

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

課堂多媒體教材製作與教學運用研究
— 以全等作圖與證明為例

A Study on Multimedia Teaching Material Design and It' s
Applications
- The Construction and Proofs of Congruent Triangles

研究生：李政憲

指導教授：陳明璋 教授

中華民國九十六年十二月

課堂多媒體教材製作與教學運用研究－以全等作圖與證明為例
A Study on Multimedia Teaching Material Design and It' s Applications
- The Construction and Proofs of Congruent Triangles

研 究 生：李政憲

Student：Jen-Shian Li

指 導 教 授：陳明璋

Advisor：Ming-Jang Chen

國 立 交 通 大 學
理 學 院 網 路 學 習 學 程
碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Degree Program of E-Learning

College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

December 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年十二月

課堂多媒體教材製作與教學運用研究

—以全等作圖與證明為例

學生：李政憲

指導教授：陳明璋 博士

國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班

摘要

國中有關全等作圖及部份證明的幾何課程於 2007 年自九年級調整至八年級下學期，使得數學科教師在時間上的安排有所不足，無法在有限的時間作最有效的教學。然而此部份的學習，將是其幾何思考層次是否得以提昇，並影響其後續相關證明及幾何運算的重要關鍵。是故一套有系統的教材及有效的教學方式，對於教師及學生兩者，都是極其重要的。

本研究從認知心理學出發，探討視知覺理論與學習的關係，並研究記憶與訊息處理的模式；再根據多媒體學習理論及教材設計原則，就課本內容及教學目標、能力指標，分析應具備的數學知識與解題能力，利用 PowerPoint 配合 MathPS 軟體，設計完整的全等三角形教學素材。再透過小組試教、大班教學及專家評鑑等方式，確認教材可行性與學生的接受度，期間並依相關理論及學生反應及教師所給予的意見分別製作了不同的版本，並加以比較不同版本的前後的差異性及進步。期待這一份完整的幾何教材，能夠提供有意願的教師使用，使學生的學習更加順遂。

A Study on Multimedia Teaching Material Design and It's Applications – The Construction and Proofs of Congruent Triangles

Student : Jen-Shian Li

Advisors : Dr. Ming-Jang Chen

Degree Program of E-Learning
National Chiao Tung University

Abstract

In 2007, the teaching on congruent figures and partial proofs of the geometry subject was moved to the 2nd semester of eighth grade instead of ninth grade in the junior high school. This change, henceforth, has brought about insufficient preparation time for teachers of mathematics and also made it very challenging to provide effective teaching in a limited amount of time. Mastering this concept is critical for students in advancing their level of reasoning in geometry, as well as their follow-up ability in relevant proofs and geometric operation. Thus, a set of systematic teaching materials and effective teaching methods, very important for both teachers and students, were devised for this course.

This study, proceeding from cognitive psychology, explored the relation between the theory of visual perception and learning. It also researched the models of memory and information processing. In addition, it incorporated the multi-media learning strategies and the design principles of math teaching materials in the context of a whole textbook and also focused on the course objectives and ability indexing. The vehicle was through the use of the PowerPoint and MathPS software applications to analyze and assess student feedback in mathematical knowledge and their abilities in solving the problems. As a result, a complete set of materials for teaching congruent triangles was developed.

The materials have been validated at least by three methods, such as being used to teach in small groups, then in full-size classes. Math experts also evaluated it. All measures were taken to ensure that the teaching materials were feasible for teachers, with high level of acceptance from students. Several different revisions of the materials have been made and tested in accordance with relevant theories, student feedback, and suggestions from the teachers during the study.

Moreover, among revisions, comparisons were made as far as the differences and student progress. We sincerely expect the new and complete geometry teaching materials will not only offer great help to the teachers, but also make students learn with great ease and enjoyment.

誌 謝

在口試完畢後，心中總算是鬆了口氣。

專班兩年半的研究，首先要感謝的是陳明璋老師的一路提攜，從研究方向的指引與確定，到相關文獻的探討建議，以及在專業技術上的指導提昇，讓自己以後在製作教材與課堂教學，有了初步概念與設計準則；並能不離不棄地忍受我更換題目，以及對我研究進度緩慢所給予的包容與鼓勵。其次是口試時給予寶貴意見的袁媛教授及陳永富主任，其中袁媛教授更提供了呈現及評鑑的具體方式，讓自己的研究更臻完善。加上 Informath 研究團隊及專班同學於每次的 meeting 及教材製作、論文研討相關課程，讓教材呈現更加成熟，這兩年來自己真是獲益菲淺。

然而研究的路程艱辛，所幸家中有兩位最偉大的女人給予支持。家母及內人韻竹，打理家中一切事務，並協助照顧孩子；加上我的岳父岳母也提供了經濟的與時間的支援，讓自己無後顧之憂，並在受挫停滯給予鼓勵鞭策，得以順利完成這份論文。而每當幾天沒注意再看到孩子們的成長，或是夜深人靜看著兩個寶貝熟睡的面孔，都是為自己的研究再次注入一劑強心針。

在專班一面讀書研究，一方面要顧及學校的課程與班級，還要感謝的是校長許靜雄先生、劉義龍主任、蘇瑞泉主任及相關處室同仁的支持。從排課的需求，到班級管理的協助，都使得自己能夠更專心於研究與寫作；而最後論文完成以及口試前，兆晉主任的建議與協助列印裝訂，也讓自己再次感受到校內人情味的溫馨。至於協助施教與評鑑的學生及校內同事，讓自己辛苦完成的教材得以完整呈現，並加以修改確認可行性。特別要感謝的是七位額外利用放學後留校試教的同學們，有了你們打前鋒，後面同學的學習也因此更加順遂。

最後要感謝的是初稿完成後，協助訂正建議的學長貽隆、進福、柏奇，以及學校的同事樹文及士禹；還有遠在美國教書的姑姑 Linda 以及學校的翠苓老師，協助自己完成英文摘要，以及一同作研究相互打氣的慶利與煜庭。有了你們的指教與幫助，讓自己在不足的地方得以補強，也有了繼續研究的方向。

幫助我的人太多，在此謹以此些微的篇幅略作感謝。回想這八百多個日子，三不五時在圖書館從早到晚上的寫作，在學校打著蚊子，與警衛比較誰晚熄燈的生活即將過去；然而這一切的回憶，卻不是個結束，而是我教學生涯另一個里程碑的開始。衷心希望有心從事教材製作，或是要提昇教學效能的教師們參考研究相關文獻以及我們團隊所研發的軟體，期待對大家能有所助益。至於倉促付梓、有所訛誤自然在所難免，還請研讀此論文的同好們不吝批評指教。

政憲 於 林口 2007,12,30. jenshian@yahoo.com.tw

目 錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
目錄.....	iii
表目錄	vii
圖目錄	viii
第一章 緒論.....	1
1-1 研究背景	1
1-2 研究動機與研究目的.....	2
1-3 研究工具與方法.....	3
1-4 研究範圍與限制.....	5
第二章 文獻探討.....	7
2-1 認知心理學	7
2-1-1 認知心理學的內容與代表學說.....	7
2-1-2 認知心理學名詞釋義.....	9
2-1-3 認知心理學與本研究的相關探討	12
2-1-4 建構主義與本研究的相關性	14
2-2 注意力與學習的訊息處理	18
2-2-1 訊息處理與記憶	18
2-2-2 注意力、遺忘與訊息處理學習論	22
2-2-3 訊息處理學習論在教學上的應用	23
2-3 基模、類比遷移及相關應用	28
2-3-1 基模與類比遷移	28
2-3-2 類比遷移的相關理論	30
2-3-3 類比遷移在本研究中的應用	31
2-4 多媒體學習(Multimedia Learning)理論.....	33
2-4-1 多媒體的元素與呈現方式與組成特性.....	33
2-4-2 知識庫的組成特性	34

2-4-3 數位化呈現的優缺點	35
2-4-4 課堂式數位教材與一般數位教材的差異性.....	37
2-4-5 限制與解決之道.....	39
2-5 教材設計原則	42
第三章 國中數學幾何全等教材.....	46
3-1 數學能力與幾何思考的發展層次	46
3-1-1 數學上的視覺與言辭符號.....	46
3-1-2 數學能力與基模	50
3-1-3 幾何思考的發展層次與數學分類能力的發展.....	52
3-2 全等教材的結構探討	55
3-2-1 全等教材的內容說明	55
3-2-2 課程內容與能力指標.....	57
3-2-3 數學知識的種類與全等教材的關係.....	63
3-2-4 動機、解題能力與全等教材的關係.....	66
3-3 傳統教學與數位教學的落差比較	68
第四章 國中數學數位幾何教材製作.....	71
4-1 全等概念的引進與性質說明	71
4-1-1 設計理念與教材說明	71
4-1-2 教材與相關理論的綜合討論	79
4-1-3 教材前後期差異性探討	81
4-2 全等性質的作圖	83
4-2-1 設計理念與教材說明	83
4-2-2 教材與相關理論的綜合討論	94
4-2-3 教材前後期差異性探討	96
4-3 全等性質的應用	98
4-3-1 設計理念與教材說明	98
4-3-2 教材與相關理論的綜合討論	107
4-3-3 教材前後期差異性探討	108

4-4 教材與理論結合綜合探討	111
4-4-1 教材設計的自我成長	111
4-4-2 全等教材的設計製作	116
4-4-3 數學幾何教材設計的考量與製作	117
第五章 教材的試教、施測與評鑑	121
5-1 教材的試教與修正	121
5-1-1 參與學生分析	121
5-1-2 實際施作情形	121
5-1-3 遭遇問題與教材修正	123
5-2 教材的實際教學	125
5-2-1 參與學生分析	125
5-2-2 實際施作情形	125
5-2-3 遭遇問題與教材修正	130
5-3 專家評鑑教材	132
5-3-1 教材問卷說明	132
5-3-2 評鑑結果分析	132
5-4 施測、評鑑後的問題探討	135
第六章 結論、建議與展望	136
6-1 結論	136
6-2 檢討與建議	138
6-3 展望	140
參考文獻	141
中文部分	141
英文部分	142
附件(一)	143
附件(二)	146
附件(三)	148
附件(四)	151

附件(五).....	152
附件(六).....	154
附件(七).....	155
附件(八).....	158
附件(九).....	159

表 目 錄

表 2-1：三類記憶的差異	22
表 2-2：新舊學習的抑制與助長	22
表 2-3：兩種類比推理的測量形式比較	29
表 2-4：各項知識庫組成特性	34
表 2-5：學習者/教師授課不同導向之媒體教材特質比較	38
表 3-1：視覺與言辭符號的區別	50
表 3-2：全等教材的原始與實際教學時數比較	58
表 3-3：全等教材原始內容與實際設計內容參照	61
表 3-4：傳統教學與資訊融入教學比較	68
表 4-1：「全等概念的引進與性質說明」與本研究相關理論相關性	79
表 4-2：「全等性質的作圖」與本研究相關理論相關性	95
表 4-3：「全等性質的應用」與本研究相關理論相關性	107
表 4-4：「幾何教材製作」與「FRSBIE」教學模組異同處	120
表 5-1：全等教材試教試題前後完成比率	122
表 5-2：「全等性質作圖」學生完成度	126
表 5-3：「專家評鑑問卷」統計結果表	133

圖目錄

圖 1-1：研究架構圖	4
圖 2-1：學習結果的四個向度	8
圖 2-2：知覺歷程	9
圖 2-3：基模歸納組之目標結構圖	10
圖 2-4：教師創造問題情境：「三角形全等的條件」	11
圖 2-5：整合相關類型產生的性質：「三角形全等性質的基本分類」	13
圖 2-6：不同基模思考產生的差異結果：「三角形全等性質的應用」	14
圖 2-7：課程教授之重心：「三角形全等性質的介紹」	16
圖 2-8：透過熟悉經驗與設定情境：「SSS 性質作圖」	16
圖 2-9：挖掘學習者的想法：「數位化釘板的配合使用」	16
圖 2-10：幫助學習者發展概念：「『全等』與『對應』」	17
圖 2-11：反思過程－檢驗想法及證據：「SAS 全等性質作圖」	17
圖 2-12：反思過程－減少教學策略與學習者的想法之間的衝突與落差：「SSA 性質作圖」	17
圖 2-13：訊息處理心理歷程圖示	18
圖 2-14：記憶至回憶的歷程	20
圖 2-15：艾賓豪斯遺忘曲線	22
圖 2-16：訊息重點的標示：「SAS 全等性質說明」	23
圖 2-17：提示概念之間的關係：SSA 全等特例	25
圖 2-18：運用具體方式呈現抽象概念：線段垂直平分線性質	26
圖 2-19：編碼時圖文與回憶時有效的檢索：角平分線性質證明的圖文引導	26
圖 2-20：建立必備的知識或引發恰當知識，作為了解與記憶新學習之基礎：三角形全等性質的對應練習	26
圖 2-21：新舊教材之間的銜接：角平分線作圖的證明	27
圖 2-22：精緻化的編碼使教材意義化：等腰三角形的性質證明	27
圖 2-23：強調教材的重要部分：AAS 全等性質的作圖說明	27
圖 2-24：知識基模建構的歷程	31
圖 2-25：文字的標記強調：「全等性質的作圖」	33
圖 2-26：圖形、文字與動畫的搭配使用：「全等性質的證明」	34
圖 2-27：互動式按鈕的設計：「全等性質的作圖整合版」	39
圖 2-28：全等教材之層次性	41
圖 2-29：全等教材之對比性	41
圖 2-30：全等教材之比較性	42
圖 2-31：全等教材之定位性	42
圖 2-32：全等教材之演化性	43
圖 2-33：全等教材之結構性	43

圖 2-34：全等教材之步驟性	43
圖 2-35：全等教材之關連性	44
圖 2-36：全等教材之互動性	44
圖 2-37：全等教材之隨機性	45
圖 3-1：視覺符號的幫助：「全等性質的概念應用」	46
圖 3-2：視覺的動態呈現與及時運算：「直角三角形兩股中垂線特性」	48
圖 3-3：符號的適當使用：「三角形全等性質的應用」	48
圖 3-4：透過圖形說明圖形的證明與逆證明：「等腰三角形的性質證明」	49
圖 3-5：透過圖形動畫作邏輯論證：「角平分線的性質證明」	49
圖 3-6：廣泛性問題解決策略的應用：「垂直平分線的性質證明」	64
圖 3-7：促進基本技能之自動化教學：「三角形全等性質的介紹」	65
圖 3-8：提昇學習動機(1)：生活的聯結.....	66
圖 3-9：提昇學習動機(2)：先備知識的提醒.....	66
圖 3-10：提昇學習動機(3)：循序式證明.....	67
圖 3-11：提昇學習動機(3)：填充式證明.....	67
圖 4-1：全等概念的引進與性質說明(1).....	71
圖 4-2：全等概念的引進與性質說明(2).....	72
圖 4-3：全等概念的引進與性質說明(3).....	72
圖 4-4：全等概念的引進與性質說明(4).....	73
圖 4-5：全等概念的引進與性質說明(5).....	73
圖 4-6：全等概念的引進與性質說明(6).....	73
圖 4-7：全等概念的引進與性質說明(7).....	74
圖 4-8：全等概念的引進與性質說明(8)-1	74
圖 4-9：全等概念的引進與性質說明(8)-2	74
圖 4-10：全等概念的引進與性質說明(9)-1	75
圖 4-11：全等概念的引進與性質說明(9)-2	75
圖 4-12：全等概念的引進與性質說明(9)-3	75
圖 4-13：全等概念的引進與性質說明(9)-4	75
圖 4-14：全等概念的引進與性質說明(10)-1	76
圖 4-15：全等概念的引進與性質說明(10)-2	76
圖 4-16：全等概念的引進與性質說明(11).....	76
圖 4-17：全等概念的引進與性質說明(12)-1	77
圖 4-18：全等概念的引進與性質說明(12)-2	77
圖 4-19：全等概念的引進與性質說明(12)-3	78
圖 4-20：全等概念的引進與性質說明(12)-4	78
圖 4-21：全等概念的引進與性質說明(12)-5	79
圖 4-22：「全等概念的引進與性質說明」前後期與相關理論結合的演進	82
圖 4-23：全等性質的作圖(0).....	83

圖 4-24：全等性質的作圖(1)-1	84
圖 4-25：全等性質的作圖(1)-2	84
圖 4-26：全等性質的作圖(1)-3	84
圖 4-27：全等性質的作圖(1)-4	84
圖 4-28：全等性質的作圖(2)-1	85
圖 4-29：全等性質的作圖(2)-2	85
圖 4-30：全等性質的作圖(2)-3	85
圖 4-31：全等性質的作圖(2)-4	85
圖 4-32：全等性質的作圖(2)-5	85
圖 4-33：全等性質的作圖(3)-1	86
圖 4-34：全等性質的作圖(3)-2	86
圖 4-35：全等性質的作圖(3)-3	86
圖 4-36：全等性質的作圖(3)-4	86
圖 4-37：全等性質的作圖(3)-5	87
圖 4-38：全等性質的作圖(3)-6	87
圖 4-39：全等性質的作圖(3)-7	87
圖 4-40：全等性質的作圖(4)-1	88
圖 4-41：全等性質的作圖(4)-2	88
圖 4-42：全等性質的作圖(4)-3	88
圖 4-43：全等性質的作圖(4)-4	88
圖 4-44：全等性質的作圖(4)-5	88
圖 4-45：全等性質的作圖(4)-6	88
圖 4-46：全等性質的作圖(4)-7	89
圖 4-47：全等性質的作圖(4)-8	89
圖 4-48：全等性質的作圖(5)-1	89
圖 4-49：全等性質的作圖(5)-2	89
圖 4-50：全等性質的作圖(5)-3	90
圖 4-51：全等性質的作圖(5)-4	90
圖 4-52：全等性質的作圖(6)-1	90
圖 4-53：全等性質的作圖(6)-2	90
圖 4-54：全等性質的作圖(6)-3	91
圖 4-55：全等性質的作圖(6)-4	91
圖 4-56：全等性質的作圖(6)-5	91
圖 4-57：全等性質的作圖(6)-6	91
圖 4-58：全等性質的作圖(6)-7	91
圖 4-59：全等性質的作圖(6)-8	91
圖 4-60：全等性質的作圖(7)-1	92
圖 4-61：全等性質的作圖(6)-2	92

圖 4-62：全等性質的作圖(7)-3	92
圖 4-63：全等性質的作圖(7)-4	93
圖 4-64：全等性質的作圖(7)-5	93
圖 4-65：全等性質的作圖(7)-6	93
圖 4-66：全等性質的作圖(7)-7	93
圖 4-67：全等性質的作圖(7)-8	94
圖 4-68：全等性質的作圖(7)-9	94
圖 4-69：全等性質的作圖(7)-10	94
圖 4-70：全等性質的作圖(7)-11	94
圖 4-71：「全等性質的作圖」前後期與相關理論結合的演進	97
圖 4-72：全等性質的應用(0).....	98
圖 4-73：全等性質的應用(1)-1	99
圖 4-74：全等性質的應用(1)-2	99
圖 4-75：全等性質的應用(1)-3	99
圖 4-76：全等性質的應用(2)-1	100
圖 4-77：全等性質的應用(2)-2	100
圖 4-78：全等性質的應用(2)-3	100
圖 4-79：全等性質的應用(3)-1	101
圖 4-80：全等性質的應用(3)-2	101
圖 4-81：全等性質的應用(3)-3	102
圖 4-82：全等性質的應用(3)-4	102
圖 4-83：全等性質的應用(3)-5	102
圖 4-84：全等性質的應用(4)-1	103
圖 4-85：全等性質的應用(4)-2	103
圖 4-86：全等性質的應用(4)-3	103
圖 4-87：全等性質的應用(5).....	103
圖 4-88：全等性質的應用(6).....	103
圖 4-89：全等性質的應用(7).....	103
圖 4-90：全等性質的應用(8)-1	104
圖 4-91：全等性質的應用(8)-2	104
圖 4-92：全等性質的應用(8)-3	105
圖 4-93：全等性質的應用(8)-4	105
圖 4-94：全等性質的應用(8)-5	106
圖 4-95：全等性質的應用(8)-6	106
圖 4-96：「全等性質的應用」前後期與相關理論結合的演進	110
圖 4-97：「伊斯蘭的幾何藝術」製作舉隅	111
圖 4-98：「二維對稱結構」教材製作介紹	111
圖 4-99：「三邊形拼貼」示範	112

圖 4-100：拼貼與生活的結合	112
圖 4-101：拼貼學生作品舉隅	112
圖 4-102：「代數問題圖像化」步驟呈現	112
圖 4-103：「幾何連續作圖」頁面區隔	112
圖 4-104：步驟化呈現無法說明的教材	112
圖 4-105：說明遊戲完成方法	112
圖 4-106：整合已有教材作動態呈現(1).....	113
圖 4-107：整合已有教材作動態呈現(2).....	113
圖 4-108：「直線方程式」教材製作	113
圖 4-109：「直式開方法」教材製作	113
圖 4-110：「商高定理證明」教材製作.....	114
圖 4-111：「黃金矩形」教材製作.....	114
圖 4-112：「平面分割問題」個數探討.....	114
圖 4-113：「平面分割問題」教材製作.....	114
圖 4-114：「河內塔問題」搬動方式探討.....	114
圖 4-115：「河內塔問題」教材製作.....	114
圖 4-116：「proofswithoutwords」教材製作	115
圖 4-117：「軌跡」製作.....	115
圖 4-118：「同餘圓」製作.....	115
圖 4-119：「一筆畫問題」探討.....	115
圖 4-120：「漆圖問題」探討	115
圖 4-121：「數學燈謎」製作	115
圖 4-122：「愛蓮說」教材製作	116
圖 4-123：「成語急轉彎」教材製作	116
圖 4-124：GSP 全等性質教學素材	117
圖 4-125：flash 全等性質教學素材.....	117
圖 4-126：「全等三角形」前期素材(1).....	118
圖 4-127：「全等三角形」後期素材(1).....	118
圖 4-128：「全等三角形」前期素材(2).....	118
圖 4-129：「全等三角形」後期素材(2).....	118
圖 4-130：飛盤(FRSBIE)教學模組	119
圖 5-1：全等教材製作與實施時程圖	121
圖 5-2-1(1)：試教前的顏色修正	124
圖 5-2-1(2)：試教後的顏色修正	124
圖 5-2-2(1)：試教前的顏色修正暨開關新增	124
圖 5-2-2(2)：試教後的顏色修正暨開關新增	124
圖 5-2-3(1)：文字的開關使用(關)：原始.....	124
圖 5-2-3(2)：文字的開關使用(開)：試教前.....	124

圖 5-2-3(3)：文字的開關使用(開+說明)：試教後	124
圖 5-3：「全等性質作圖」完成比例比較圖	126
圖 5-4：「全等概念的引進」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖	127
圖 5-5：「全等概念的引進」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖	127
圖 5-6：「全等性質的作圖」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖	128
圖 5-7：「全等性質的作圖」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖	128
圖 5-8：「全等性質的應用」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖	129
圖 5-9：「全等性質的應用」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖	129

第一章 緒論

1-1 研究背景

在民國88年以後，資訊融入教學開始蓬勃發展。一是「擴大內需計畫」，將國民中小學的整體「硬體設施」完成基礎性的建置；二是九年一貫國民教育課程將資訊教育「納編」後，使其有了法源依據；三是「資訊教育總藍圖」的提出，讓資訊教育整體的配套措施有了完善的規劃。

(<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/?qid=1306030109479>)

然而在教育部實施資訊融入教學，電腦科調整為彈性節數後，數學科使用資訊融入仍有其困難度。

其一，隨著各科融入教學的增加，機器的新舊汰換，各校在電腦教室、單槍投影機的使用頻率上未盡相同；

其二，各科在授課時數上有其限制，費時完成的數位教材，未必有足夠時間供教師作教學使用；

其三，數學科教材有其侷限性，若要達成「資訊教育總藍圖」中20%的目標，在數學教材上確有其難度；

其四，資訊教具、教材的開發常是費時費力，成本也較高，教師常需具備數位內容製作的素養，這使得大多數的教師望之卻步。

在以上的因素考量下，數學科教師作資訊融入的例子其實還是有限。

然而不管教學科技如何的進步，最後仍需面臨的是教學內容的設計及教學現場的運用方式。因此若能有合適的教學素材，配合教學目標與策略，藉由資訊教育的特點，確實可以使資訊科技的使用成為教室教學活動的一部份，甚至減少教師的教學時數，增加學生的理解度與熟練度，進一步願意主動學習、複習，這樣的教學素材筆者認為確實是可行且必需的。

1-2 研究動機與目的

在九年一貫課程實施，配合九二正綱的推動，國中、小的數學科內容因而加深、加廣，然而在教學時數未能增加，數學科又未必有可配套的彈性課程時間可供使用的前提下，針對適當的教學內容做教法上的調整，勢必是需要的。

由於目前國中的幾何課程，由九年級上學期調整至八年級下學期；因應下學期的教學時程減少，學生在全等三角形這個章節的學習時數明顯不足的情況下，研究者便針對學生預備學習的教材，配合課本內容，製作乙份完整的數位素材，期能使教師的教學時數減少，學生的學習意願提高，進一步地能讓學生在評量時真正具備所需的能力。

茲參考教材設計的原則，將學生預備學習的內容分為「全等概念的引進」、「全等作圖的說明」與「全等性質的證明」三部份，由名詞介紹、概念引進、作圖與證明到性質應用，製作一系列的教學素材，此外並考慮學生在課程上的銜接性與課後的複習，部份的教學素材並製作與其有所區別的學生版本，期使未盡了解的學生能於課後自我複習與練習，以達到此章節預備習得的教學目標。

進一步由認知心理學與訊息處理理論出發，配合多媒體學習理論與幾何的學習層次，探討數學能力的培養，作為此研究的理論架構基礎。並在教材的實際教學後，研究以下幾個主要問題：

1. 如何呈現教學內容？
2. 教學內容是否符合媒體教材設計的原則？
3. 如何使用互動式的功能，強化學生在學習意願及學習成就上的強度？
4. 課堂上的媒體教學，是否優於傳統的教材教法？
5. 是否適時地建構學生學習鷹架？達到預期的教學目標？
6. 教材是否結合了認知學習及多媒體學習理論？

1-3 研究工具與方法

爲使學生在學習上能與課本同步，研究者的教學素材主要是參考目前學生正在使用的康軒版課本第四冊，利用電腦輔助教學，藉由PowerPoint簡報軟體作完整呈現，使用搭配交通大學 Informath 工作室所開發的「MathPS」軟體教學平台，製作教材內容中所需的動態呈現與互動式開關，做精準與複雜的構圖。

使用PowerPoint的優點是軟體的取得容易與普及性，教師與學生易於上手，且教師並能針對其教學需求作適當的教材修改。且「MathPS」軟體的功能強大，適合教師在製作素材搭配應用，甚至能針對不同學生程度與教學目的做不同方式的彈性互動，使得兩個軟體在搭配上更加相得益彰。

此外，爲使教材應用於課堂上，避免製作時有所缺失，能確實引導學生參與所設計的思考活動；研究者先針對任教的班級作小組試教，初步取得教材施教的可行性；進一步整理教材，於大班做教材的呈現與教學；最後再利用教學研究會分享教材，請任教該內容的教師們給予意見。分析學生與教師們的反應與回饋，確定教材對於學生的理解程度，教師在使用上的難易度以及是否配合教學目標。

在一般開發的數學教材中，常缺乏針對教學需求與學生程度所具備的適性互動，如此對於教師的教學與學生的學習均有所影響，於是研究者在認知學習與訊息處理理論的基礎上，參考多媒體學習理論，依照教材的設計原則暨數學知識與解題的能力，配合幾何學習層次的基礎，製作此份全等教材，將實務與理論作整合，裨益學生在這個單元的學習上有所提昇，教師在授課上更加得心應手。

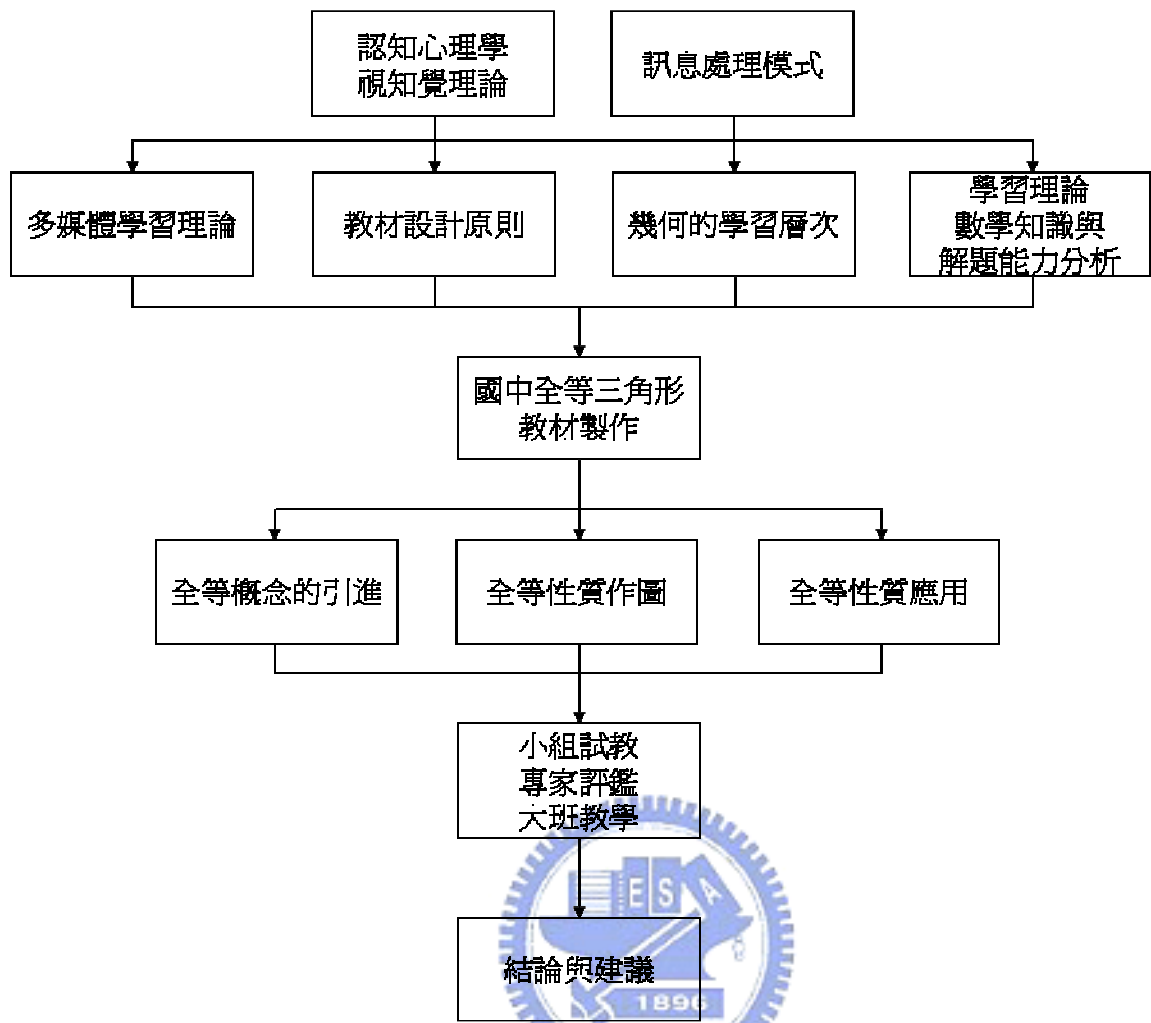


圖1-1：研究架構圖

1-4 研究歷程、範圍與限制

本研究依據教材設計的理論與實踐，透過媒體設計的理念與研究者本身製作教材能力與理論基礎的逐漸成熟，廣泛探討教材呈現的模式，主要利用了激發式動態呈現製作大量教學素材，並探討教材設計原則上的應用，與教師在實際操作上的變異性及可能會遇到的問題。

主要的研究歷程可分為四個階段：

1. 教材試作與理論摸索期（2005.8～2006.10）：研究者有幸進入在職專班就讀，並及早跟隨教授作研究，此時期製作了大量的數學與其他素材（於文中4-4節中有簡單介紹），培養了教材製作的基本能力，探索多媒體學習理論與教材製作實務的研究。其中並曾經深入研究過多邊形拼貼、網路多媒體教材重製與遞迴數列中平面分割與河內塔等問題；
2. 主題確認與教材製作期（2006.10～2007.3）：在確認「國中幾何全等教材」為研究方向後，開始依據課本內容，每週依預定計劃，製作一定進度，結合認知心理學上的視知覺理論與訊息處理理論，依據教材設計原則作完整的教材製作。其中教材內容能夠結合能力指標，並參考幾何的學習層次與學習理論上數學能力的分析與類比遷移等理念，裨益學生在學習上的順遂與完整。這段期間承蒙教授與畢業學長等專家的指導與建議，讓自己在教材呈現方式與適性化的製作有了更大的進步；
3. 教材試教與分享討論期（2007.3～2007.4）：在教材近幾完成的同時，為求正式教學上的順遂，於研究者任教班級中徵求自願同學5～6名，利用近一個月課後的時間，留校作教材的試教並探討呈現上的接受度。為求教材適性化，部份教材並分別製作教材使用與學生自行操作版本。並針對教材製作過程與試教結果於專班上課時作分享，與教授、助教及各國中小教師同儕作討論後改進。
4. 正式教學與評鑑檢討期（2007.4～2007.6）：在教材試教與分享針對意見作修改後，於課堂上正式進行兩週的教學，並於教學研究會上分享教材設計理念與施作心得，作為此教材的評鑑。進一步在教材製作課程上，分享前後期教材製作的理論結合與差異性，提供同儕作參考，進而在教師使用的版本上，有了以圖導引與以文導引不同類型的區別。完成運用教材設計的一般原則，卻又結合媒體教學與認知理論，並不失教師操作便利性的數位教學。

由於本研究的內容針對九年一貫課程之國中階段數學科八年級下學期預備學習之「三角形全等」教學素材，至於多媒體、認知心理學與訊息處理相關理論在大多數教材設計的原則均相同。此外，資訊科技在本研究中所扮演的角色是教師課堂上教學最重要的教具，電腦教室的借用或單槍投影機的使用在課堂上是必需的。設計之數學簡報教材在使用上須配合課堂上教師的講解，相關按鈕的設計原則與使用時機須再加以告知。提供學生複習之自學教材的設計原則，必須進一步探討，並研究其確實成效。

依據以上的歷程，本研究有著行動研究的本質，然而與一般的行動研究的最大差異性，在於考量教學的整體，並未作個人發展細節的紀錄，也缺乏深入討論研究者本身角色的扮演，以及如此的研究方法是否合理等問題。然而由於之前的學者作過一般性原則的提出與形成後，正需要有人將這些原則實際上呈現出來，在時間及人力上等考量因素作權衡後，才採取如此方法作最後的呈現。



第二章 文獻探討

本章主要在說明相關文獻探討，包括認知心理學、注意力、學習的訊息處理，以及類比遷移、記憶模式及多媒體學習理論等內容。

2-1 認知心理學

學習理論上主要區分有行為學派、認知學派及人本學派等學派，本研究設計著重於認知學派的理論基礎，且現代認知學習論中最主要的兩派為認知結構學習論及訊息處理學習論，本節主要從皮亞傑(Piaget)及認知結構學習論的內容與代表學說探討起，並比較與視知覺理論的關聯性；進一步作名詞解釋與本研究的相關說明。至於訊息處理學習論，將留待下個章節與注意力一併討論。

2-1-1 認知心理學的內容與代表學說

認知心理學的主要觀點在於學習的產生是內發、主動而整體性的。認知心理學家們認為學習為個體對事物經由認識、辨別、理解，從而獲得新知識的歷程。在此歷程中，個體所學到的是思維方式，亦即是認知心理學家所謂的認知結構(cognitive structure)。個體在學習情境中，運用其已有認知結構去認識、辨別，以至理解各個刺激之間的關係，增加自己的經驗，從而改變（擴大或提升）自己的認知結構（引自張春興，1996:210）。內容主要源自於早期的「完形心理學」(Gestalt Psychology)，1970年代起認知心理學開始蓬勃發展，完形心理學過去的研究成果也為認知心理學奠定了深厚的基石。因其重視知覺的整體性，強調環境中眾多刺激之間的關係，很多心理學家將完形心理學視為認知心理學的先驅。(http://gc.shu.edu.tw/~tjchiang/indite/GestaltPsychology/gestalt-02-02.htm)

認知學派認為個體在面對學習情境時，學習的產生有賴於新情境與舊經驗相符合的程度，以及新舊經驗的結合並重組，正因為學習是個體利用已有的知識與經驗，主動建構知識，而非被動接受，因此更加重視知識學習之內發、主動與整體性。

認知學派其中的代表人物以 Piaget, Vygotsky, Brunner, Ausubel 等人最為著

名。其中 Piaget(1973)把兒童的認知發展分成感知運動(Sensorimotor)、前運算(Preoperational)、具體運算(Concrete Operational)以及形式運算(Formal Operational)四個階段；其中在國中階段(11~15 歲)剛好位於具體運算進入形式運算時期，從具體操作要進入抽象邏輯，所以在課程的安排與例子的引導便要更加謹慎與小心。且爲了讓學生在與環境的互動主動探索知識的來源，Piaget 建議教學時要鼓勵主動，亦即要學生去發現或重新建構學習的真相，但這並不表示將學習的器材留給學生主動建構知識，而是老師要負責組織與創造問題的情境，並適時提出反證來引導學生，讓學生檢討自己建構之知識。身爲「佈題者」的老師僅提出問題，讓學生自行提出有效的解題活動，使學生成爲真正的「解題者」(甯自強,民 81)。

而Brunner (1966)主張發現學習論，認爲教學方式爲啓發式教學法，教師爲教學情境之布置者，而非教科書知識之灌輸者。因此根據動作、形像及符號三種表徵的發展，Brunner在教學應用上提出學習的動機、順序、結構及增強四項原則，教師藉由四項原則的安排，才能使教材更爲系統化，個體學習出自於內發。

關於Ausubel的意義學習論，主張前導架構 (Advance Organizer)，由教師發揮講解能力，協助學生以要領概念核對新概念。其與Brunner的發現學習論，可將學習結果區分爲以下四個向度：

圖 2-1：學習結果的四個向度

		背誦的			
接受的		背誦的接受學習，對傳統教育的批評集中於這種類型	背誦的發現學習，常被忽略，發現數學可以引導這一類的學習		發現學習
		有意義的接受學習，Ausubel主張使接受學習有意義，並使它成爲教室學習的主要型態	有意義的發現學習，Bruner主張學生應發現重要的概念和原則		
		有意義的			

資料來源：出自Reilly, Louis & Tanner,1983；引自曾慧敏，2003:293

從橫向的被動到主動學習，到縱向的背誦到有意義學習，Ausubel與Brunner將學習分爲四種向度，並依不同類型的學習內容有著不同的教學與呈現方式。

進一步從視知覺理論做討論，由於傳統理論中，Helmholtz(1821-1894)強調「經驗」在知覺中的重要性，主張感官所提供不足的訊息可藉由無意識推論而增加，產生由上而下概念引導的歷程；而Zimbardo和Gerrig(1999)則認爲「資料引導的歷程」以物理現實爲基礎，處理片段的訊息，而將刺激轉換爲最終抽象的表徵，產生由下而上資料引導的歷程（見圖2-2）。

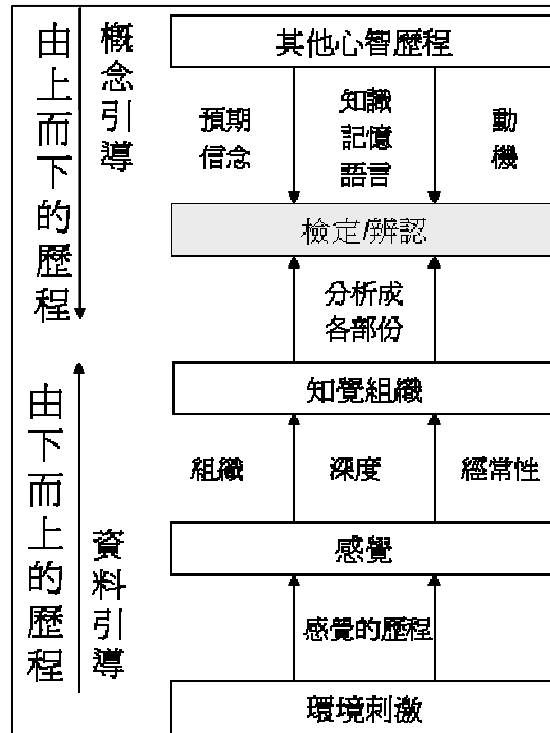


圖2-2 知覺歷程（引自游恆山譯，1997）

然而在我們知覺自己的環境時，這兩種歷程經常是交互作用的(游恆山譯，1997)。而Eysenck和Keane便指出當觀看的情境良好時，視知覺可能大部份取決於上行歷程；而當刺激呈現的時間急速或不夠清楚而惡化時，就需要下行歷程(李素卿譯，2003)。故在教學時，如何兼顧到刺激不夠清楚的下行歷程與視知覺良好的上行歷程，需要教師在教材上做適當的安排與選擇。

綜上所述，認知主義對於教學設計所產生的影響，主要在注重知識結構之整體性、教材之結構性，使學習者的認知結構和認知歷程以一種較有系統或組織的方式發展，並將學習結果變成一個相互之間有關係的知識網；學習需有學習者的主動投入，教師只是一個指導者；然而若能經由教師的引導，在教材設計上同時兼顧視知覺良好與否的學生，使得學習讓學生能夠有意義的接受及發現，建立概念、產生知識，如此的學習將更有效率且能持續效果。

2-1-2 認知心理學名詞釋義

在生物學上，所謂適應有兩個層面的意義，一為「結構」，另一為「過程」。Piaget 的理論也使用了相當於結構與過程的概念，相當於結構的概念叫「基模」，相當於過程的概念叫「同化」與「調適」(ジャン・ピアジエ，1965；引自國立編譯館，1981)。以下分別介紹兩者的內涵：

1. 基模：

所謂基模就是動作或思考的基本模式，也可以說是心理結構的基底；其特質有三：具變異性、可以被階層化組織並包含於彼此之間，以及可以協助人們作推論（E. D. Gange, C.W. Yekovich, & F.R. Yekovich, 1993; 岳修平，1998）；而在變異性與包容性的前提下，一般做推論時是相當有用的。人的認知發展中，由於階段的不同而區分為四種不同的基模。Piaget 認為基模的獲得及基模修改的過程，就是適應的過程，同時也是發展的過程。

因為基模是敘述性知識的一種形式，並且敘述性知識又是透過生產法則的運作所建造的，因此基模形成的歷程便可被塑形為一項生產法則系統。藉由相關例子辨識出其相似性，並從而形成代表這些相似性及廣泛形式的基模，以下為基模歸納組之目標結構圖：

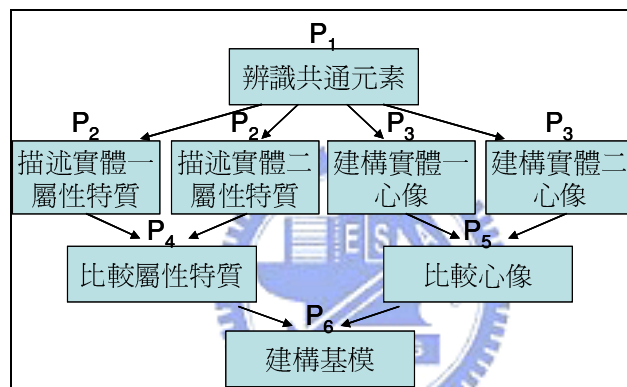


圖 2-3：基模歸納組之目標結構圖

資料來源：出自 E. D. Gange, C.W. Yekovich, & F.R. Yekovich, 1993；引自岳修平，1998:209

當要辨識某範疇中的一個新事例時，人們會用他們對所有關於不同範疇的過往事例之記憶，來檢驗並發現出最符合的結果。也就是人們不用真正看過某事例，當人們訂下目標為要對例子作分類時，會自然產生而進行 P1-P6 的目標結構圖，形成該範疇中最典型的事例之基模。

當學習者致力於建構個人新知識時，透過衝突事件（contradiction event）或多層次的測驗來偵測舊有概念的盲點，可幫助學習者發掘既有認知架構的不足，從而有效地建立其正確的基模（蔡勝雄, 2001）。而關於基模形成的生產法則，這些歷程開始的條件之一，乃是要訂定一個「找出共通元素」的目標。且人們若要形成一個基模，有意識地去尋求發現事件間的一些相似性是很重要的。學生中曾被教導要去找尋相似性的，比那些不曾被教導此技巧的，前者在解決新問題的可能性乃是後者的兩倍

強（岳修平, 1998:214-216）。是故在教材的設計上，必須特別注意前後的銜接與相似性，甚至是先備知識的引入，與發展問題的延伸。

接下來提到「基模精練」(schema refinement)歷程，指的是在修訂基模包含情境不同點，使其有效運行的過程；因其是需要意識控制的心智活動，特別是它牽涉到若某個基模無法運作，便無法訂定下個目標，並找出該基模為何無法運作的原因。因為意識運作(conscious processing)歷程在基模精練上其實是相當重要的關鍵，故基模的精練除對一些較簡單、屬於知覺性的基模也許可以自動發生外，大部份的精練是無法自動發生的。

