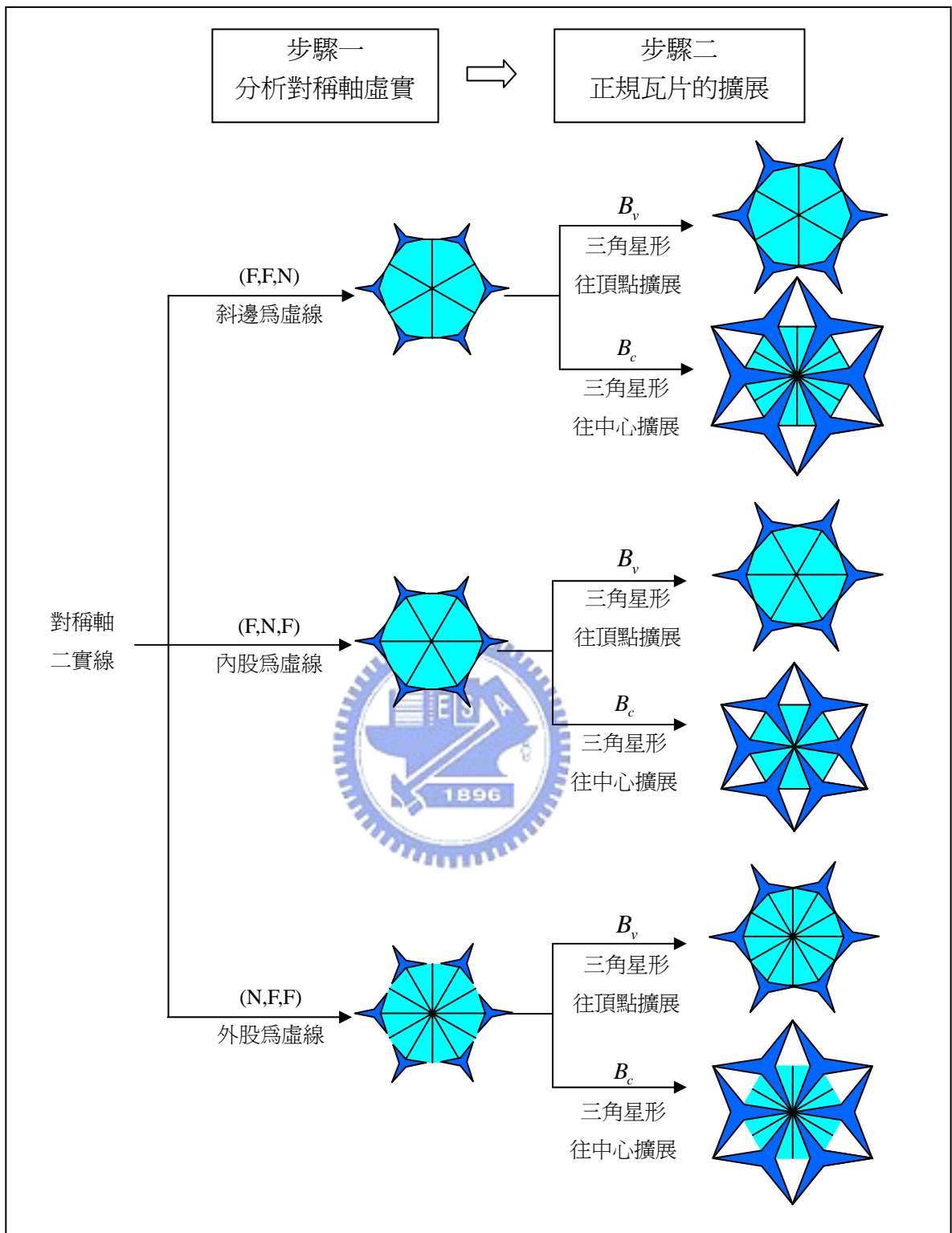


圖 6-15 p6mV 分析流程圖

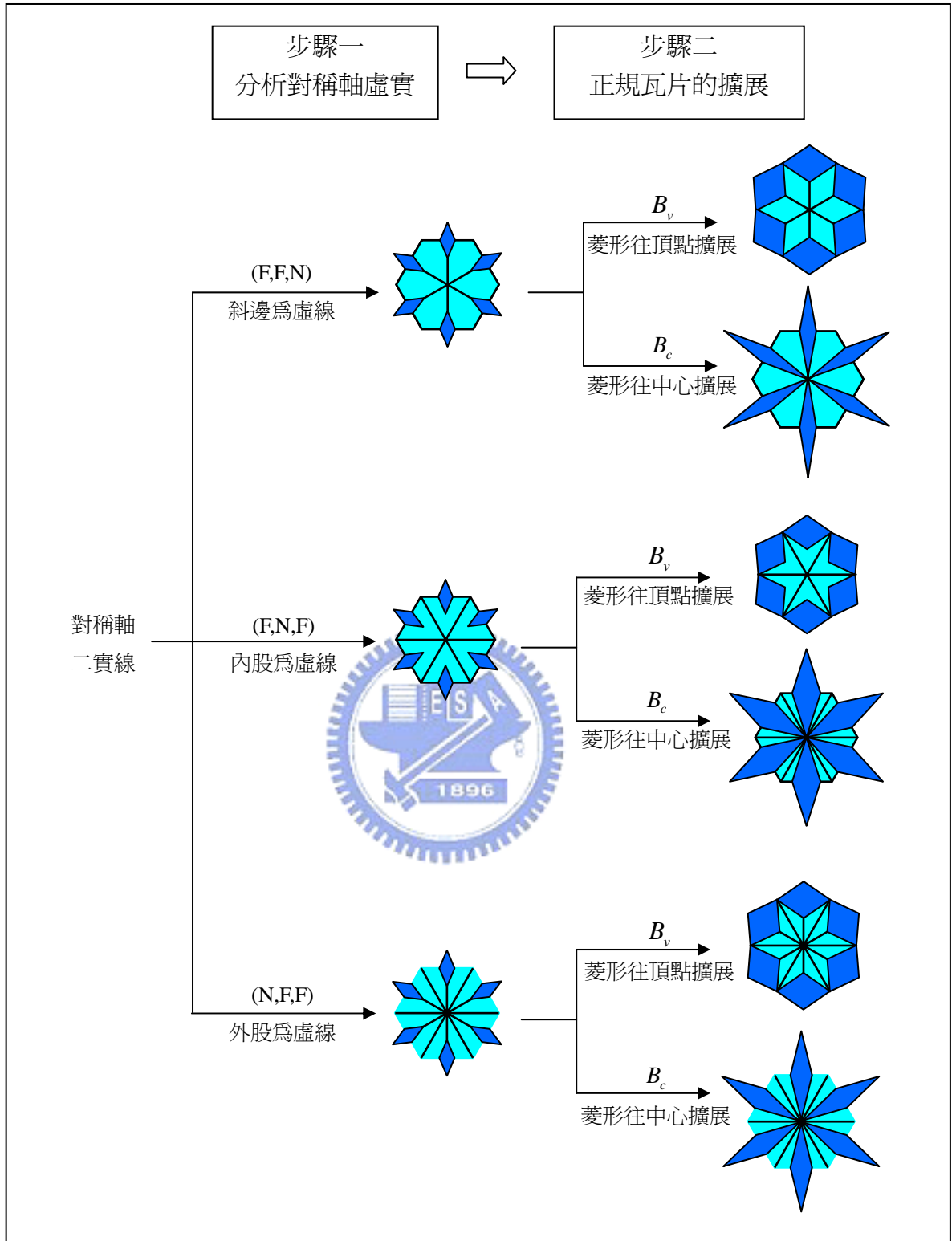


圖 6-16 $p6m E_m$ 分析流程圖

我們也進一步將 $p6mC$ 、 $p6mV$ 及 $p6mE_m$ 所有未擴展之基本單元列出，分別如表 6-8、表 6-9 及表 6-10 所示。

表 6-8 $p6mC$ 所有未擴展之基本單元

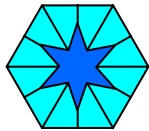
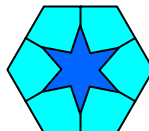

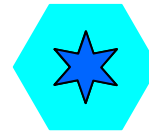
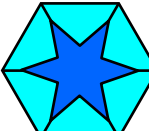
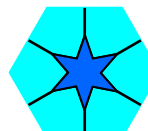


對稱軸虛實類別(外股,內股,斜邊)			
F：實線(Full line)；N：虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
 (F,F,F)	 (F,F,N)	 (N,N,F)	 (N,N,N)
	 (F,N,F)	 (N,F,N)	
	 (N,F,F)	 (F,N,N)	

表 6-9 $p6mV$ 所有未擴展之基本單元

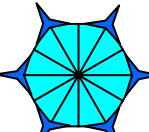
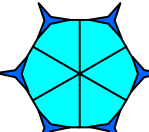
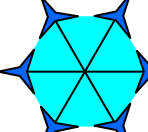
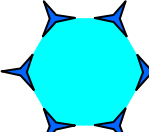