在基模精練的歷程中，當學習者了解到他的基模不如預期般適用於該環境，也就形成所謂的差異事件(a discrepant event)，便能引起學習者的動機，並讓學習者想找出為何其基模不適用於該情境(岳修平:224-230)。因此在全等教材的製作中，例子的選取是相當重要的，適當的例子作比較，才能有效引起學習者動機，並且不會因差異過大或過小，造成學生的學習意願降低。

在基模形成的過程中，例子的選擇與序列化，對於提高學習者形成基模的可能性是很重要的，而在基模的精練過程中，非例子(non-example)的選擇尤顯重要。因為光憑一個抽象的定義將很難形成基模，例子本身的知覺特徵通常不能用語詞表達。因為將抽象的命題式知識與情境性知識分離的作用會導致「不活潑知識」(inert knowledge)的問題。當學生有此不活潑知識時，他們可以在面對語文式的定義性測驗時提取該知識，卻無法應用於真實問題。因此適當的語文描述，加上一個正確的例子，並將以序列化，便是種合適的教學法了(岳修平:226-236)。這也是在研究者所設計的教材中，定義與圖形的舉例搭配出現的主要原因。

2. 「同化」與「調適」：

所謂「同化」是指將新資料整合到既有的認知結構中，個體運用原本具有的機能（包括生理的、動作的及思考的）去處理新的情境或課題的過程；譬如個體攝體取食物並消化之，而營養對個體的機能產生裨益，就是同化的過程。而在心理學上的應用，以動作為例說明，譬如嬰兒有把握的反射動作，這動作也是一種基模，它可以反覆地用它而每次都成功，這便是同化(國立編譯館，1981:8-10)。在「全等」名詞的介紹中，對應邊與對應角的理解與對應關係，屬於主觀而直接的，學生可以馬上作理解，立即作對應的同化。

至於「調適」則是認知結構對於新情境的適應，個體適應新情境或新課題時，最初發生困難（既有的基模無法適應新的情境或課題），於是改變適應方式（修改原有的基模），以致漸漸變成能適應的過程，俾

能適應這新對象的過程。再以嬰兒抓取物品為例，在一開始抓不起來的前提下，經過一段時日，終能抓到豆子，這修改的過程即是調適，於是又開始其新基模的同化過程。

然而調適產生時亦有其條件，其一是同化經驗要進行累積到相當程度，其二是小孩必須具有對新的對象使用既有的基模去適應新的動機。然而若遇到太容易用既有的基模去同化的情境或課題，就不易激起小孩反應的動機了(國立編譯館，1981:10-11)。在「全等性質的介紹」中，雖然藉由條件的增加，使學生理解所需最少的條件數，並方便搭配介紹記憶所有的全等性質；然而所有全等性質，須等到「全等性質的作圖」教學完畢後，學生才得以理解這些性質，何以真正構成全等的結果，這便是種調適。

須注意的是同化及調適所引起的基模變化，與個體接受到刺激後引起反應的情形有所不同。前者是個體自動自主的自我調整(Self regulation)作用，後者是個體在被動情形下的行為；同樣在上述「全等」名詞的介紹與「全等性質的介紹」，也有著主動同化與被動調適的特性。

至於平衡所指的是經過同化與調適之間不斷調整的過程，使得學習的效果與狀況達到一個穩定的狀態。然而在同化與調適調整的過程，基模亦會跟著改變，以方便我們正確地做推論的動作。



2-1-3 認知心理學與本研究的相關探討

根據皮亞傑的認知發展理論，影響發展的主要因素有四：

- 1.個體的成熟過程；
- 2.個體與環境間的交互作用；
- 3.同儕間的相互影響；
- 4.平衡化。

其中1、2、3.在一般發展理論都被公認為決定發展的主要因素，唯獨皮亞傑重視4.的因素(國立編譯館，1981:13)。考慮平衡化，教師和教學材料可利用以下兩種方式來加強基模的學習歷程：(引自岳修平:216-217)

(1)工作記憶的支援：依所要學習特定基模之性質、學習者本身的精熟程度、資源的取得性、以及個人本身的身習目標等方法，可減輕工作記憶的負擔。例如針對含有視覺成分的概念，若能在教學時同時舉出至少兩

個例子作檢驗用，會對教學很有幫助。而在學生碰到一個新例子時，可用之前經驗過的例子來提醒。

(2)例子的選取：在基模的形成歷程中，學習者會在各例子之間尋找其共通的元素。若所呈現的例子某些共通元素不是其基模中一部分，該個體可能會形成一個過於侷限的基模。而要預防形成基模過於侷限，教學時必須提供包含一些不相關屬性，涵蓋種類廣泛的例子。如幼兒可能會在第一次看到狼時，把它歸類於狗的範疇內。學習某一領域，其過程中的一部分牽涉到要學習能擁有更好、更精善的區辨(discriminations)能力。

而爲了讓學生在與環境的互動中主動探索知識的來源，皮亞傑(Piaget, 1973)建議教學時要鼓勵主動的方法，亦即要學生去發現或重新建構學習的真相，但這並不表示將學習留給學生主動建構知識，而是老師要負責組織與創造問題的情境，並適時提出反證來引導學生，讓學生檢討自己建構之知識。

在「全等概念的引進與性質說明」中，研究者曾試圖以不同的方式，探討三角形全等所需的條件。除了引導演繹式的探討條件個數外，更透過操作歸納說明全等性質的基本分類；由教師負責組織與創造問題情境，並加以整合相關類型產生的性質。甚至可以透過偵探辦案式的說明，作爲引起學生了解何以需要較少條件的動機。

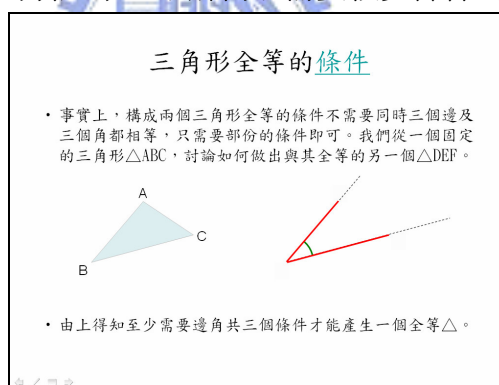


圖2-4：教師創造問題情境：「三角形全等的條件」

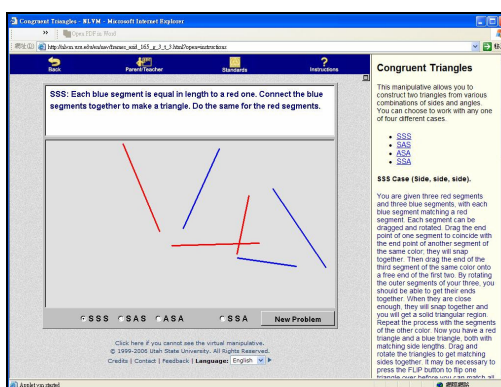


圖2-5：整合相關類型產生的性質：「三角形全等性質的基本分類」

(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_165_g_3_t_3.html?open=instructions)

而與學校情境有關的三種基模，包含自然範疇內的基本物件基模、事件基模及文本基模中，為了記憶新的訊息，人們需要把訊息意義化，使用自己熟悉的基模來合併新訊息（岳修平:112-121）。在「全等概念的引進與性質說明」中，每一個全等性質需具備三個相等的條件，就如同在事件基模中，具有一定數量的核心概念；至於「全等性質的證明」時，每一個證明題均包含某些共同的特徵及結構，這就比較傾向於文本基模的型式了。

此外，為了了解及記憶新的訊息，人們需要把訊息意義化。如果文章中所呈現的訊息並沒有顯示出原有的意義結構，讀者會用自己熟悉的基模來合併這個新訊息。在「全等概念的引進與性質說明」中，說明全等性質的應用時，題目中所給予的已知條件，常無法直接與預證明的全等性質相匹配，由於每個學生所熟悉的基模有所差異，因此應用後所得到的結論亦有所不同，以下題為例：

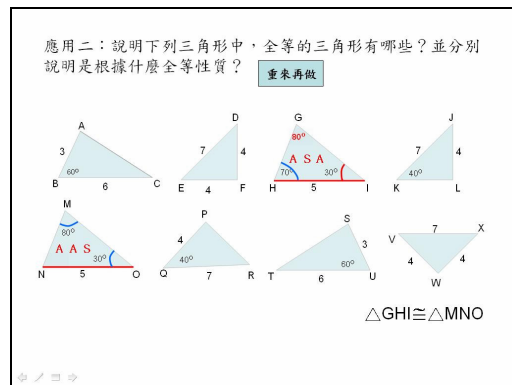


圖2-6：不同基模思考產生的差異結果：「三角形全等性質的應用」

$\triangle GHI$ 之所以與 $\triangle MNO$ 全等，必需透過計算 $\triangle GHI$ 中的 $\angle G=80^\circ$ 或 $\triangle MNO$ 中的 $\angle N=70^\circ$ ，然而每個學生熟悉的思考模式有所不同，或者單一計算某個三角形，或者同時計算兩個三角形；最後在條件的整合時，可能得到的結論便有所差異（AAS 或 ASA）。

2-1-4 建構主義與本研究的相關性

皮亞傑(Piaget, 1973)建議教學時要鼓勵主動的方法，亦即要學生去發現或重新建構學習的真相，但這並不表示將學習的器材留給學生主動建構知識，而是老師要負責組織與創造問題的情境，並適時提出反證來引導學生，讓學生檢討自己建構之知識。由此於九十年代興起的學習心理學派：建構論，基本上就是建立在認知學派的基礎上(蔡勝雄,2001)。

英國於 1990 年至 1994 年曾進行一項結合認知理論與實際教學應用，定名為 SPACE (Science Process and Concepts Exploration) 的研究計劃中，對於建構主

義式的教學提出以下的模式，其中涵蓋的層面分別為：

(<http://www.project2061.org/publications/rs1/online/RESEARCH/REPORTS/RPT12.HTM>;

引自蔡勝雄,2001)

1. 課程教授之重心：在進行建構主義教學模式時，因學習者過多且複雜的先前概念影響正常的教學活動，教師應有以下的認知：
 - (1)當學習者的某項概念被引出時，教師則需鎖定該概念進行教學方案的規劃。
 - (2)教學方案的規劃要著重在學習目標上，並且不能偏離對學習者其學習歷程的了解。
 - (3)教師要時時回頭檢視進行中的課程其教學重心所在，以決定在何時或何處引導學習者進入另一個學習階段。
2. 情境設定：這是一項重要的部分，在設定的情境中鼓勵學習者藉由生活中相關的經驗來探討各種概念，由熟悉的經驗與在設定下的情境出發，除了可吸引學習者的興趣外，更可以避免有些學習者出奇不意的提出一些與主題無關的問題，干擾正常的教學活動。
3. 挖掘學習者的想法：由於學習者主動的歷程，任何學習者已有的知識與信仰都會影響其進一步的學習。因此，有幾個該注意的地方：
 - (1)教師應採用各種不同的方式來找出並探討學習者對某項概念的真正想法。
 - (2)學習者對各種概念所表達出的想法都應該視為是有價值的。
 - (3)學習者的各種想法都是形成性評量的依據，並為進行後續教學的重要參考指標。
4. 幫助學習者發展概念：在這個階段主要目的是要幫助學習者發展正確的概念，其中有幾項做法：
 - (1)盡量將學習者的想法融入各種學習活動中。
 - (2)鼓勵學習者利用各種證據來支持他們的想法。
 - (3)由學習者決定什麼足以構成證據。
 - (4)教師可經由幫助學習者收集各種相關的證據來支持他們想法的過程中，促進其學習。
5. 反思過程：在整個教學活動進行的過程中，教師與學習者都必須評量相關概念的改變，在這個階段採取的步驟包括：
 - (1)學習者應將自己與他人的想法及證據重複的檢驗。
 - (2)教師針對在課程中所訂定的教學目標對學習者的學習進度進行評估。
 - (3)教師應評估其所用的教學策略與學習者的想法之間的衝突與落差。
 - (4)教師應考慮在發展學習者概念的過程中，將面臨許多實際執行上的困難與限制。

就以上的教學模式提出幾個本研究中與之相契合的部份，首先在課程教授之重心中，在「全等概念的引進與性質說明」裏，不同的全等性

質提出後，便輔以簡單的說明與圖例，以加深學生對於此性質的了解：

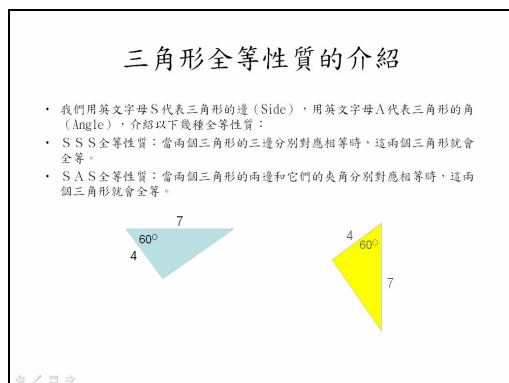


圖2-7：課程教授之重心：「三角形全等性質的介紹」

至於在情境設定中，為使學生透過熟悉的經驗與在設定下的情境出發，在「全等性質的作圖」中，利用電腦模擬真實的圓規畫弧，直尺及筆畫直線，比較黑板上傳統的尺規作圖，更能吸引學生學習興趣，達到同步學習的效果。

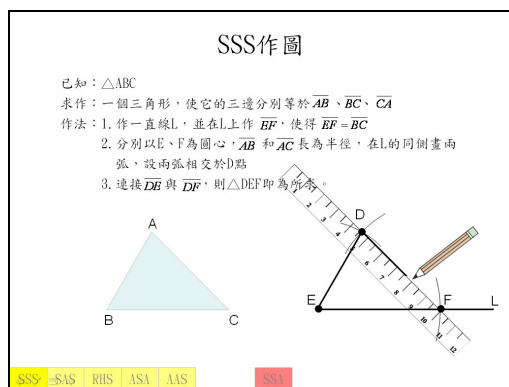


圖2-8：透過熟悉經驗與設定情境：「SSS性質作圖」

再來是挖掘學習者的想法，在全等條件的歸納時，教師可以配合數位化釘板，利用綁橡皮筋的方式，確認不同方向的兩個全等三角形，面積與周長的相等。

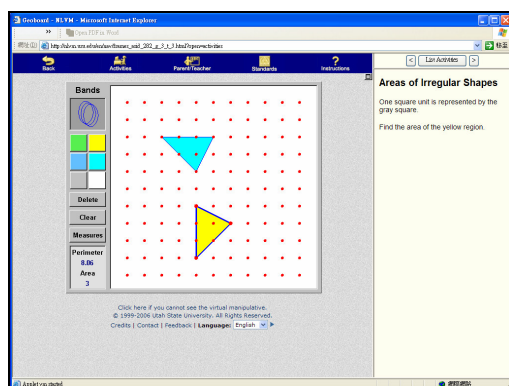


圖2-9：挖掘學習者的想法：「數位化釘板的配合使用」

(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_282_g_3_t_3.html?open=activities)

而在幫助學習者發展概念時，為使學習者決定由什麼足以構成

證據，在「全等概念的引進與性質說明」中，呈現全等所需具備的條件前，教師可透過口頭問答的方式，先行詢問學生構成三角形及全等所需具備的條件為何：

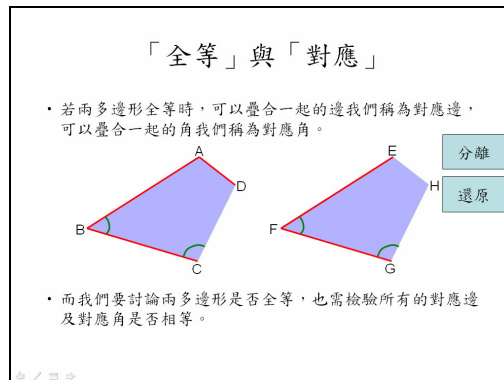


圖2-10：幫助學習者發展概念：「『全等』與『對應』」

最後是所謂的反思過程，為將自己與他人的想法及證據作檢驗，在「全等性質的作圖」時，所畫出的圖形，配合已知條件，得以疊合檢驗全等。至於評估所用的教學策略與學習者的想法之間的衝突與落差，在講解多數學生較不易理解的「SSA全等性質」內容時，透過電腦模擬動畫的效果及反覆操作，將可使之間的落差隨之減少。

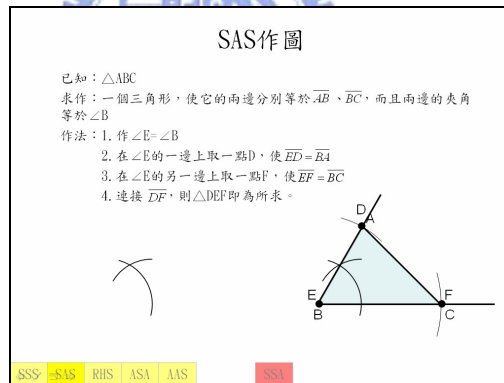


圖2-11：反思過程—檢驗想法及證據：「SAS全等性質作圖」

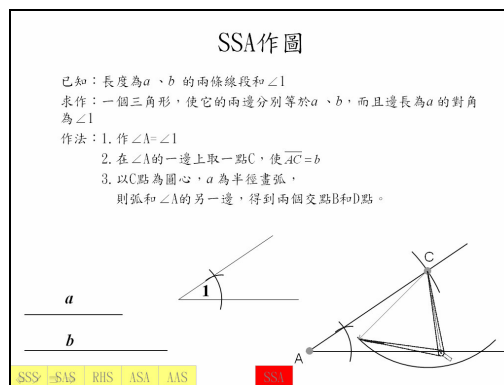


圖2-12：反思過程—減少教學策略與學習者的想法之間的衝突與落差：「SSA性質作圖」

2-2 注意力與學習的訊息處理

現代認知學習論中的另外一派為訊息處理學習論，是特為解釋人類在環境中，如何經由感官覺察、注意、辨識、轉換、記憶等內在心理活動，以吸收並運用知識的歷程（引自張春興，1996:223）。本節主要說明其理論與注意力的關係，接著探討與本研究的相關性；下一節將進一步探討訊息處理與記憶及類比遷移的關係。

2-2-1 訊息處理與記憶

50 年代的心理學，雖然行為主義的操作條件作用理論大為盛行，然而有些心理學家，對極端行為主義的理念，及根據白鼠鴿子學得的條件反應，用來解釋人類的複雜學習行為的取向，不以為然（張春興，1996）。於是早已存在而未受重視的認知學習理論，又復受重視，且因為實際應用需求、通訊研究及電腦科學發展的影響（Biehler & Snowman,1990;張春興，1996），訊息處理學習論因之產生。

訊息處理是不能直接觀察的內在心理運作歷程。在此一內在歷程中，一般認為其中包括三個心理特徵：(1)訊息處理是階段性的；(2)各階段的功能不一，居於前者屬暫時性，居於後者屬永久性；(3)訊息處理不是單向直進式，而是前後交互作用的（引自張春興:224）。根據以上假設，一般同意以下圖解，說明訊息處理的內在心理歷程。

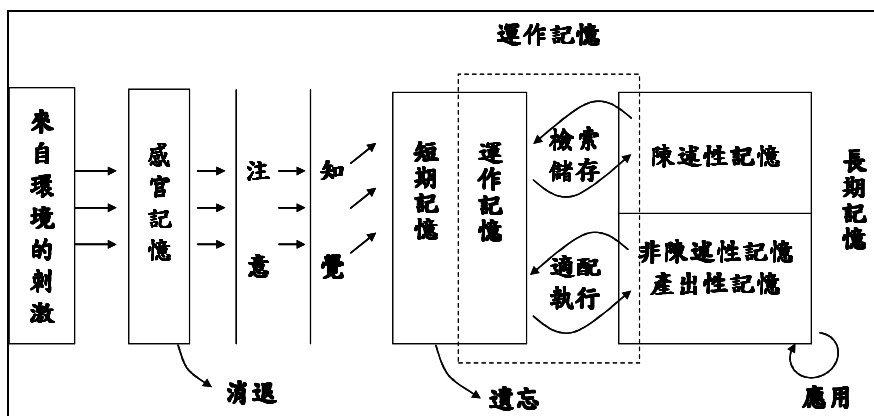


圖 2-13：訊息處理心理歷程圖示（Eggen,1992,p.324; Sternberg,2003,269;葉玉珠，2003,p.218）

訊息處理模式中，記憶分為感官記憶、短期記憶、長期記憶。其中感官記

憶是指個體視、聽、味、嗅、觸覺等感覺器官在接受到足夠量的刺激後，將訊息原始形式儲存保留的階段；至於感官記憶是指個體視、聽、味、嗅、觸覺等感覺器官在接受到足夠量的刺激後，將訊息原始形式儲存保留的階段；而短期記憶即運作記憶，是訊息進入長期記憶的瓶頸，容量為 7 ± 2 意元，約保留二十秒時間；而心理運作如心算亦在此記憶部分；且短期記憶的編碼有形碼、聲碼及意碼等。如想把短期記憶變成永久保存的長期記憶，必須複習、轉移或經常使用；經過處理的訊息成為永久記憶，在容量和維持的時間方面都是無限的。而長期記憶的編碼與感官記憶、短期記憶都不一樣（高源令，2003:196）。茲分述感官記憶、短期記憶及長期記憶如下：

1. 感官記憶(sensory register, 簡稱 SR)：感官記憶能保持著刺激本身原來的形式（如照像或錄音），並供個體抉擇是否將進一步作為重要訊息來處理（張春興，1996:225）。其中眼球在「閱讀」時從一注視點到另一注視點之間的暫停，這短暫的視覺貯存稱為視像記憶(iconic memory)。因為有視像記憶，才有動畫、卡通和電影的產生。至於聽的感覺記憶稱為回聲記憶，而回聲記憶是純感覺而未歸類的，聽覺實驗的注意廣度亦是有限，但回聲訊息的持續時間比視覺為長，大約可以保留五秒鐘才消失。而正因為感官記憶的短暫，訊息自感官到意識階段的「注意」與「知覺」具有教育上的意義，如何引起學習者的注意將是討論的課題。（高源令:193-194）
2. 短期記憶(short-term memory, 簡稱 STM)：在整個訊息處理過程中，短期記憶對個體的行為，具有兩種重要作用：一是對刺激表現出適當反應，一是採用複習方式，使所處理的訊息保持較長久的時間（張春興:226）。而短期記憶的精緻化處理過程，包括了第一層次的心智表徵、第二層次的認知層次，以及第三層次的後設認知。然而訊息是因受到注意才會轉而進入短期記憶之中；短期記憶只及於此刻所發生的事情，存在於意識層面，具有心理運作功能，又稱為運作記憶(working memory, 簡稱 WM)，亦即運作記憶是指個體對訊息性質的深一層認識與理解；透過理解後刻意保留，是將之轉換為長期記憶的主要原因。且短期記憶可以維持的時間不超過二十秒，透過編碼、複習、檢索，短期記憶可轉入長期記憶。而訊息的選擇有三：①遺忘；②複習，以暫時保留在意識層；③與舊經驗結合，增加複習時間，使訊息成為長期記憶。（高源令:194-195）
3. 長期記憶(long-term memory, 簡稱 LTM)：指的是保持訊息長期不忘的永久記憶(permanent memory)。長期記憶與短期記憶除在時限上不同之外，另有兩點差異：一是短期記憶是限量記憶，而長期記憶是無限的。二是兩者所貯存性質有所不同；貯存(storage)在長期記憶中的訊息，大致分為兩類(Tulving,1972)：一為情節記憶(episodic memory)，指有關生活情節的實況記憶。另一類為語意記憶(semantic memory)，是指有關語文所表達之意義的記憶，也就是個人學得的知識（張春興:227）；而以上分類亦稱為陳述性及非陳述性記憶，而非陳述性記憶中的程序性記憶與活動發生的前

後順序有關，為學校技能教學的主要目的。為使長期記憶順利提取，除了透過編碼和複習，有助長期記憶之回憶和貯存，透過存在於短期記憶和長期記憶過程中的有效檢索更為重要。是故回憶失敗時，檢索方式不佳比編碼的影響更大（高源令:196-200）。而記憶至回憶的歷程大致如下：

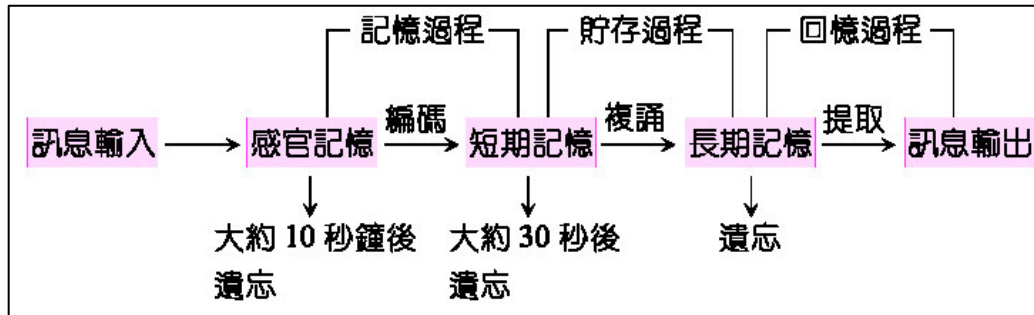


圖2-14 記憶至回憶的歷程（引自葉重新，2006）

以下為三種記憶的差異性：

表2-1 三類記憶的差異

特質	感官記憶	短期記憶	長期記憶
訊息載入	在注意之前	需要注意	複習
訊息保留	不可能	繼續注意	重述、組織
容量	大	小	不知其限制
訊息遺忘	消退	置換、減弱痕跡 干擾、消退	干擾、消退，但以檢索問題為主(基本假設是不會遺忘)
痕跡期限	四分之一至五秒	至多二十秒	多年
檢索	顯示	自動、暫時的聲碼檢索	檢索線索 自歷程中搜尋

引自高源令:201

而自感官記憶進入短期記憶過程中，注意與知覺作用是必然的歷程，且在教學上具有重要的意義。接下來我們就要進一步討論注意力與訊息處理的關聯性。

2-2-2 注意力、遺忘與訊息處理學習論

所謂的注意力，可以著名的美國心理學家威廉·詹姆士寫過的一句話來說明：「每個人都知道什麼是注意力，那是以清晰且生動的形式，在幾個同時呈現的物體，或一連串的思緒中，挑選出一個來佔據我們的心智，它的精髓是聚焦、集中與意識，它意味著，從一些事物中抽離出來，以有效地處理其他事物。」

（James,1890）且注意力的主要特性有可被分割、有警戒功能、會找尋刺激，及以有選擇性等四種。

訊息是否能由感官記憶進入短期記憶，注意力是重要的把關機制。因為訊息一旦進入短期記憶階段，才會發生訊息解讀、訊息儲存，最後才能進入長期記憶，以提供未來處理資訊時之提取作用（ Craik & Lockhart, 1972;Gunter, 1987; 高源令，2003）。

一般在訊息辨認後，注意的選擇在長期記憶中引發有關反應，凡與舊經驗有關的消息，會先被選擇及注意（高源令:203）。而處理容量的限制影響了一次可以注意的訊息量，以及訊息在系統內流動的方式，例如訊息處理推測，一個人會將一個情境內的一部份編碼，以適合所謂短期記憶（或稱為工作記憶）儲存的容量（引自游婷雅譯，2004）。

綜上所述，教師為使訊息處理有效地進入學生的長期記憶，注意力的引導將是極為重要的關鍵。首先要選擇與舊經驗有關的消息，其次因為處理容量的限制，為避免不相干的訊息干擾，要根據注意力的四個特性，選擇適當且適量的訊息作呈現，以供學生解讀及將來的提取。

此外，注意力有早期選擇過濾模式、消弱器模式以及後期選擇過濾模式三種不同的模式。其中早期選擇，是指發生在訊息處理尚未有結果前的注意力運作，包括開關模式及消弱器模式。在教學上的應用來說，在早期選擇作過濾，亦即在引起學生的動機時要選擇適當的例子。

接下來談到關於遺忘的部份。在整個訊息處理的過程中，短期記憶對個體行為所產生的刺激表現出的適當反應，如目的已達，短期記憶不再繼續進一步處理，所記者隨即流失，便成遺忘（張春興:226）。是故我們可對遺忘簡單定義為對學習的經驗失去重現的能力。事實上，根據「艾賓豪斯遺忘曲線」指出，學習過的教材在一小時內忘得最快（圖 2-13），並可透過複習及反覆背誦增強記憶。

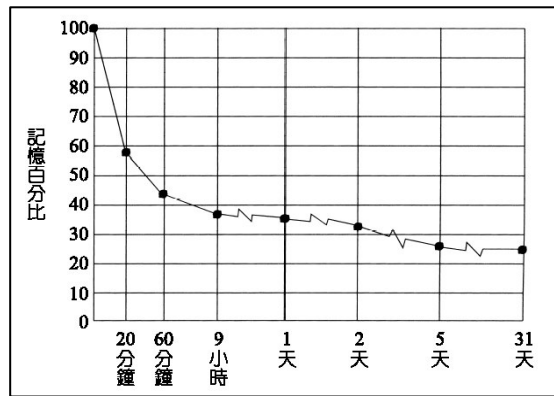


圖 2-15 艾賓豪斯遺忘曲線（引自葉重新，2006）

而影響遺忘的主要說法有干擾說、消退理論、反應之競爭，及線索依賴四種。其中干擾說含順攝抑制、倒攝抑制，是順向與逆向對記憶之減弱說法；亦有順攝助長、倒攝助長，是順向與逆向記憶之促進作用，使其後或先前訊息更容易記憶（高源令，2003:221）。以下透過表格說明干擾說的正向與負向作用：

表2-2 新舊學習的抑制與助長

順序	作用	負向	正向
		新學習影響舊學習	倒攝抑制
舊有學習影響新學習	順攝抑制	順攝助長	

引自高源令:221

就上表所示，為使教師的教學更有效率，在新觀念的實施時，要避免負向的抑制，且使用正確的教學過程與例子，可使新舊學習同時具備倒攝及順攝助長。

2-2-3 訊息處理學習論在教學上的應用

本節最後所要談的是訊息處理學習論在教學上的應用，由以上提到有關訊息處理、記憶及注意力的相關理論後，教師在教學過程上應該注意的問題。

首先談到感官記憶策略的應用，例如給與學生足夠時間、一次只問一個問題、依予加深問題程度，並讓學生複述指示或引導語等方式，都能夠使學生在感官記憶上更為深刻，俾益其進入短期記憶內。而惟有感官記憶有效地進入短期記憶，方能形成知識，進一步作檢索與適配。

其次在短期記憶策略應用上，避免讓幼兒做超過其記憶負荷的工作、鼓勵兒童發展有效的意元集組策略、以簡短描述取代冗長說明並放慢說話速度、經常讓學生練習使基本技巧成爲自動化、重要的關鍵或觀點抄在黑板或投影及發講義方式等方式。注意短期記憶能夠保留的容量與時間，切莫因敘述過於冗長而導致重點無法突顯；若無法避免較長的敘述，要適當使用標示突顯重點，使得學習者在學習的負擔上減至最低。以「全等概念的引進與性質說明」中 SAS 性質的介紹爲例：「SAS 全等性質：當兩個三角形的兩邊和它們的夾角分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。」若能將重點加以標示，使學生在閱讀時的負擔減低，自然在學習時的效果將隨之提高，如下所示：

- SAS 全等性質：當兩個三角形的兩邊和它們的夾角分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。

圖 2-16：訊息重點的標示：「SAS 全等性質說明」

而以上配合 2-2-3 節中所提的圖例（見圖 2-8），效果將會更佳。

接下來要提的是長期記憶的策略應用，其主要方式有 7（引自高源令，2003:241）：

1. 提示概念之間的關係，以便學生發展複雜的網絡基模。
2. 將新概念與原先所學聯結，如數學連加法與加法的聯結。
3. 盡可能運用具體方式呈現抽象概念，引導學生運用心像。
4. 根據編碼時使用的線索，做爲回憶時有效的檢索線索（鄭麗玉，1993）。
5. 教材的呈現宜有系統、有組織，且學生主動以自己的方式組織教材要比老師提供要來得有效。
6. 評量學生方式應盡量多元化，可能反應出不同的結果。
7. 建立必備的知識或引發恰當知識，作爲了解與記憶新學習之基礎。

爲使知識確實進入長期記憶，隨時供學習者提取與檢索，以上的 7 個原則在教材設計時應加以注意。而爲使教師成爲有效能的訊息處理者，以下也提供一些方式供教師參考：（Biehler & Snowman, 1990; 高源令，2003）

1. 了解吸引學生注意力的物件、強調新觀念之用途、教導增進注意廣度的方法如練習。

- 2.教學中遇到與學生舊經驗有關之訊息，教師宜提示新訊息與舊觀念兩者之關係，並使之聯結。
- 3.教以適用的複習技巧，也提示意義化並注意意元集組的運用。
- 4.視年齡由教師或學生組織易學教材。
- 5.教學中盡可能以另一種方式使教材有意義。
- 6.示範各種學習技巧，並給與學生練習機會。
- 7.鼓勵學生運用後設認知，思考過去學習的情境，有效的記憶其背景為何，並認知構成個人學習的策略其元素為何。
- 8.在設計作業時，預先設想學生可能採取的有效學習策略。

至於吸引學生注意力的原則和方法可分為4，分別如下所述：（Eggen,1992; 高源令，2003）

- 1.物理方式：圖、表、投影片、黑板，甚至老師的走動與聲調的改變、加重語氣、某一姿態和活動都屬此方式，這也是在課堂中最直接的呈現方式。
- 2.引發方式：透過角色扮演、假設性問題或爭議性話題等方式吸引學生的注意力。
- 3.情緒方式：與個人有關或是情緒性的字眼，最易引人注意，然仍需避免離題，導致注意力因而分散。
- 4.強調方式：重要教材直接提示重點、強調其重要性，必要的話搭配前述3種方式來加以強調。

而提到喚起知覺的原則和方法，概括分為知覺與經驗、知覺與期望兩種：（高源令:247）

- 1.知覺與經驗：教學的開始可先回顧舊教材，提示原有教材之重點，並運用開放式發問。
- 2.知覺與期望：教師要使教材讓學生期望為有趣的。

若能達到以上兩個原則，使先備知識不虞匱乏，學生期待學習，學習的效果自然就事半功倍了。

茲提出幾種運用訊息處理模式原理的教學活動如下：（高源令:247-249）

1. 促進學生參與有關教室中的活動。

2. 教學生概念構圖原則或分析概念關係，運用樹狀圖、故事圖、階層圖或流程圖把要建構的概念與基模相聯結。
3. 新舊教材之間的銜接，必須是已習會舊有者，再與新教材做比較。
4. 精緻化的編碼使教材意義化，較易成為長期記憶。
5. 因為初始和時近效應，應重視課程的開始和結束。
6. 即使描述抽象概念的問題，亦宜使用具體實例的發問。
7. 教導學生應用各種記憶術學習容易弄混的項目。
8. 讓學生了解干擾作用，課程告一段落讓學生比較與回憶
9. 強調教材的重要部分，引起學生注意並有助編碼與檢索
10. 呈現訊息要有充分的背景脈絡，教導新的訊息，必須先自實際生活發現問題，使檢索有豐富的線索可尋。

最後針對研究者所設計的教材，提出幾個與訊息處理理論相契合的例子：

1. 提示概念之間的關係，發展學生複雜的網絡基模——藉由SSA不全等的性質，進一步介紹RHS的全等性質：

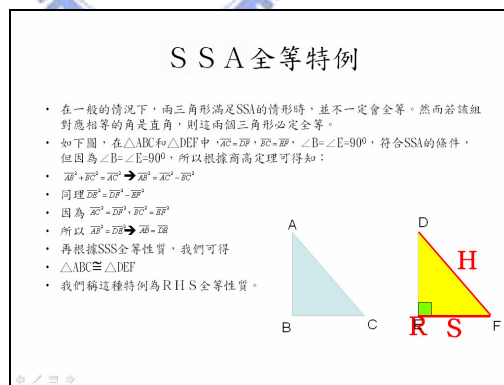


圖2-17 提示概念之間的關係：SSA全等特例

2. 盡可能運用具體方式呈現抽象概念，引導學生運用心像——藉由輔助軟體說明「垂直平分線上任一點至此線段兩邊的距離相等」性質：

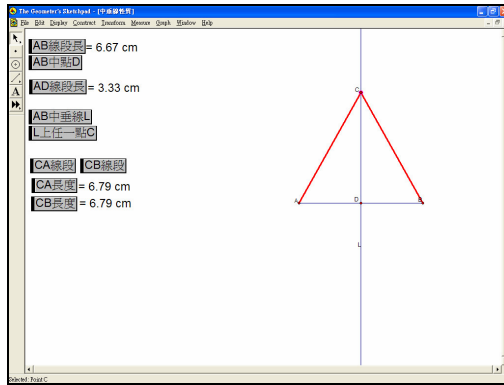


圖2-18 運用具體方式呈現抽象概念：線段垂直平分線性質

3. 根據編碼時使用的線索，做為回憶時有效的檢索線索——在「全等性質的應用」中，透過圖像及文字的引導，作為正式證明時的檢索線索：

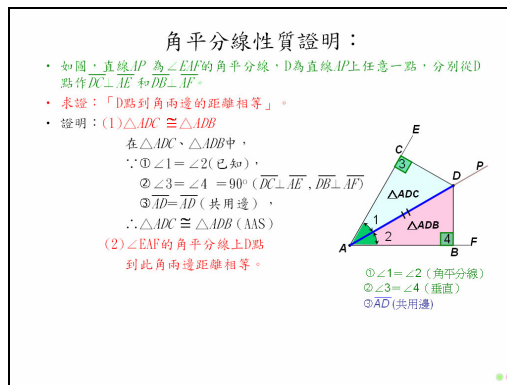


圖2-19 編碼時圖文與回憶時有效的檢索：角平分線性質證明的圖文引導

4. 建立必備的知識或引發恰當知識，作為了解與記憶新學習之基礎——在「全等概念的引進與性質說明」中，介紹完三角形的全等性質後，先作簡單的圖像與全等對應練習，待學生了解並熟悉相關性質後，進一步做全等性質的作圖與證明：

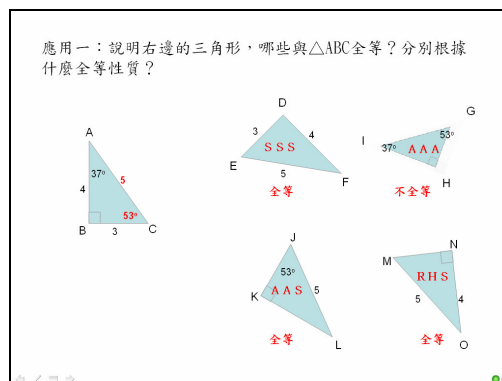


圖2-20 建立必備的知識或引發恰當知識，作為了解與記憶新學習之基礎：三角形全等性質的對應練習

5.新舊教材之間的銜接，必須是已習會舊有者，再與新教材做比較——在做角平分線作圖的證明前，先針對角平分線的作圖作複習，以便成爲已知條件：

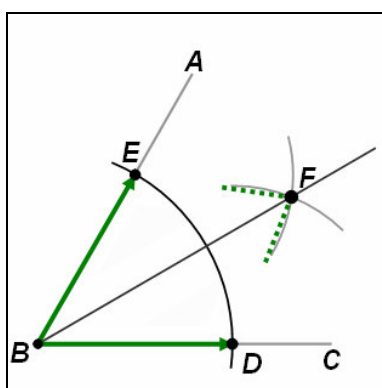


圖2-21 新舊教材之間的銜接：角平分線作圖的證明

6.精緻化的編碼使教材意義化，較易成爲長期記憶——爲使學生對於證明的形式確實作了解，並比較同題不同方式的證明，將證明文字配合圖形，在同一頁面作互動式的比較：

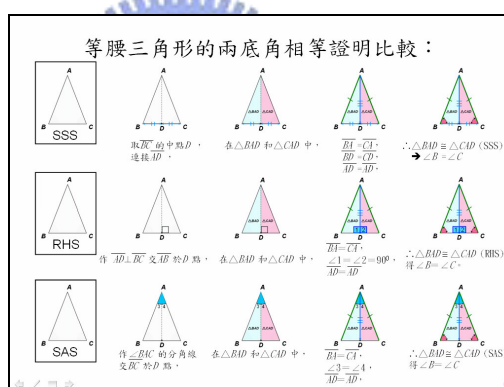


圖2-22 精緻化的編碼使教材意義化：等腰三角形的性質證明

7.強調教材的重要部分，引起學生注意並有助編碼與檢索——在作圖的過程中，針對學生較不易了解且易犯錯的地方做開關式標示，並加以說明：



圖2-23 強調教材的重要部分：AAS全等性質的作圖說明

2-3 基模、類比遷移及相關應用

2-3-1 基模與類比遷移

由前所述，基模在認知心理學上所佔的份量極重，本節將進一步說明類比遷移與基模的關係，接著進一步探討相關理論與其應用。

所謂的類比推理(analogical reasoning)是一種邏輯思考，又稱為比論(張春興，1989)，其必要條件是學習和推論，作為預測遷移的重要因素(Gick & Holyoak,1983;19878;Holyoak & Thagard,1989a;1989b; 黃幸美，2004)。而類比遷移(analogical transfer)，指的是解題者應用某一情境的知識或經驗，遷移到另一種相似的情境，藉以解決結構特徵相似的問題。而其主要目的是將已有知識推論到另一個新的情境，以使來源(source)訊息與標的(target)訊息行一對一對應；而來源與標的兩方面的訊息特徵，需具有某種程度的相似性，但是未必需要完全對應，即可將習得的知識作遷移(黃幸美:95)。

Stella Vosniadou (1989) 指出類比推理的機制為：

- 1.從知識系統提取一個熟悉的例子(來源)與觀念，使此例子滿足某些解題目標。
- 2.從來源引伸的概念對應到標的問題，使此概念確實配合標的問題。
- 3.經檢視、辨明概念適合標的問題後，便可結論該概念適合解題目標。

因為類比推理注重概念間的相似性，進一步建立彼此的對應，這與基模的形成的方式極為類似；而所謂的模擬情境，即利用某一情境的知識或經驗，遷移到另一種相似的情境，這更是類比遷移所具有的特性(Inagaki & Hatano,1987;黃幸美，2004)，是故類比遷移與基模的形成著實密不可分。

心理學家探討類比推理思考的認知處理時，常應用兩種方式來測量(Goswami,1991; 黃幸美，2004)，第一種為標準式類比問題，第二種為問題解決形式的類比推移問題：

標準式類比問題：也稱為傳統式類比問題，題目的設計形式為「A:B⇔C:D(?)」。類似智力測驗，其中D(?)的答案未知，解題者根據A與B的關係，推論C與D的關係，並所提供的多項備選答案中，選出具有適當邏輯結構的D答案。(Levinson & Carpenter,1974; 黃幸美，2004)。而研究者提供解題者傳統式類比問題時，常以文字、圖片或數字問題呈現，使用紙筆或口述方式進行測量，並不提供解題者提示。

問題解決形式的類比推理問題：面對問題解決形式的問題，解題者主要在於處理來源系統與標的系統的比較與對應，也是抽取問題表徵相似性，進行學習遷移。Novick和Holyoak(1991)更指出問題解決式的類比問題，比較重視良好地表現所需的知識，以及複雜的應用歷程。以下即為兩種類比推理的測量形式異同比較：

表2-3 兩種類比推理的測量形式比較：

	傳統式的類比推理問題	問題解決式的類比推理問題
欲測的能力	類比推理思考	類比推理思考
	「A:B⇔C:D」 (來源⇔標的)	A(問題)：B(解答) ⇔C(問題)：D(解答) (來源故事)⇔(標的故事)
評量重點	對題項相似性之注意與應用	對來源問題與標的問題相似性的比較與對應
問題設計取材	1.類似智力測的推理問題形式，偏向抽象的文字、圖形與數字題目 2.偏向成人觀點設計	取材自日常生活或課程學習相關的文字故事或問題陳述
測量方式	口述或紙筆方式，提供問題的材料與作答	1.以紙筆或口述方式，提供問題的材料與作答 2.提供操作活動，解決問題與作答
思考目的	解答問題	注意並應用兩問題的類比推論
是否提供提示	不提供提示或參考線索	於解決問題必要時提供提示線索
相關研究之例	Levinson & Carpenter,1974;Inhelder &	Crisafi & Brown,1986;Brown,Kane, &

隅	Piaget,1958;Sternberg & Nigro,1980 等	Long,1989;Gick & Holyoak,1983;Novick,1988 等
---	--------------------------------------	---

引自黃幸美，2004:102

最後提到有關類比遷移的使用限制，主要因學習者缺乏某些能力所致：

- 1.學習者缺乏問題解決相關的知識或經驗；
- 2.學習者的推論能力尚未發展成熟；
- 3.學習者不理解來源與標的之間的關係；
- 4.學習者提取了記憶的知識表徵，但是不知如何應用；
- 5.學習者缺乏洞察問題的睿智(sagacity)，對問題特徵相似性的區辨能力不足；或受表面相似性誤導，提取無關或錯誤的心智表徵，或受到功能固著的僵化思考影響，產生推論錯誤(Benjafield,1992;Lockhart et al.,1988;Novick,1988;Novick & Holyoak,1991; 黃幸美，1994)。

此外，要造成學習遷移，必須還要動機與需求足夠強烈的前提下，才能造成學習者願意主動學習。



2-3-2 類比遷移的相關理論

在將類比推理及類比遷移作一統整介紹後，本節進一步探討類比遷移的相關理論，主要區分有結構對應理論及基模歸納理論兩者，茲分述如下：

一、結構對應理論：

Dedre Gentner(1983;1989)及Dedre Gentner、Mary J. Rattermann和Kenneth D.Forbus(1993)認為，類比的定義為關係結構的相似性，比較特殊的是：將來源領域的特徵一對一對應到標的領域，並使此種相似性的對應存在於來源與標的之系統關係，使其具有相互應用的功能。

類比推理為注意來源與標的之間的系統對應，並找尋兩者的共同關係，進行高階關係配對，亦即類比的系統化原則。而表面相似性對後續的對應往往不具影響力，比起較難以直接從問題表面取得結構特徵的結構相似性，反而較不具直接影響後續對應與推論的關係(黃幸美，2004)。

二、基模歸納理論：

Holyoak及其同僚統整Sternberg的成分分析理論，提出基模歸納理論，闡釋類比推理問題解決，並強調人類使用抽象的知識結構，如何針對問題解決目標，提取類比表徵以對應解題的認知歷程。基模歸納理論認為類比問題解決，為由來源領域的解題目標與次目標模式，對應到標的領域之計畫模式。來源領域與標的領域的解答與觀念，可以形成新的抽象問題基模。問題基模的抽象化，乃透過比較兩領域問題解答的類比觀念，並將相似的高階觀念儲存於長期記憶(Holyoak & Thagard,1989a;1989b,Palmer,1989;黃幸美，2004)，這與上節中所提的記憶歷程不謀而合。人們在解決一般類比推理問題時，第一個步驟為趨近可使用的知識記憶。知識記憶包含長期記憶、知識陳述性記憶與程序性記憶，三者相互轉換的歷程，其可類比為知識的累積(knowledge compilation)。

綜上所述，人類在學習歷程中，運用心智表徵來表徵知識內容、觀念與程序，儲存在記憶中以備提取，此種心智表徵結構即為知識基模，如下圖所示：



圖 2-24 知識基模建構的歷程（引自黃幸美，2004:114）

而知識基模為由已經學會的問題表徵構成，幫助解題者預測新問題的解題目標(Lewis & Anderson,1985;黃幸美，2004)。在解決問題時，基模提供類比遷移的基礎，解題者根據標的問題的目標、特徵、屬性相似性，提取基模訊息，決定遷移反應。知識基模並透過不斷地學習與問題解決的經驗，逐漸擴增其知識表徵。故一個人的學習程度及其對知識編碼儲存的方式等，皆可能影響其基模的建構品質，間接影響類比解題時，對知識訊息的了解與應用(Gick & Holyoak,1987;黃幸美，2004)。

2-3-3 類比遷移在本研究中的應用

在本章的最後，要探討類比遷移與本研究的相關性。

茲提出本研究中，幾個與類比遷移理論相關的部份：

- 1.實物操作活動，對兒童知識基模的建構是重要的輔助工具：
- 2.在全等三角形概念形成的同時，利用數位化釘板作全等三角形的比較，一方面減低實物操作的困難度及成本，另一方面透過電腦作計算，可以立即得到面積相等的事實。

在結構對應理論中，類比的定義為關係結構的相似性，將來源領域的特徵一對一對應到標的領域，並使此種相似性的對應存在於來源與標的之系統關係，使其具有相互應用的功能：

在全等性質的介紹中，符號的理解與排序，將是構成全等性質是否成立的重要原因，也是比較不同全等性質異同及相似性的關鍵所在；其中包含了圖形與符號的對應，不同全等性質的對應，以及全等或不全等後延伸的應用與比較對應。

在基模歸納理論中，認為類比問題解決，為由來源領域的解題目標與次目標模式，對應到標的領域之計畫模式。而來源領域與標的領域的解答與觀念，可以形成新的抽象問題基模。

在全等性質的證明中，來源領域的解題目標，常是我們的已知條件，至於次目標則是所根據的全等性質，需補充的其他條件；至於標的領域則是根據證明出來的三角形全等性質，預作應用的相等性質。最後透過歸納，可以得到來源領域與標的領域的解題模式，形成全等證明的問題解決基模。

類比推理問題解決與學習的四個認知歷程，包含建立表徵、注意並提取可應用的線索、對應以及學習與應用所產生的解決方案：

在全等性質的作圖中，透過老師反覆操作、學生實作的方式，先建立全等性質的構圖概念，接下來透過整合版確實理解每一步驟的作圖方式及內涵，才能進一步應用於預解決的相關問題。

最後是標準式類比問題及問題解決形式的類比推移問題的比較，一般而言，在全等概念的引進及性質說明中，大多數的問題較屬於標準式類比問題；而全等性質的應用中，就以問題解決形式的類比推移問題居多；至於全等性質的作圖中所呈現的問題，則視其題目類型及難易度，兩者題目皆有其可能。

2-4 多媒體學習(Multimedia Learning)理論

所謂的數位多媒體，根據羅倫斯(2002:16)所整理，所指的是受一套功能強大的電腦硬體與週邊設備所控制(computer controlled)、可以處理綜合(integrated)視訊與音訊的軟體與介面、可以讓使用者與多媒體產生互動(interactive)、所有的資料均以數位化(digital)形式呈現、以及可以在單機上執行也可以放在網路上傳輸共同使用(stand-alone or networked)的數位內容（信世昌,1997;鍾樹椽,1993;羅倫斯,1993;Fluckiget,1995）；正因其受電腦軟硬體影響甚鉅，本研究中的主要軟體PowerPoint 普及率高且易於取得，硬體的需求也不高；至於視訊、音訊的處理，以及教材數位化呈現的優缺點，則將於以下各節中分別加以論述。

2-4-1 多媒體的元素與呈現方式與組成特性

依上所述，多媒體可以呈現給使用者的元素應包含：文字(text)、圖形(graphic)、靜止影像(still image)、圖片(picture)、動畫(animation)、影片(video)、音樂(music)與交談(interaction)九大因素（羅倫斯，2002）；此外與媒體相關的研究發現視覺碼與語文碼雙重模式的學習，學生不只可以看也可以聽，……，因為學習者產生了更多認知管道，使資訊檢索更為容易(Dwyer, 1978；Mayer & Anderson, 1991；Paivio, 1991；Pick & Ryan, 1971；引自羅倫斯，2002:48)。而在研究者所呈現的教材中，比重佔大多數的部份應為文字、圖形與動畫、聲響與交談等，茲依序分述如下：

- 1.文字：除原始內容可依使用需求或學生程度做完整或部份呈現，配合HighLight重點式標記，以及循序式撥放與互動式按鈕的設計將使得教材更為彈性，在學生易犯錯的地方以開關加以重點標記，茲舉例如下：

2. 分別以E、F為頂點， \overline{EF} 為一邊，在L的同側各畫出
 $\angle E = \angle B$ ， $\angle F = \angle C$

圖2-25：文字的標記強調：「全等性質的作圖」

- 2.圖形與動畫：幾何證明最重要的關鍵在於圖形與文字的相輔相成，這也是數學科教材做資訊融入教學常見的多為幾何教材，以及本研究之所以探討此章節的主要原因之一。而透過圖形與動畫的交錯出現，可使得學生的注

意力較為集中，經由滑鼠的點選可使學生知道目前的重點所在，茲舉例如下：

角平分線作圖證明：

- 如圖是 $\angle ABC$ 的角平分線尺規作圖痕跡，
- 求證：「直線 BF 是 $\angle ABC$ 的角平分線」。
- 證明：連接 \overline{EF} 、 \overline{DF} ，

在 $\triangle BEF$ 及 $\triangle BDF$ 中，

$\overline{BD} = \overline{BE}$ (相同半徑)，

$\overline{EF} = \overline{DF}$ (相同半徑)，

$\overline{BF} = \overline{BF}$ (共用邊)，

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle BDF$ (SSS)

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)

即直線 BF 為 $\angle ABC$ 的角平分線

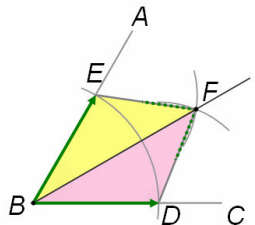


圖2-26：圖形、文字與動畫的搭配使用：「全等性質的證明」

3.聲響與交談：單僅文字與圖像的呈現，並不能使師生真正達到互動式的交流，教師仍應就學生反應與評量結果，適時調整教學速度與教材內容，或改以不同方式與學生作溝通，真正達到教學的效率。

2-4-2 知識庫的組成特性



人類的知識庫區分文字、聲音、視訊及想像四類，若能從以上的知識庫檢索一段知識，則稱這個人了解這個知識或已學會(Bagui, 1998；引自羅倫斯，2002：49)。茲分述如下：

表 2-4：各項知識庫組成特性

文字	聲音	視訊	想像
<p>獲取知識最主要媒介，優點在：</p> <p>1.能依學習者學習速度被處理；</p> <p>2.能來回被檢視複習；</p> <p>3.能被儲存且</p>	<p>比文字容易引發學習的感官注意與接收，並與圖或照片相配合而不會分心。(Shih & Alessi, 1996)</p> <p>但除非再說一次或重播，其稍縱即逝為其不</p>	<p>視覺可令學習者將所見與先備經驗相連結，提供內容線索來獲取新的資訊及提高學習效果。</p> <p>視覺資訊使抽象觀念變為具體，支援整體的</p>	<p>使語文資訊與非語文資訊相互有效的連結，由個人所控制，同時形成一種精緻的策略。</p> <p>這些策略可以建立內部資訊與工作記憶以及外部新知與</p>

長期保留； 4.在電腦上也 可以有效的被 儲存及傳播； 5.文字有字 型、大小等變 化。	便之處。	了解與形式的 意義 (Hodes,1992； Meskill,1996)， 形成提高學習 動機的原因。	先備知識在事 物上增加意義。
--	------	--	-------------------

資料來源：出自羅倫斯（2002:49）

很明顯地，構成多媒體教材的因素即是根據各項知識庫組成特性而來，以說明全等性質「SSS」為例，學生透過文字自行閱讀「兩三角形的三邊分別相等，則此兩三角形必全等」的內容，在分別對應的特性上，無法作確實理解其意涵；需配合圖像呈現加口語化說明，並輔以實際作圖對應，方能使學生理解，並形成知識加以應用。



2-4-3 數位化呈現的優缺點

根據羅倫斯(2002：35-39)所提，多媒體學習可獲得的教學相關結果有以下幾點：

- 1.學習效果佳：使單調乏味的教學畫面成為如電視畫面一般的生動活潑。提供安全的學習情境，隨著學習者的步調按部就班的造成良好學習效果。「多媒體維持了電腦『互動性』的特色，具有接受使用者指揮的反應能力，可以根據使用者的要求執行不同的工作。而多媒體最吸引人的地方就是在於使用者和媒體之間具有互動性，使用者才是真正的主角，這一點是傳統電子媒體所望塵莫及的。」(PC Magazine,1992；引自羅倫斯，2002)
- 2.說服力強：多媒體可以統整一種以上的媒體，使說明更生動，達到引起動機的效果。生硬難懂的數字資料，可以使用多媒體呈現成為含彩色動

畫的統計圖；同時使用多重刺激來傳達訊息的效果可能不是單一媒體可以比擬的。

- 3.整合完備文件：多媒體集合書籍、圖形、模型等媒體，並加入一些其他媒體所沒有的動態資料與各種素材之交互影響的功能。並且多媒體可取代書籍佔用的龐大空間，並且其資料的儲存、檢索、喚回、搜尋等特性更給人們帶來莫大的便利與安全。
- 4.感官整體互動：多媒體系統可創造出視訊、音訊、操作的互動，並同時接受與發出訊息的功能。多項呈現至少比單調直線式的呈現來得容易引起動機、集中注意力、增廣視野。
- 5.創造想像力：想像是一種精緻的策略，尤其是視覺的部份，可促使資訊的整合及產生高層次學習成為抽象的觀念。(Edelstein,1981；引自羅倫斯，2002)

除此之外，根據陳淑英（1986:31-32）所提，視聽教材的優點尚有：

- 1.給予活的經驗，即可獲得具體性經驗，由於視聽媒體都是感官可直接感受的外在事物，均具有形象與事實。
- 2.可簡化複雜的資料，使易於接受。例如重點的摘要，圖表的解說等。
- 3.可克服空間限制，將遠處發生的事件，迅速而正確地呈現於眼前。
- 4.不受時間的限制，過去的事件或歷史上現象，就如同目前所發生的事一樣可看到、聽到。
- 5.可節省教學時間，符合經濟原則。教師可節省板書的時間或語言的說明，使教材一目瞭然地呈現在學生面前。

綜上所述，數位化教材比傳統教學的優勢在於其不受時間、空間的限制，並透過視聽、操作的感覺，使學習者感官整體互動，進一步節省學習時間，加強學習效果。

至於視聽教材缺點的部份，陳淑英（1986:32）也提到了以下幾點：

1. 易流於娛樂性。
2. 易本末倒置，以為使用此輔助教材，則任務已經完成；
3. 易變成直接經驗的代用品；
4. 由於過於簡化複雜事像，以致不夠深入無法使學生用心研究；
5. 對教材內涵之宣傳或意識形態，難有冷靜的批判態度。

除此之外，根據吾人經驗及專家評鑑所給予的建議，尚有以下幾點需克服之缺點：

1. 器材維護的負擔，無法是一套器材多人共用，或是一人一套器材的考量，均有保管疏失、使用管理問題或所需費用龐大之慮；
2. 使用視聽器材若過於頻繁，可能相對的師生感情互動減少，若稍有不合意處，也容易造成衝突的問題。

因此吾人透過視聽效果設計數位化教材的同時，需同時兼顧其視聽操作及互動的優點，並減少不夠深入或本末倒置成為直接經驗的代用品的缺點。若真能於使用時多加注意防範缺點，可能產生的問題與數位教學的效能比較起來，實是瑕不掩瑜。

2-4-4 課堂式數位教材與一般數位教材的差異性

拜科技的多元化與網路資源的發達，數位教材也隨之日新月異，讓學習者或施教者有時甚至還有無所適從，不知如何取舍的困擾。然而在學校環境裏，課堂上的教學仍應以教師為導向，才能真正掌握學生學習的進度，視狀況予以補救或加深加廣。然而一般制式的數位教材，多以學生為導向而作互動式呈現，並未全盤考慮學生差異性，且在製作上費時費力，若無相關知識背景做為基礎，無法針對其內容做適性化修正；因此一套以教師為導向，製作方式簡單的數位工具便呼之欲出。

隨著電腦的日益普及，PowerPoint的操作幾乎是每位初步電腦的人所必備的技能。而以PowerPoint製作教材內容的最大好處在於軟體的容易取得與方便上手，而且軟體的方便操作，日後在教材的修改與分享上都不成問題。如今再加上InforMath團隊所開發的MathPS外掛程式，藉由其強大的繪圖功能與互動式按鈕的整合，使得數學科數位教材的製作更為容易與精確，並能針對學生程度做適性化設計。研究者跟隨團隊共同學習數年，多次針對課本或網路素材做重製或整理，於施教時均能收到不錯成效。多元化的按鈕，使得教材設計更為靈活；透過動畫呈現與教師說明，輔以必要文字，若能有適當教材，確實能收事半功倍之效。

此外，一般數位教材多針對單一學習者特性而設計，並由學生自行操作以達到學習的功効，在課堂上未必能針對全體學習者的整體性與同步性做統合；且在課堂上的授課時間有限，由教師掌控學生的學習進度與步驟便更加重要。考量每個學生的學習、空間能力及性別上的差異、感官與認知型態的不同，先備知識是否不足等因素，使用PowerPoint結合MathPS軟體，由於其以頁為單位的特性，配合教材作循序與互動式的交錯呈現，將使得教師更容易掌控授課時間，同時兼顧課堂上所需的彈性與多元；結合課堂上教師口語表達的自由度，將使得學生的學習更有效率。茲以表說明如下：

表 2-5：學習者/教師授課不同導向之媒體教材特質比較

學習者 / 教師授課不同導向之媒體教材特質比較		
導向	學習者為導向	教師授課為導向
地點	單一電腦，軟體 / 網頁	教室大銀幕
面對的對象	每一個個別學生	全班同學
教材特性	教材能與學生互動，有些聰明 教學流程規劃清楚 動態呈現，不易設計，適性化不易	教材呈現模式單純，設計簡單 教師主導呈現的順序及詮釋 詮釋即時、有彈性且多元
互動特性	學習者依個人特性啟動學習內涵 個別性互動 可重複操作	由教師主導，同時與全班同學互動 需同時兼顧全班的整體性與個別性 整體同步性強、重複操作性低
呈現模式	文字、圖像、動畫、聲音 軟體模擬、軟體操作	文字、圖像、動畫、聲音、 軟體模擬、軟體操作、肢體語言
	自我掌控式視覺呈現 系統掌控式視覺呈現	系統掌控式視覺呈現 教師掌控式視覺呈現
	一般以文字、圖像為主，語音為輔	一般以文字、圖像與語音同等重要
設計教材 考量因素	學習者之個別性	整體性、同步性
	(如：學習能力、空間能力、性別差異、感官型態、認知型態、先備知識)	
教材單位	以檔案為單位，完整性高 易導覽，銜接與重整性強 以頁為單位，性質與右同	以頁為單位，主體經常會被切割 不易導覽，銜接與重整性較弱

資料來源：出自陳明璋簡報（付梓中）

以往數學科製作數位教材，由於強調圖文整合的重要性，多以幾何素材為主，然而在互動式按鈕的功能加入後，一般性的討論素材，只要經過設計，亦能在PowerPoint上做完整呈現；因此教材上的限制便影響較小了，例如在「全等性質的作圖」後，以開關的設計，使學生學習過的內容，以填充的方式呈現，學生回答的順序便可不受限制，以圖說明如下：

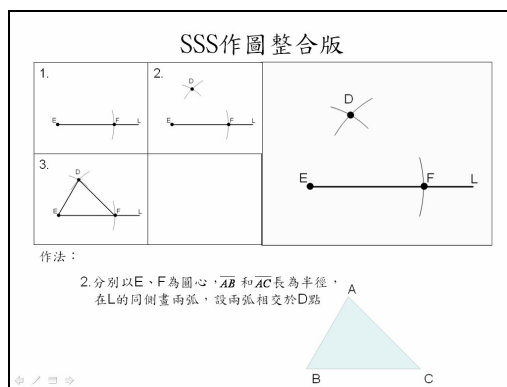


圖2-27：互動式按鈕的設計：「全等性質的作圖整合版」

2-4-5 限制與解決之道

王英洲（2003）指出影響教學媒體融入教學的關鍵因素如下：

1. 學校的教學媒體設備：包含教學媒體的軟、硬體設備是否合乎需求，教學媒體環境的整體規劃及教學媒體資源的適當分配等。
2. 教室教學媒體的設置：必須充實普通教室內的視訊硬體設備、電腦與網路設備，以讓師生在教室可以隨時地運用設備進行教學活動。
3. 教師的教學媒體素養：教師的媒體素養，將影響到教學媒體融入教學的品質與教學模式的發展，所以，必須強化教師推展教學媒體融入教學的意願，並檢視教學媒體研習或培訓的課程內容，是否合乎實際應用需求？再者，師資培育機構應對相關培育課程進行調整，以提升初任教師的教學媒體應用能力。
4. 豐富的教材資源：建立教材資源中心的網站，提供教材、教案、動態資料庫及公共討論園地等，增進使用教學媒體的靈活度及流通，更可因應課程及教材之變動，隨時修改教材內容以合乎教學需要。

針對以上因素，若要在課堂裏以PowerPoint呈現教材內容，第一個問題在於學校硬體的限制。若教師能自行準備筆記型電腦，藉由單槍式投影機的呈現；或是利用電腦教室廣播系統的呈現，才能使教材有效地對全班學生呈現。

關於教師的教學媒體素養部份，雖然PowerPoint方便上手，然而部份圖文的選取與圖層的觀念，以及MathPS的操作，結合開關與動畫製作的功能學習等；仍需透過簡單教學或學習手冊，才能在學習後，依教學習慣與學生需求製作適性化教材。

最後是教材資源的部份，互動式按鈕的設計雖使得教材設計不再受限於循序呈現，然而仍需避免「為融入而融入」的教學，真正選擇適合與需要融入的內容做教材，才能使教師真正有效率做融入，學生有興趣做學習。



2-5 教材設計原則

在教材的設計原則上，根據邱建偉(2003)、蘇柏奇(2006)依據視覺原理、設計理論及數學教材的特性，所提出的「數學簡報十大設計原則」：層次性、對比性、比較性、定位性、演化性、結構性、步驟性、關連性、互動性及隨機性，茲針對本教材的概念及題目設計遵循相關的原則作說明：

- 一、層次性：在「全等性質的作圖」中，SSA作圖及其性質說明，因需利用顏色區別等腰三角形及角度的關聯，其主從的關係，需有層次的概念，主要重點在圖形整合的部份，搭配輔助文字的說明，由教師加以講解方會清楚。

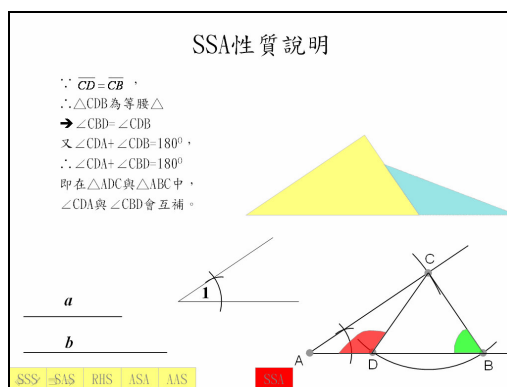


圖2-28 全等教材之層次性

- 二、對比性：在「全等性質的應用」中，摺紙問題的證明，用到翻面以及原圖的淡化，做為新舊圖的對比，一方面可以看到原圖的架構，另一方面得以比較新圖相比較並計算。

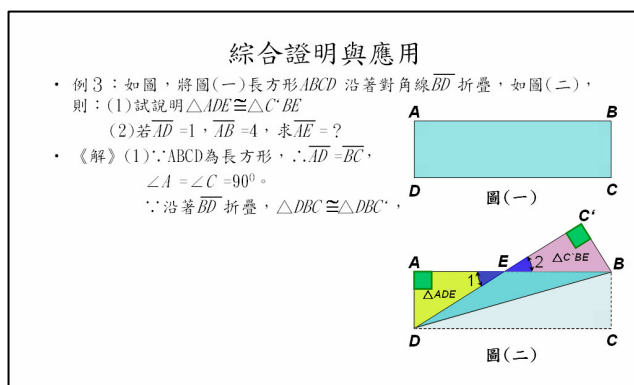


圖2-29 全等教材之對比性

三、比較性：在「全等性質的應用」中，垂直平分線作圖的證明，利用上下圖並列呈現作比較，得知前後證明的連貫性與相似性，方便學生作理解，達到類化與學習遷移的效果。

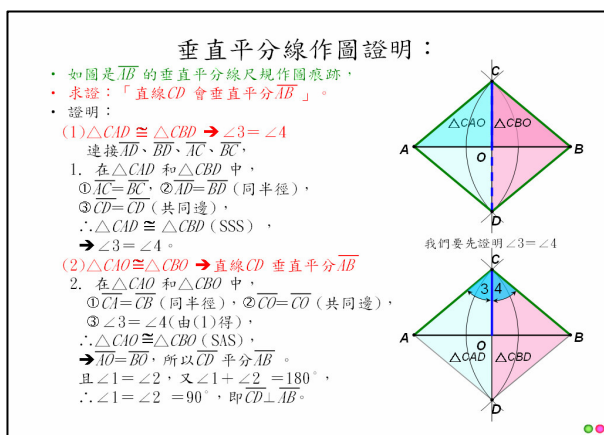


圖2-30 全等教材之比較性

四、定位性：在「全等性質的作圖」中，因考慮上下圖的連貫，作法分頁依次出現，加上尺規的移動與弧線的同步，一方面顧及教材的連續，另一方面要將教材作適當切割，然而圖形前後的連貫性，必須在頁與頁間作精準定位，而步驟的定位更是在尺規作圖中，所不可或缺的。

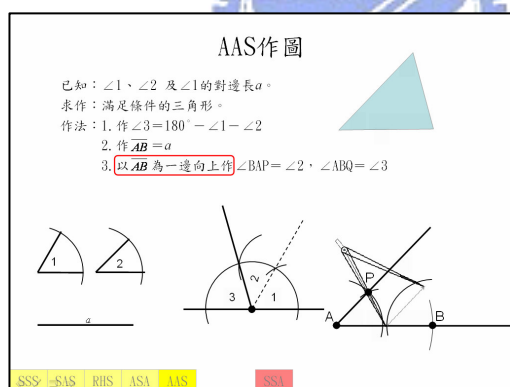


圖2-31 全等教材之定位性

五、演化性：在「全等概念的引進與說明」中，全等條件的探討，即是透過演化性，利用開關在同一位置將條件逐一增加，比較原圖與新圖彼此的差異與何時會全等，藉以了解最少條件的探討。

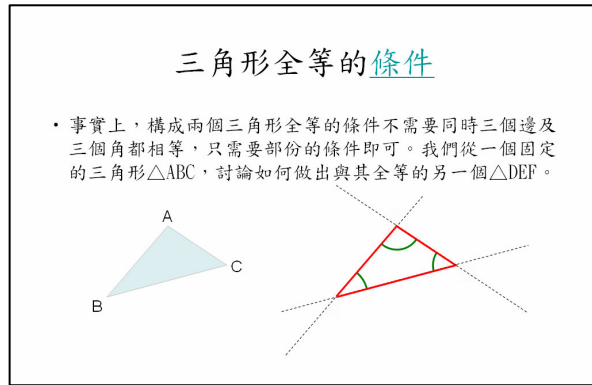


圖2-32 全等教材之演化性

六、結構性：在「全等性質的應用」中，在全等性質的證明前，各幾何圖形的分析，相同結構具有相同顏色或標記，透過編碼與證明相呼應，輔助抽象概念的呈現，並根據「接近律」的原理，說明文字與圖形相接近，都是結構性的應用。

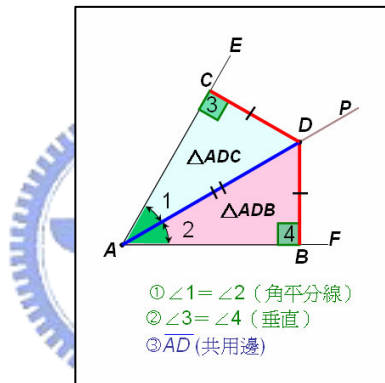


圖2-33 全等教材之結構性

七、步驟性：在「全等性質的作圖」及「全等性質的應用」中，作圖的概念及證明的過程，都需有步驟性的概念，此外為求整體作圖的連貫，相關頁面間的定位及定色，將使步驟式的呈現更加具有效果，並便於前後步驟的再製與比較，以增進學生的理解。

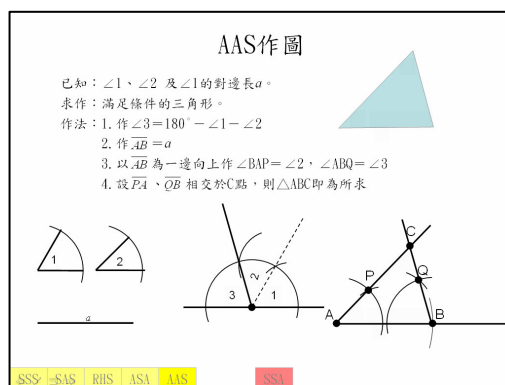


圖2-34 全等教材之步驟性

八、關聯性：在「全等概念的引進與說明」中，邊與角所代表的符號，透過適當的標記與符號，讓相關的物件具有共同的性質或類似的視覺要素，得以了解並作全等性質的相互比較與關聯。

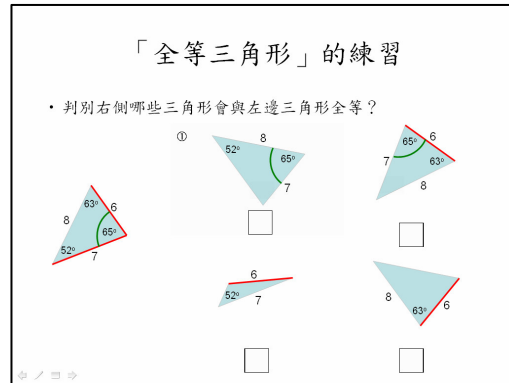


圖2-35 全等教材之關連性

九、互動性：在「全等概念的引進與說明」中，透過激發式動態呈現，造成師生問答時的互動，強化學生的理解與學習；所有邊角的互動式開關，即為互動性的最佳例子。

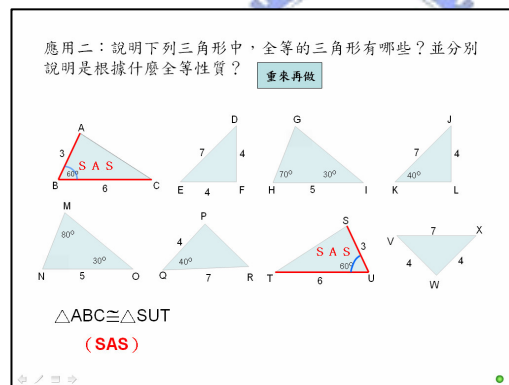


圖2-36 全等教材之互動性

十、隨機性：在「全等性質的應用」中，已知條件的說明，以及待證條件的比較，尋找補充條件的過程，在教師做過適當引導後，可由學生主動發現，由教師依學生發現順序隨機點取開關，造成學習的自主性，而非制式地由教師循序告知全等條件的被動學習，這也是本教材在設計時與其他數位教材有著最大差異之處。

角平分線性質證明：

- 如圖，直線 AP 為 $\angle EAF$ 的角平分線， D 為直線 AP 上任意一點，分別從 D 點作 $DC \perp AE$ 和 $DB \perp AF$ 。
- 求證：「 D 點到角兩邊的距離相等」。
- 證明：(1) $\triangle ADC \cong \triangle ADB$
 在 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ADB$ 中，
 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知)，
 $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ ($DC \perp AE$, $DB \perp AF$)
 $AD = AD$ (共用邊)，
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$ (AAS)
 (2) $\angle EAF$ 的角平分線上 D 點
 到此角兩邊距離相等。
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$
 $\therefore CD = BD$ (對應邊相等)，
 故 $\angle EAF$ 的角平分線上 D 點到此角兩邊距離相等。
 ※ 亦即角平分線上任一點到此角兩邊的距離相等。

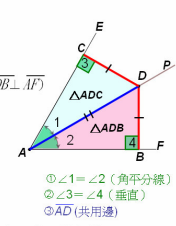


圖2-37 全等教材之隨機性

經比較研究，在「全等概念的引進與性質說明」中，較偏重在比較性、定位性及互動性；「全等性質的作圖」中，對比性、比較性、定位性、演化性、步驟性及互動性為其共同特性；「全等性質的應用」中，大多具備對比性、比較性、演化性、步驟性、關連性及互動性等原則。



第三章 國中數學幾何全等教材

本章在說明數學符號與教材的關係，並進一步說明Van Hiele的幾何發展層次與Piaget的數學分類能力發展，接著探討全等教材的結構，根據能力指標所設計的課程，最後再將傳統教學與數位教學的落差作比較。

3-1 數學能力與幾何思考的發展層次

3-1-1 數學上的視覺與言辭符號

就前所述，人類的知識庫區分為文字、聲音、視訊及想像，而視覺符號和言辭符號在數學上都很常用，有時獨立出現，有時混合出現。教師在授課時伴隨著文字符號、圖形及教師口語的傳達與解釋，方能使學生產生注意，進一步透過知覺的過程形成記憶。而為使短期記憶進入長期記憶區，透過視覺符號的輔助是必要的。Piaget曾指出，即使我們認知一件事物這麼簡單的過程中也隱含著某種概念，因此一件物品的視覺印象可以看成一個符號，雖然這個符號所代表的概念（也就是這一類物品的概念）相當低階。

在「全等概念的引進與性質說明」中，若沒有圖形作比較，部份簡單的概念或題目計算亦有所困難，因此圖形對說明整個問題情況是有所幫助的。

應用三：如下圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ，若 $\overline{BC} = 13$ ， $\overline{DF} = 12$ ， $\overline{EF} = 3x + 4$ ， $\overline{AC} = 2y$ ，則：

- (1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等？根據什麼全等性質？
- (2) $x = ?$ $y = ?$
- (3) $\triangle DEF$ 的面積？

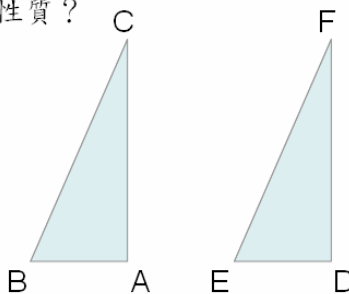


圖3-1 視覺符號的幫助：「全等性質的概念應用」

然而視覺印象雖然很基本，但不借助口語或文字的話有時不易溝通。因此言辭思考（以言辭符號幫助思考）比視覺思考（以視覺符號幫助思考）有利。當我們聽到自己向別人說話時（這是利用符號在做溝通），就和對方同時自覺於相同的概念（當然必需所使用的符號對我和他具有相同意義）。於是把自己的概念讓（說）給別人聽就等於把這個概念再和自己溝通一次。這是言辭符號的雙層功用。

因此言辭思考可能比較社會化，因為它的結論不是個人自我的意見，還包含別人思考的結論或互相溝通之後的綜合結論。因為視覺是個人的事，言辭是互相的事，不論在具體事物或抽象符號階段。這也是以下所提兩種符號的主要不同之處（Skemp,1987;引自陳澤民，1995:104）：

1. 視覺符號：不易溝通、傾向個人。
2. 言辭符號：易於溝通、傾向綜合。

至於圖形和語文這兩種符號的主要差別是：前者是這個符號相關概念類別裡的一個典型元素而已，而後者則是一般泛稱。因此視覺符號和它所代表的概念更為接近。視覺符號和概念的接近性有利有弊，利是如此可以強烈提示這個概念的通性，尤其當我們把若干相關概念一起用適當視覺符號表示時，這裡視覺符號比言辭符號更能顯示這些概念間的關聯。

因為幾何教學要將幾何圖形畫出來才能和別人溝通，使學生更容易瞭解，例如：「一個圓，過圓外一點作兩條切線，作通過兩切點的半徑」的概念，沒有透過圖形，學習者無法了解其真正意義，而且需注意的是我們畫出來的固然是一個特定圓，但概念所涉及的對象卻是一般的圓，不限制大小。言辭符號可以明顯表示這一點，而視覺符號辦不到，所以利用圖形來討論時要小心翼翼。就因為圖形太具體了，所以我們必須自己抽象一些東西。

爲了彌補MathPS製作的教材在這方面的不足，研究者搭配The Geometer Sketchpad(簡稱GSP)軟體，將相關概念作動態呈現並及時運算，真正達到所謂的一般性：

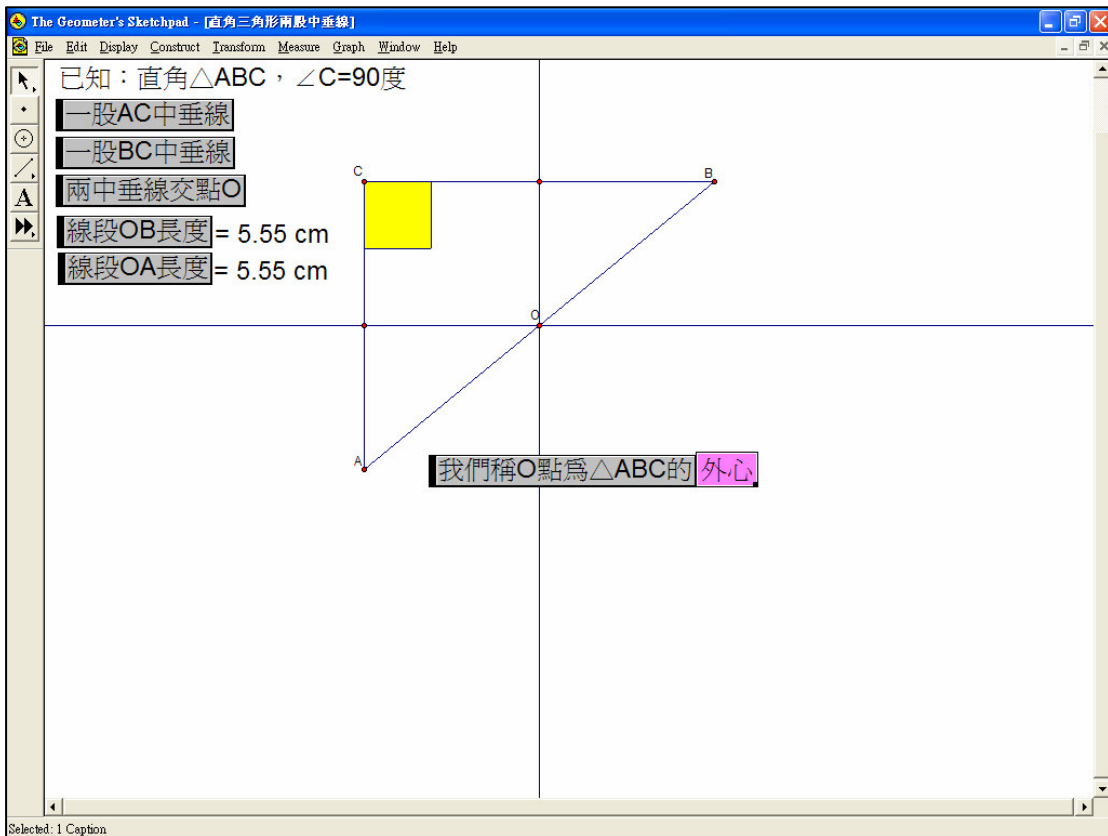


圖3-2 視覺的動態呈現與及時運算：「直角三角形兩股中垂線特性」

事實上，只要符號預先約定得當，將比言辭符號要簡潔、生動得多，例如在三角形的全等中，透過符號的標記及顏色、粗細的改變，將使線段及角度相等更能讓學生一眼就看出結果：

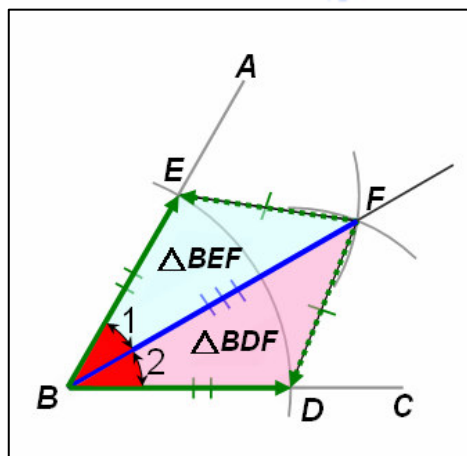


圖3-3 符號的適當使用：「三角形全等性質的應用」

而透過圖形來說明一個性質的證明及逆證明亦更加簡潔明瞭：

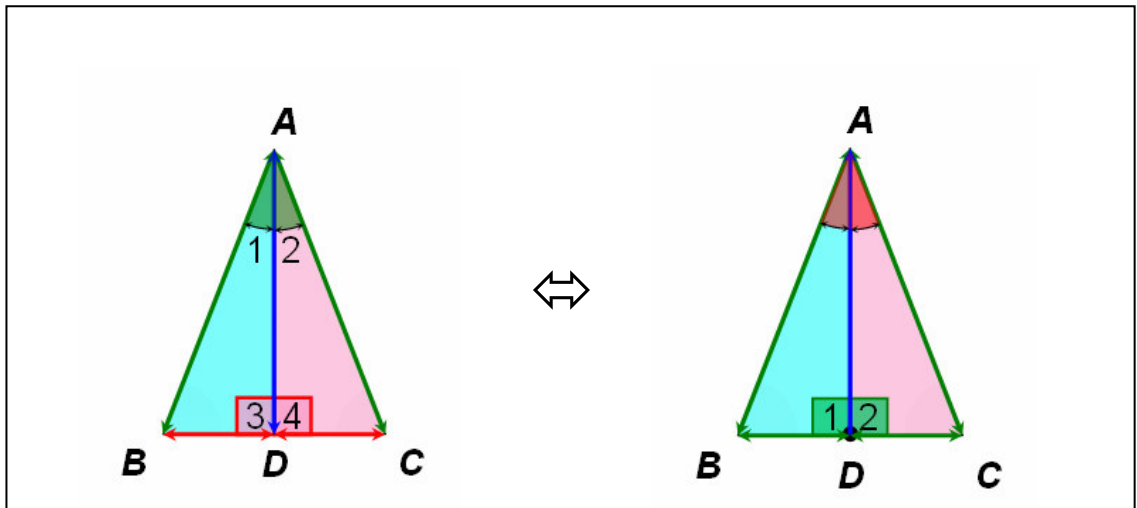


圖3-4 透過圖形說明圖形的證明與逆證明：「等腰三角形的性質證明」

然而又要利用圖形做邏輯論證、又要注意圖形的某一部份，而後面這件事又是應前面這件事的需要而產生，便會產生些微困擾，這時便適合以動畫方式作循序呈現：

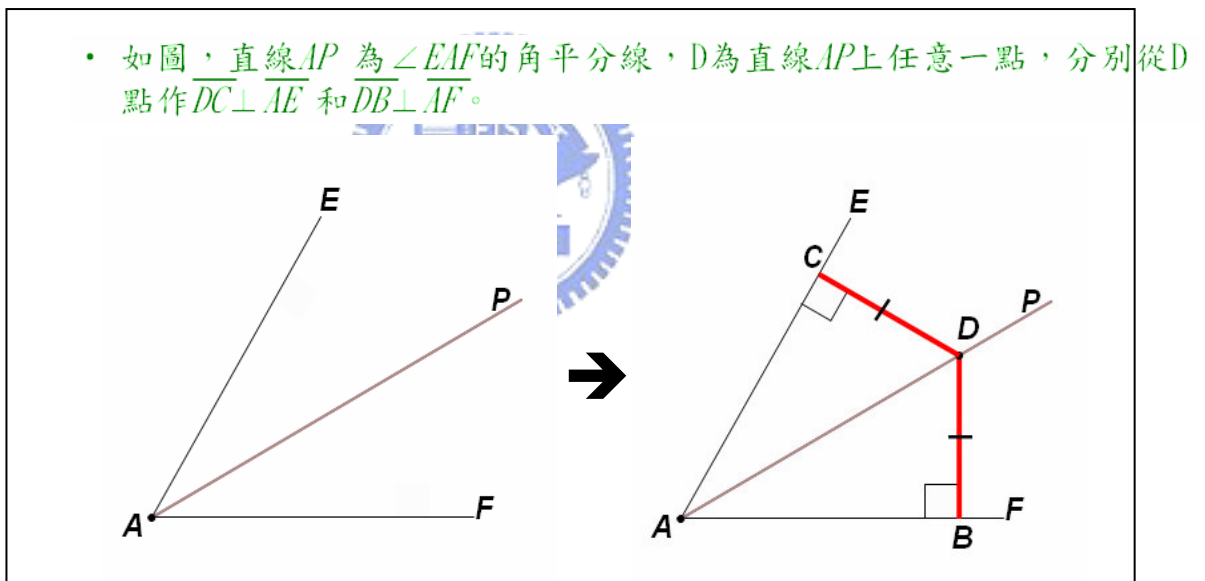


圖3-5 透過圖形動畫作邏輯論證：「角平分線的性質證明」

同時配合後續GSP動畫一方面改變 $\angle EAF$ 大小，一方面改變 D 於直線 AP 上的位置，發現 $\overline{CD} = \overline{BD}$ 的一般性，這也是視聽教學恰好彌補傳統教學較難呈現的概念，最大的優點所在。

最後提出兩種符號的性質，以及它們相輔相成的功用：

表3-1 視覺與言辭符號的區別

視覺符號	言辭符號
是一種空間性質的抽象，例如形狀、位置。	它所抽象的性質與空間位相無關（例如數字）。
不易溝通。	易於溝通。
傾向個人思考。	傾向綜合思考。
有統合功用，顯示整個概念結構外貌	有分析功用，顯示整個概念內在
可以同時傳達很多概念。	細節
直覺式地。	逐步地傳達一個一個概念
	邏輯式地。

資料來源：出自Skemp,1987;引自陳澤民，1995:104

Einstein(1879-1955)曾在寫給Hadamard的一封信中說，他自己喜愛的意象思考是視覺及觸覺的，而且“只有較低層次的思考才要費盡心力去找尋約定成俗的文字或符號”。我們可能教給學生分析能力、邏輯論證、社會化思考，然而個人的思考、內在洞察力、綜合能力等能力卻是靠學生自力開發的。如果我們能發現這兩種符號更多的功用，並且更熟練於選擇、應用它們，必然可以幫助我們發展上述兩種研究數學不可或缺的能力。



3-1-2 數學能力與基模

心理學者對於數學能力的本質，比較傾向以理論描述何謂擁有數學能力；而教育學者通常以些微不同的問題來尋求解答，數學教育觀點具有描述性及處方性的取向。

綜合兩種觀點，數學能力包含以下成份：

- (1)陳述性知識
- (2)程序性知識
- (3)概念的知識
- (4)估算能力
- (5)繪圖與形成模式的能力

(6)問題解決

陳述性知識指的是個體對於數學事實的知識，具有數學天賦的個體通常能夠不需要花費太多的時間提取這些事實，是故陳述性知識被認為是數學才能必要但非充份的條件(Byrnes,1992)。例如在幾何的三角形全等證明中，需先了解何謂三角形、邊、角，以及三角形的基本性質（如三內角和為180度），即為所謂的陳述性知識。