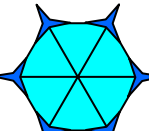
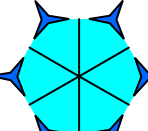
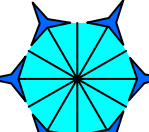
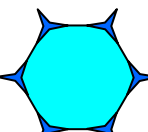
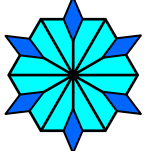




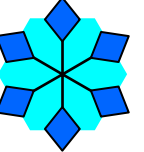
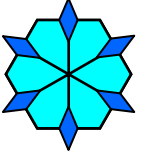

對稱軸虛實類別(外股,內股,斜邊)			
F：實線(Full line)；N：虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
 (F,F,F)	 (F,F,N)	 (N,N,F)	 (N,N,N)
	 (F,N,F)	 (N,F,N)	
	 (N,F,F)	 (F,N,N)	

表 6-10 $p6m E_m$ 所有未擴展之基本單元

對稱軸虛實類別(外股,內股,斜邊)			
F : 實線(Full line) ; N : 虛線(Null line)			
三實線	二實線	一實線	無實線
 (F,F,F)	 (N,F,F)	 (N,N,F)	 (N,N,N)
	 (F,N,F)	 (N,F,N)	
	 (F,F,N)	 (F,N,N)	



在第三、四、五、六章中，我們分析了這 147 種雙瓦片的等面鋪磚的結構，以設計基本單元的理念來建構雙瓦片的等面鋪磚，在下一章節中，我們將介紹如何運用數學簡報系統(MathPS)，來快速複製、確實精準的掌握大量物件的製圖方法。