程序則是達成某項目所需的一組操作或行動，擁有數學程序性知識的個體，知道如何使用一系列的行動、操作或步驟以達到特定的結果，其中如何完成幾何證明題即為此類型。事實上對一組有限的數學物件進行一般特定程序所得到的答案，最後將成為個體陳述性知識的部份基礎。而且某種特定形式的程序會有一些「系統規則」必須照著特定的步驟執行(Hiebert & LeFevre, 1987)，以產生正確的答案，例如在三角形的幾何證明中，常需計算三角形的各個對應角，因此除了內角和為180度的陳述性知識外，尚須有計算未知角度加或減法的概念，依程序予以完成；而若計算對應邊及對應角需用到解方程式，程序性知識更是不可或缺。

至於有些較高層次的抽象概念則利用策略和捷思法。所謂的策略是一種計劃，主要是以大綱描述問題要如何解決，包含關於整體目標的詳細說明，以及為達到整體目標要先完成的次目標。例如在全等三角形的幾何證明與計算中，要找到符合全等條件的三個條件（大綱），常需用到代數運算及其餘幾何性質的證明或計算（勾股定理、多邊形內外角、垂直與平行、分角線與中垂線等性質），便是我們要先完成的次目標。

心理學者與教育學者常假設數學能力需要豐富的程序性知識為基礎。數學能力包含了在正確的時機中，將正確的事實、程序和策略召喚出來的能力。知道某個數學事實及知道這個事實為何屬實，與知道如何執行某個程序及知道該程序為何在特定的情況下需要使用，均屬於兩件非常不同的事。例如全等三角形的幾何證明中，知道SAS的數學事實，與SAS全等為何屬實，屬於兩件不同的事；而SSA不一定全等與RHS全等的特定情況，亦屬於不同的兩件事。

而在數學類別及定義能力的建立中，需要一特別重要的類型便是基模（schema），是某件事物最常見之所有事例共同處之抽象表徵。尤其是當需要用到類比或相同解決方法時(Byrnes,2001;Mayer,1982)。當問題被認為是屬於某特定類型時，問題的解決方法將會被立即地提取出來，而不需重新創造。基模可能對條件式知識提供了一些基礎，也就是知道何時何地應用某項程序。然而，程序性知識的一些理論模式也建立了程序本身使用的條件。

最後一種概念知識是指基數且具序數的數學數量融合，線性的表徵。基數表徵描述的是一組物件的數量或範圍（即在某個特定情境中有多少物件出現），而當各種數量的基數表徵以遞增的方式排列呈現時，這個學生同時對這些數字產生序數表徵。在全等三角形的幾何證明中，常需分析題目所給的以知條件具備哪些特質，有多少個條件待計算或證明，便是基數且具序數的數學數量融合。

基本上，在缺乏數學陳述性、程序性及概念知識之下是無法有效地估算的；然而擁有這些知識的學生，也未必能夠在需要估算的情況下表現出估算的能力或使用估算的傾向。因此數學能力需具備：(1)高層次的陳述性知識、程序性知識和概念知識；(2)有能力以策略、有效且敏感的方式使用這些知識。

若將學生的理解程度作分類，可以簡單區分四種類型：

第一種類型是那些只有低層次陳述性知識、程序性知識和概念知識的學生；第二種類型則是具有適度的陳述性知識、程序性知識，但缺乏足夠的概念知識、有不恰當的指導和練習機會不足，因而無法運用這些知識解決問題的學生；第三種類型是三種知識皆具備，但因為不恰當的指導或練習的機會不足，而無法運用這些知識來解決問題；最後一種類型則是那些具有這些必備的知識，且接受了多樣指導應用這些知識的機會，可以解決廣泛問題的學生。教師的目的主要是將第一、二種類型的學生，利用方法提升至第二、三種，甚至是第四種類型的層次，此外若能將學前的經驗加以組織，以增進兒童已有的數學概念和程序知識，將使得學生的學習更加有效（Byrnes,2001）。而無論是何種層級的教學，都應該與NCTM在1998年所建議的「數學2000」（Math 2000）一致。而教學活動應該促進數字概念以及各種文字題基模的習得。教導這種知識最好的方式是讓學生解決結構性相似的問題，並且仔細思考為什麼這些問題是相似的(Gick & Holyoak, 1983; Sweller & Cooper,1985)。且作業設計應該要促進學生對一個答案何時是合理正確，而何時不是，有一個正確的後設認知理解。

最後提到的是大量練習仍有其必要，即便是老師將程序與具體參照物之間扣得很緊，或是使用具有意義的問題解決，學生仍舊會犯各種程序上的錯誤；因此具有意義、目標導向活動在內的練習，將可使學習更具效果。

3-1-3 幾何思考的發展層次與數學分類能力的發展

依據荷蘭數學教育家Van Hiele夫婦對兒童幾何思考的研究指出，學童在幾何的認知上會有所差異，主要的原因是兒童對幾何知識的掌握方式不同所致，他

們將幾何思考的模式區分成五個發展的層次，每一個層次都有其發展的特徵，在2006年「國小數學教材分析－幾何」一書提到，八十二年部編數學教材幾何課程的設計即以此理念為根據，其概略特徵敘述如下：

1. 視覺期(Visualization)－第零層次：此層次的學童是透過視覺觀察實物，由實物的輪廓來辨識形體或圖形，而經常接觸討論某類的圖形，其形狀差異不大，並能透過移動、旋轉或翻轉等方式，直觀地辨識某類圖形。且本層次的學童，需透過感官的操作活動，讓學童進行分類、造形、滾動、堆疊、描繪、著色、觸摸與複製等活動，幫助學童注意到圖形的構成要素；國中階段的學生多半已超越此一層次。
2. 分析期(Analysis)－第一層次：此層次的學童應該具有豐富的視覺辨識經驗，能進一步觀察圖形構成要素與圖形之間的關係，並可以開始尋找出某一類圖形的共同性質，雖然可以了解同類圖形的關聯性，但是卻無法解釋這些幾何性質間的關係。針對本層次的學童，則需安排圖形的製作活動、組合分割活動以及檢驗活動，幫助學童觀察製作後的圖形構成要素與原圖形構成要素間的關係，觀察原圖形與組合、分割後圖形構成要素間的關係，以及熟悉各種圖形的性質，幫助學童探索圖形與圖形之間的關係；國中階段剛接觸幾何教材的學生多停留在此一層次。
3. 關係期(Relation)或非形式演繹期(Informal Deduction)－第二層次：此層次的學童已經能掌握各種圖形的構成要素，可以進一步探索圖形內在屬性關係，以及不同類圖形之間的包含關係，重要的是此層次學童能透理解其內在關係後建立的概念，而不只是公式的記憶；國中教師的主要目的即是將多數學生由第一層次提昇至此一層次。
4. 形式演繹期(Formal Deduction)－第三層次：在一個公設系統建立幾何理論，且用演繹邏輯證明定理，建立相關定理的網脈結構關係。並可以在一個公設系統中建立理論，而不只是記憶圖形之間的各種性質，更能夠證明與理解一個定理可以有很多不同證明的方法；甚至也能理解一個定理的充份或必要條件的內在關係，並發現正逆命題間的差異性；在國中階段僅有少數數學能力較佳的學生，有辦法透過自學或教師額外加強，達到此一層次。
5. 嚴密性(Rigor)或公理性(Axiomatic)－第四層次：達到這個層次的人們，可以在不同的公設系統中建立定理，並分析或比較這些定理的特性，甚至可以自創一套幾何公設系統。一般的人很難達到這個層次，即使是以數學為專業者也不易達成。

綜上所述，上述五個層次都有其序性，學習者必須擁有前一個層次的概念與策略，才能有效地進行下一個層次的學習活動。然而教材內容屬性的差異，也會影響學習者落入不同的層次之中，例如在平面概念第一層次的分析期的學生，空間概念可能還停留在第零層次的視覺期。

因為大部分國小低年級學童大多數都在第零層次的視覺期，中年級學童大約可以達到第一層次的分析期；根據「國小數學教材分析－幾何」一書，高年級的學童大約在第一層次分析期到第二層次關係期的過渡時期，加上國中數學目前的幾何教材從八年級開始學起（七年級主要在數及代數的運算部份），故教師在進行幾何課程的授課之前，應先就目前學生程度停留在哪一層次，以方便作補救教學或教材推廣。

此外，Piaget曾以部分與全體的關係來研究類別組成的問題，並將分類能力的發展區分成三個階段，分別是形象聚集階段、非形象聚集階段與分類獲得階段。若以以上三個階段將幾何圖形的分類活動區分為三做考量，第一階段以視覺性的觀點來看問題時，學童透過視覺將幾何圖形的形狀歸類；第二階段以功能性的觀點看問題時，學童透過圖形的構成要素將幾何圖形分類，但是不理解這些幾何圖形所成的集合與集合間的包含關係；第三階段以關係性的觀點看問題時，學童掌握全體與部份的關係，能理解幾何圖形所成集合之間的包含關係，可以從不同的觀點進行分類。其中視覺性的觀點大約是Van Hiele夫婦幾何發展理論的第零層次，功能性的觀點大約是第一層次，關係性的觀點大約在第一層次到第二層次之間。

在本節的最後，把全等性質的幾何教材與Van Hiele的幾何發展層次與Piaget的分類能力階段做個整合，在「全等概念的引進與性質說明」中，主要是透過文字與圖形的搭配，想辦法使大多數的學生都能達到第一層次的目的。而在「全等性質的作圖」後，讓學習並練習過的學生，進入到第二層次的理解，並藉由「全等性質的應用」，了解內在關係及不同類圖形之間的包含關係，加強第二層次的應用，甚至有興趣達到第三層次的境界，裨益九年級上學期幾何推理暨證明能力的提昇；是故本教材後續的內容設計上，已略涉及第三層次形式演繹期能力的培養。

至於與Piaget的分類能力階段做比較，視覺性的學童，將透過三個部份教材的學習，進入到功能性甚至是關係性的理解與應用。

3-2 全等教材的結構探討

本單元主要區分為「全等概念的引進與性質說明」、「全等性質作圖」以及「全等性質應用」三個部份，先就教材的細部內容作說明，再根據教材原始差異性、能力指標的結合，以及與數學知識種類的關聯性、動機與解題能力的關係作討論。

3-2-1 全等教材的內容說明

在本節先針對本次設計的全等教材內容，做一綜合性的說明，詳細的簡報內容將在第四章作完整呈現。

本教材設計主要以康軒版課本為內容基礎，並針對相關概念輔以應用性題目，在教材的細節內容說明如下：

1.全等概念的引進與性質說明：

- (1)引起動機：從兩歲女兒談起……
- (2)何謂「全等」？：談平移、旋轉、翻轉與疊合
- (3)「全等」與「對應」：對應邊與對應角的相等
- (4)兩個多邊形的全等：對應邊與對應角的關係
- (5)三角形全等的意義：三角形全等的邊角關係
- (6)全等符號的介紹：全等符號「 \cong 」的使用與對應計算
- (7)「全等三角形」的練習：全等三角形與對應相等的關係
- (8)三角形全等的條件：對應邊角的條件需求
- (9)三角形全等性質的介紹：五種全等性質及對應圖形的比較
- (10)未必全等性質討論：AAA及SSA不一定全等性質說明
- (11)SSA全等特例：RHS全等性質

(12)應用一～五：利用全等性質作相關的問題解答

2.全等性質作圖：

(1)SSS作圖&SSS作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解SSS作圖的方法及意義；

(2)SAS作圖&SAS作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解SAS作圖的方法及意義；

(3)SSA作圖&SSA作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解SSA作圖的方法、意義及性質說明；

(4)RHS分析、作圖&RHS作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解RHS作圖的方法及意義及性質說明；

(5)ASA作圖&ASA作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解ASA作圖的方法及意義；

(6)AAS分析、作圖&AAS作圖整合版：透過循序、反覆操作及綜合比較，了解RHS作圖的方法及意義及性質說明；

(7)全等作圖進階應用題5題：利用以上全等性質作圖，作進階性應用及作圖。

3.全等性質應用：

(1)角平分線作圖證明及性質說明：透過分析及歸納，利用三角形全等循序說明角平分線性質，並透過GSP軟體作一般性的說明及即時運算。

(2)垂直平分線作圖證明及性質說明：透過分析及歸納，利用三角形全等循序說明角平分線性質，並透過GSP軟體作一般性的說明及即時運算。

(3)角平分線及垂直平分線綜合證明應用1～4：透過角平分線及垂直平分線的性質，作一般性的計算、證明與綜合應用。

(4)等腰三角形的底角相等證明I～III：利用不同方式，分別作等腰三角形的底角相等證明。

(5)等腰三角形的兩底角相等證明比較：利用開關功能，比較不同方式作等腰三角形性質的證明。

(6)等腰三角形頂角平分線性質：透過分析及歸納，利用三角形全等循序說明等腰三角形頂角平分線性質。



(7)等腰三角形底邊的垂直平分線性質：利用不同方式，作等腰三角形底邊垂直平分線性質的證明，亦即(6)的逆證明。

(8)綜合證明與應用1~6：綜合本部份概念及重點，作三角形全等的綜合證明與應用。

3-2-2 課程內容與能力指標

為因應學生以往在學習幾何證明題落差過大，目前的教材編排更改為兩次學習，在八年級下學期作初步探索，九年級上學期結合後續學到的不等關係、平行及相似等概念作進階探討。而研究者為節省八年級的授課時間，九年級學習時能夠較快進入狀況，在教材的安排順序及內容上有幾項與原始課本有所出入的地方：

在各個概念（包含全等概念的引進、全等性質的說明、全等性質的作圖、分角線及中垂線的性質以及全等性質的證明等五個部份）告一段落後，所搭配的練習均有基礎及進階題型，可視學生程度及反應予以補充加強；

在「全等概念的引進」中，透過開關的製作，全等條件的增加，說明三角形的全等條件個數；

得知三角形全等條件個數後，透過介紹方式快速瀏覽所有全等性質，並針對不全等性質簡單作說明，便於學生提早產生心像；

在「全等性質的作圖」中，每一項作圖完畢後均搭配整合版，方便教師作歸納整理；

在「全等性質的應用」中，每一個證明搭配互動式圖形先作分析後證明，方便學生對於題目架構及已知、待證條件的了解；

在「全等性質的應用」中，等腰三角形底角相同的性質說明，利用整合比較的方式，強調一題多解的可行性。

根據「國民中小學課程發展專案小組」的課程設計，八到九年級的學生大都處於Piaget第四階段的符號表徵期（非形式演繹），這個時期大都已經能夠邏輯地關聯關係，並做出非形式的推論，但尚不能有系統的演繹（引自康軒版96年教師手冊p.7），透過以上考量，相信可使推論更具體，演繹更有系統。

而依照96年度康軒版教師手冊內容，本單元的教學目標如下：

1. 能理解：三角形全等的意義。
2. 能理解：三角形的 SSS 、 SAS 尺規作圖與全等性質。
3. 能理解：三角形沒有 SSA 尺規作圖與全等性質。
4. 能理解：三角形的 RHS 全等性質。
5. 能理解：三角形沒有 AAA 尺規作圖與全等性質。
6. 能理解：三角形的 ASA 、 AAS 全等性質與尺規作圖。
7. 能理解：角平分線的性質。
8. 能理解：垂直平分線的性質。
9. 能理解：等腰三角形的性質。

而與本章節安排於八年級下學期，相關的能力指標主要有以下四個：

8-s-13 能理解特殊三角形的性質。

8-s-14 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義。 S-4-07 S-4-08

8-s-15 能理解三角形全等的性質。 S-4-08

8-s-28 能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。 S-4-10

至於本章的教學流程及節數，比較教師手冊及研究者製作版本如下：

表3-2 全等教材的原始與實際教學時數比較

主題	目標	原始節數	實際授課節數	備註
1. 三角形全等的意義	1. 能理解當兩個平面圖形能完全疊合時，就稱這兩個圖形「全等」。 2. 能理解兩個全等圖形，它們的形狀一樣，而且大小相等。 3. 能理解當兩個三角形完全疊合時，就稱它們	1節	0.5節	檢附基本練習，配合教材 1 簡報1~8

	<p>「全等」。</p> <p>4. 能理解疊合時對應點、對應邊、對應角的意義。</p> <p>5. 能理解$\triangle ABC \cong \triangle DEF$的讀法和意義。</p> <p>6. 理解如果兩個三角形同時滿足三雙對應邊相等和三雙對應角相等時，兩個三角形全等。</p>			
2. 三角形的SSS、SAS尺規作圖與全等性質	<p>1. 理解已知兩雙對應邊相等的兩個三角形不一定會全等。</p> <p>2. 能作三角形的SSS 尺規作圖。</p> <p>3. 能理解三角形的SSS全等性質。</p> <p>4. 能作三角形的SAS 尺規作圖。</p> <p>5. 能理解三角形的SAS全等性質。</p> <p>6. 能理解兩個三角形滿足SSA 的情形時，不一定能做出一個三角形。</p> <p>7. 能理解三角形沒有SSA 或ASS 全等性質。</p> <p>8. 能理解兩個直角三角形RHS 全等性質。</p>	4節	2.5節	透過條件的說明，簡單練習全等性質的題目，了解全等性質的種類，並接著練習全等性質的作圖，配合教材 1 簡報9~21 及教材 2 簡報1~17
3. 三角形的ASA、AAS尺規作圖與全等性質	<p>1. 理解兩個三角形只有兩雙對應角相等，則不一定全等。</p> <p>2. 理解三角形的全等性質中沒有AAA 全等性</p>	3節	3節	接續上節課作圖，完成全等性質作圖配合練習，並完成相關尺規作圖例題，配合教材 2 簡報18~48

	<p>質。</p> <p>3. 能作三角形的ASA 尺規作圖。</p> <p>4. 能理解三角形的ASA 全等性質。</p> <p>5. 能理解三角形的AAS 全等性質。</p> <p>6. 能作三角形的AAS 尺規作圖。</p>			
4. 三角形全等性質的應用	<p>1. 能驗證角平分線作圖。</p> <p>2. 能驗證角平分線上任一點到角的兩邊距離相等。</p> <p>3. 能驗證到一個角的兩邊等距離的點，必在此角的角平分線上。</p> <p>4. 能驗證垂直平分線作圖。</p> <p>5. 能驗證一線段的垂直平分線上的點到此線段兩端點的距離相等。</p> <p>6. 能驗證若有一點，到某線段兩端點距離相等，則這個點會在該線段的垂直平分線上。</p> <p>7. 能驗證等腰三角形的兩底角相等。</p> <p>8. 能驗證若三角形的兩個內角相等，則此三角形必為等腰三角形。</p> <p>9. 能驗證等腰三角形的頂角平分線會垂直平分</p>	4節	4節	除原始課本內容，安排約1.5節進階證明練習題，配合教材 3 全

	底邊。 10. 能驗證等腰三角形底邊的垂直平分線通過頂點。			
--	----------------------------------	--	--	--

在本教材的實際教學節數中，由以下表格搭配的教學計畫，明顯看出教學時數由原訂的12節，減少為實際的10節，並針對尺規作圖及幾何證明作進階應用，將可裨益教師做複習及新進度的安排。

接下來的重點，以教學內容（主要以康軒版教師手冊）、能力指標與本教材設計的契合度為主；其中本教材設計的代號，主要是按照3-2-1節中，全等教材的內容說明作為依據，並於底下以表格方式作呈現：（為節省篇幅，此處僅以代號出現，詳細教學重點見附件(一)）

表3-3 全等教材原始內容與實際設計內容參照

能力指標	教學重點 代號	本教材的編排	配合 簡報
8-s-13	(一)1	1(1)	1-2
		1(2)	1-3
	(一)2	1(3)	1-4
		1(4)	1-5
		1(6)	1-7
	(一)3	1(7)	1-8
	(一)4	1(5)	1-6
8-s-28	(一)5	這裏透過條件增加並不透過減少方式，以免造成學生混淆	
	(一)6		
8-s-13	(二)1	1(8)	1-9
8-s-14			
8-s-28	(二)2	1(9)	1-10
		透過說明方式	

	(二)3	介紹三角形的全等性質，並視學生反應適度補充進階概念及題型 1(12)	~1-13 1-15 1-16 ~1-21
8-s-14 8-s-15 8-s-28	(三)1	2(1)	2-2 ~2-5
	(三)2	2(2)	2-6 ~2-10
8-s-13 8-s-14 8-s-15 8-s-28	(四)1	2(3)	2-11 ~2-17
	(四)2	2(4)	2-18 ~2-25
8-s-14 8-s-15	(五)1	2(5)	2-26 ~2-29
	(五)2	1(10)	1-14
	(五)3	1(11)	1-15 ~1-16
	(五)4	2(6)	2-26 ~2-29
	(五)5	2(7)	2-30 ~2-37

8-s-13	補充全等 尺規作圖 進階題目	2(8)	2-38
8-s-14			~2-48
8-s-15			
8-s-13	(七)1	3(1)	3-2
8-s-15			~3-4
8-s-28			
	(七)2	3(2) 可視時間補充 3(3)角平分線及 垂直平分線進 階題	3-5
			~3-6
8-s-13	(八)1	3(4)	3-11
8-s-15			~3-14
8-s-28			
	(八)2	3(6) 3(7)	3-15
			3-16
8-s-13	補充全等 性質證明 進階題	3(3)	3-7
8-s-15			~3-10
8-s-28			
		3(8)	3-17
			~3-22

由上述表格比較得知，課本教學重點經細部比較後，本教材均能包含在內，且利用較短的時間，得以補充更深入的概念或題型。

3-2-3 數學知識的種類與全等教材的關係

根據岳修平(1998)所譯E.D.Gagne, C.W.Yekovich, F.R. Yekovich「教育心理學－認知取向」一書提到，探討全等教材的結構如下：

在數學概念性理解的重要領域中，區分為數字概念及計量概念，由於數字觀念(number sense)是由處理數字經驗所發展出的一整套基模或概念，再根據「美

國國家數學教師委員會」(NCTM)的標準，在本教材中相關的概念應包括五種全等性質、對應的關係以及尺規作圖的基本應用；至於計量概念(quantitative concepts)可讓個體以「量」(quantities)以及量與量之間的關係等觀點來找出情境中的意義，利用尺規作圖及全等性質作進階應用，應都屬於這部份的概念。而且數學方面有高成就表現的學生，於解題時也比較會廣泛地使用計量概念。

在解題策略中，區分為三種估算(estimation)、心算(mental calculation)以及廣泛性問題解決策略(general problem-solving strategies)，在全等性質的基本計算中，用到的多為估算及心算策略，進階的計算及尺規作圖的應用與全等性質的證明則需用到廣泛性問題解決策略，舉例說明如下：

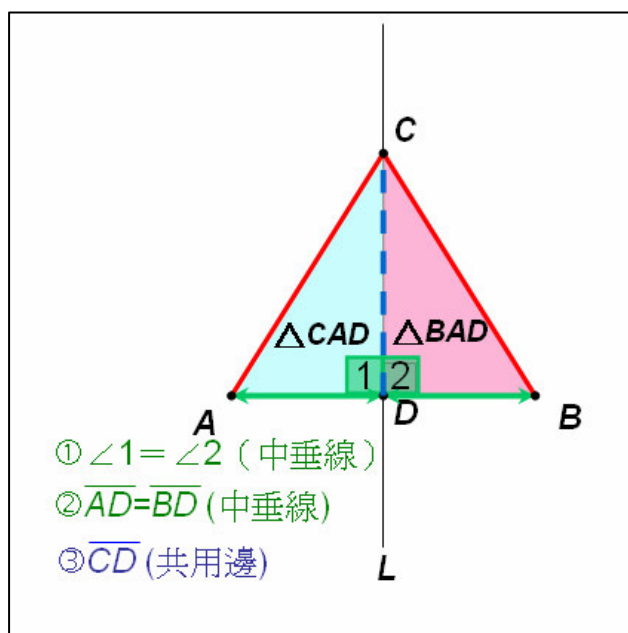


圖3-6 廣泛性問題解決策略的應用：「垂直平分線的性質證明」

利用圖形與性質說明的前導方式，提供一個策略，用來解決其問題，將可增進學生的學習效果，只是這些訓練學程雖然大都能成功教授，但卻缺少在該訓練課程外，達到這些策略的遷移效果(transfer of strategies)。

學習理論在數學上的應用主要有三：

- (1)促進基本技能之自動化教學：本教材設計與課本內容安排有所差異，一開始利用簡單的例子，說明五種全等性質的意義及基本運用，方便接下來的作圖說明，以及最後作進階證明的知識基礎。

三角形全等性質的介紹

- 我們用英文字母S代表三角形的邊(Side)，用英文字母A代表三角形的角(Angle)，介紹以下幾種全等性質：
- S S S全等性質：當兩個三角形的三邊分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。
- S A S全等性質：當兩個三角形的兩邊和它們的夾角分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。
- A S A全等性質：當兩個三角形的兩角和它們的夾邊分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。
- A A S全等性質：當兩個三角形的兩角和其中一角的對邊分別對應相等時，這兩個三角形就會全等。



圖3-7 促進基本技能之自動化教學：「三角形全等性質的介紹」

(2)促進概念性理解的教學：透過圖形的比較與整合，了解「SSS」、「SAS」、「ASA」、「AAS」及「RHS」所代表的意義，而全等條件的遞增以及證明條件與圖形的前置引導，更是透過啟發式的方法幫助學生作概念性理解，這與前述「廣泛性問題解決策略的應用」的理念是相同的(見圖3-6)。

(3)策略教學：透過描述(describing)、定義(defining)、比較(comparing)、解釋(explaining)和摘要(summarizing)等方式，可以增進學生的能力。教材方面，整合性的作圖、同題不同解的證明，以及釐清證明題中，何者為已知條件，何者為延伸條件及待證條件，均屬於策略教學的內容；在本教材中，為區別已知、延伸及待證條件，分別以不同顏色作區分，並將相同條件個別用相同的顏色、符號及粗細，以方便學生作認知。

綜觀上述數學知識與全等教材的關係，第一部份「全等概念的引進與性質說明」較屬於基礎性概念知識的理解，第二部份「全等性質作圖」則是透過操作方式，實際了解全等性質所代表的意義，至於第三部份「全等性質應用」則較需要綜合性的策略比較學習。

3-2-4 動機、解題能力與全等教材的關係

任何教學的開始都是吸引學生注意力的關鍵，也就是所謂的引起動機；而動機是引發、引導和維持行為的一種內在狀態，它常和特質產生交互作用後影響一個人的行為。動機不僅是一種認知系統的現象，也是一個統整的心理現象。

動機(或動機作用)(motivation)是指引起個體活動，維持已引起的活動，並導使該一活動朝向某一目標的內在歷程。心理學家把動機解釋為行為的內動力，或將動機解釋為行為的內在心理原因（引自張春興，1996:291）。對於任一個學習者來說，在未開始集中注意力去完成一個學習活動前，必須先對學習感到需求、產生興趣或有意願；是故教師本身的引導是否能夠引發與保持學習者的好奇心與注意力，教材的設計是否能夠符合個人程度，達到成功的期望，進一步產生信心，將是一個課堂教學是否成功的重要因素。

提升學生學習動機的主要方法有八：(1)適當使用教師期望與建立教學自我效能；(2)使課室目標結構多樣化；(3)了解學生的學習動機；(4)注意組織變項對學生動機的影響；(5)有效使用增強；(6)提升學生的自我效能；(7)進行動機訓練；(8)應用ARCS模式（引自葉玉珠，2003）。而在全等教材的應用上，除了透過一開始教材的設計、教學環境的營造以及正式教學前的心理建設，在教材的起始做生活的聯結，作圖時先備知識的再提醒，以及引導式證明完畢後立即改以填充式回答，均屬於提升學生學習動機，增進學習效果的方式。

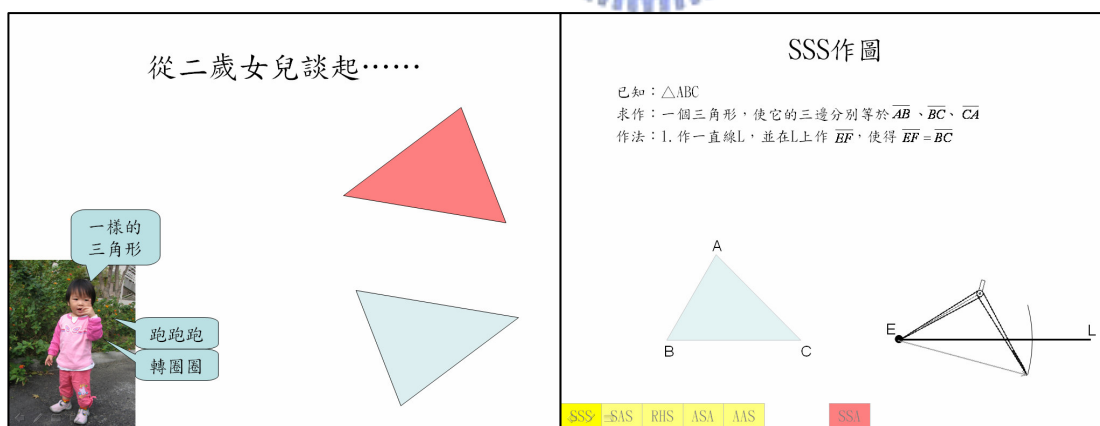


圖3-8 提昇學習動機(1)：生活的聯結 圖3-9 提昇學習動機(2)：先備知識的提醒

綜合證明與應用

• 例 6：如圖， $\triangle ABC$ 為任意三角形，自兩邊 \overline{BC} 及 \overline{AB} 分別向外做兩個正方形 $ABDE$ 與 $BCFG$ ，連接 \overline{AG} 、 \overline{CD} 相交於 H 。

• 試證：(1) $\overline{AG} = \overline{CD}$

• (2) $\overline{AG} \perp \overline{CD}$

《證明》(1) 在 $\triangle BDC$ 、 $\triangle BAG$ 中，
 $\because ABDE$ 、 $BCFG$ 為正方形
 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ， $\overline{BC} = \overline{BG}$
 且 $\angle ABD = \angle CBG = 90^\circ$
 $\rightarrow \angle ABD + \angle ABC = \angle CBG + \angle ABC$
 $\rightarrow \angle DBC = \angle ABG$
 $\therefore \triangle BDC \cong \triangle BAG$ (SAS) $\rightarrow \overline{AG} = \overline{CD}$ (對應邊相等)

(2) $\because \triangle BDC \cong \triangle BAG$ ， $\therefore \angle BCD = \angle BGA$ (對應角)
 設 \overline{BC} 、 \overline{CH} 相交於 I ，則 $\angle BIG = \angle CIH$ (對頂角)
 在 $\triangle BIG$ 、 $\triangle CIH$ 中， $\angle IGB = \angle ICH$ ， $\angle BIG = \angle CIH$ ，
 $\therefore \angle IHC = \angle IGB = 90^\circ$ ，即 $\overline{AG} \perp \overline{CD}$

綜合證明與應用

• 例 6：如圖， $\triangle ABC$ 為任意三角形，自兩邊 \overline{BC} 及 \overline{AB} 分別向外做兩個正方形 $ABDE$ 與 $BCFG$ ，連接 \overline{AG} 、 \overline{CD} 相交於 H 。

• 試證：(1) $\overline{AG} = \overline{CD}$

• (2) $\overline{AG} \perp \overline{CD}$

《證明》(1) 在 $\triangle BDC$ 、 $\triangle BAG$ 中，
 $\because ABDE$ 、 $BCFG$ 為正方形
 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ， $\overline{BC} = \overline{BG}$
 且 $\angle ABD = \angle CBG = 90^\circ$
 $\rightarrow \angle ABD + \angle ABC = \angle CBG + \angle ABC$
 $\rightarrow \angle DBC = \angle ABG$
 $\therefore \triangle BDC \cong \triangle BAG$ () $\rightarrow \overline{AG} = \overline{CD}$ (對應邊相等)

(2) $\because \triangle BDC \cong \triangle BAG$ ， $\therefore \angle BCD = \angle BGA$ (對應角)
 設 \overline{BC} 、 \overline{CH} 相交於 I ，則 $\angle BIG = \angle CIH$ (對頂角)
 在 $\triangle BIG$ 、 $\triangle CIH$ 中，
 $\therefore \angle IHC = \angle IGB = 90^\circ$ ，即 $\overline{AG} \perp \overline{CD}$

圖3-10 提昇學習動機(3)：循序式證明

圖3-11 提昇學習動機(3)：填充式證明

數學知識在理解之後，接下來極為重要的一環即為解題能力，NCSM（美國數學督導學會 National Council of Supervisors of Mathematic，1977）及 NCTM（美國數學教師協會 National Council of Teachers of Mathematics，1989，2000）都支持「問題解決教學」是最重要的教學活動。英國的數學教學探究委員會在其所出版的「Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools」中，也指出「解題是數學的核心」（Cockcroft，1982，引述自陳啓明，2000）。民國92年公佈「國民中小學九年一貫課程綱要」中也把「獨立思考與解決問題」列入十大基本能力之中。而在九年一貫課程中，數學領域總體目標的第二項也明確指出「學習應用問題的解題方法」（教育部，2003）。

根據「教學心理學—學習的認知基礎」一書所提，數學解題的成份中，包含了問題轉譯、問題整合、解題計劃及監控，以及解題執行等四種。而在全等教材的相關題目中，在「全等概念的引進與性質說明」及「全等性質作圖」中的題目，經過轉譯及整合，大多透過解題計劃及監控即可解決。至於「全等性質應用」中的題目，因牽涉較嚴謹的證明及程序，常需用到解題執行的能力。

為使學生成為一位有創意的數學解題者，除了轉譯、整合及計劃監控的訓練，尚需數學教育中的解題訓練。因為數學不是只在學習得到正確答案而已，有系統的教學生如何轉譯問題，如何有意義的表徵問題，以及如何想出解題計劃其實更為重要；而以上所提到的解題能力，在數學教學中常扮演十分重要的角色。

3-3 傳統教學與數位教學的落差比較

本教材的設計主要以數位化教材為主，利用電腦教室集體廣播或一般教室單槍投影教學，搭配教師上課使用。有別於一般使用板書及講述式的傳統教學，在本章的最後，提出傳統教學與數位教學的落差及比較：

根據王美雪(2005)所整理巫靜宜(2000)、林星秀(2001)、陳麗春(2003)及盧建勳(2003)的文獻，針對傳統式數學教學與資訊科技融入數學教學所做的比較，得到以下結論：

表3-4 傳統教學與資訊融入教學比較

	傳統講述式教學	資訊科技融入數學教學
學習地點	在相同課室內，以黑板、粉筆為主要工具	可以在課室、電腦教室，也可以在家中，不受地點的限制
教學內容	以教科書為主，部份參用坊間參考書籍，平面方式，較枯燥	教科書、電腦軟體、網路學習網站，具有圖像、文字及聲音，較生動及多元化
學習主體	教師主控學習活動	以學生為中心
同學關係	較少討論及小組互助合作	注重討論及小組互助合作
教師態度	教材相同，教師教學熱情遞減	新的教材及教法的挑戰，激發教學熱情
教學時間	受限於固定的時數安排	除固定時數外，透過網路可以不受時空限制
教學方法	多以教師課堂講述為主	利用多媒體簡報展示，利用網路線上學習及互動討論、學生利用互動軟體操作學習

在本研究中，在教師的課堂講述完成後，透過網路及電子檔案的分享，將使學習不受地點及時間的限制；此外結合易於操作及取得的PowerPoint及GSP、flash軟體，亦使教師易於上手，學生易於了解，並使教材更為生動多元。然而為使教學時間確實掌握，教材的設計主要是以教師的教學為導向，故在課堂上仍

由教師所主導，但卻可配合學生的程度，作適當的補教及增強，兼顧到教師的專業及學生的學習，著實與傳統的講述式教學有所差異。

NCTM在1989年第一次頒布了《學校數學課程和評鑑的標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics，簡稱《課程標準》），1991年出版了《數學教學的專業標準》（Professional Standards for Teaching Mathematics，簡稱《專業標準》），1995年又頒布了《學校數學評量的標準》（Assessment Standards for School Mathematics，簡稱《評量標準》）。NCTM從1989到2000年出版的這三個文件，影響指導著全世界的數學教育改革。2000年4月，NCTM將1989年《課程標準》的內容更新，也包含其他兩份文件的主要內容，頒布了最新版的《學校數學的原則和標準》（Principles And Standards for School Mathematics），簡稱《原則和標準》（引自中小學數學科教材教法p.4~5，2005）。

依《原則和標準》中心思想所設置的五個目標，「所有」學生應：

1. 學會評價數學（或懂數學的價值）。
2. 在做數學時有信心。
3. 成為數學問題的解決者。
4. 學會用數學溝通。
5. 學會數學推理。

在本教材實施後對學生所做的回饋表（見第五章）顯示，學生對於此教材的評價頗高，比起傳統的課堂教學更樂於學習，多數學生也能提昇對數學的興趣與信心，樂於解決數學問題；更能根據課程內容，達到利用數學語言溝通與幾何推理的目標。

而《專業標準》談及數學課堂的五個轉變對於培養學生數學能力，教師需要：

1. 由個人集合的教室變成像數學社群一樣的教室。
2. 以老師為答案的絕對權威者變成以邏輯和數學證據證明答案的正確性為主導。
3. 避免單純地記憶程序，而轉為數學推理。
4. 避免以找到答案為單純目的，強調推測、發明和解決的能力。
5. 避免將數學視為孤立的程序和概念的集合，應將數學的概念及其應用連結起來。

當研究者向學生說明此單元的教學要透過電腦教學時，上課的三個星期中，感覺得出來大部份學生是有所期待的；而在教材上的設計，一方面為兼顧教材的邏輯性，另一方面要著重學生的理解與記憶，並針對能力指標與教學目標的重點，

作不同形式與層次的試題演練；且適時於課後作練習與評量，使其能將概念與應用相結合，真正具備相關能力。

綜觀上述針對學生學習與教師教學所需注意的重點，配合第五章教師作專家評鑑表給與的回饋，此次教材的設計對於師生兩者應均具備正向效能，至於教材前後的修正情形，與施測與教材完成後的細部討論，則將留待接下來的兩章再加以討論。



第四章 國中數學數位幾何教材製作

4-1 全等概念的引進與性質說明

4-1-1 設計理念與教材說明

此一教材的設計，主要是針對學生新接觸「全等」概念，配合了解對應的邊角關係，並知道不同的全等性質所代表的意義，並能做簡單的應用。在能力指標上，期望學生達到的是8-s-13能理解特殊三角形的性質及8-s-28能理解三角形的全等性質；至於教學目標最重要的是能夠理解三角形全等的意義。

將課本內容，利用PowerPoint及flash以動態形式呈現，引起學生的學習動機，並設計題目要同學於課後練習，檢視學生對全等概念的瞭解程度。以下搭配簡報內容逐頁說明：

1. 教材一開始，先以筆者本身的女兒談起，利用動畫說明全等與疊合的概念；強調兩三角形，透過適當的移動與旋轉，無論其顏色，只要能夠加以重疊，就可以說明兩者的關係為「全等」。(1(1)，簡報1-2，圖4-1)



圖4-1 全等概念的引進與性質說明(1)

2. 接下來，談到全等在數學上的應用，除了原本的平移、旋轉，連同翻轉的動作，只要能完全疊合，在數學裏即可稱為「全等」。(1(2)，簡報1-3，圖4-2)

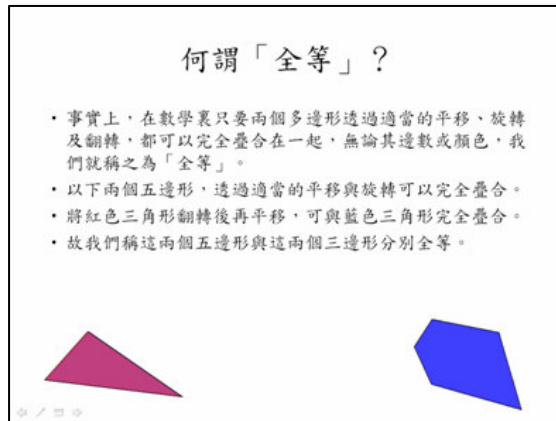


圖4-2 全等概念的引進與性質說明(2)

3. 第三部份接著談到對應的關係，說明多邊形全等時，可以疊合的邊稱為對應邊，可以疊合的角稱作對應角；並透過簡單的開關功能與顏色及面的強調，比照對應的關係，並接著說明多邊形全等所需的條件為何。

(1(3)，簡報1-4，圖4-3)

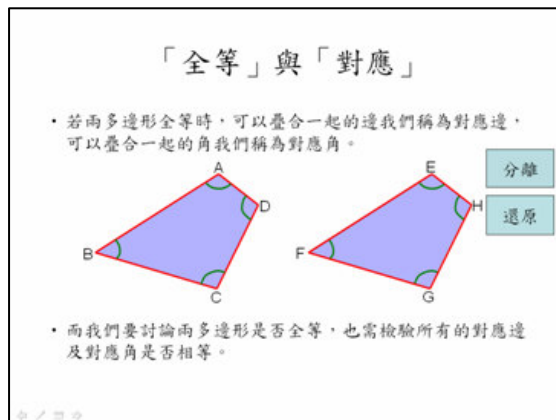
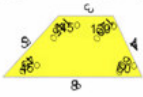


圖4-3 全等概念的引進與性質說明(3)

4. 第四部份接著第三部份，說明多邊形全等所需的條件為對應邊等長、對應角相等；並綜合兩部份的概念，說明全等與對應邊角關係的若且惟若關係。(1(4)，簡報1-5，圖4-4)

兩個多邊形的全等

- 如底下兩個四邊形的四個邊等長，四個角也相等，則我們說這兩個四邊形全等。



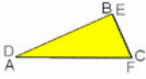
- 亦即兩多邊形：全等 \rightarrow 對應邊等長，對應角相等
- 反之兩多邊形：對應邊等長，對應角相等 \rightarrow 全等
- 以接下來的三角形全等為例：

圖4-4 全等概念的引進與性質說明(4)

5. 本章節談三角形全等，在第五部份透過敘述及圖例，將前述全等與對應邊角的概念做整合，確實了解三角形全等意義。(1(5)，簡報1-6，圖4-5)

三角形全等的意義

- 把兩個三角形剪下疊合在一起，它們所有的頂點、邊和角都完全重合時，我們就說這兩個三角形「全等」。
- 當兩個三角形完全重合的時候，我們把疊合在一起的頂點稱為對應頂點，疊合在一起的邊稱為對應邊，疊合在一起的角稱為對應角。



- 兩個全等三角形的對應邊相等，對應角相等。

圖4-5 全等概念的引進與性質說明(5)

6. 接著介紹全等符號「 \cong 」，並透過圖例與練習，計算相關全等對應的題目；在此學生需具備三角形內角和180度的概念。(1(6)，簡報1-7，圖4-6)

全等符號的介紹

- 通常我們用符號「 \cong 」代表兩個圖形全等，讀作「全等於」。當 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等時，可以寫成 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
- 例：已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，其中A與D，B與E，C與F為對應頂點，如果 $\angle A=40^\circ$ ， $\angle F=110^\circ$ ， $AB=5$ ，試求 $\angle D=?$ $\angle C=?$ $\angle B=?$ $\angle E=?$ $DE=?$

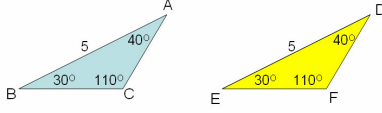


圖4-6 全等概念的引進與性質說明(6)

7. 第七部份為「全等三角形」的練習，除了接著上一部份作進一步的演練外，並為下一部份預作伏筆，在此①、②兩圖作比較，為的是讓學生不會單從圖形上「看起來全等」作判別，而③圖除了明顯不全等外，也是接下來會談到的SSA不一定全等的一個特例。在此第④個圖形僅三個條件，在全等性質的介紹前，無法確定是否全等，也作為全等條件討論的引起動機。（1(7)，簡報1-8，圖4-7）

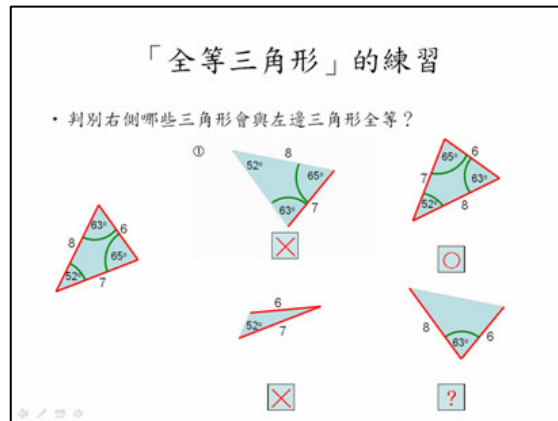


圖4-7 全等概念的引進與性質說明(7)

8. 第八部份透過角及邊的形成方式，利用開關作條件的增加，說明產生全等三角形所需要的條件，由於開關的設計強調互動性，因此不需具備特定步驟，而至少共需三個條件的特性，加上flash簡報的應用，也可由學生自行觀察而得。此外，透過專家評鑑後教師所給予的意見，這裏可以透過故事性的敘述，假設偵探辦案的情境，讓學生在無全程錄影的情況下，根據路口的幾個攝影機仍可準確分析刑案；作為三角形的全等是否可以少幾個條件，仍能準確判定它們全等的引起動機方式。（1(8)，簡報1-9、flash互動檔案，圖4-8~4-9）

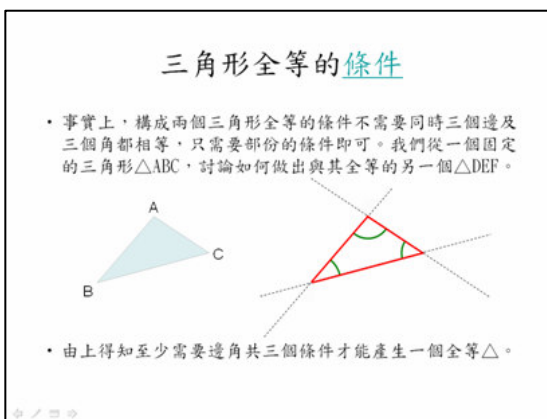


圖4-8 全等概念的引進與性質說明(8)-1

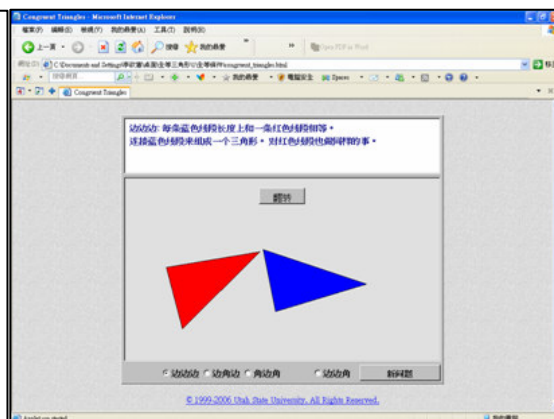


圖4-9 全等概念的引進與性質說明(8)-2

9. 第九部份開始介紹三角形全等性質，在此與課本最大的不同點在於課本介紹三角形全等性質時主要配合尺規作圖，了解全等性質的作法與唯一性；然而較缺乏整體五種性質的比較與完整性，因此透過圖片及開關上的說明與前後比較，先讓學生有初步的了解，知道不同全等性質的差異性，並透過後續例題的練習，強化各個全等性質的理解、記憶與基本應用。(1(9)，簡報1-10~13，圖4-10~4-13)

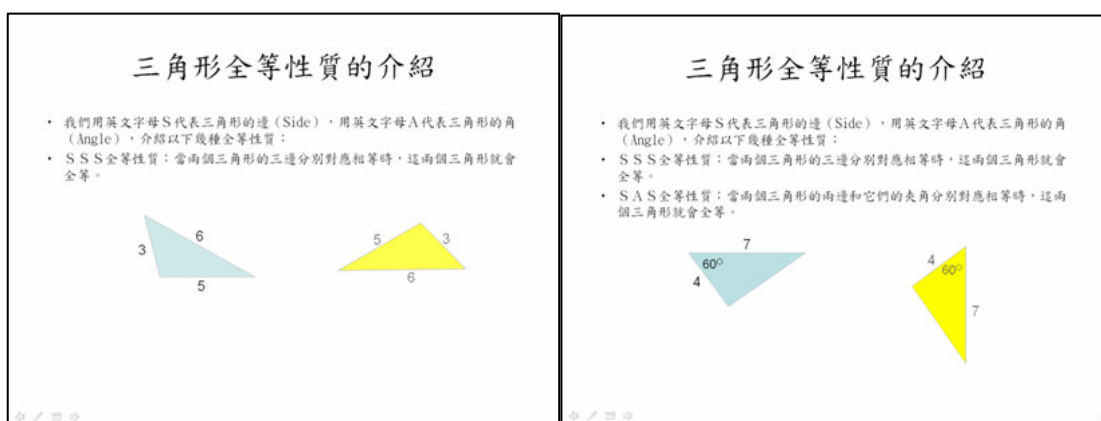


圖4-10 全等概念的引進與性質說明(9)-1 圖4-11 全等概念的引進與性質說明(9)-2

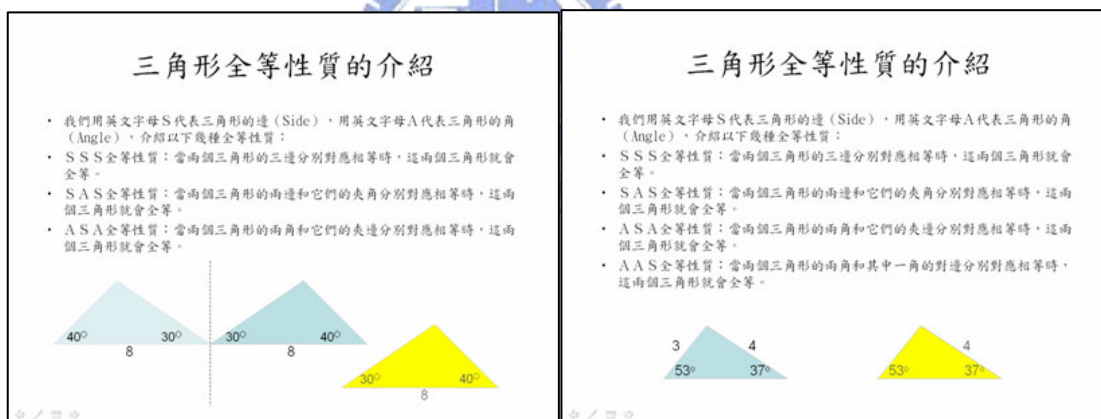


圖4-12 全等概念的引進與性質說明(9)-3 圖4-13 全等概念的引進與性質說明(9)-4

10. 第十部份在介紹完SSS、SAS、ASA及AAS四種全等性質後，接著探討不一定全等的兩種性質，透過動畫及開關的呈現方式，知道AAA及SSA不一定全等的情況。在此最主要是要讓學生了解在任意兩個三角形中，未必透過三個條件的相等即會全等；後續接著的SSA不全等的關係，由於在「全等性質的作圖」尚會提及，故可視學生反應決定是否說明，或是讓學生先有互補的概念即可。這個部份要完全了解，學生必須有等腰三角形邊角性質，三角形的外角性質，以及互補的角度和為180度的概念。而透過專家評鑑後教師的分享，亦可以透過故事情境的說明，由學生判

斷是否正確，造成認為SSA會全等的人的認知衝突，加強教學效果。

(1(10)，簡報1-14~15，圖4-14~4-15)

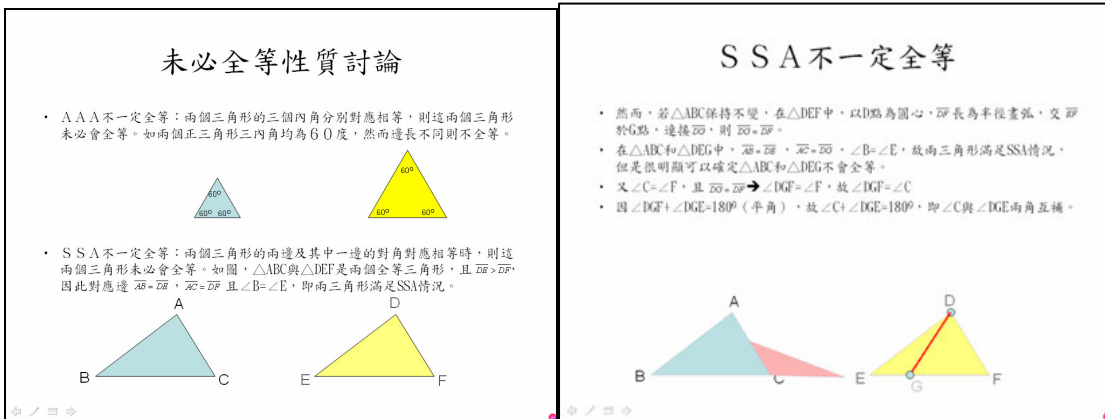


圖4-14 全等概念的引進與性質說明(10)-1 圖4-15 全等概念的引進與性質說明(10)-2

11. 第十一部份是SSA的特例，說明三角形的RHS全等性質是屬於SSA的特殊情形，說明在直角三角形中，只要符合SSA的條件，根據商高定理即可得到兩個三角形全等的性質；並於三角形的邊角上作開關，了解RHS分別代表的意義。在此學生需具備商高定理的理解與應用，並能對根式作簡易的運算（1(11)，簡報1-16，圖4-16）

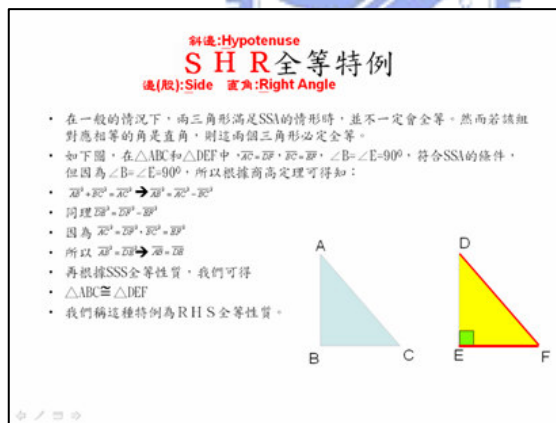


圖4-16 全等概念的引進與性質說明(11)

12. 最後的第十二部份，主要透過五個题目的應用，讓學生對於三角形的全等性質作了解比較，並能夠予以記憶，作為下一單元「全等性質的作圖」的先備知識。此部份共有五個應用問題，分別敘述如下：

(1) 應用問題1：透過直角三角形的邊角關係，作單一性的比較；由學生計算邊長、角度，藉由右方的四個圖例，分別判斷是否與左圖全等，並根據何種全等性質。在此學生需具備商高定理的應用與三角形內角度數和的概念。（1(12)，簡報1-17，圖4-17）

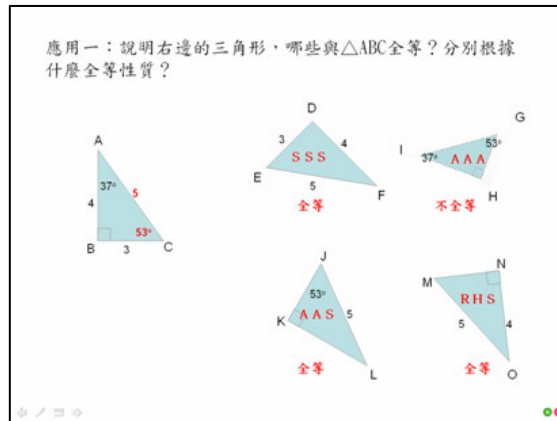


圖4-17 全等概念的引進與性質說明(12)-1

- (2) 應用問題2：透過八個三角形的觀察，利用開關的功能，作綜合性的比較，並能找尋相似度高的三角形，作角度及邊長的相關計算與分類比較。在此學生需具備三角形內角度數和的概念。(1(12)，簡報1-18，圖4-18)

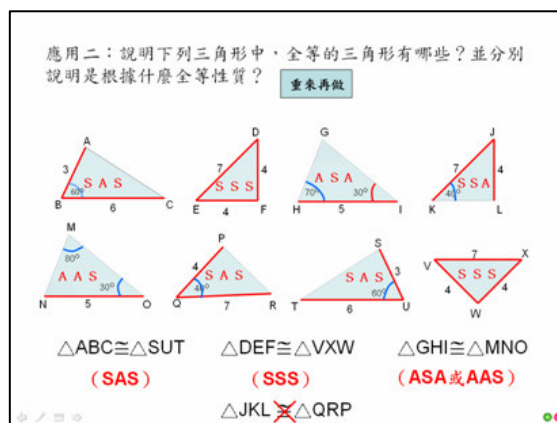


圖4-18 全等概念的引進與性質說明(12)-2

- (3) 應用問題3：透過三角形的全等，了解兩個三角形全等根據的性質，對應邊相等的計算，以及透過對應邊的等長，作直角三角形面積的計算。在此學生需具備商高定理的了解與計算，以及直角三角形面積的計算的概念。(1(12)，簡報1-19，圖4-19)

應用三：如下圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{DE}$ ， $\overline{AC}=\overline{DF}$ ， $\angle A=\angle D=90^\circ$ ，若 $BC=13$ ， $DF=12$ ， $EF=3x+4$ ， $AC=2y$ ，則：

(1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等？根據什麼全等性質？
 (2) $x=?$ $y=?$
 (3) $\triangle DEF$ 的面積？

解：
 (1) 根據SAS全等性質， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
 (2) 又 $3x+4=13$ ，故 $x=3$
 且 $2y=12$ ，故 $y=6$
 (3) 由畢氏定理得知 $\overline{DE}=\sqrt{13^2-12^2}=5$
 故 $\triangle DEF$ 的面積 $=5 \times 12 \div 2=30$

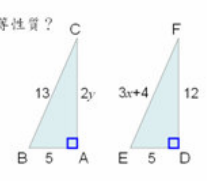


圖4-19 全等概念的引進與性質說明(12)-3

- (4) 應用問題4：主要是直角三角形全等性質的綜合了解，釐清學生常犯「只要是直角三角形的全等，必定是RHS全等性質」的錯誤，讓學生藉由接觸僅單純文字題的敘述，試著自行構圖，並根據所構的圖判別相關的性質，作單一圖形不同性質的比較。在此學生需具備商高定理的了解與計算。(1(12)，簡報1-20，圖4-20)

應用四： $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\angle A=\angle D=90^\circ$ ， $\overline{AB}=\overline{DE}$ ， $BC=EF$ ，則可利用哪些全等性質說明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ？

SSS	SAS	ASA	AAS	RHS
-----	-----	-----	-----	-----

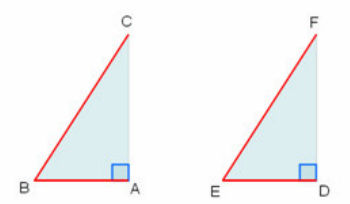


圖4-20 全等概念的引進與性質說明(12)-4

- (5) 應用問題5：接續文字敘述題的形式，作進一步的延伸與概念統整，在此全等性質不先行列出，希望藉由先前的介紹與四個應用，由學生透過記憶的方式，默背出所有的全等性質，並理解其所代表的意義。此題應用全等性質中的SAS與SSS全等概念，並提及SSA不一定全等的概念，雖選項(C)需用到樞紐定理的相關概念，不在此處的教學範圍內，然透過全等性質，選項(C)之所以不會全等，也將易於了解。(1(12)，簡報1-21，圖4-21)

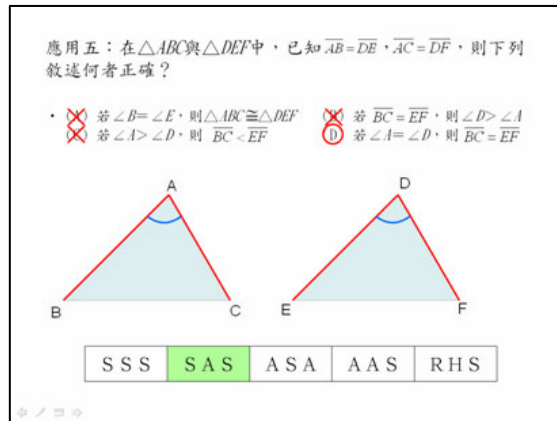


圖4-21 全等概念的引進與性質說明(12)-5

此部份提供的五個練習題，由於「全等性質的作圖」及「全等性質的證明」尚未引進，故僅偏向全等性質的理解與基本應用，不需用到以上相關的概念與解題過程，讓學生對全等性質得以有最基本的認識。

最後附上的「全等練習之一：全等概念的引進與說明」（如附件(二)），主要是透過兩節課的教學後，期待學生能對所理解的內容作相關的練習或測驗，針對的是簡報內容中提到相關的概念及例題，教師可視時間及學生反應作彈性應用。

4-1-2 教材與相關理論的綜合討論

根據前一節提及相關的能力指標與教學目標，本階段要教授的相關概念，應針對分析期(Analysis)的學生，進入關係期(Relation)的基本了解；由於這是學生第一次接觸相關的數學概念，可於簡報上課前，先行說明三角形全等的重要性與生活上的應用，強化其學習動機；或是透過實作的方式，讓學生對於全等的概念，更具基本的認識與理解。

由第二、三章歸納與本研究與教材設計的相關理論，大致上可區分為基模的運作、訊息處理、記憶與遺忘、類比遷移等重點，其中基模的運作、類比遷移與認知心理學較有關聯，而訊息處理、記憶與遺忘均屬於訊息處理理論的範圍。茲依各理論基礎，表列本章節內容相關性如下：

表4-1 「全等概念的引進與性質說明」與本研究相關理論相關性

本研究相關理論		基模的運作	訊息處理與記憶	注意力與遺忘	類比遷移
課程內容					
一、全等概念的引進與性質說明	(1)引起動機		√	△	
	(2)何謂「全等」?	√	△		
	(3)「全等」與「對應」	√	√	△	
	(4)兩個多邊形的全等	△	△		√
	(5)三角形全等的意義	√			
	(6)全等符號的介紹		√		
	(7)「全等三角形」的練習	√	√	√	
	(8)三角形全等的條件		√	△	√
	(9)三角形全等性質的介紹		√	△	
	(10)未必全等性質討論		△	√	
	(11)SSA全等特例	√	√	√	
	(12)應用一~五	√	√	√	△

【註】√代表高度相關，△代表中度相關

根據上表，一開始的引起動機，利用動畫疊合的方式，使學生於短期記憶中產生刺激，提昇學習意願；並藉由接下來介紹全等、對應與相關的概念，結合基本的練習，對全等有個概括的認識。

由於基模的精鍊需學生具備相關的知識基礎，例如要了解「對應」要先有「全等」的概念，要知道三角形全等的意義，要先明瞭「兩個多邊形的全等」意義；而同化與調適則是學生要能夠對於前後教材的差異性作了解與比較，構造新的知識基模，故全等與疊合的關係、SSA全等性質特例與SSA全等性質本身的差異性的理解，都須具備高度的同化與調適能力。

本教材一開始設計的理念即是要透過教材的先行製作，節省教師的授課時間，並透過互動式開關的設計，達到課堂上標示的效果；因此只要利用了幾何圖形的邊角呈現或文字框的開關功能，都與訊息的處理有所關聯，目的都在使感官記憶透過理解進入短期或長期記憶。

至於注意力與遺忘的部份，為吸引學生的注意避免分心，並延遲遺忘的時間，透過開關與動畫的混合操作，以及相同或不同性質綜合比較的方式，都能收其功效。例如全等三角形的練習中，透過比較與計算，將可以吸引學生注意力；而未必全等性質討論及SSA全等特例中，利用相關的符號強調與動畫呈現，也能將學生的注意力持續集中。

而類比遷移屬於基模運作中較高的層次，在多邊形全等的若且惟若概念，增加全等條件的了解，以及應用一～五中較複雜的題型，均需具備相關的概念與能力方能達成或加以延伸。

在完成此一階段的教學後，學生應對全等的概念與性質有基本的了解，並預備學習下一階段「全等性質的作圖」，以便真正了解全等性質所代表的意義，以及透過實作真正去做三角形全等的比較。

4-1-3 教材前後期差異性探討

本階段素材細分為十二個部份，由製作至完成歷經近十次的修改，由一開始單純介紹全等的意義、符號的介紹與全等性質的介紹，分別透過小組及大班的實際教學，再參考專家的建議，整個教材內容的變化歷程如下：

1. 透過「全等三角形的性質說明」簡報，開宗明義說明三角形全等的意義，介紹三角形的全等性質與不一定全等性質，其中利用了邊角的開關設計，與透過動畫疊合介紹全等的概念(95.10.20)；
2. 新增應用五題，對於學習過的概念能加以應用(95.11.4)；
3. 製作「全等概念的引進」簡報，作為「全等概念的性質說明」前的引起動機與基模基礎(95.11.18)；
4. 正式將上述兩部份的簡報合併，成為目前簡報的基本架構(96.3.12)；
5. 新增語音元件，提高學生在引起動機的學習興趣；改進SSA不一定全等在操作上的問題，並透過開關的設計強調RHS全等中，文字符號所代表的含意(96.3.18)；
6. 刪除不必要的簡報，將原始簡報重作排序，新增flash連結，方便學生作全等條件與性質的關係比較(96.4.6)；

7. 小組試教完畢，針對學生意見，在簡報上呈現不清楚部份更改顏色，並在SSA不一定全等中，製作相關角度開關，使學生對於此概念的理解更加清楚(96,4,17)；
8. 大班教學完畢，針對教學時聲音無法呈現，將聲音連結方式作更改；並針對RHS各符號代表的意義作簡單說明(96,6,1)。

缺乏「全等概念的引進」前的簡報，明顯只是概念說明，無法引起學生動機，並不了解全等真正代表的含意；而圖形的平移、旋轉與翻轉，更是進行疊合時需具備的相關概念；至於將兩個簡報合併的最主要原因，在於教師教學上可視學生反應與進度，進行較多或較少的內容說明，甚至反覆操作，達到精熟學習的效果。語音的增加、開關的製作與顏色的變更，都是在訊息處理的著重與強化注意力上所作的應用。

若將此階段的教材區分為前、中、後期，前期製作「全等三角形的性質說明」簡報及相關例題，中期加上「全等概念的引進」簡報內容，後期則是兩部份簡報的合併、重排，加上相關語音、連結的新增，以及開關的細部修飾。至於結合相關理論產生的內容表述如下：

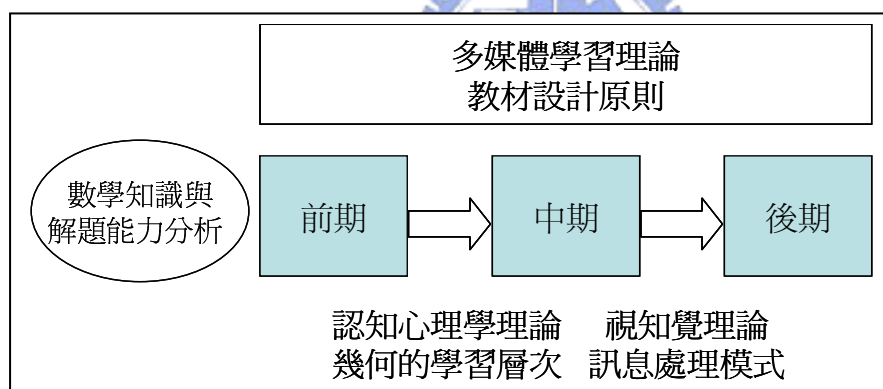


圖4-22 「全等概念的引進與性質說明」前後期與相關理論結合的演進

亦即透過數學知識與解題能力分析後，在多媒體學習理論與教材設計原則下，完成了前期的簡報；之後考量認知心理學基模的形成與精鍊，以及幾何的學習層次後製作了中期的簡報；最後則是在試教及正式教學結束後，配合視知覺理論及訊息處理模式，為強化學生記憶而做的細部修正。

綜觀這半年多的進步，除了研究者本身對於教材製作熟練度的增加外，在教材設計的考量上也多了幾分與學生互動的設計，藉以吸引學生注意，並期能強化其記憶內化成基模，以便在接下來的兩個階段紮下穩固的基礎。

4-2 全等性質的作圖

4-2-1 設計理念與教材說明

此一單元的設計，最主要是承接第一部份「全等概念的引進與作圖」，知道不同的全等性質所代表的意義並做簡單的應用後，藉由作圖實際了解全等的關係，進一步加以應用。在能力指標上，期望學生達到的是8-s-13能理解特殊三角形的性質、8-s-14 能以尺規作圖理解兩個三角形全等的意義，以及8-s-15能理解三角形的全等性質；至於教學目標最重要的是能理解：三角形的 SSS 、 SAS 尺規作圖與全等性質、能理解：三角形沒有 SSA 尺規作圖與全等性質、能理解：三角形的 RHS 全等性質、能理解：三角形沒有 AAA 尺規作圖與全等性質，以及能理解：三角形的 ASA 、 AAS 全等性質與尺規作圖。

搭配課本內容，使用到的除了原始的PowerPoint教師互動版的簡報外，並有配合語音，與教師版作區別的學生版，並設計同步練習單要學生與教師同步完成，以及課後的題目要同學於課後練習或測驗，確認全等作圖的理解與應用。

1. 一開始先口頭歸納上一節課的全等性質，並說明本節課的重點在說明所有的全等性質如何完成及其意義何在。若吾人可由最少的基本量控制尚未見到的三角形，亦即透過未卜先知的能力，讓出現的三角形落入自己所設計的框架(SSS 、 SAS 、 ASA ……)中，如同請君入甕般，將可以簡化計算上的複雜，促進吾人深入研究的方便性。(2(0)，簡報2-1，圖4-23)



圖4-23 全等性質的作圖(0)

2. 第一部份先從SSS全等作圖開始講起，利用教師操作、學生同步演練的方式，確認作圖的方式可以完成並加以理解，並藉由同頁面反覆操作的特性，務必使學生完成度達到九成以上；此外可針對反應較好或動作較快學生，利用作法的開關按鈕，詢問有關作法的詳細步驟；並讓學生透過疊合法或教師「即為所求」的按鈕，確認全等三角形的完成；最後視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別說明其作法為何。在此學生需先具備尺規作圖中，等線段作圖的能力。（2(1)，簡報2-2~2-5，圖4-24~4-27）

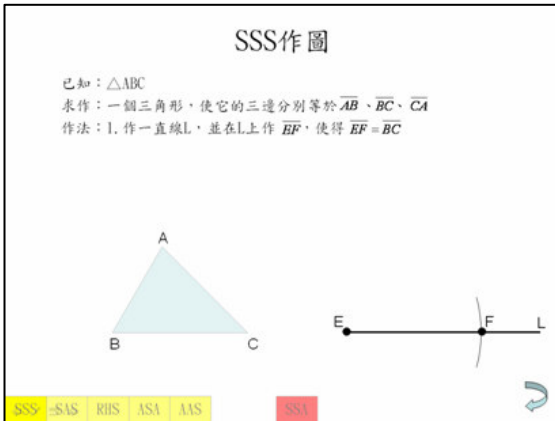


圖4-24 全等性質的作圖(1)-1

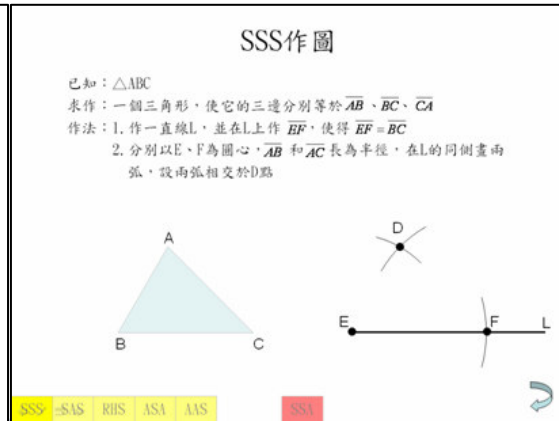


圖4-25 全等性質的作圖(1)-2

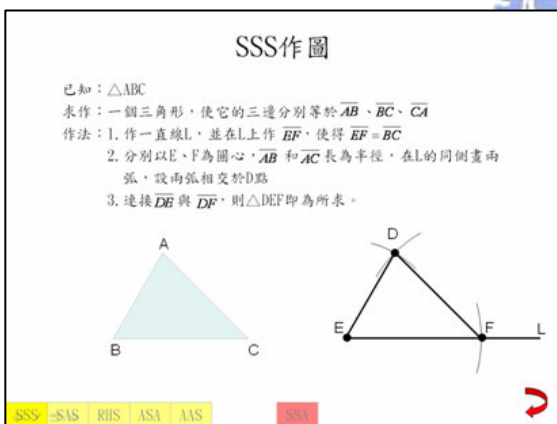


圖4-26 全等性質的作圖(1)-3

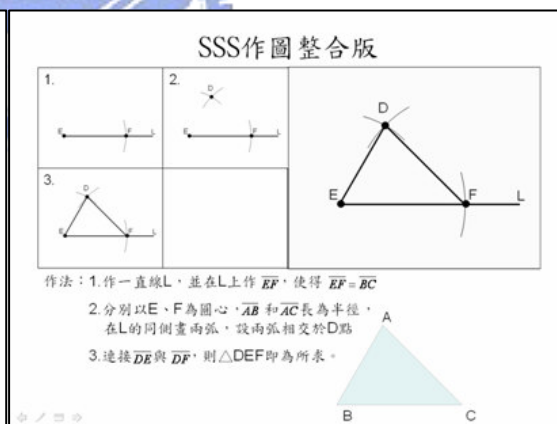


圖4-27 全等性質的作圖(1)-4

3. 第二部份接著談到SAS全等作圖的作法，利用教師操作、學生同步演練的方式，確認作圖的方式可以完成並加以理解，並藉由同頁面反覆操作的特性，務必使學生完成度達到九成以上；此外可針對反應較好或動作較快學生，利用作法的開關按鈕，詢問有關作法的詳細步驟；並讓學生透過疊合法或教師「即為所求」的按鈕，確認全等三角形的完成；在此SAS作圖的敘述較繁瑣，簡報頁數設計也較多，並針對學生易犯錯誤加以開關強調；最後再視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別

說明其作法為何。在此學生需先具備尺規作圖中，等線段作圖與等角作圖的能力。（2(2)，簡報2-6~2-10，圖4-28~4-32）

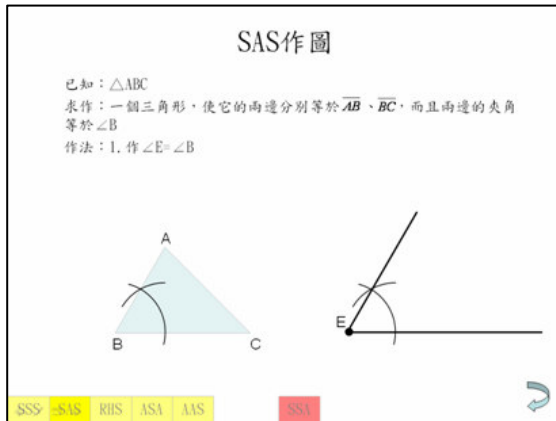


圖4-28 全等性質的作圖(2)-1

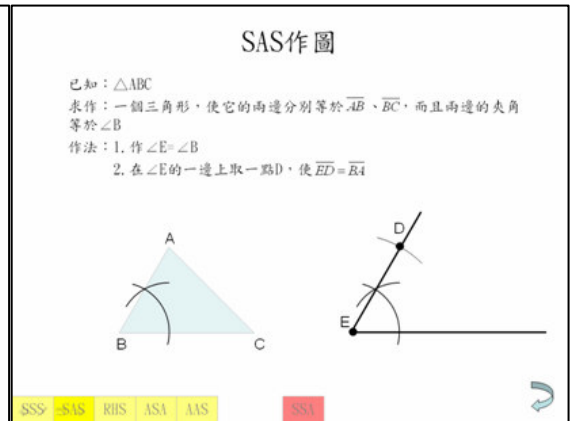


圖4-29 全等性質的作圖(2)-2

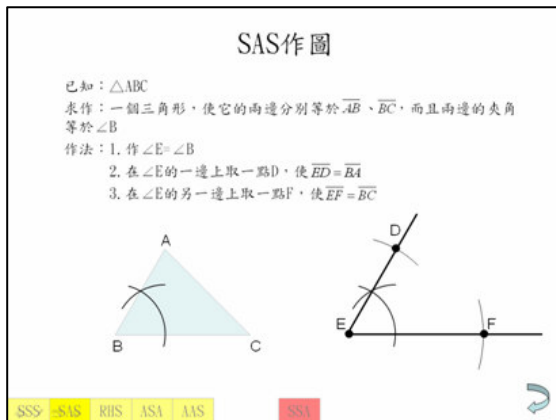


圖4-30 全等性質的作圖(2)-3

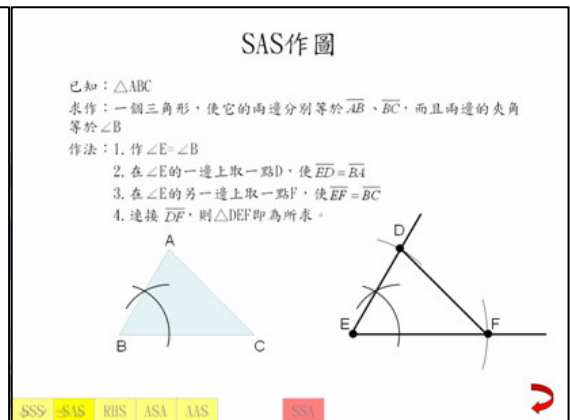


圖4-31 全等性質的作圖(2)-4

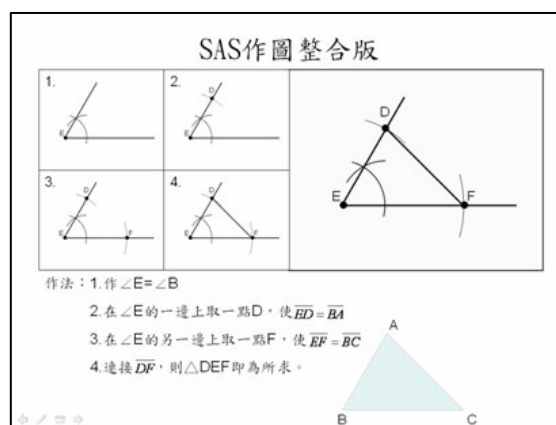


圖4-32 全等性質的作圖(2)-5

4. 第三部份接著談到SSA未必全等的作圖，利用教師操作、學生同步演練的方式，確認作圖的方式可以完成並加以理解，並藉由同頁面反覆操作

的特性，務必使學生完成度達到八成以上；此外可針對反應較好或動作較快學生，利用作法的開關按鈕，詢問有關作法的詳細步驟；而在完成作圖後的性質說明，為SSA性質之所以不全等的重要觀念，應予以特別強調，並提及另一種不一定全等的性質：AAA；最後再視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別說明其作法為何。在此學生需先具備尺規作圖中，等線段作圖與等角作圖的能力。（2(3)，簡報2-11~2-17，圖4-33~4-39）

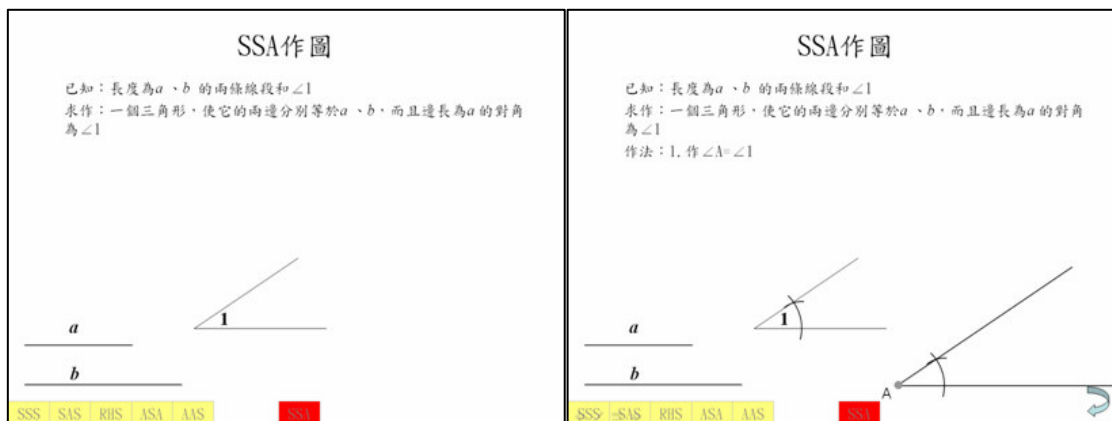


圖4-33 全等性質的作圖(3)-1

圖4-34 全等性質的作圖(3)-2

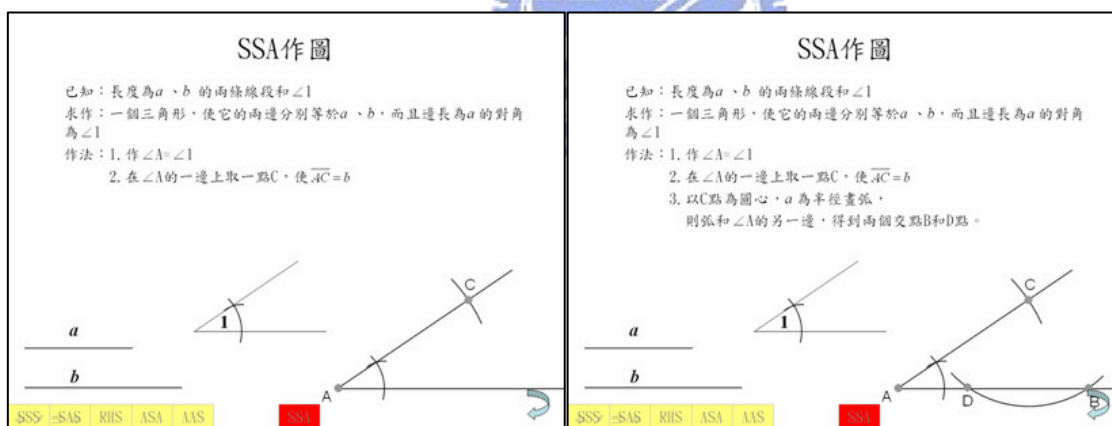


圖4-35 全等性質的作圖(3)-3

圖4-36 全等性質的作圖(3)-4

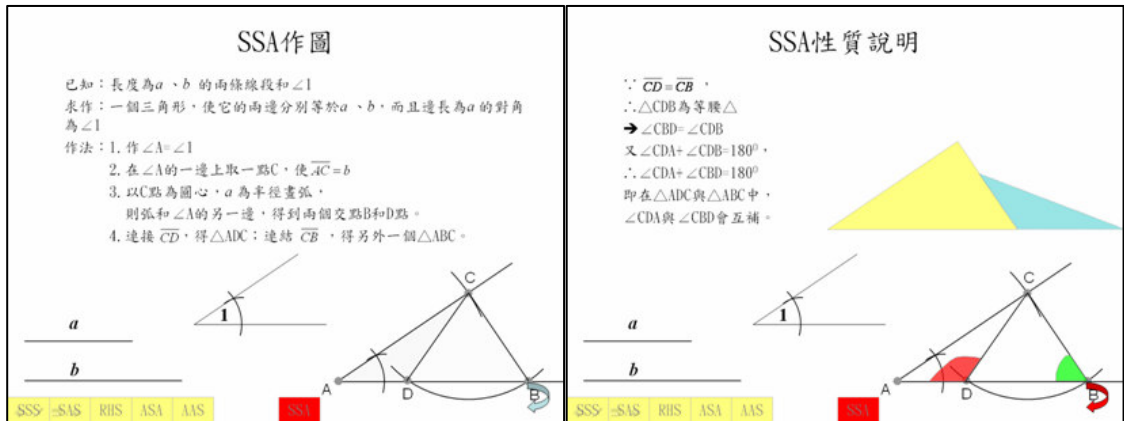


圖4-37 全等性質的作圖(3)-5

圖4-38 全等性質的作圖(3)-6

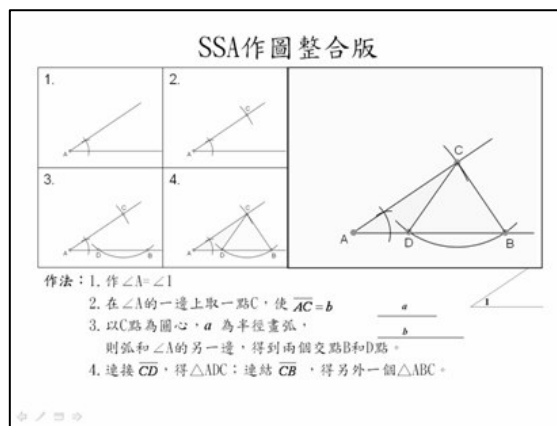



圖4-39 全等性質的作圖(3)-7

5. 第四部份則是RHS全等作圖，先針對要完成圖形加以分析，明白其邊角關係，再利用教師操作、學生同步演練的方式，確認作圖的方式可以完成並加以理解，並藉由同頁面反覆操作的特性，務必使學生完成度達到八成以上；此外可針對反應較好或動作較快學生，利用作法的開關按鈕，詢問有關作法的詳細步驟；並讓學生透過疊合法或教師「即為所求」的按鈕，確認全等三角形的完成；最後再針對RHS全等性質加以說明，讓學生明白透過商高定理與SSS全等的概念，一樣可以完成RHS全等性質的證明；並視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別說明其作法為何。在這裏因已進行到第三節課，可視學生反應，由教師決定是否透過連結，複習並比較前面說明過的三種全等性質。在此學生需先具備尺規作圖中，等線段作圖與線上一點作垂線的能力。（2(4)，簡報2-18~2-25，圖4-40~4-47）

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。



分析：
先將直角做出，
在直角的一邊做出 b ，
則可以 b 的另一端點做出 a ，
形成所需的直角三角形。

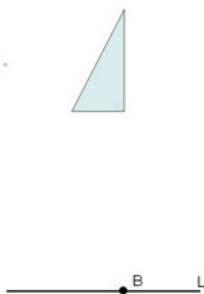
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-40 全等性質的作圖(4)-1

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。
作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B



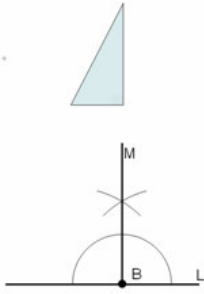
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-41 全等性質的作圖(4)-2

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。
作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B
2. 過 B 點做直線 $M \perp L$



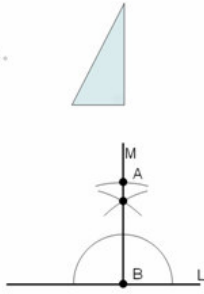
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-42 全等性質的作圖(4)-3

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。
作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B
2. 過 B 點做直線 $M \perp L$
3. 在 M 上做 $\overline{AB} = b$



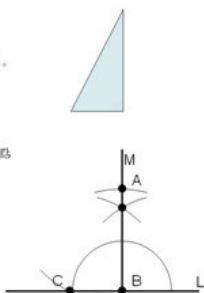
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-43 全等性質的作圖(4)-4

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。
作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B
2. 過 B 點做直線 $M \perp L$
3. 在 M 上做 $\overline{AB} = b$
4. 以 A 為圓心， a 為半徑畫弧交 L 於 C 點



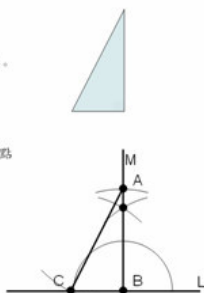
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-44 全等性質的作圖(4)-5

RHS作圖

已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
求作：以 a 為斜邊， b 為一股的直角三角形。
作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B
2. 過 B 點做直線 $M \perp L$
3. 在 M 上做 $\overline{AB} = b$
4. 以 A 為圓心， a 為半徑畫弧交 L 於 C 點
5. 連接 \overline{BC} ，則 $\triangle ABC$ 即為所求



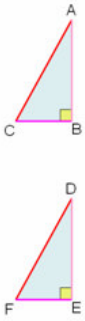
a b

SSS -SAS RHS ASA AAS SSA

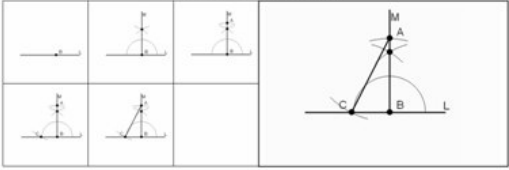
圖4-45 全等性質的作圖(4)-6

RHS全等性質說明

已知：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$ ， $\angle B = \angle E = 90^\circ$ 。
 求作：利用已知的SSS條件，求證 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
 說明：根據高定理可得 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$
 所以 $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}$
 同理 $\overline{DE} = \sqrt{\overline{DF}^2 - \overline{EF}^2}$
 因為 $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\overline{BC} = \overline{EF}$
 所以 $\overline{AB} = \overline{DE}$
 又因為 \overline{AB} 、 \overline{DE} 都是正數，
 所以 $\overline{AB} = \overline{DE}$
 因此 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的三邊對應相等，
 再根據SSS全等性質，我們可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



RHS作圖 整合版



已知：兩線段長 a, b ，且 $a > b$ 。
 求作：以 a 為斜邊， b 為一腿的直角三角形。
 作法：1. 做一直線 L ，在 L 上取一點 B
 2. 過 B 點做直線 $M \perp L$
 3. 在 M 上做 $\overline{AB} = b$
 4. 以 A 為圓心， a 為半徑畫弧交 L 於 C 點
 5. 連接 \overline{AC} ，則 $\triangle ABC$ 即為所求

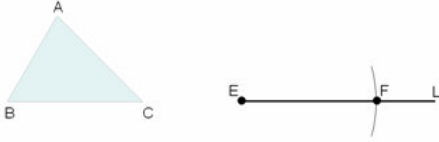
圖4-46 全等性質的作圖(4)-7

圖4-47 全等性質的作圖(4)-8

6. 第五部份是ASA全等作圖，要求學生藉由教師操作、學生同步演練的方式，確認作圖的方式可以完成並加以理解，並藉由同頁面反覆操作的特性，務必使學生完成度達到九成以上；此外可針對反應較好或動作較快學生，利用作法的開關按鈕，詢問有關作法的詳細步驟；並讓學生透過疊合法或教師「即為所求」的按鈕，確認全等三角形的完成；並視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別說明其作法為何。在此學生需先具備尺規作圖中，等線段作圖與等角作圖的能力。（2(5)，簡報 2-26~2-29，圖4-48~4-51）

ASA作圖

已知： $\triangle ABC$
 求作：一個三角形，使它的兩角分別等於 $\angle B$ 和 $\angle C$ ，而此兩角的夾邊等於 \overline{BC}
 作法：1. 畫一直線 L ，在 L 上作 \overline{EF} ，使得 $\overline{EF} = \overline{BC}$



ASA作圖

已知： $\triangle ABC$
 求作：一個三角形，使它的兩角分別等於 $\angle B$ 和 $\angle C$ ，而此兩角的夾邊等於 \overline{BC}
 作法：1. 畫一直線 L ，在 L 上作 \overline{EF} ，使得 $\overline{EF} = \overline{BC}$
 2. 分別以 E, F 為頂點， \overline{EF} 為一邊，在 L 的同側各畫出 $\angle E = \angle B$ ， $\angle F = \angle C$

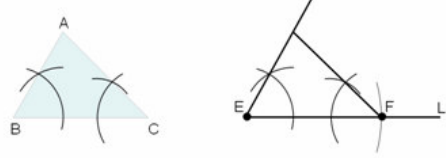


圖4-48 全等性質的作圖(5)-1

圖4-49 全等性質的作圖(5)-2

ASA作圖

已知： $\triangle ABC$
 求作：一個三角形，使它的兩角分別等於 $\angle B$ 和 $\angle C$ ，而此兩角的夾邊等於 \overline{BC}

作法：1. 畫一直線 L ，在 L 上作 \overline{EF} ，使得 $\overline{EF} = \overline{BC}$
 2. 分別以 E, F 為頂點， \overline{EF} 為一邊，在 L 的同側各畫出 $\angle E = \angle B, \angle F = \angle C$
 3. $\angle E$ 和 $\angle F$ 的另一邊會相交於 D 點，所畫出的 $\triangle DEF$ 即為所求。

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-50 全等性質的作圖(5)-3

ASA作圖整合版

作法：1. 作一直線 L ，並在 L 上作 \overline{EF} ，使得 $\overline{EF} = \overline{BC}$
 2. 分別以 E, F 為頂點， \overline{EF} 為一邊，在 L 的同側各畫出 $\angle E = \angle B, \angle F = \angle C$
 3. $\angle E$ 和 $\angle F$ 的另一邊會相交於 D 點，所畫出的 $\triangle DEF$ 即為所求。

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-51 全等性質的作圖(5)-4

7. 第六部份是AAS全等作圖，也是最後一種全等性質的作圖，在此教師手冊不建議將此內容作為評量內容，然透過分析與教師操作、學生同步演練的方式，仍期學生的接受度能達六成以上。最後學生可透過疊合法或教師「即為所求」的按鈕，確認全等三角形的完成；並視時間利用整合版，要學生針對完成的圖形，分別說明其作法為何。在此學生需先具備尺規作圖中，補角、等線段作圖與等角作圖的能力。（2(6)，簡報2-30~2-37，圖4-52~4-59）

AAS作圖

已知： $\angle 1, \angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊 a 。
 求作：滿足條件的三角形。

分析：
 先固定 $\angle 1$ 邊在邊上做 $\angle 2$ 及 a ，
 再移動 $\angle 2$ 產生三角形，
 使得 $\angle 1$ 的對邊為 a ，
 則 a 的另一角為 $180^\circ - \angle 1 - \angle 2$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-52 全等性質的作圖(6)-1

AAS作圖

已知： $\angle 1, \angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-53 全等性質的作圖(6)-2

AAS作圖

已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 2. 作 $\overline{AB} = a$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-54 全等性質的作圖(6)-3

AAS作圖

已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 2. 作 $\overline{AB} = a$
 3. 以 \overline{AB} 為一邊向上作 $\angle BAP = \angle 2$ 、 $\angle ABQ = \angle 3$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-55 全等性質的作圖(6)-4

AAS作圖

已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 2. 作 $\overline{AB} = a$
 3. 以 \overline{AB} 為一邊向上作 $\angle BAP = \angle 2$ 、 $\angle ABQ = \angle 3$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-56 全等性質的作圖(6)-5

AAS作圖

已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 2. 作 $\overline{AB} = a$
 3. 以 \overline{AB} 為一邊向上作 $\angle BAP = \angle 2$ 、 $\angle ABQ = \angle 3$
 4. 設 \overline{PA} 、 \overline{QB} 相交於C點，則 $\triangle ABC$ 即為所求

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-57 全等性質的作圖(6)-6

AAS全等性質說明

已知： $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ ，且 $\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$
 求作：利用已知的ASA全等性質說明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
 說明：根據三角形的三內角和為 180° ，得知
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，
 所以 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$
 同理 $\angle F = 180^\circ - \angle D - \angle E$
 又 $\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ ，
 所以 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 滿足：
 $\angle B = \angle E$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 、 $\angle C = \angle F$
 根據ASA全等性質得知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-58 全等性質的作圖(6)-7

AAS作圖整合版

已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。
 求作：滿足條件的三角形。
 作法：1. 作 $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$
 2. 作 $\overline{AB} = a$
 3. 以 \overline{AB} 為一邊向上作 $\angle BAP = \angle 2$ 、 $\angle ABQ = \angle 3$
 4. 設 \overline{PA} 、 \overline{QB} 相交於C點，則 $\triangle ABC$ 即為所求

SSS SAS RHS ASA AAS SSA

圖4-59 全等性質的作圖(6)-8

8. 第七部份為全等作圖進階應用題，在此最重要的目的是能夠融會貫通前面所提的六種全等性質作圖並了解其意義，進一步應用於相關的作圖題上。茲分別說明如下：

- (1) 第七部份的第一個應用，是SSS作圖的基本運用，知道等腰三角形的底邊與腰長的關係，並能配合SSS作圖的方式，完成預完成的圖形，並敘述其作法。(2(7)，簡報2-38~2-39，圖4-60~4-61)

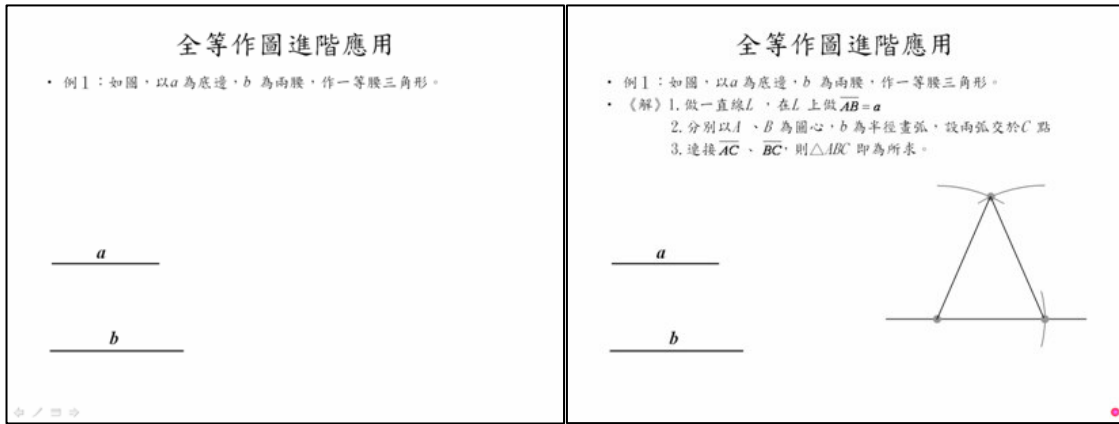


圖4-60 全等性質的作圖(7)-1

圖4-61 全等性質的作圖(6)-2

- (2) 第七部份的第二個應用，主要是作圖與全等性質的結合，讓學生先行歸納所有的全等性質，並判別不同人的作圖用什麼不同方式，透過邊、角的強調，更清楚全等性質及其應用。(2(7)，簡報2-40，圖4-62)

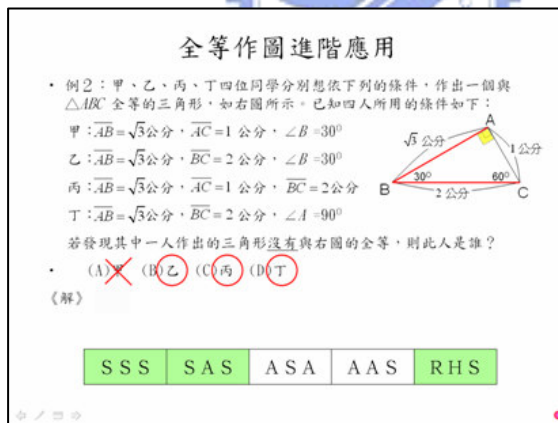


圖4-62 全等性質的作圖(7)-3

- (3) 第七部份的第三個應用，是SAS作圖的基本運用，學生需先了解等腰三角形的頂角與腰長的關係，進一步試著自行畫出預完成的圖形，確認其利用的全等性質。(2(7)，簡報2-41~2-42，圖4-63~4-64)

全等作圖進階應用

• 例3：利用尺規作圖作頂角等於 $\angle 1$ ，兩腰長為 a （如右圖）的等腰三角形，則須運用下列哪一個方法方可完成作圖？

• (A)SSS作圖 (B)SAS作圖 (C)ASA作圖 (D)AAS作圖

• 《解》

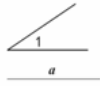


圖4-63 全等性質的作圖(7)-4

全等作圖進階應用

• 例3：利用尺規作圖作頂角等於 $\angle 1$ ，兩腰長為 a （如右圖）的等腰三角形，則須運用下列哪一個方法方可完成作圖？

• (A)SSS作圖 (B)SAS作圖 (C)ASA作圖 (D)AAS作圖

• 《解》




圖4-64 全等性質的作圖(7)-5

(4) 第七部份的第四個應用，是全等性質與作圖的綜合應用，主要是要學生透過已知了解，針對所需的全等性質，如何補足條件，以滿足預完成的全等三角形；透過三角形邊角的開關比較，將使得全等性質的對應關係更容易了解。（2(7)，簡報2-43~2-44，圖4-65~4-66）

全等作圖進階應用

• 例4： $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{BC} = \overline{QR}$ ， $\angle C = \angle R$ ，試依序回答下列問題：

(1)再加上_____條件，則依據ASA全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

(2)再加上_____條件，則依據SAS全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

(3)再加上 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 條件，則依據_____全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

圖4-65 全等性質的作圖(7)-6

全等作圖進階應用

• 例4： $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，已知 $\overline{BC} = \overline{QR}$ ， $\angle C = \angle R$ ，試依序回答下列問題：

(1)再加上 $\angle B = \angle Q$ 條件，則依據ASA全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

(2)再加上 $\overline{AC} = \overline{PR}$ 條件，則依據SAS全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

(3)再加上 $\overline{AB} = \overline{PQ}$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 條件，則依據 **RHS** 全等性質，可得 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ 。

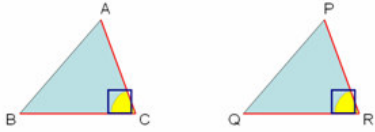


圖4-66 全等性質的作圖(7)-7

(5) 第七部份的第五個應用，是全等作圖的進階應用，學生需先了解60度角的完成方式，並藉由等線段作圖及SAS全等的概念，將所需圖形加以完成。在此完成後可透過填充或問答的方式，對作圖方式再加以複習。（2(7)，簡報2-45~2-48，圖4-67~4-70）

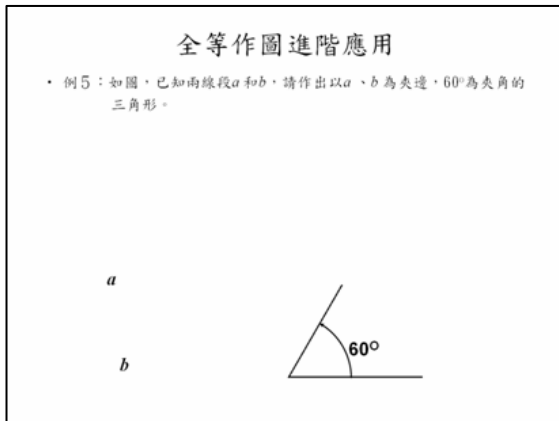


圖4-67 全等性質的作圖(7)-8

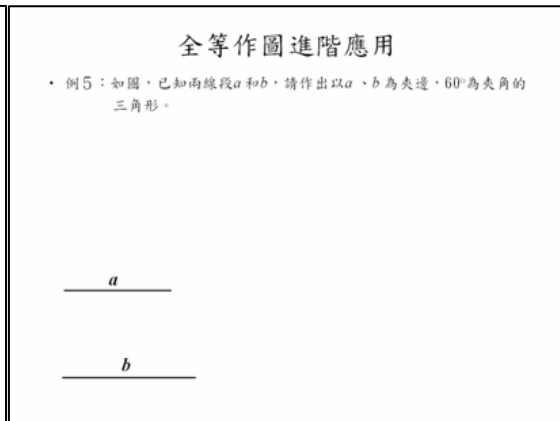


圖4-68 全等性質的作圖(7)-9

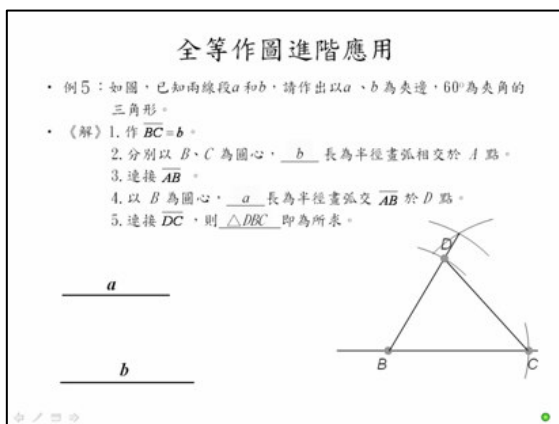


圖4-69 全等性質的作圖(7)-10

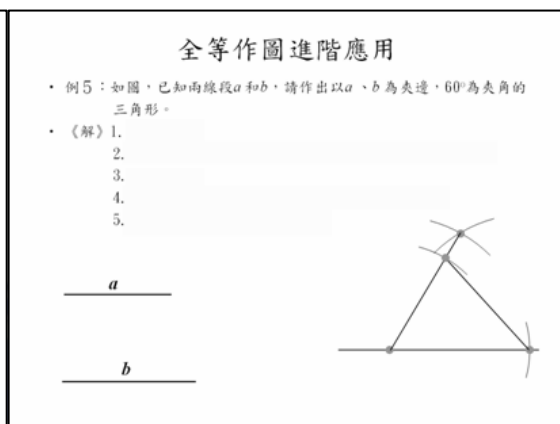


圖4-70 全等性質的作圖(7)-11

此部份提供的五個練習題，在「全等性質的概念與性質說明」教授完畢後，得以作進一步的應用，並能針對之前同步實作的各種作圖方式作應用，對於概念的進一步理解與接下來要作的證明，都具有加分的效果。

最後附上的「全等性質作圖(學生版)」，主要是針對未能完成以及要再重複操作了解的學生，能夠作補救及自修教學；至於課後的練習題，主要是針對這一個部份的概念作練習或測驗，教師可視時間及學生反應作彈性應用。

4-2-2 教材與相關理論的綜合討論

本階段要教授的相關概念，由於已有了全等的基本概念及全等性質的基本了解，在大多數學生進入關係期(Relation)的同時，需透過尺規作圖的操作予以強化；而這部份的內容與之前學過的尺規作圖有極大的相關，若學生的先備知識不足，應於操作時多加著墨，確認學生的操作上沒有問題。此外若時間允許，

透過開關的方式，確認操作與敘述的同步與理解，以便接下來的應用能夠由學生主動完成，不需教師的引導。

至於這個部份的內容，與本研究與教材設計的相關理論的相關性大致如下：

表4-2 「全等性質的作圖」與本研究相關理論相關性

課程內容		本研究相關理論			
		基模的運作	訊息處理與記憶	注意力與遺忘	類比遷移
一、全等性質作圖	(1)SSS作圖&SSS作圖整合版	✓	△	✓	
	(2)SAS作圖&SAS作圖整合版	✓	△	✓	
	(3)SSA作圖&SSA作圖整合版	✓	△	✓	△
	(4)RHS分析、作圖&RHS作圖整合版	✓	✓	✓	✓
	(5)ASA作圖&ASA作圖整合版	✓	△	✓	
	(6)AAS分析、作圖&AAS作圖整合版	✓	✓	✓	✓
	(7)全等作圖進階應用題5題	✓	△	△	△

【註】✓代表高度相關，△代表中度相關

根據表中所勾選，此部份的教材設計與認知心理學及訊息處理理論具有高度相關，這是因為學生在具備第一部份的基模後，此部份的內容正需要與其結合，真正了解「全等」的意義與作圖方式。至於訊息處理部份，為加強學生在操作上的同步與順遂，設計了模擬的尺規，可吸引其注意力，並藉由反覆操作避免遺忘，加上與前後頁面的串接、不同頁面的比較，真正達到「從做中學」的目的，使感官記憶得以持續，進一步進入長期記憶。

至於RHS以及AAS作圖因較具困難度及理解力，與之前學過的勾股定理與補角作圖有所相關，學生需具有類比遷移的能力；而由於SSA作圖需要與SAS作圖作比較，最後的進階應用題也需要相關的作圖概念，除了透過原本的基模運作，更期望透過教師的講解，一樣能達到類比遷移的效果。

在這個部份完成教學後，學生除了明白全等的形成與構圖，更進一步地能夠實作應用於題目上，並能依圖形說明不同的全等性質與作法的差異性，對於五種全等作圖與SSA未必全等的理解更進一步，以便接著作全等性質的應用，作為圖形理解的基礎。

4-2-3 教材前後期差異性探討

本階段素材由製作至完成歷經超過十次的修改，參考蕭慶利(2006)所製作的尺規作圖教材，自行設計製作所有的全等性質作圖，以下僅列出之間的較大的差異性：

1. 試作全等性質作圖SSS與SAS，確認文字與動畫的出現順序與版面設定(95.12.2)；
2. 製作「全等性質作圖全頁版」，確認教師上課教學互動模式，得以針對學生學習作適性化教學；作圖版面大幅修改，確認版面設置，避免顏色干擾，尺、規的樣式透明化，完成全等性質SSS、SAS、SSA及RHS作圖(96.1.6.)；
3. 完成所有作圖，新增頁面連結，方便教師複習比較；製作學生版本，區分教師互動及學生循序差異性，方便教師上課使用，學生回家複習(96.4.6)；
4. 修正作圖無法與原圖疊合問題，在「即為所求」文字上加開關，使所做圖形與原圖作疊合以驗證；此外合併部份多數同一敘述作圖，作圖說明編號上新增開關，方便文字作遮罩；並新增SSS、SAS、RHS、ASA、AAS作圖整合版暨進階應用題5題(96.4.8)；
5. 小組試教完畢，SSA作圖更改為與課本內容相同，由敘述式更改為作圖式，調整簡報安排前後順序，並製作同步練習單與課後練習試卷(96.4.20)；
6. 大班教學完畢，依實際教學需求及順序確認所有版面排序，刪除不必要簡報，作為最後呈現內容(96.7.24)；

這個部份的教材為求學生的學習完整，方便進行補救教學及再學習，特地製作「學生循序語音版本」，與教師版最大的差異在於刪除整合版及頁面連結，並配合多碼理論新增語音物件，刪除教師版互動部份按鈕以利於學生操作；此外根據訊息處理理論概念，作圖過程中的語音應與動畫同時出現，在此因學生已於課堂上跟隨教師作同步練習，文字的出現應只是輔助；然而分析時的內容因涉及思考，文字與語音同步的重要性自然相對提高。

此階段的簡報，可依學生版本製作前後區分為前後期，前期主要的工作在於工具的使用與版面的確認；至於後期加上認知心理學與訊息處理理論後，得

以確認教師在課堂上互動方式的呈現，得以反覆操作，並作適性化教學；更能針對落後或有意願再學習學生，進行補救或課後自修教學，以下為結合相關理論所產生的內容：

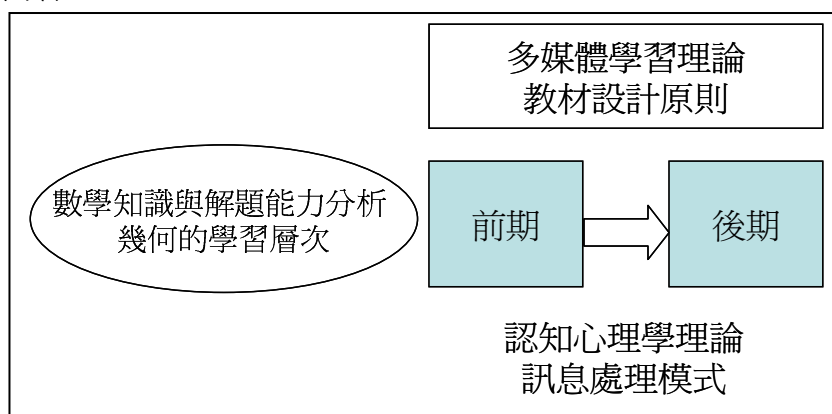


圖4-71 「全等性質的作圖」前後期與相關理論結合的演進

依數學知識與解題能力分析與幾何的學習層次為基礎，先完成前期的簡報，參考認知心理學理論暨訊息處理模式，完成後期簡報；而之間的修改暨互動式按鈕、動畫的製作所根據的是多媒體學習理論與教材設計原則；本部份在試教及正式教學後修改的地方不多。

而這半年多的進步，最大的改變是根據認知心理學，研究者考量學生的互動，在製作教材的彈性，利於學生反覆練習，利於基模的形成；至於學生循序版及文字、重點開關的製作，相對地日後在製作數位教材的同時，也能更加注意視聽訊息的產生與接受。

4-3 全等性質的應用

4-3-1 設計理念與教材說明

在「全等概念的引進與作圖」與「全等性質的作圖」教學完成後，進入最後一個階段「全等性質的應用」。前兩個部份，最重要的目的在教導學生知道「什麼是」及「為什麼是」全等，這個部份的主要目的在「如何使用」全等。而希望學生達到能力指標的有8-s-13能理解特殊三角形的性質、8-s-15 能理解三角形全等的性質，以及8-s-28 能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同；至於教學目標最重要的是能理解：角平分線的性質、能理解：垂直平分線的性質以及能理解：等腰三角形的性質。

搭配課本內容，使用到的除了原始的PowerPoint教師互動版的簡報外，並有配合與教師版作區別的學生循序版，以及於後期製作的GSP輔助檔案，配合課本練習、習作及相關試題，確認學生有能力作全等性質的應用。

1. 一開始先口頭說明本單元的主要目的，在透過證明，將之前學習過的所有全等性質應用於先前學過的角平分線、垂直平分線、等腰三角形各項幾何性質，並能進一步作更深入的比較與探討。(3(0)，簡報3-1，圖4-72)



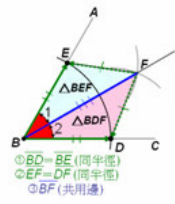
圖4-72 全等性質的應用(0)

2. 接下來是角平分線作圖的證明與逆證明，在此由教師先就圖形做分析，分清已知條件、待證條件、使用三角形及全等性質後，再補充其餘條件；接下來再做依序證明，為使學生能與分析過程相結合，採用先歸納再演

繹，並將使用條件統一呈現以比較；此外與視知覺理論暨訊息處理理論的結合，同時於圖形暨文字上作開關，以強調所使用的邊、角及三角形，並補充部份學生先備知識不足的角平分線作圖方式及性質。最後是與簡報相搭配的GSP檔，說明角平分線性質的一般性，利用循序開關暨及時運算的功能，強調任一點至角平分線兩邊的距離相等。在此需配合複習角平分線讓學生偵測反思。「為什麼畫這三個弧，連接 \overline{BF} 就一定平分 $\angle B$ ？」，期望學生能回答出「SSS三角形的全等，所以對應角相等。」若學生的回答較為凌亂，老師可以總結時告知這就是SSS全等性質的應用，如此學生可以更貼切體認到三角形全等性質的功效，增進學習的動機，進一步深入再探討其它性質的應用。(3(1), 簡報3-2~3-3, 圖4-73~4-74)

角平分線作圖證明：

- 如圖是 $\angle ABC$ 的角平分線尺規作圖痕跡。
- 求證：「直線 BF 是 $\angle ABC$ 的角平分線」。
- 證明：(1) $\triangle BEF \cong \triangle BDF$
 連接 \overline{EF} 、 \overline{DF} ，
 在 $\triangle BEF$ 及 $\triangle BDF$ 中，
 ① $\overline{BE} = \overline{BF}$ (相同半徑)，
 ② $\overline{EF} = \overline{DF}$ (相同半徑)，
 ③ $\overline{BF} = \overline{BF}$ (共用邊)，
 $\therefore \triangle BEF \cong \triangle BDF$ (SSS)
 (2) 直線 BF 為 $\angle ABC$ 的角平分線
 $\therefore \triangle BEF \cong \triangle BDF$ (SSS)
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)
 即直線 BF 為 $\angle ABC$ 的角平分線



角平分線性質證明：

- 如圖，直線 AP 為 $\angle EAF$ 的角平分線， D 為直線 AP 上任意一點，分別從 D 點作 $\overline{DC} \perp \overline{AE}$ 和 $\overline{DB} \perp \overline{AF}$ 。
- 求證：「 D 點到角兩邊的距離相等」。
- 證明：(1) $\triangle ADC \cong \triangle ADB$
 在 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ADB$ 中，
 ① $\angle 1 = \angle 2$ (已知)，
 ② $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ ($\overline{DC} \perp \overline{AE}$, $\overline{DB} \perp \overline{AF}$)
 ③ $\overline{AD} = \overline{AD}$ (共用邊)，
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$ (AAS)
 (2) $\angle EAF$ 的角平分線上 D 點
 到此角兩邊距離相等。
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADB$
 $\therefore \overline{CD} = \overline{BD}$ (對應邊相等)，
 故 $\angle EAF$ 的角平分線上 D 點到此角兩邊距離相等。
 ※亦即角平分線上任一點至此角兩邊的距離相等。

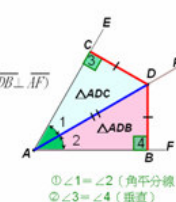


圖4-73 全等性質的應用(1)-1

圖4-74 全等性質的應用(1)-2

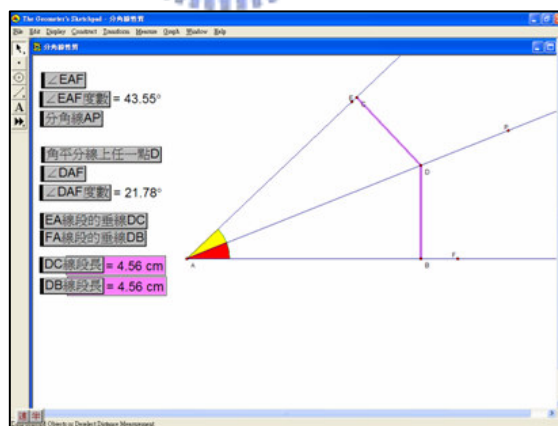


圖4-75 全等性質的應用(1)-3

3. 第二部份是垂直平分線性質的證明與逆證明，在此因需證明兩次的三角形全等，故先由上圖導引得知另一組三角形需證明的條件，再開啓下圖做進一步的證明；待下圖證明完畢，再接著上圖將預證條件證明完畢；同樣在圖形、文字上皆有開關，並補充部份學生先備知識不足的垂直平分線作圖方式及性質。最後與簡報相搭配的GSP檔，與角平分線簡報所

附GSP目的一樣，說明垂直平分線性質的一般性，利用循序開關暨及時運算的功能，強調垂直平分線任一點至兩端點的距離相等。此外，若稍後學生對於等腰三角形性質已作證明並加了解，亦可透過三角形全等與「等腰三角形頂角平分線必垂直平分底邊」性質加以證明。（3(2)，簡報3-4~3-5，圖4-76~4-78）

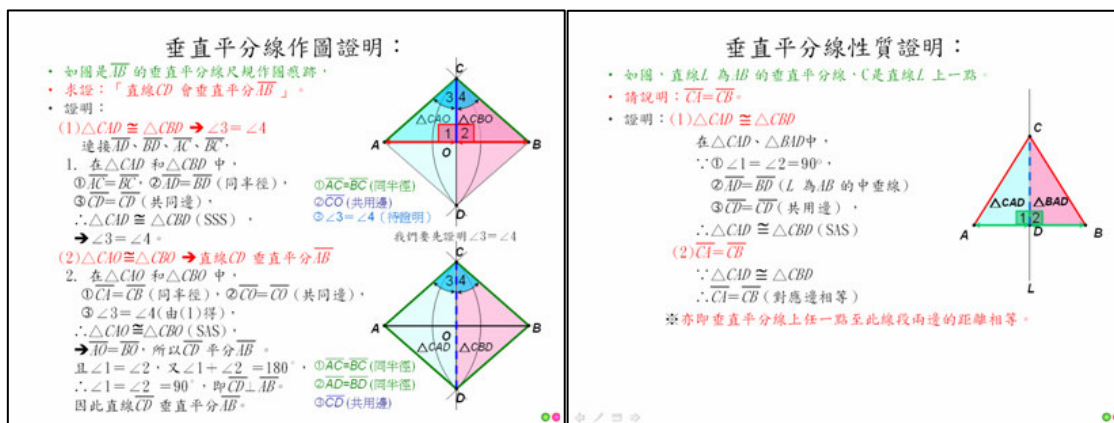


圖4-76 全等性質的應用(2)-1

圖4-77 全等性質的應用(2)-2

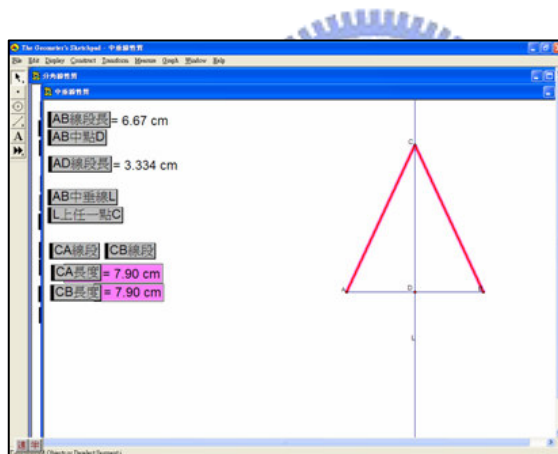


圖4-78 全等性質的應用(2)-3

4. 第三部份是分角線與中垂線的綜合證明應用，透過四個問題做分角線、中垂線性質的計算與應用。這個部份特別獨立出來，主要是因剛教完兩種性質，在此利用題目比較應用，確認概念的理解與立即的應用。（3(3)，簡報3-6~3-9，圖4-79~4-82）

(1) 第三部份的第一個應用，用的是垂直平分線的結論證明；在此有一個重點是在學習過各項幾何性質後，可以證明過的條件作為結論直接使用，這一題就是最佳的例子。

分角線與中垂線綜合證明應用(I)

- 已知： L 為 \overline{AB} 的垂直平分線， P, Q 在 L 上。
- 請說明： $\angle PAQ = \angle PBQ$
- 【證明】在 $\triangle APQ$ 及 $\triangle BPQ$ 中，
 因為 P, Q 在 AB 的中垂線 L 上，
 所以 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ， $\overline{QA} = \overline{QB}$ ，
 又 $\overline{PQ} = \overline{PQ}$ (公用邊)
 $\therefore \triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (SSS)
 $\rightarrow \angle PAQ = \angle PBQ$ (對應角相等)

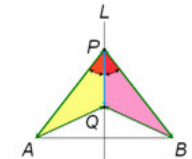


圖4-79 全等性質的應用(3)-1

(2) 第三部份的第二個應用，透過角平分線性質所作的計算，透過已知條件的說明與標示，循序地引導學生計算出待算的答案；在此除了對角平分線性質的了解外，還要知道三角形面積的計算方式以及面積的切割與組合。

分角線與中垂線綜合證明應用(II)

- 如圖， $\triangle ABC$ 的面積為 42 平方公分， \overline{BP} 為 $\angle ABC$ 的角平分線，且與 \overline{AC} 交於 P ， $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PN} \perp \overline{BC}$ ；又知 $\overline{BC} = 10$ 公分， $\overline{PM} = 4$ 公分，則 $\overline{AB} = ?$
- 解： $\because \overline{BP}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線
 且 $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PN} \perp \overline{BC}$
 $\therefore \overline{PM} = \overline{PN} = 4$
 $\triangle PBC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{PN} = \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$
 $\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle PBC$
 $42 = \triangle ABP + 20 \quad \therefore \triangle ABP = 22$
 $\triangle ABP = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM}$
 $22 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 4 \quad \therefore \overline{AB} = 11$ (公分)

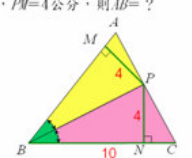


圖4-80 全等性質的應用(3)-2

(3) 第三部份的第三個應用，是中垂線性質與直角三角形的應用；這裏提到了直角三角形兩股中垂線交於斜邊中點的關係，並透過GSP的動態即時呈現，了解直角三角形外心的一般性；這裏學生需具備三角形內角和、補角的概念以及等腰三角形的邊角關係等先備知識。

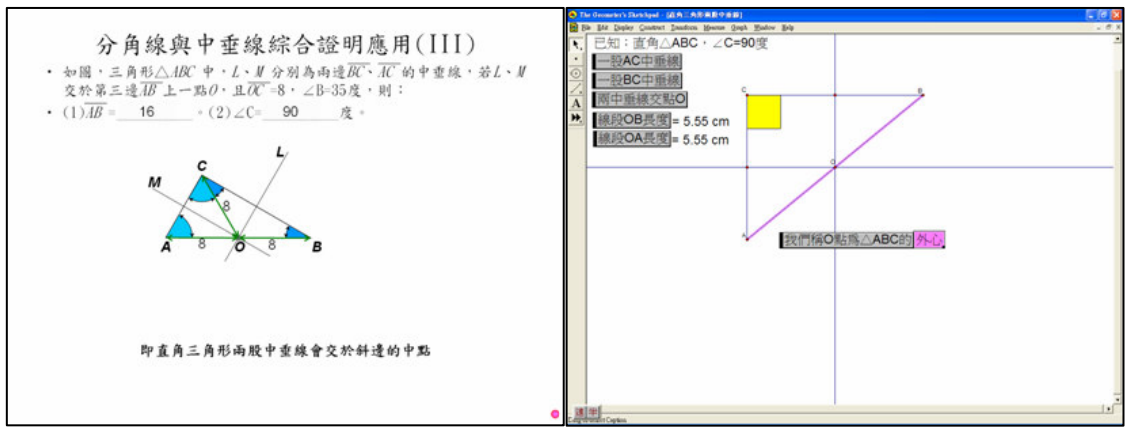


圖4-81 全等性質的應用(3)-3 圖4-82 全等性質的應用(3)-4

(4) 第三部份的第四個應用，主要是結合中垂線及分角線的性質，作交點到邊角距離關係的比較。透過已知條件的說明與依序呈現，加上呈現距離時互動開關的使用，以及最後不同選項的比較，確實使學生在本題的應用上作了解，並有能力自行解決（判斷或作圖）其他的類似問題。

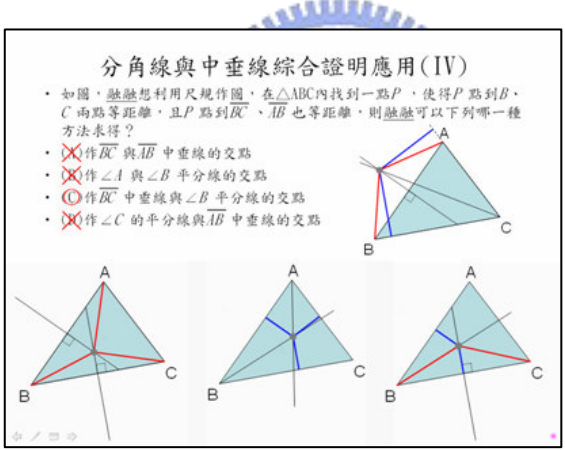


圖4-83 全等性質的應用(3)-5

5. 接下來是第四、第五部份，說明的是等腰三角形底角相等的證明與比較；經過前面四個問題的證明與理解，學生應有能力針對一般性的幾何證明題作分析與說明；在此透過三個不同的方式，說明幾何證明題中輔助線的使用與一題多解的證明，最後並透過圖形的比較與使用，分別作圖形與說明的比較；在此教師不妨多著墨一點時間，或是透過練習及測驗的模式，期使學生這方面學習完整，日後對於幾何證明題自己有能力作分析與說明。根據專家評鑑後的建議，教師應於三種證法的第一步保留作圖痕跡，讓學生對於作圖與證明能夠加以連結，更有比較的價值。（3(4)、3(5)，簡報3-10~3-13，圖4-84~4-87）

等腰三角形的兩底角相等

- 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{BA} = \overline{CA}$ 。
- 請說明 $\angle B = \angle C$ 。
- 《證明1》取 \overline{BC} 的中點 D ，連接 \overline{AD} ，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\overline{BD} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SSS)，
 $\rightarrow \angle B = \angle C$

① $\overline{BA} = \overline{CA}$ (等腰 \triangle)
 ② $\overline{BD} = \overline{CD}$ (D為中點)
 ③ \overline{AD} (共用邊)

圖4-84 全等性質的應用(4)-1

等腰三角形的兩底角相等II

- 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{BA} = \overline{CA}$ 。
- 請說明 $\angle B = \angle C$ 。
- 《證明2》作 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 交 \overline{BC} 於 D 點，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (RHS)，
 得 $\angle B = \angle C$ 。

① $\overline{BA} = \overline{CA}$ (等腰 \triangle)
 ② $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ($\overline{AD} \perp \overline{BC}$)
 ③ \overline{AD} (共用邊)

圖4-85 全等性質的應用(4)-2

等腰三角形的兩底角相等III

- 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{BA} = \overline{CA}$ 。
- 請說明 $\angle B = \angle C$ 。
- 《證明3》作 $\angle BAC$ 的分角線交 \overline{BC} 於 D 點，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SAS)，
 得 $\angle B = \angle C$ 。

① $\overline{BA} = \overline{CA}$ (等腰 \triangle)
 ② $\angle 3 = \angle 4$ (AD 為分角線)
 ③ \overline{AD} (共用邊)

圖4-86 全等性質的應用(4)-3

等腰三角形的兩底角相等證明比較：

SSS: 取 \overline{BC} 的中點 D ，連接 \overline{AD} ，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\overline{BD} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SSS)，
 $\rightarrow \angle B = \angle C$

RHS: 作 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 交 \overline{BC} 於 D 點，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (RHS)，
 得 $\angle B = \angle C$ 。

SAS: 作 $\angle BAC$ 的分角線交 \overline{BC} 於 D 點，在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SAS)，
 得 $\angle B = \angle C$ 。

圖4-87 全等性質的應用(5)

6. 第六、第七部份是等腰三角形的另外兩個性質，這裏談到了若且惟若的概念，分別說明由等腰三角形頂角平分線推得底邊中垂線的性質，以及由等腰三角形底邊中垂線反推頂角平分線的性質；此外還說明了全等三角形的證明並非是幾何證明的唯一方式，只要方法使用得當，一樣可以做三角形的幾何性質證明。（3(6)、3(7)，簡報3-14~3-15，圖4-88~4-89）

等腰三角形的頂角平分線性質

- 如右圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ， \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線。
- 請說明 \overline{AD} 會垂直平分 \overline{BC} 。
- 《證明》在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 ① $\overline{BA} = \overline{CA}$ ，
 ② $\angle 1 = \angle 2$ ，
 ③ $\overline{AD} = \overline{AD}$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SAS)，
 因此得到：
 (1) $\overline{BD} = \overline{CD}$ ，所以 \overline{AD} 平分 \overline{BC} 。
 (2) $\angle 3 = \angle 4$ ，而 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ，
 所以 $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$ ，
 得到 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。
 因此 \overline{AD} 會垂直且平分 \overline{BC} 。

① $\overline{BA} = \overline{CA}$ (等腰 \triangle)
 ② $\angle 1 = \angle 2$ (AD 為分角線)
 ③ \overline{AD} (共用邊)

圖4-88 全等性質的應用(6)

等腰三角形底邊的垂直平分線性質

- 反過來說：等腰三角形底邊的垂直平分線是否通過頂點且平分頂角？
- 如圖， $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{BA} = \overline{CA}$ ，則 \overline{BC} 的垂直平分線是否通過頂點 A ？
- 且 \overline{AD} 是否平分 $\angle BAC$ ？
- 《解》根據垂直平分線性質，頂點 A 會在 \overline{BC} 的垂直平分線上，
 $\rightarrow \overline{BC}$ 的垂直平分線通過頂點 A 。
 設 \overline{AD} 為底邊 \overline{BC} 的垂直平分線，則 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，
 $\angle B = \angle C$ ，
 $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ，
 所以由三角形內角和定理可知 $\angle 3 = \angle 4$ ，
 即底邊的垂直平分線會平分頂角。

圖4-89 全等性質的應用(7)

7. 最後一個部份是綜合證明與應用，是三個單元的內容教授完畢後，最後透過六個题目的應用，將這個章節的所學與重點做一總結。在這裏的模式均是透過圖形建立基模，文字、圖形及填空的開關視課堂教學進度及學生反應彈性使用，並將計算及證明的過程循序呈現，以求學生的全盤了解。(3(8)，簡報3-16~3-21，圖4-90~4-95)

(1) 第八部份的第一個問題，利用圖形的分析，隨機做開關的呈現，以及歸納結論最後做問題的解答。

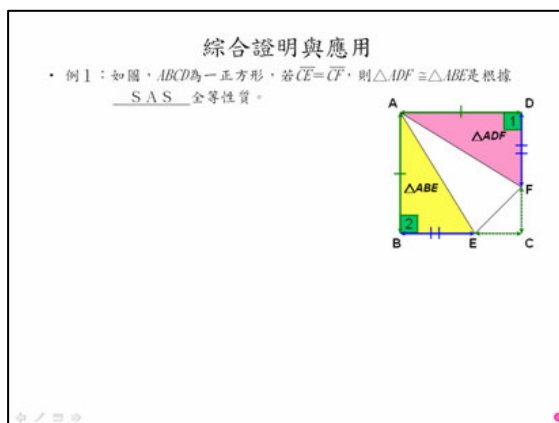


圖4-90 全等性質的應用(8)-1

(2) 第八部份的第二個問題，依據前面做計算題的模式，仍是由圖形作引導式動態激發呈現，循序說明計算過程，並透過圖形條件與計算時條件使用的比較，期待學生能將證明時的結論，在此做為計算時需具備的條件；本題需具備直角三角形勾股定理的理解與使用能力。

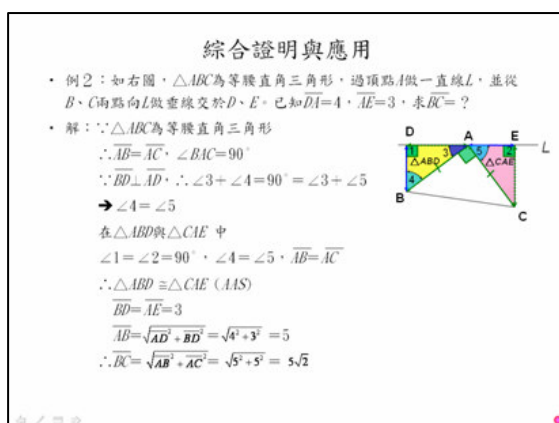


圖4-91 全等性質的應用(8)-2

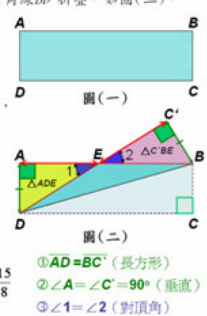
- (3) 第八部份的第三個問題，利用證明與計算的過程，同樣針對圖形的分析，做依序說明的依據與結論；同樣地本題仍需具備直角三角形勾股定理的理解與使用能力。

綜合證明與應用

• 例3：如圖，將圖(一)長方形 $ABCD$ 沿著對角線 BD 折疊，如圖(二)，則：(1) 試說明 $\triangle ADE \cong \triangle C'BE$ (2) 若 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=4$, 求 $\overline{AE}=?$

• 《解》(1) $\because ABCD$ 為長方形, $\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$.
 \because 沿著 \overline{BD} 折疊, $\triangle DBC \cong \triangle DBC'$,
 $\therefore \angle C = \angle C'$, $\overline{BC} = \overline{BC'}$.
 在 $\triangle ADE$ 與 $\triangle C'BE$ 中,
 $\overline{AD} = \overline{BC'}$, $\angle A = \angle C' = 90^\circ$,
 $\angle 1 = \angle 2$,
 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle C'BE$ (AAS)

(2) $\because \triangle ADE \cong \triangle C'BE$, $\therefore \overline{DE} = \overline{BE}$,
 設 $\overline{AE} = x$, $\overline{DE} = \overline{BE} = 4 - x$,
 $\therefore (4-x)^2 = x^2 + 1^2$, $x = \frac{15}{8}$, $\therefore \overline{AE} = \frac{15}{8}$



① $\overline{AD} = \overline{BC'}$ (長方形)
 ② $\angle A = \angle C' = 90^\circ$ (垂直)
 ③ $\angle 1 = \angle 2$ (對頂角)

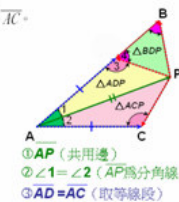
圖4-92 全等性質的應用(8)-3

- (4) 第八部份的第四個問題，要先透過輔助線的使用，作三角形全等的證明，並透過全等性質的應用，證明對應邊、角的相等，最後再透過正三角形的性質，做題目條件的計算；本題需具備補角及正三角形性質的了解。

綜合證明與應用

• 例4：如圖， \overline{AP} 平分 $\angle BAC$, 且 $\overline{PB} = \overline{PC}$, $\overline{AB} > \overline{AC}$.
 若 $\overline{AB} = 16$, $\overline{AC} = 12$, $\angle C = 120^\circ$, 求 \overline{PC} .

• 解： $\because \overline{AB} > \overline{AC}$, 在 \overline{AB} 上取 $\overline{AD} = \overline{AC}$, 連接 \overline{DP} .
 $\because \overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$
 在 $\triangle ADP$ 與 $\triangle ACP$ 中,
 $\angle 1 = \angle 2$, $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{AP} = \overline{AP}$
 $\therefore \triangle ADP \cong \triangle ACP$ (SAS).
 $\angle 3 = \angle C = 120^\circ$, $\overline{PD} = \overline{PC}$
 又 $\overline{PB} = \overline{PC}$ (已知) $\rightarrow \overline{PB} = \overline{PD}$,
 $\therefore \angle 4 = \angle B = 180^\circ - \angle 3 = 60^\circ$
 即 $\triangle BDP$ 為正三角形
 $\therefore \overline{PC} = \overline{PD} = \overline{BD} = 16 - 12 = 4$



① \overline{AP} (共用邊)
 ② $\angle 1 = \angle 2$ (\overline{AP} 為分角線)
 ③ $\overline{AD} = \overline{AC}$ (取等線段)

圖4-93 全等性質的應用(8)-4

- (5) 第八部份的第五個問題，是正三角形疊合的證明題，這裏透過圖形的說明與開關的使用，期待學生在題目的說明與圖形的呈現上作比較，試著自行說明答案，並做為下一題循序證明的基礎；本題需具備正三角形邊角關係的理解。

綜合證明與應用

- 例5：如圖， $\triangle ABC$ 、 $\triangle BDE$ 均為正三角形，其中E在BC上。
- 試證： $\overline{CD} = \overline{AE}$ 。
- 提示：要證明 $\overline{CD} = \overline{AE}$ ，只要說明 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ 即可。
- 《證明》在 $\triangle ABE$ 、 $\triangle CBD$ 中，
 - $\angle ABE = \angle CBD = 60^\circ$ 度
($\triangle ABC$ 、 $\triangle BDE$ 均為正三角形)
 - $\overline{AB} = \overline{BC}$ ($\triangle ABC$ 為正三角形)
 - $\overline{BE} = \overline{BD}$ ($\triangle BDE$ 為正三角形)
 - $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$ (SAS)
 - $\rightarrow \overline{CD} = \overline{AE}$ (對應邊相等)

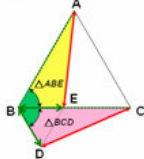


圖4-94 全等性質的應用(8)-5

(6) 第八部份的第六個問題，是正方形疊合的證明題，也是幾何證明中，屬於較難理解的題型之一。透過第五題的說明與引導，本題依據圖形分析的開關使用，配合循序式的證明，再透過全開關的使用作填充式的回答，讓學生對於證明時的重點加以理解與應用；本題需具備的是正方形的邊角性質、三角形的內角關係的基本能力。根據專家評鑑後所予的建議，透過數位教學的優點，若再增加「從三角形的兩邊向外作正 \triangle 、正五邊形、正六邊形……」後相關結果的相關簡報或GSP檔，相信可以作為學習能力及意願較高的同學深入研究或自由瀏覽之用。

綜合證明與應用

- 例6：如圖， $\triangle ABC$ 為任意三角形，自兩邊 \overline{BC} 及 \overline{AB} 分別向外做兩個正方形 $ABDE$ 與 $BCFG$ ，連接 \overline{AG} 、 \overline{CD} 相交於H。
- 試證：(1) $\overline{AG} = \overline{CD}$
- (2) $\overline{AG} \perp \overline{CD}$
- 《證明》(1) 在 $\triangle BDC$ 、 $\triangle BAG$ 中，
 - $\because ABDE$ 、 $BCFG$ 為正方形
 - $\overline{BD} = \overline{AB}$ 、 $\overline{BC} = \overline{BG}$
 - 且 $\angle ABD = \angle CBG = 90^\circ$
 - $\rightarrow \angle ABD + \angle ABC = \angle CBG + \angle ABC$
 - $\rightarrow \angle DBC = \angle ABG$
 - $\therefore \triangle BDC \cong \triangle BAG$ (SAS) $\rightarrow \overline{AG} = \overline{CD}$ (對應邊相等)
- (2) $\because \triangle BDC \cong \triangle BAG$ ， $\therefore \angle BCD = \angle BGA$ (對應角)
- 設 \overline{BC} 、 \overline{AG} 相交於I，則 $\angle BIG = \angle CIH$ (對頂角)
- 在 $\triangle BIG$ 、 $\triangle CIH$ 中， $\angle IGB = \angle ICH$ ， $\angle BIG = \angle CIH$ ， $\therefore \angle IHC = \angle IBC = 90^\circ$ ，即 $\overline{AG} \perp \overline{CD}$

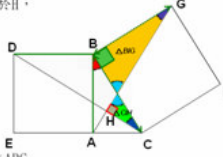


圖4-95 全等性質的應用(8)-6

三角形全等的證明與計算題型極多，在此本教材僅提供這六個題目做練習，除了時間上的考量以外，另一方面就能力指標與學習目標的考量，這個單元在課本、習作與一般性試卷的應答能力已具備，並同時具有九年級時接著作幾何的正式證明時的基本能力，這也是本單元結束後不再自製題目練習的主要原因。

同樣考量學生在補救教學及課後自學的目的，以循序呈現取代隨機開關，並加上每個證明前的分析，所製作而成的學生循序版，在這個單元一樣有補強教師教學的目的。

4-3-2 教材與相關理論的綜合討論

本階段要教授的相關概念，在前面兩個階段的教學完成後，大多數的學生在三角形的全等學習中，應已具備關係期(Relation)的基本能力；接下來透過這個階段的學習，最主要的除了了解三角形全等的使用時機及方式，透過理解內在關係進而形成概念，並非只是公式與名詞的記憶；另一個目的是藉由分析與引導，促使少數數學能力較佳的學生，提升至形式演繹期，證明與理解一個定理有很多不同證明的方法，也能理解一個定理的充份或必要條件的內在關係，並發現正逆命題間的差異性。

至於這個部份的內容，與本研究與教材設計的相關理論的相關性大致如下：

表4-3 「全等性質的應用」與本研究相關理論相關性

本研究相關理論 課程內容		基 模 的 運 作	訊 息 處 理 與 記 憶	注 意 力 與 遺 忘	類 比 遷 移
三、全等性質的應用	(1)角平分線作圖證明及性質說明	√	√	√	△
	(2)垂直平分線作圖證明及性質說明	√	√	√	√
	(3)角平分線及垂直平分線綜合證明應用1~4	√	△	△	√
	(4)等腰三角形的底角相等證明I~III	△	△	△	△
	(5)等腰三角形的兩底角相等證明比較	√	△	√	√
	(6)等腰三角形頂角平分線性質	△	△	△	△
	(7)等腰三角形底邊的垂直平分線性質	△	△	△	√

	(8)綜合證明與應用1~6	▽	△	△	▽
--	---------------	---	---	---	---

【註】▽代表高度相關，△代表中度相關

由表得知，這個階段的八個單元，與本研究中的認知心理學與訊息處理理論有著極大的關聯性，由於角平分線、垂直平分線的證明、第(5)部份一題多解的綜合比較，以及第(3)、(8)部份的應用在分析時均需比較理解所學的概念內容，在基模的運作及類比遷移中佔有極高度的相關，教師應於教材上呈現關聯性，並協助學生發現 pattern。

至於訊息處理與記憶理論，在角平分線及垂直平分線的證明中，教師可利用輔助工具協助引發其先備知識；而為了建立學生在做幾何證明時的基模，使用了大量的圖形及文字開關交錯呈現，也同時在增加注意力暨避免遺忘時有所功效；特別提到的是第(5)部份等腰三角形的兩底角相等證明比較，由於圖形、文字分別循序以及全開關的設計，除了與基模運作、注意力與遺忘有高度相關外，更可做為幾何證明時，比較一題多解時開關設定的標準模式，創造課堂互動情境，至於製作方式參考陳明璋(2007)製作的河內塔教學簡報，已置於附件(三)中。

這個部份的教材學習完畢，學生應已具備「三角形的全等」這個單元中，解決大多數問題的能力；教師可視教學時間及學生反應，適度給予課本、習作的綜合練習，或依據學生能力及理解程度，自行挑選題目作綜合性的評量。

4-3-3 教材前後期差異性探討

本階段素材由製作至完成歷經超過十次的修改，除了版面安排與例題的挑選外，最重要的是分析過程的改變與教師使用上的考量與說明，之間的差異性主要如下：

1. 承接「全等性質的作圖」設計理念，一開始即區分教師互動暨學生循序版本，考量教師使用暨學生複習上的差異性；並區分分析及證明簡報，先行完成角平分線作圖的分析與證明(96.3.13)；
2. 接著完成角平分線性質的證明，並考量學生的先備知識，加上角平分線作圖的隱藏開關，教師可視學生起點行為或課堂時間及反應決定是否使

用；此外證明簡報的內容文字淡化留底，可促使分析簡報中理解的學生加速學習(96.3.20)；

3. 角平分線、垂直平分線證明的完成，並挑選二個應用性題目，決定後續簡報的內容及版面配置(96.4.6)；
4. 配合試教狀況，考量學生的學習負荷，垂直平分線證明的分析區分為二；完成簡報內容排版暨應用問題挑選(96.4.14)；
5. 部份開關的重新製作，藉由效果的呈現與強調，藉以提昇學生的注意力，加強教材的記憶與學習；此外加上部份證明暨題目的圖文版面的重新設定，使文字訊息與圖形得以接近整合；考量教師使用的方便，開關設計的直觀性；以及利用多元循序開關，補充等腰三角形證明的比較(96.4.24)；
6. 搭配訊息處理理論，考慮圖形、文字的匹配，避免雜訊的干擾，作版面及內容的最後確認，並同時考量圖形、語言及文字的出現順序；分析簡報按鈕的去框與同時出現；更改已知、補充及待證條件的顏色，達到統一標準；以及幾何證明題目分析暨中垂線作圖分析簡報的新增；並比較證明簡報中，底部文字與否的探討(96.4.30)；
7. 圖形顏色與呈現方式的統一改變；先備知識的重新構圖；角、點、面呈現方式的改變；綜合證明與應用新增至6題；藉由傳統式證明的循序證明，作為填充式證明的先行引導(96.5.19)；
8. 確認正式證明文字的去背，已知、求證文字變更與圖形同步；垂直平分線作圖的分析與比較；證明過程中的結論提示及條件顯示(96.5.25)；
9. 大班教學完畢，依學生學習狀況，去除分析簡報，直接利用圖形分析，得以分析與證明同步；比較邊的不同呈現方式，避免干擾及重覆(96.6.1)；
10. 角度的重新製作，考量弧的呈現與面的不同；加上簡報開關說明與操作建議；分析時互動及循序開關的綜合應用，「中垂線性質」gsp檔案的製作(96.6.7)；
11. 開關的重新製作，面的開關縮小置中；點的開關放大置中；說明文字的開關製作補強；強調（閃光燈泡）與開關的交錯使用；以及紅綠點與前後頁的連結，方便教師作快速瀏覽，「角平分線性質」、「直角三角形兩股中垂線」gsp檔案的製作(96.6.16)。

依訊息處理理論的考量，教材在中期有了第一次大幅度的改變，版面的重新配置，得以使教師掌握訊息的呈現角色，並協助運作記憶的訊息處理；而大班教學完畢後，去除分析簡報的原因，主要在避免認知的負擔，便於作類比遷移。故依時程與理論的結合可區分為三：

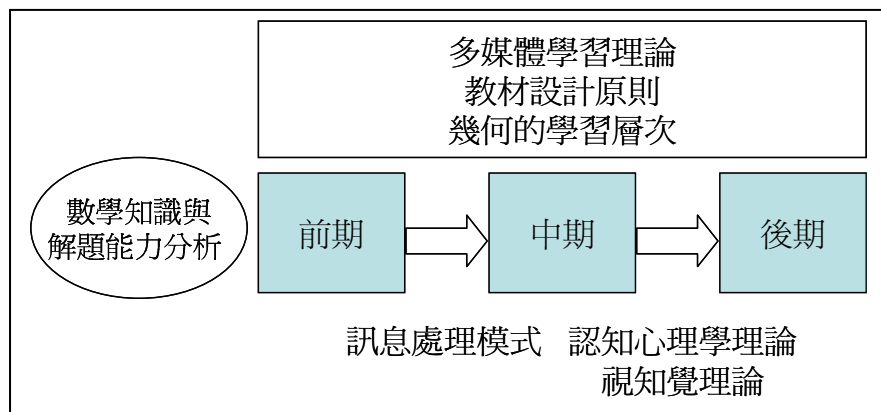


圖4-96 「全等性質的應用」前後期與相關理論結合的演進

考慮能力指標與教學目標，作為預備學習的數學知識基礎並分析其解題能力，運用教學策略及所進行的教學活動，進而完成前期簡報；訊息處理理論的加入，使得版面的安排、顏色的配置及呈現方式的改變，修改而得中期的教材；至於考量認知負荷，將數學抽象概念視覺化及動態呈現，立即性互動式檔案的加入以減輕學習負擔，加上視知覺理論的結合，得以將分析問題或解題的過程作適當的呈現，才完成最後的簡報。至於其中設計簡報時依據的理論，除了多媒體學習理論及教材設計原則外，還多了幾何學習層次的考量。小組試教及大班教學的實施，正好就是三個時期的分界點。

最後這個單元的完成，修改所花的時間最多，自己的收穫相對也增加不少；製作教材上最大的進步，該是製作前應考慮周詳，完成基本模型，經過討論及測試後，得以形成鷹架後，再行完成其餘部份，才不會造成事倍功半，白花了許多功夫。而開關的細部製作、使用者的考量、學生的認知負荷，都是以前製作簡報時，未曾深入考慮的因素；而由於所製作的簡報主要供教師使用，加入的簡報開關說明與操作建議，也是之前未曾有過的嚐試。

4-4 教材與理論結合綜合探討

筆者自2005年七月初接觸MathPS，便對其強大的繪圖功能與互動式教材的設計深感興趣，嚐試著自行製作或配合教學設計教材；而2006年為確認研究方向，深入研究題目，前後也陸續製作了不少專題，最大的成長該是操作上的技術更加熟練。至於全等教材的製作是參考眾多理論設計出來的教材，與一開始循序與缺乏理論基礎的教材，有著極大的差異性。以下簡單說明這兩年多以來筆者自己的成長，以及日後製作教材時，應先有的考量與順序。

4-4-1 教材設計的自我成長

以下利用條列方式，簡單介紹研究者自己於教材設計的自我成長、所習得的相關技能與在教學上的相關應用：

1. 因著自己對於幾何的高度興趣，一開始由陳明璋老師介紹「伊斯蘭的幾何藝術」一書後，便沉浸於透過MathPS強大的繪圖功能，嘗試相關幾何圖形的構圖；並進而利用PowerPoint結合MathPS，作二維對稱結構製作方式的探討：（圖4-97~4-98）

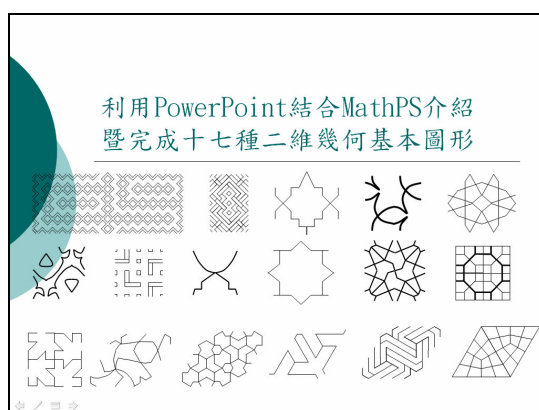
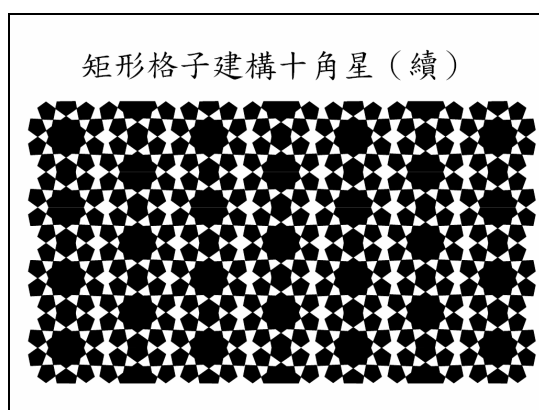


圖4-97 「伊斯蘭的幾何藝術」製作舉隅 圖4-98 「二維對稱結構」教材製作介紹

2. 進一步探討於課堂上探討多邊形拼貼的所有可能性，與生活結合製作相關圖形，並帶領學生完成各種類型的拼貼：（圖4-99~4-101）

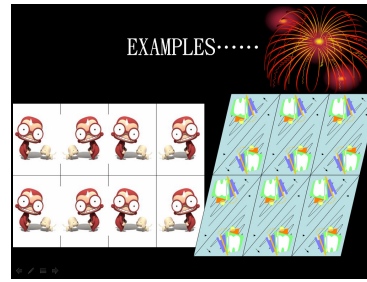
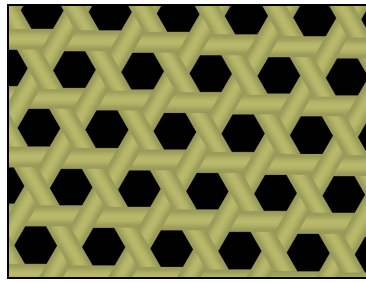
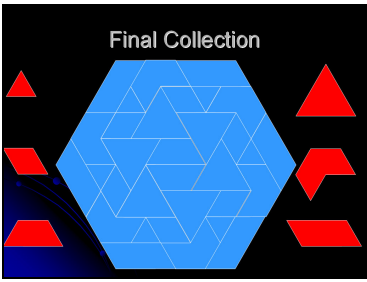


圖4-99「三邊形拼貼」示範 圖4-100拼貼與生活的結合 圖4-101拼貼學生作品舉隅

3. 應用的部份告一段落後，接下來開始找尋多媒體資源，試圖轉化為適當的教材作有效呈現，以方便課堂上實際教學使用；其中曾嚐試將代數問題圖像化，並以步驟化呈現；或是將幾何連續作圖利用頁面區隔，以方便前後步驟的討論：（圖4-102~4-103）

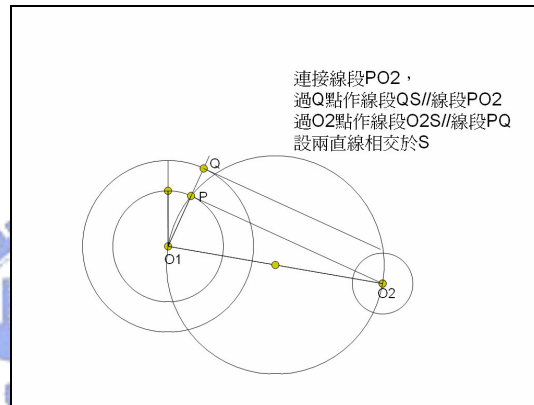
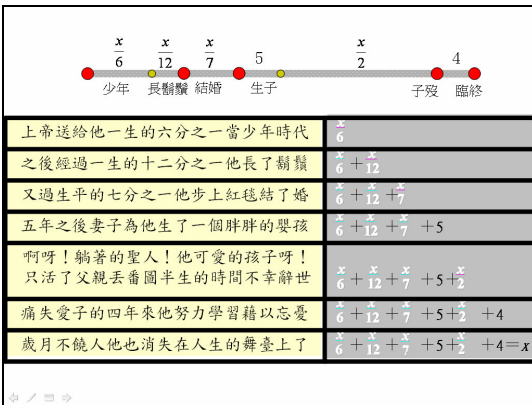


圖4-102「代數問題圖像化」步驟呈現 圖4-103「幾何連續作圖」頁面區隔

4. 也曾針對無法說明的數位互動教材作步驟化呈現，或是針對多媒體遊戲完成方法作補充說明，方便研究者與課堂上作討論或深入說明：（圖4-104~4-105）

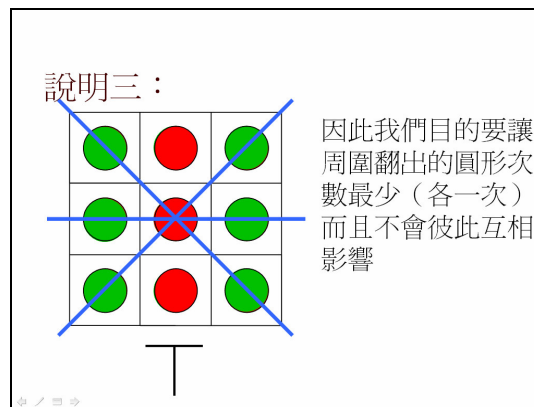
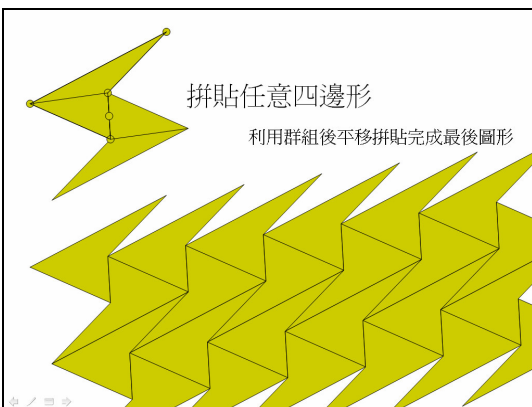


圖4-104 步驟化呈現無法說明的教材

圖4-105 說明遊戲完成方法

5. 並嚐試整合已有網路素材作動態呈現，方便課堂上作步驟式說明，例如矩形化方的作圖與證明，此時研究者在構造幾何圖形時的精準度與速度上均已有所提昇：（圖4-106~4-107）

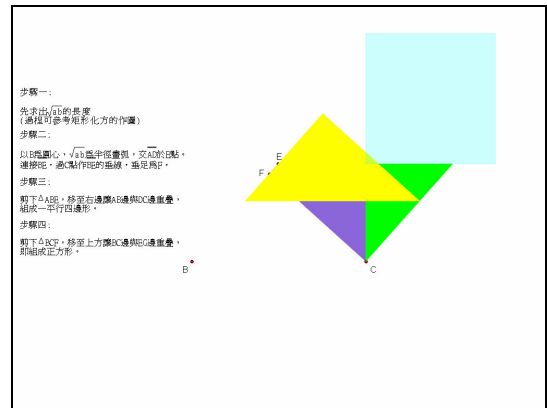
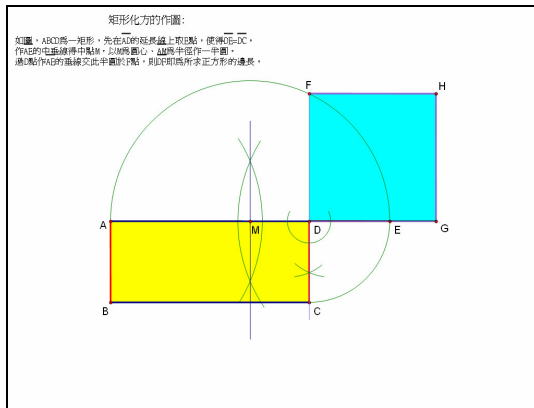


圖4-106 整合已有教材作動態呈現(1) 圖4-107 整合已有教材作動態呈現(2)

6. 在以上研究其間，自己因為教學上的需要，前後也製作了不少的數位素材，除了最後作為論文題目的三角形全等性質，前後也製作了直線方程式、十分逼近與直式開方法、商高定理證明、黃金矩形等教材供上課直接使用或補充說明，至此研究者製作開關與動畫的技術已漸臻成熟：（圖4-108~4-111）

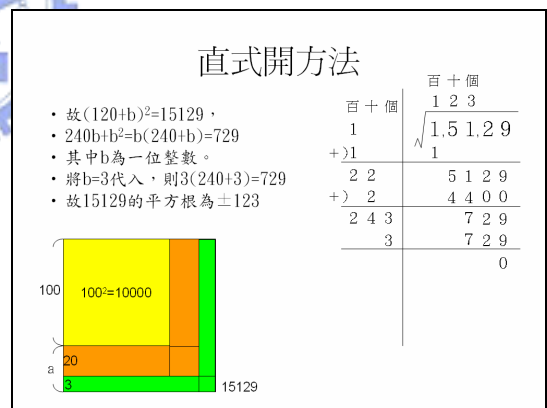
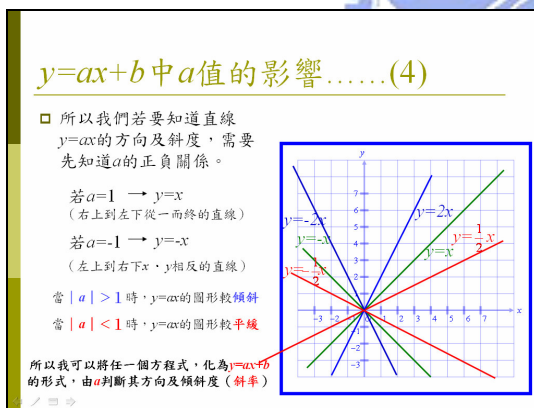


圖4-108 「直線方程式」教材製作

圖4-109 「直式開方法」教材製作

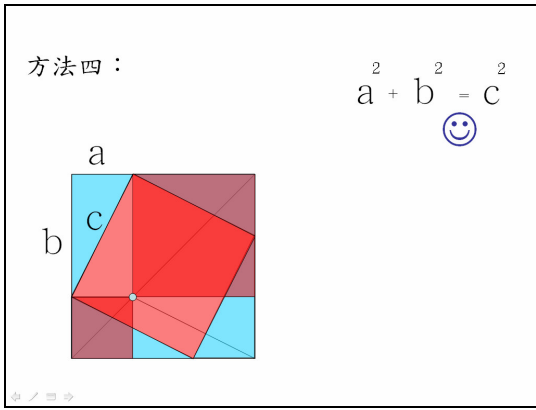


圖4-110 「商高定理證明」教材製作

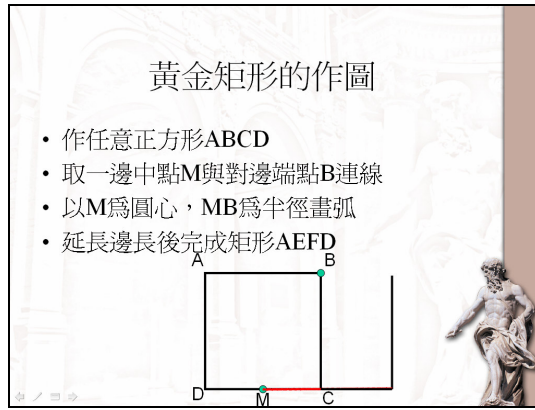


圖4-111 「黃金矩形」教材製作

7. 接下來的研究方向，開始以遞迴數列為基礎，分別作平面分割的探討與國高中教材的製作，一方面發掘理論，另一方面作理論與實務的結合：

(圖4-112~4-113)

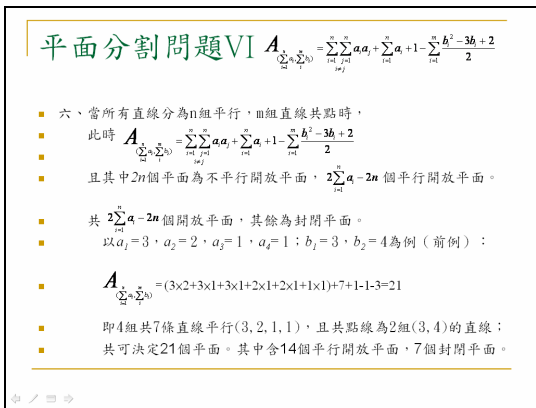


圖4-112 「平面分割問題」個數探討

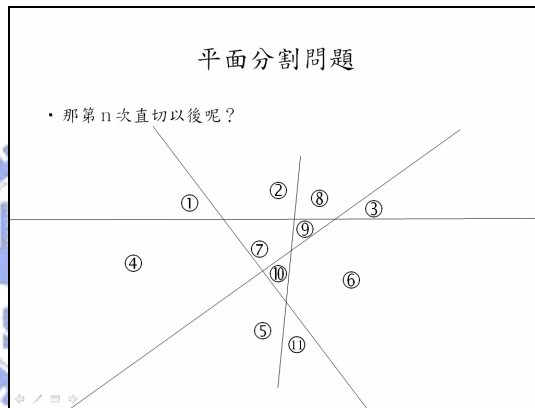


圖4-113 「平面分割問題」教材製作

8. 以及同樣是以遞迴數列為基礎，所作的「河內塔問題」綜合探討，以及國高中互動式教材作一完整討論，也同時思考互動教材的按鈕要如何設計：(圖4-114~4-115)

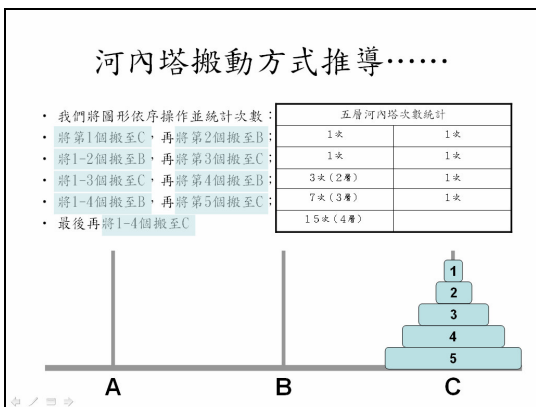


圖4-114 「河內塔問題」搬動方式探討

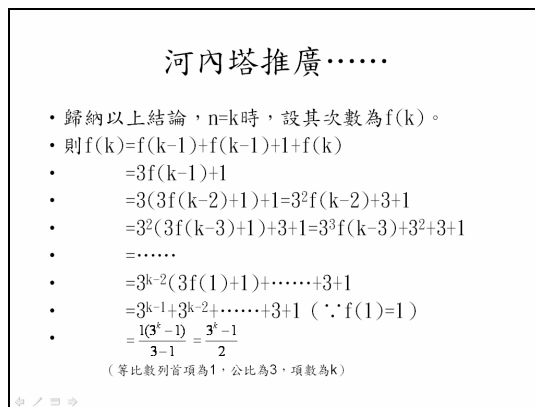


圖4-115 「河內塔問題」教材製作

9. 當然也有一些與課程沒有太大關聯的趣味素材或教材製作與深入討論，例如數學證明與相關理論的「proofs without words」教材製作、「軌跡」與「同餘圓」製作、「一筆畫問題」與「漆圖問題」探討，甚至是互動式「數學燈謎」製作，或是與數學完全無關的「愛蓮說」及「成語急轉彎」製作；透過這些教材的製作，除了提昇自己的構圖能力外，也嚐試作激發式動態進階而直觀的呈現方式：（圖4-116~4-123）

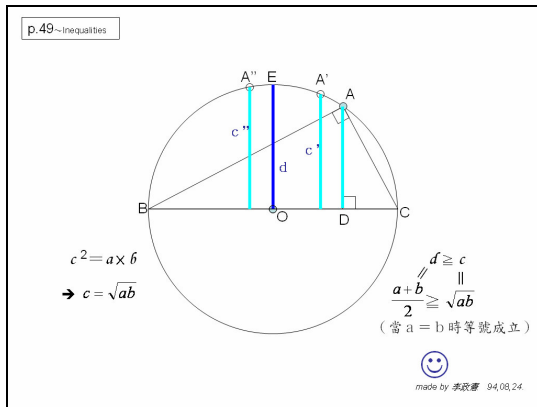


圖4-116 「proofs without words」教材製作

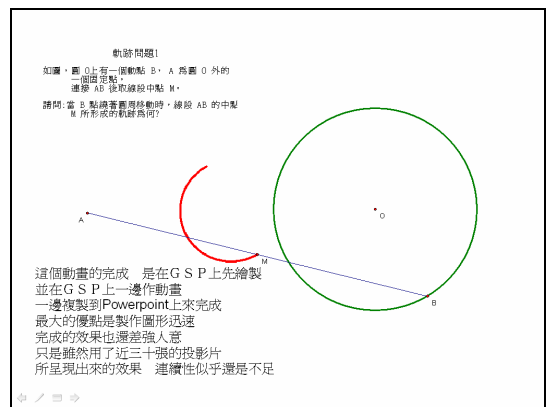


圖4-117 「軌跡」製作

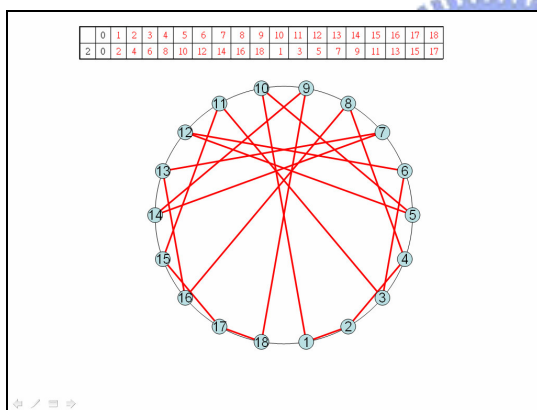


圖4-118 「同餘圓」製作

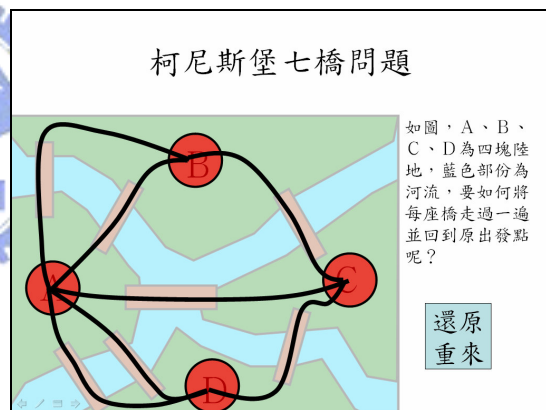


圖4-119 「一筆畫問題」探討

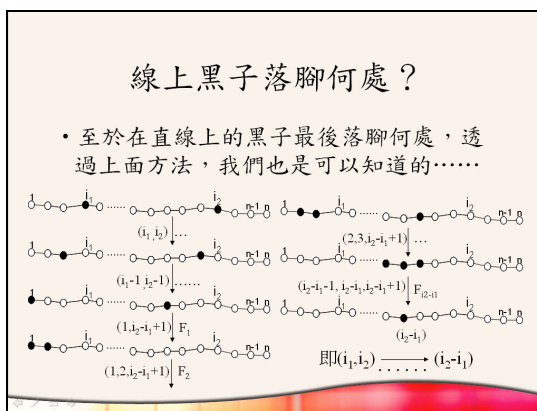


圖4-120 「漆圖問題」探討



圖4-121 「數學燈謎」製作



圖4-122 「愛蓮說」教材製作

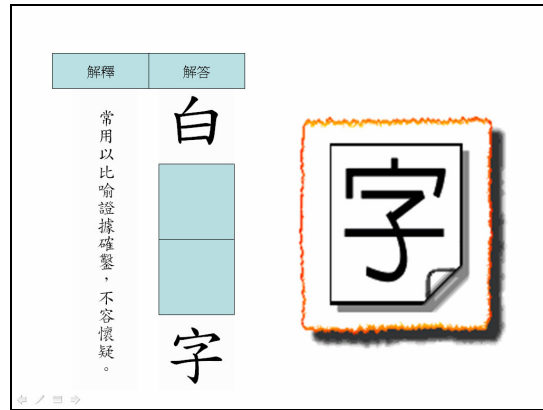


圖4-123 「成語急轉彎」教材製作

綜觀上述二十幾個素材，有些是自行研究製作而成，有些是網路或現成的紙本、數位素材取材，加以再製或添加互動式功能而成，所花費的時間有長有短；因為目的不同，達成的教學目標與效果也有所差異，然而若要將其製作為課堂上教師統一授課的素材，多半還缺乏些整體的設計與理論基礎，於是「三角形全等」教學素材因而產生，成為筆者深入研究的論文內容。

4-4-2 全等教材的設計製作

坊間對於「三角形全等」的教學素材多以GSP或flash檔案為主，PowerPoint充其量多半只是用來介紹或是總結的工具，且多半未能發揮其精確製圖、互動開關及動畫呈現的功能；且GSP的檔案雖然構圖精確且具即時運算功能，然而在圖文的整合以及開關的製作上，便有明顯的弱點（見圖4-124，引自<http://tmrc.tp.edu.tw/event/>，台北市九十五年度中小學多媒體教材甄選入選作品，國中組數學領域吳柏卓、楊玉真製作）；而flash檔案的製作精美，然而製作過程費時費力，且後續的修改若非有相當的程式基礎，也未必真能達到吾人欲達成的目標（見圖4-125，引自康軒版95年度教資光碟）。

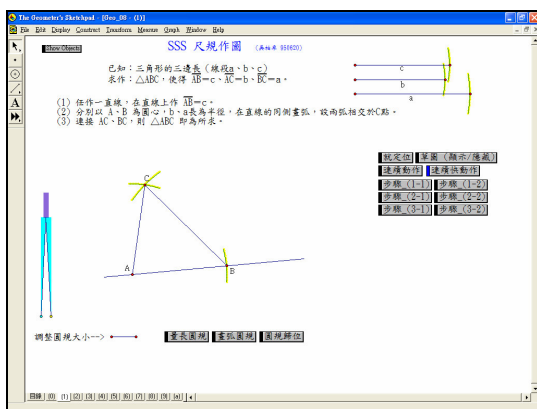


圖4-124 GSP全等性質教學素材

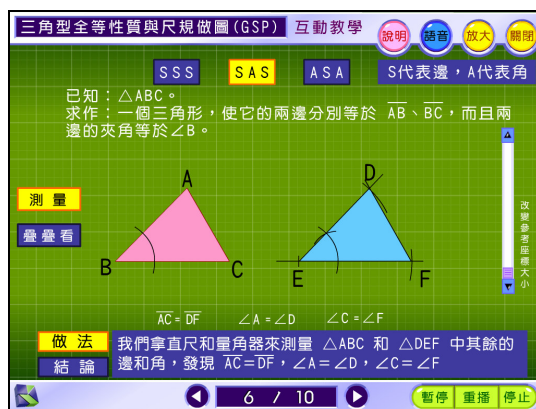


圖4-125 flash全等性質教學素材

至於PowerPoint雖無GSP即時運算的功能，也無法製作成flash檔案精美的樣子，然而加上MathPS的整合，將原本最弱的幾何繪圖予以補強，動畫與開關的功能也因而多元，端視使用者的需求作設定；由於PowerPoint的普及性與易於上手，加上MathPS多數常用的直覺繪圖功能，以及少部份的選擇繪圖及互動式開關的設定，學習操作與製作素材所花的時間要比GSP及flash的時間來得短，故PowerPoint加上MathPS的教學模式，將是「全等三角形」這個單元中，較適合教師設計與使用的一種工具。

雖然PowerPoint + MathPS大體上佔優勢，然而教學應是全面性的，是故在PowerPoint + MathPS較不利的即時運算與動態模擬可視情況添加適當的GSP或flash素材進來，便可以彌補其不足的地方；正如同數位教學仍無法完全取代教師的黑板教學，在這個單元教學完畢，準備作題目練習與講解，或是單元結束，準備進入下一個單元的同時，所有的教師都還是需要拾起粉筆，繼續進行課堂上互動式的真實教學。

4-4-3 數學幾何教材設計的考量與製作

本章的最後，要談的是做數學幾何教材，設計時所要做的考量與製作應注意的事項。

研究者曾在整理數位素材時，意外發現筆者於尚未學習相關的理論基礎與工具前，製作而成的三角形全等素材，茲舉例並與參考相關理論基礎，應用MathPS工具後製作而成的簡報對照如下：

S S S 全等性質

• 當兩個三角形的三邊對應相等時，我們可以說這兩個三角形是全等的。

如圖，已知 $\overline{AB} = \overline{CB}$ 只要再加上 $\overline{AD} = \overline{CD}$ $\overline{BD} = \overline{BD}$

則： $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

利用全等，我們可以進一步說明 $\angle A = \angle C$ $\angle 3 = \angle 4$
 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)

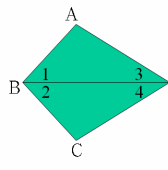
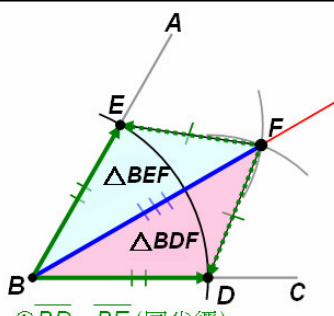


圖4-126 「全等三角形」前期素材(1)



S S S 全等性質

① $\overline{BE} = \overline{BF}$ (同半徑)
 ② $\overline{EF} = \overline{DF}$ (同半徑)
 ③ \overline{BF} (共用邊)

圖4-127 「全等三角形」後期素材(1)

R H S 全等性質

• 若兩個「直角三角形R」的「斜邊H」和其「一股S」對應相等，則這兩個直角三角形全等。

如圖，已知 $\angle B = \angle D = 90^\circ$
 E 為 \overline{BD} 中點
 且 $\overline{AE} = \overline{CE}$
 則： $\triangle ABE \cong \triangle CDE$
 $\rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$
 $\angle A = \angle C$ $\angle 1 = \angle 2$

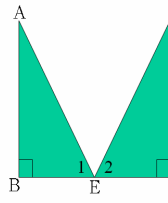


圖4-128 「全等三角形」前期素材(2)

**斜邊:Hypotenuse
S H R 全等特例
邊(Side) 直角:Right Angle**

• 在一般的情況下，兩三角形滿足SSA的情形時，並不一定會全等。然而若該組對應相等的角是直角，則這兩個三角形必定全等。

• 如下圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ， $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，符合SSA的條件，但因為 $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ，所以根據商高定理可得知：

- $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{DE} \cdot \overline{EF}$
- 同理 $\overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{EF} \cdot \overline{DE}$
- 因為 $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{DE} \cdot \overline{EF}$
- 所以 $\overline{AB} = \overline{DE}$ 且 $\overline{BC} = \overline{EF}$
- 再根據SSS全等性質，我們可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
- 我們稱這種特例為RHS全等性質。

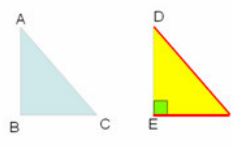


圖4-129 「全等三角形」後期素材(2)

明顯地在圖文的整合上毫無訊息處理與視知覺理論的概念，顏色的使用上沒有發揮多媒體的功效，多媒體素材裏最重要的互動功能也完成沒有，僅是按頁、按步驟循序化的呆板呈現，與其說為數位化教材，不如說是課本內容直接編寫至簡報內呈現，為的是節省教師在書寫黑板時所花的時間；然而快速瀏覽後，是否真能如預期達到應達成的目標，只怕將有所困難。

而在研究者整個完成「全等三角形」的數位教材後，考量中間做的討論、修改、試教、教學及評鑑等過程，深深覺得下次若要自行製作幾何教材，應考量的事項與步驟：

1. 先判別屬於哪一個幾何學習層次的內容，透過能力指標、教學目標決定所需具備的知識與解題能力；
2. 考量認知心理學與視知覺理論，決定教材的大綱與內容；
3. 依照多媒體學習理論與教材設計原則，開始設計教材；
4. 細部的圖文整合與互動，參考訊息處理理論；
5. 先行完成一部份教材，做版面設定與色調的確認；

6. 完成大部份教材後，開始小組試教、大班教學及專家評鑑；
7. 依照小組試教、大班教學及專家評鑑建議再行修正。

將上述7個步驟，與譚寧君於2006提出的飛盤(FRSBIE)教學模組作比較（見圖4-130，引自應雅鈴，2007）：

1. 形成問題(Forming Problem)：以教學上的概念為主，設計相關的教學問題，並呈現給學生。
2. 呈現問題(Representing Problem)：在形成問題之後，教學者設計合適的表徵形式呈現，使學生理解題目的內容，並嘗試不同的思考方向。
3. 解決問題(Solving Problem)：在呈現問題之後，學生嘗試使用不同的方式解決問題。
4. 討論及腦力激盪(Brain Storming)：利用小組討論的方式來解決學習上的問題。此部份可和上述解決問題的順序前後做彈性調整，教學者可依所設計的教材做合適的教學呈現。
5. 統整(Integrating)：教學者在小單元結束後需做概念上的統整。
6. 評量(Evaluation)：利用多元評量的方式，瞭解學生的學習成效。若學習成效不佳，則教學者重新形成問題，再設計另一循環的教學。若學生對此概念已瞭解，則飛盤模組到此完成。

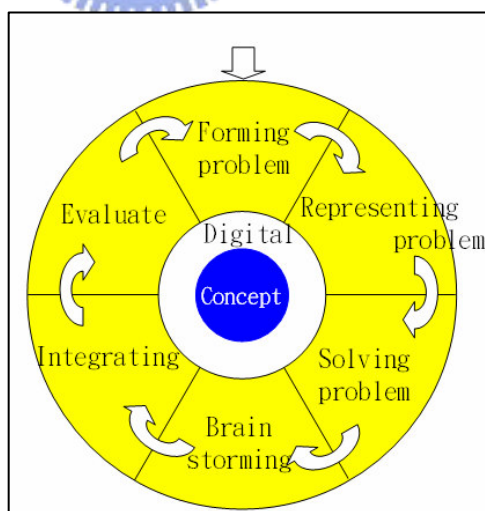


圖4-130 飛盤(FRSBIE)教學模組(引自應雅鈴，2007)

其中判別所需的知識與能力相對於形成問題的部份；決定教材內容即為呈現問題；而教材的設計目的在解決問題；進一步為使教材的設計有其效果，需透過訊息處理的理論加以討論或激盪；接下來版面、色調的確認屬於統整的部份；最

後的小組試教、大班教學或專家評鑑則屬於評量的範疇。綜觀下來，兩者亦有其共通之處（見表4-4）：

表4-4 「幾何教材製作」與「FRSBIE」教學模組異同處：

幾何教材製作 (FRSBIE)	相同處	相異處
1.探討所需的知識與能力 (1.形成問題)	強調學習的概念及解題能力	參考幾何層次及能力指標、教學目標
2.決定教材內容 (2.呈現問題)	設計合適表徵形式呈現	參考認知心理及視知覺理論
3.依目的及原則設計教材 (3.解決問題)	由教師引導或學生嘗試解決	參考多媒體學習理論及教材設計原則
4.依訊息理論處理圖文整合互動 (4.討論及腦力激盪)	細部教材、問題設計及解決	由教師負責教材設計 (小組討論解決問題)
5.版面、色調的確認 (5.統整)	針對圖文作概念性的統整	由教師負責教材設計 (由教師作概念統整)
6.小組試教、大班教學或專家評鑑 (6.評量)	利用多元評量方式了解成效	
7.教材的再修正 (再循環或已完成)	透過評量結果再做教材修正	

因此，按照若能按照以上步驟，確實做好幾何教材的考量、設計與製作，所完成的數位教材，相信能以最少的製作與教學時間，達到最大的功效。

第五章 教材的試教、施測與評鑑

此次研究為筆者第一次針對幾何全等教材，依據學習理論，利用數位方式作完整呈現；為確認教材的可行性與完整性，本教材於第一次完成後進行試教，根據學生反應後作修正；接著完成大班教學，並填寫回饋反應，了解學生學習及接受度；最後是將完成的教材，由數學科教師針對教材內容，填寫評鑑問卷，作為教材修正及下次施教的依據。將整個施作流程繪圖如下：

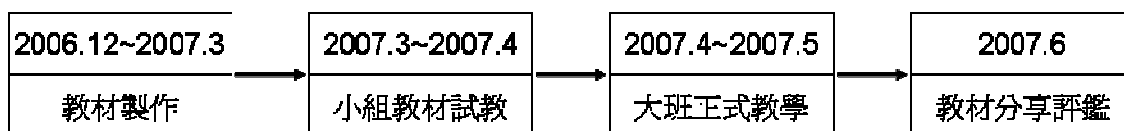


圖 5-1 全等教材製作與實施時程圖

其中教材製作的過程與差異性已於上一章節作過詳細討論，以下便分別針對教材試教、實際教學及專家評鑑作分析討論：

5-1 教材的試教與修正

5-1-1 參與學生分析

本課程於本學年由九年級上學期移至八年級下學期，教學時程共 12 節 540 分鐘；為確認學生的接收度及教材的可行性，本教材於施教前一個月找了七位同學參與試教，其中兩位在段考數學科的平均成績在 80 分以上（以下簡稱高成就學生），三位的平均在 60 至 80 分之間（以下簡稱中成就學生），另外兩位平均在 40 分以下（以下簡稱低成就學生）。在事先徵詢學生及家長同意後，利用每週二或四放學後約 50 分鐘的時間，一共進行四次共 200 分鐘的教學，並於每階段完成後進行試題評鑑或口頭詢問教材可行性，以便作為實際大班教學前的教材修正。

5-1-2 實際施作情形

四次的教學依教學時程，第一次進行第一部份「全等概念的引進及性質說明」的教學，將課程內容及例題演練作完整呈現，並於教學完畢前後進行施測，並且口頭詢問進行教材修正；第二次進行第二部份「全等性質的作圖」的教學，將課

程內容作呈現，並由學生實際利用尺規，確認師生同步完成的可行性；第三、四次將第二部份的例題完成後，並進行第三部份「全等性質的證明」的教學，將課程內容及部份例題作呈現；第二、三部份並於教學完畢後，分別進行後測及延後測的評量。以下為其時程及前後測完成比率：

表 5-1 全等教材試教試題前後完成比率

程度	學生	全等概念引進		全等性質作圖		全等性質應用
		前測(%)	後測(%)	作圖(%)	評量(%)	延後測(%)
高成就	甲	35.3	88.2	100	100	93.6
	乙	47.1	88.2	66.7	62.5	80.7
中成就	丙	0	76.5	83.3		58.1
	丁	0	70.1	100	37.5	61.3
	戊	11.8	23.5	83.3	62.5	67.7
低成就	己	23.5	70.6	66.7	12.5	19.4
	庚	29.4	88.2			29.0

由於教學時程在實際教學一個月前，所有學生在進行教學前皆尚未學習過相關概念。第一部份在教學前，高成就的兩位學生完成比率約為四成，顯見其觸類旁通的能力，可針對原有的幾何基模加以延伸，自行同化相關概念，而在進行教學後進行的後測，同一份試題的完成比率已近九成，也已達成相關目標。至於中成就的三位學生，教學前完成的比率平均不到一成，然而在教學後完成的比率，其中兩位多至七成，另外一位少至兩成；由此也可得知這三位學生多屬努力性，多以課堂上學習配合回家練習方能有所理解，若欠缺課堂專心度或課後練習，對於教材的理解及接受度便不如預期。低成就的兩位學生，教學前的完成度約為兩成，而教學後也達到七至八成的完成度，在平均上均較中成就的三位學生來得高，顯見這兩位學生相關概念的理解，均於課堂上學習，課後的練習有所欠缺，能力的獲得也多因時間的延長而消退。

第二部份主要進行的有施教時的同步作圖及完成教學後的課後評量，在同步作圖方面，由於時間不足的關係，六個作圖全數完成的僅兩人，兩位完成其中的五個作圖，兩位完成其中的四個作圖（一位低成就學生因車禍住院原因，無法完成後續研究）。值得探討的是，全數完成的兩人一人屬高成就，一人屬中成就；而僅完成四個作圖的兩人中，一人屬低成就，另一人屬高成就，由此可知此部份全等作圖的完成，與其學習的高低成就並非高度相關，最主要的因素還是在課堂上的專心度，因為完成度較高的兩位學生，在課堂上的專心程度都明顯地較其他六位為高。

至於第二部份的課後評量，高成就的兩位學生，後測試卷的完成度，一為全數完成，另一位完成六成；中成就的學生，平均完成度約在五成左右；至於低成就的學生，完成度僅有一成。由此可知相關試卷的完成，與全等作圖的完成，也

未必完全相關；最主要還是在每位步驟的了解，以及後續應用問題的分析與理解。

最後是第三部份的教學及延後測評量，由於時間上的延宕，在小組進行延後測的同時，大班已開始第一部份的實際教學，然而此部份的試題與第一部份的關聯度較低，為確認學生對於教材的理解程度，仍進行共 31 題測驗的延後測，其中部份試題並包含前面兩部份的概念。在高成就的兩位學生中，延後測的比率約為八至九成；中成就的三位學生，延後測的比率約為六成；低成就的學生，延後測的比率僅二至三成。顯見第三部份的學習與理解，因需具備高度的邏輯推理與理解能力，與其數學能力有著高度相關，欠缺了理解與練習，強記後的能力畢竟無法持續。

5-1-3 遭遇問題與教材修正

在這裏遭遇最大的問題是上課時間較實際教學時程為短，部份教材內容無法完整呈現；且考慮學生課業負擔及施測的準確度，學生欠缺課後練習，未能將課堂所學作應用強理解。此外由於試教時間使用的是放學後，部份學生無法配合，除了因車禍住院的學生外，尚有因參與補習或當日請假臨時無法參與教學或施測的狀況，而原訂的四次教學，第三次也因參與人數過少（僅剩三人），不得已延後乙週，導致時間上的延宕，造成延後測時已開始大班教學。此外施測所使用的美術教室屬於開放式空間，小組約 2 至 3 人一桌，雖在尺規作圖時可以討論或觀摩方式加速完成，然而其餘教學則多有干擾，學生較不易專心；此外施測教室位屬地下室，迴音大、空氣品質較差，光線也較不足，這都是正式施測時應注意避免的缺點。然而因此次試教僅在確認教材的可行性及學生的接受度，整體而言大致上的效果還算良好。

至於教材修正的部份，由於第二部份、第三部份的教學時程較不足，故僅針對學生於課後反應較不佳的簡報略作修正，並針對正式教學時間略作調整，新增配合課程內容例題，以加強學生理解；第一部份則適逢中間停課乙次，時間上較為充足，特別針對留校學生詢問簡報接受度暨教材編排，然而學生反應不佳部份多為顏色配置過淡，已於正式大班教學前作修正。至於部份簡報的開關設計不良或開關的使用說明不足，亦於試教過後略作修正，茲針對部份修改簡報說明如下：

「全等」與「對應」

- 若兩多邊形全等時，可以疊合一起的邊我們稱為對應邊，可以疊合一起的角我們稱為對應角。

- 而我們要討論兩多邊形是否全等，也需檢驗所有的對應邊及對應角是否相等。

圖 5-2-1(1) 試教前的顏色修正

「全等」與「對應」

- 若兩多邊形全等時，可以疊合一起的邊我們稱為對應邊，可以疊合一起的角我們稱為對應角。

- 而我們要討論兩多邊形是否全等，也需檢驗所有的對應邊及對應角是否相等。

圖 5-2-1(2) 試教後的顏色修正

圖 5-2-2(1) 試教前的顏色修正暨開關新增 圖 5-2-2(2) 試教後的顏色修正暨開關新增

S S A 全等特例

圖 5-2-3(2) 文字的開關使用(開): 試教前

S H R 全等特例

圖 5-2-3(1) 文字的開關使用(關): 原始

圖 5-2-3(3) 文字的開關使用(開+說明): 試教後

S H R 全等特例

斜邊:Hypotenuse
邊(股):Side 直角:Right Angle

明顯看出爲使呈現更爲明顯，較易比較及了解，這裏將顏色作了調整，並針對加強比較及說明部份新增開關。

5-2 教材的實際教學

任何一套教材的完成，最重要的還是要回歸教學，正式在課堂上得以施教；本教材歷經半年多的試作、分析、試教後，再以研究者任教班級，進行共七節課的數位教學。茲針對參與學生暨實際教學分析如下：

5-2-1 參與學生分析

此施測班級學生段考數學科平均約為 40 至 50 分，在年段上排名較為後段，班上約有三分之一的同學對數學缺乏學習的動力；考量場地因素，為提昇此班學生對於數學學習的興趣，遂利用此班作為正式教學樣本，作完整數位教學；另一任教班級，則視教學時間及場地，部份教材內容作數位教學。這裏僅針對正式教學樣本作問卷調查及問題分析。

5-2-2 實際施作情形



正式的數位教學共計進行 7 節課，其中第一次教學選擇兩節連續課程，在電腦教室完成第一部份的教學；第二部份教學考慮其連續性及操作同步性，隔兩日利用另外兩節連續課程在電腦教室完成；第 5 節在電腦教室開始作第三部份的教學，第 6 節則因場地關係，回歸教室利用單槍投影完成第三部份的概念教學；至於第三部份的例題說明，則於第 7 節在電腦教室完成。其中共計 6 節於電腦教室上課，1 節於傳統教室使用單槍投影教學，另額外 2 節於課堂上進行傳統黑板教學，利用黑板檢討作業及課本、習作練習題。

在此的數位教學之所以多數採用電腦教室廣播教學，主要的考量是教室安裝單槍投影機時間上的浪費及閱讀光線的不足；而考量第一次學生使用電腦教室作數位教學，於第一次教學完畢後，也針對學生學習部份作回家作業的命題（詳見附件(二)），並針對上課反應作回饋，經回收後大致上的反應良好（詳見附件(四)），超過八成以上的學生肯定此次的數位教學，而其中部份問卷無回收或回答，其餘問卷除答案重覆外，僅 A22 反應較不佳，這也是第二次繼續於電腦教室進行數位教學的原因之一。

接下來第二部份的「全等性質作圖」，並於課堂由教師操作，學生於學習單上

同步練習並書寫作法，共計花費約兩節課完成學習單（詳見附件(五)）。在這裏作法的書寫是為平衡吸收能力較強、作圖較快學生的速度，不列入評量範圍；經分析各題的完成率如下（回收學習單共 33 份）：

	完成人數 (人)	完成比例 (%)
SSS 作圖	31	93.94
SAS 作圖	30	90.91
SSA 作圖	24	72.73
RHS 作圖	22	66.67
ASA 作圖	22	66.67
AAS 作圖	13	39.39

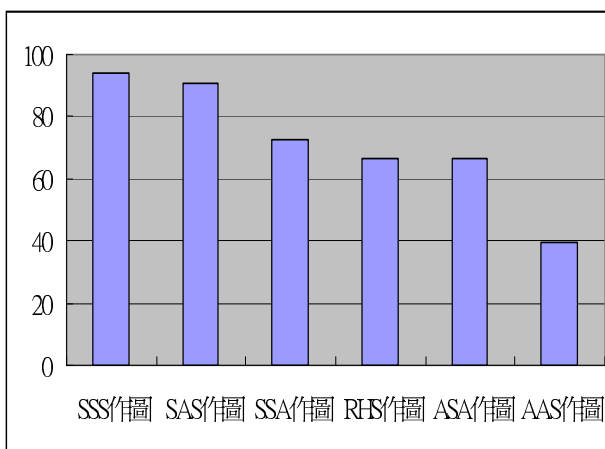


表 5-2 「全等性質作圖」學生完成度 圖 5-3 「全等性質作圖」完成比例比較圖

在此僅 SSS 作圖及 SAS 作圖達到預期標準(90%以上)，其餘四個部份未達預期標準的主要原因，主要還是在課堂上的時間不足，考慮場地使用問題，為使兩節課同時完成作圖及例題說明，前面的作圖僅花費一節半的時間，若能減少作法的書寫或作圖時間的延長，利用完整的兩節課達到預定的 80%或 60%目標應非難事。此外部份學生的圖形標示不清、作法書寫不完整，也都能在時間允許的前提下完成目標。

接下來第三部份的教學，第一節在電腦教室的教學，最主要在作「全等性質的應用」分析概念的引進及證明基模的建立，完成角平分線及垂直平分線性質的證明；第二節回傳統教室利用單槍投影教學，最主要在完成等腰三角形各性質的證明與比較；第三節課再利用電腦教室，將第三部份的例題作完整說明。最後再利用半節課的時間，由學生填寫課後問卷（詳見附件(六)），確認自己學習狀況並給予回饋，在此要學生將上次段考成績列出，主要原因是要分別針對不同成就學生理解程度作綜合分析，以下並針對各題作回饋分析：

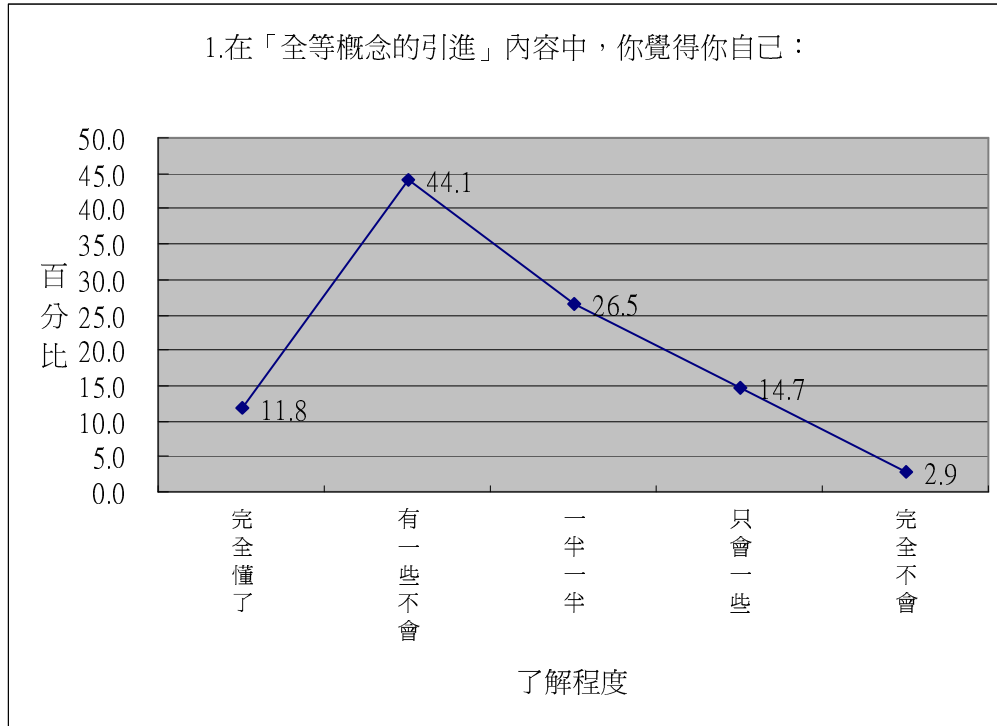


圖 5-4 「全等概念的引進」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖

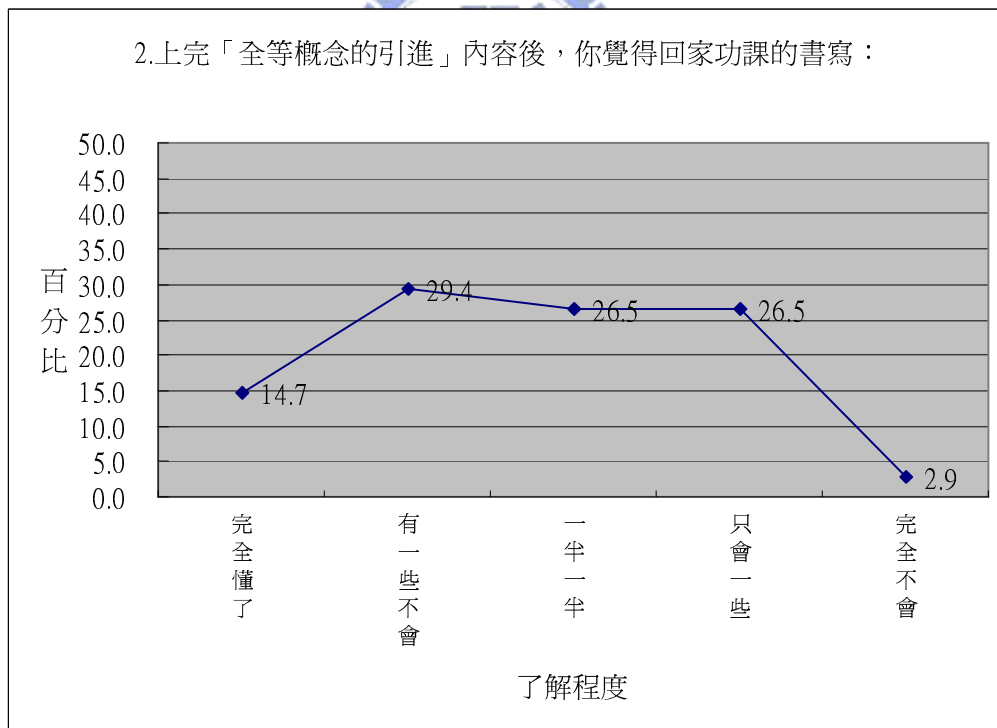


圖 5-5 「全等概念的引進」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖

圖 5-3 及 5-4 最主要可以看出，在「全等概念的引進」這個部份的教材中，部份學生於課堂上理解後，回家功課的書寫並不如預期；這裏學生在內容了解及功課書寫上所產生的落差，教師需針對不同程度學生的理解，予以補充或解決課後習題及評鑑的問題。接著比較第二部份「全等性質的作圖」課程內容及作業書寫

的了解程度：

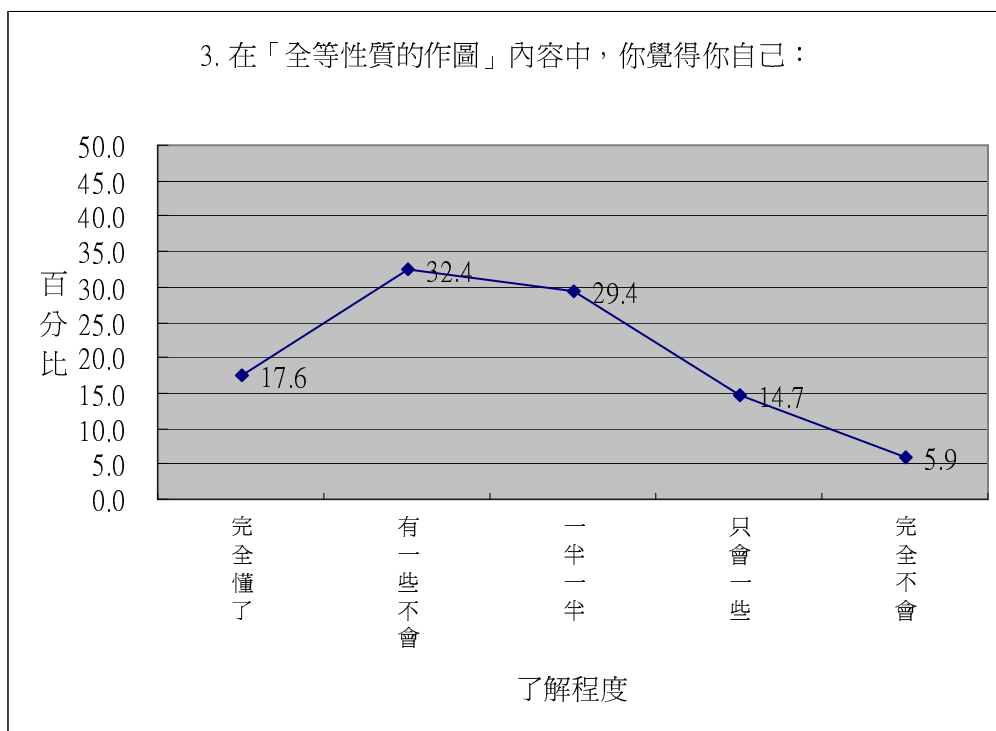


圖 5-6 「全等性質的作圖」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖

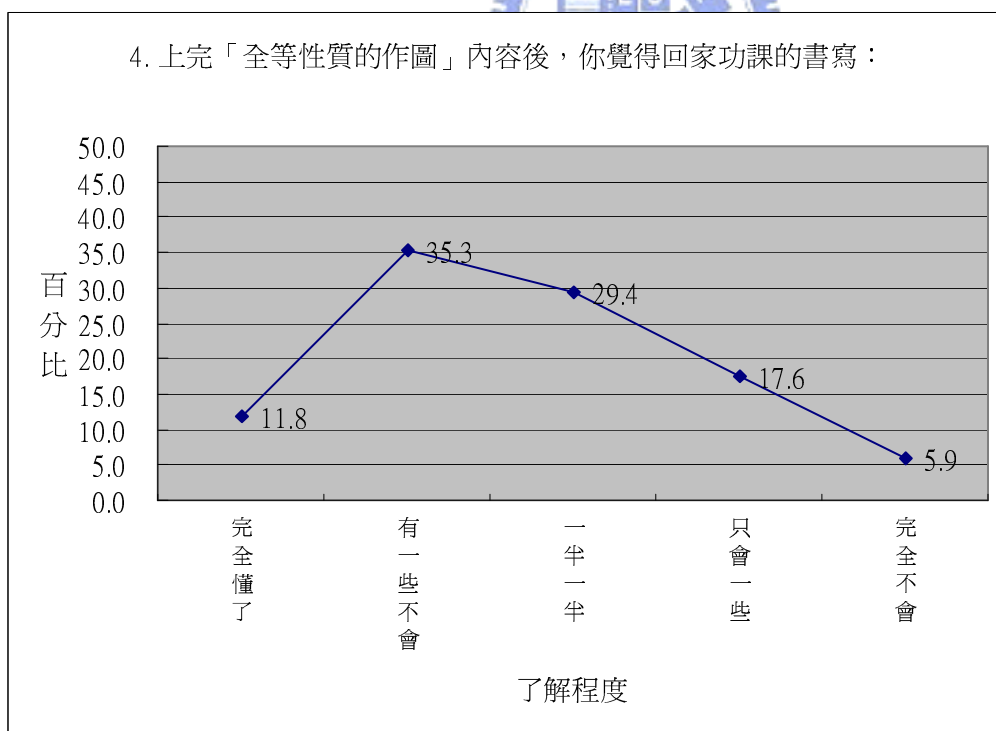


圖 5-7 「全等性質的作圖」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖

這個部份學生的內容了解與功課書寫了解程度大致相同，顯見經過同步操作及例題說明後，大致上同學學習的狀況與功課的理解程度是相關的。以下是第三部份「全等性質的應用」的比較：

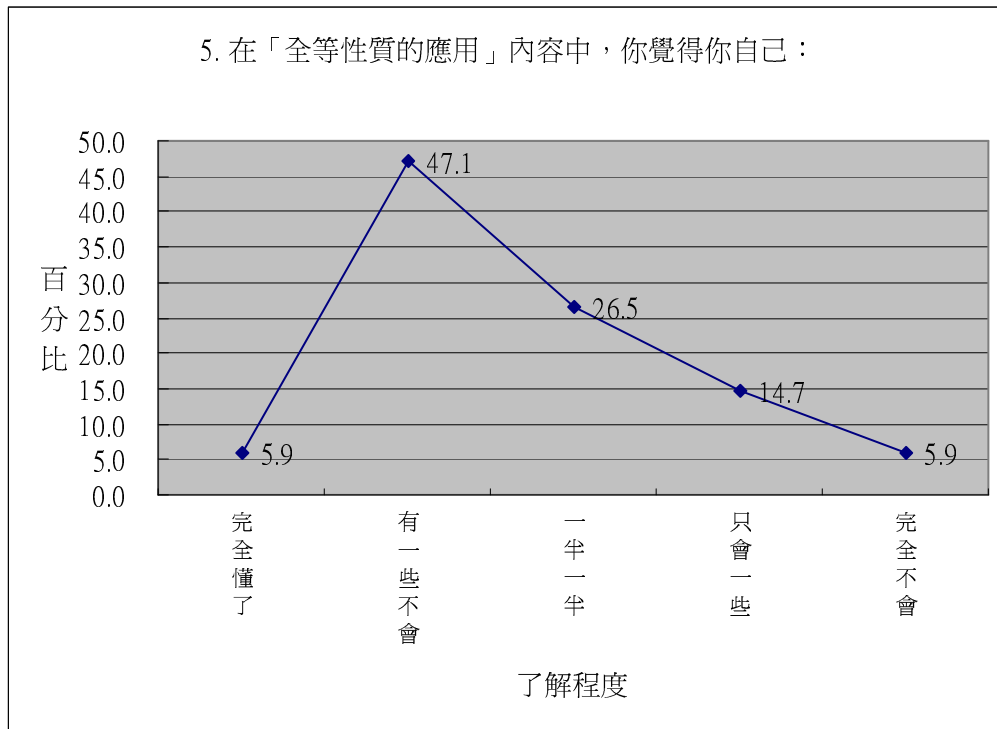


圖 5-8 「全等性質的應用」課程內容了解程度學生自我評鑑折線圖

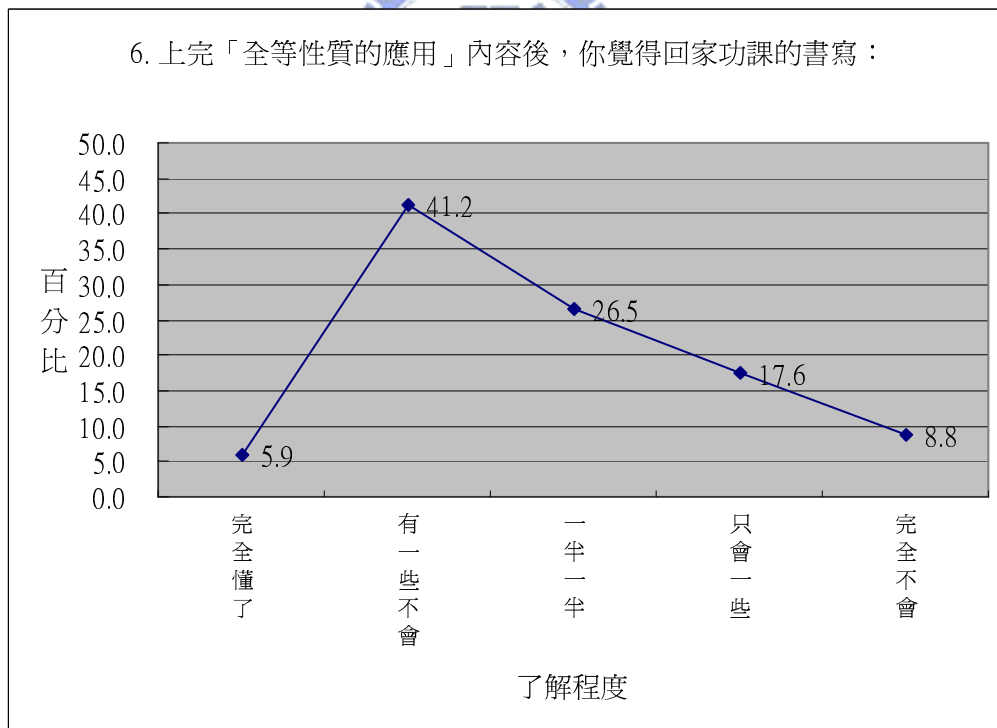


圖 5-9 「全等性質的應用」功課書寫了解程度學生自我評鑑折線圖

同樣可以看出兩者的高度相關，而有四成以上的學生在這個部份的內容及題目大致理解，這是值得欣喜的。惟教師仍有其責任，將右方的後段低成就學生，利用方法提昇至左方高成就部份。

接下來比較「電腦教室廣播」及「教室單槍螢幕投影」個別的優缺點（詳見

附件(七))，在學生的回答中，可以看得出來在電腦教室上課，最大的優點是環境舒適，學生一人一台電腦，不會有看不清楚的情形，而且使用麥克風的音量充足，學生普遍的接受度良好；至於缺點則是秩序較無法掌控，學生較容易分心，且有學生反應希望能夠自行操作。而在普通教室利用單槍投影機上課，最大的缺點則是因為所有人共用一個螢幕，加上關燈後的光線不足，坐在前排同學的接受度高，不過後排的狀況就較為不佳了；由於在普通教室利用單槍投影機上課時，研究者使用的是筆記型電腦加上無線滑鼠的操作，得以面對學生，掌握學生的學習狀況，自然在秩序的掌握上也就來得容易了。

至於針對「電腦教室廣播」、「教室單槍螢幕投影」與「傳統的黑板教學」容易聽種程度的比較，在 34 份回收問卷中，僅一位覺得傳統的黑板教學較容易聽得懂，其餘多數認為使用數位教學的方式學習狀況較佳，且有 26 位同學覺得電腦教室廣播的效果是最好的，這應也是上述在電腦教室上課的優點所致。值得再探討的是有一位同學提到：「電腦教學比較清楚，但是傳統的教學經過自己實際操練過，印象較深刻」，這應該也是下次再實施此單元的教學時，研究者自己可以修正方式的地方。

最後是學生針對實行資訊融入教學的上課方式，建議或覺得需要改進的地方，並參考其上次段考成績（詳見附件(八)）。部份學生未填寫上次段考成績，不過值得欣慰的是無論是高低成就的學生，大體上的反應良好，最大的問題該還是秩序的控制問題，而有兩位同學反應教學的速度過快，這也是使用數位教學時，教師易犯的毛病，也應於下次教學時再作加強。

5-2-3 遭遇問題與教材修正

本節將上述的缺點作一整合，並針對所遭遇的問題提出解決方式。雖然學生普遍反應在電腦教室上課的學習效果較佳，然而在電腦教室的缺點則是教師與學生有一定距離，無法一邊操作，一邊視學生反應而調整教學時間及進度，這個問題該可以藉由新規格 2.4 GHz 無線滑鼠的使用，使接收距離達到 10m 來解決；教師可以一邊操作滑鼠，一邊巡迴檢查學生演練狀況，並藉此維持上課秩序。

至於學生提到自行操作的問題，由於數位媒體畢竟只是輔助教學的工具，除了在課堂上應安排教學與學生練習交錯使用外，另外所提供的原始電子檔，也可讓學生回家自行操作，加深上課印象。

而學生針對電腦教室學習效果較佳的意見，也可以在事先透過調課或協調，盡量針對教材適合使用的地點上課，而教室單槍投影的缺點，可以透過位置的調整與練習的交錯的使用來降低影響。

這一次的教學，因事先考量場地的借用、學生的就位及課程的連貫，其中有三次的教學都是連續兩節，明顯地在第二節的時候學生的學習效果較不理想。透

過教材的分割，練習的增加，下次教學該可避免這些問題的影響。

最後是針對學生所反應的問題所應做的教材修正，其中最大的改變該是在「平等性質的應用」教學完畢後，針對學生的反應，所做的分析簡報去除，以及直接於證明簡報上分析。減輕學生的認知負荷後，在這個地方的學習狀況應該會有所改善。惟修改過後未能針對學生正式施測，這也是這次的研究中較為遺憾的地方。

至於教材的重新分割與課堂上練習的增加，則應視學生反應與程度，針對當年度的教材重新設計，若能以數位教學配合上傳統的練習，相信將使得學習的效果更事半功倍。



5-3 專家評鑑教材

本教材在經過試教、填寫回饋後，為確認教材的完整性與連貫性，尚於研究者任教之學校教研會，邀請專業的數學科教師作問卷調查，利用了一節教研會的時間，作教材分享與施教說明，並針對回收的調查表予以分析。茲說明如下：

5-3-1 教材問卷說明

評鑑問卷中的完整內容詳見附件(九)，在基本資料中，列出性別及服務年資、職稱的主要目的是在作分析時可以作進一步的討論；至於任教科目中，由於資訊課程屬彈性課程，在本校編制中納入數學科教研會，加上本教材大量使用數位教學，教師仍需具備一定的資訊能力，故在此一併勾選；至於任教年級中，本教材的安排原在九年級上學期，新教材於八年級下學期及九年級上學期分別實施性質說明與綜合證明，教師以傳統教學任教過該教材後，再比較相關概念的呈現方式，也可做立即性的回饋與評鑑。

至於在評鑑表的內容中，第 1、2 題主要是針對此數位教材與實際教材的關聯度與呈現方式上作勾選；第 3~9 題針對的是此教材的師生互動方面作評選，在學生方面，包含課後複習的可能性、引起學習動機、難易度安排及課堂上的互動性與同步學習及操作；在教師方面，則作操作性與完整性的評鑑；第 10~12 題針對的是教學目標、教學時間及誘發思考性作評比；最後 13、14 題則是教師使用及推廣此教材的意願調查，並於第 15 題作其他建議。接下來作進一步的結果分析：

5-3-2 評鑑結果分析

在性別方面，此次參與評鑑的教師中含男性 4 位，女性 8 位共計 12 位；服務年資上，1~5 年的佔 2 位，6~10 年的佔 3 位，11~15 年佔 1 位，16~20 年佔 1 位，21~25 年佔 1 位，25 年以上的有 3 位，平均起來超過 15 年，顯見超過半數的教師應均實施此部份的教材 3 至 5 次以上，在傳統教學與數位教學的鑑別度上自然加以提高；至於 12 位教師中，擔任純粹數學科教師的有 10 位，純粹資訊科教學的有 2 位，其中並有 1 位曾擔任數學科教學 10 年以上，至於任教年級中，任教八年級的有 7 位，九年級的有 5 位，加上 1 位編輯，故約有半數是剛任教過或上學期

任教過相關教材，對教材熟捻度尚稱完整的。最後在職稱擔任主任的有 1 位，導師的有 7 位，專任教師的有 1 位，其他的有 1 位，其餘則未作勾選。

茲列出 12 份問卷中，依各題的統計結果製表如下：

表 5-3 「專家評鑑問卷」統計結果表

請問您對「全等三角形性質教學」數位教材看法？	非常同意	同意	無意見	不同意	非常不同意
01. 本教學素材與學習內容吻合度高	10	2			
02. 本數位教材能有效地呈現教學內容	10	2			
03. 本數位教材能協助學生在課後進行複習	9	1	2		
04. 本教學素材能引起學習者的學習動機	9	2			
05. 本教學素材內容的難易度適合學生	9	2	1		
06. 本數位教材在操作上方便教師使用	5	5	2		
07. 使用本數位教材教學能有效地促進師生間的互動	7	5			
08. 本教學素材能加強學習者在課堂上的理解與操作	9	3			
09. 不需要其它媒體輔助，教師可只用本教材教好本單元	4	6	1	1	
10. 使用本數位教材教學能達成既定的教學目標	8	3	1		
11. 使用本數位教材教學能有效地減少教師的教學時間	10	1	1		
12. 使用本數位教材教學能有效的誘導學生思考	7	5			
13. 您將有意願配合教學使用本數位教材	8	3	1		
14. 您樂於推薦本教學素材給有可能的使用者	9	2	1		

在此數位教材與實際教材的關聯度與呈現方式中，非常同意的佔 83.3%，同意的佔 16.7%，顯見所有教師均認為此數位教材與實際教材的契合度相當高，也能將教學內容做有效呈現。

至於在教師與學生的互動方面，認為能夠協助學生於課後進行複習的佔八成，認為無意見的有 2 位，主要原因應是學生若要於課後進行複習，最主要的還是課堂上學生本身的接收程度與課後學習的意願所在；而由於使用了數位化的方式進行教學，全數的教師都認為本教學素材能有效引起學習者的學習動機，有效促進師生間的互動；至於難易度上，也有超過九成的教師認為教材的難易度是適合學生的，顯見除了課本內容外，額外選取說明的題目與相關概念呈現也都是合宜的，也因此全數的教師均認為此教學素材能加強學習者在課堂上的理解與操作。至於在教師的操作上，雖然考慮使用教師的數位落差，已將開關作多元化設計，並針對證明簡報作操作建議說明，仍有兩位教師對於使用的方便是沒有意見的；而是否能取代原始的傳統教學，雖然所有教師對此教材有高度肯定，因為有 1 位教師不同意，1 位教師沒有意見，這也是於實際大班教學後，研究者本身對於原始設計予以調整的原因之一。

在達成既定的教學目標上，12 份問卷中有 8 份是非常同意，3 份是同意的，

所佔比例超過九成，顯見若經過適當的引導配合正確的教學方式，此教學素材達成教學目標的可能性極大；同時九成以上的問卷也同意此教學素材能有效地節省教學時間，並有效地誘導學生思考，這也是在大班教學後，將分析與證明簡報合而為一的最主要目的。

最後是教師自己使用與推廣此教材的意願度，計有 11 位超過九成以上的教師是樂於使用及推廣的，也相信此教材在經過 1 至 2 節課的使用教學與示範後，願意使用及推廣的教師將能更加熟捻，配合其上課模式，適當地使用相關的素材於教學之中。

至於在教材本身所給予的意見，在「全等概念的引進與性質說明」上，在介紹「全等三角形的條件」及「SSA 不全等特例」時，可透過故事說明的方式來引起動機；至於「全等性質的作圖」上，應針對為何要作圖（製作框架）深入說明；而「全等性質的應用」時，中垂線作圖的證明與「等腰三角形底角相等」的連結，以及第八部份的第六個問題由正方形轉換為正三角形、正五邊形……，加以發展延伸，均給了自己在教材設計上再作調整的極佳建議。以上部份均已於第四章教材內容上作細部說明，這裏不再贅述。

綜括來說，對於此教材的內容完整性、師生互動、教師使用性上，均超過八成以上的教師予以高度肯定，這是值得欣喜的；然而一至二成仍有疑慮及不同意的地方，正是研究者在設計這份教材上尚有不足及值得改進的地方。



5-4 施測、評鑑後的問題探討

由於試教、正式教學與專家評鑑個別的問題與解決方式已於前面幾節分別作探討，本節最後僅針對綜合性及重點式的問題條列式說明，並探討其解決之道：

1. 試教與教學採用的練習與評鑑題目未經過專家評鑑，與課堂上教授內容的契合度難以準確評斷：應針對最後定案的教材，再行設計題目，經由專家評鑑，確認其關聯性與教材契合度。
2. 教材的試教與教學的場地與器材使用安裝，常會花費許多不必要的時間：事先的協調與學生的告知、場地的安排與器材的先行安裝，都是進行數位教學應注意的重點。
3. 專家評鑑的時間過短，無法將教材作完整展示：有利於教材的使用與推廣，應利用完整的兩節至四節的時間，除了作教材的演示外，也可介紹簡單的動畫及 MathPS 開關功能，讓教師亦能自行做教材的修正與補充。
4. 一開始對於試教與正式教學評估的時間過短，學生缺乏足夠的時間吸收：正式教學應予以延長，此點已於前面教學時間上做修正。
5. 試教的學生回饋中，僅針對口頭提及與反應不佳的部份作修改，未能有質的分析，也缺乏完整時間作細部修改：由於試教的學生量過少，反應出來的成績並不具代表性，若能針對個別學生再做訪談暨質的分析，相信會比成績與教材修正上更有收穫。
6. 正式教學僅做學生問卷，未作前後測評鑑，也未能有對照組予以比較：除了專家予以肯定的教材設計外，應配合教材做正式教學的前後測評鑑，並有對照組予以比較，確認數位教學與傳統教學的差異性。
7. 教師課堂教材與學生課後練習的操作仍具有其難度，可能無法有效針對教學目標作呈現，或於課後作複習：除加強原本的使用說明外，或可製作即時教學檔的錄影(音)，供教師或學生自行操作時的參考依據。
8. 教室使用單檯的環境與電腦教室秩序的維持，仍是正式教學時需注意的地方：教室使用單檯應注意學生的座位及光線問題，並要調整教師面對學生的方式；電腦教室則需配合適當的無線設備，教師可一邊巡邏觀察學生施作及反應，另一方面維持課堂秩序。
9. 教材的設計應針對專家評鑑，修改後再作試教與正式教學：此次教材由於一邊製作、一邊修改，加上時間上的無法配合；在時間允許的狀況下，應先完成教材，由專家評鑑其可行性，再作試教或直接作正式教學，應更可收其功效。

第六章 結論、建議與展望

在教材製作與小組試教、正式教學後，本章針對最後的結果，為數位教材的製作作結論，並加以檢討、建議，以及討論未來的展望。

6-1 結論

以下從教材設計、設計方法暨實際教學評鑑的情況作結論：

先從教材設計的角度來看，數位教材的製作，最重要的是要選擇適當的教材，並作有效的呈現；本實驗之所以採用全等三角形作為研究素材的製作，主要的動機以及所依據的理論在於：

1. 以有關學習的認知理論為基礎，可提供適當的方法，協助學生概念的發展；
2. 配合視知覺理論的原則，給予強化及重覆操作的協助，使所接受的訊息能從短期記憶進入長期記憶；
3. 利用激發式的動態呈現，讓幾何圖形結構呈現多樣化，需透過多媒體學習理論的運用，讓訊息的呈現能夠減少雜訊並吸引學生的注意力；
4. 全等三角形的教學，在幾何的學習層次上屬於極重要的關鍵時期，其內容較過去的教材更有系統，步驟也隨之增多，概念漸趨複雜，需要適當的方法，協助基模的建立，將課程內容作更有效的呈現；
5. 具備大多數教材設計的原則，可配合相關概念及題目，將其有系統呈現。

至於所設計的教學素材與一般數位素材及網路學習的最大差異，在於教師課堂授課的自主性，考慮教師自主與因人因地不同的授課差異，由授課者負責組織與創造問題情境，以口語導引配合滑鼠指標激發訊息，主導整個教學過程，藉以協助學生的學習；主要經由以下的過程及方法：

1. 先確定教學目標、圖像化的模式以及教學流程；
2. 再針對數學知識與解題能力的分析，依據概念的 formed 及教學的需要作切割，並轉化為按鈕式激發動態呈現；
3. 接著搭配訊息處理作適當呈現，透過互動式按鈕及動畫的使用，藉以強化感官的運作，協助概念知識的建立；
4. 分別製作不同版本的教材，藉由比較圖文呈現的順序，探討影響知覺的歷程，決定課堂教學模式及最適合幾何教材的互動呈現模式；
5. 此外期望以圖像引導文字造成類比遷移及基模精鍊的效果，提昇學生興趣及學習成就，得以促使學生主動探索知識來源。

而在實際教學後，也確實達到了以下的功能及效果：

1. 將多媒體素材經由滑鼠及激發式動態的呈現，塑造以教師導向的互動式教學環境；
2. 透過多元化開關的製作，得整合敘述冗長的作圖，比較一題多解的證明方式；
3. 能夠彈性地依教學進度暨學生程度、教師目標，適度地與舊觀念作聯結，新觀念作延伸；
4. 減少教師的授課時間與不便，使資訊融入教學更加有效率，一別傳統教學的冗長；
5. 減少數位化教材修改的不便，節省教師學習與製作教材的時間，使成本得以降低且可以估計；
6. 藉由按鈕的製作，提高師生互動的程度；
7. 透過試教及正式教學，填寫回饋或問卷的結果，學生大致能肯定自己在這個單元的學習及課後練習；
8. 學生在此單元利用數位教學的接受度頗高，能夠適當提高其學習意願，增強其學習成就，達到有效學習暨持續效果。
9. 由專業教師評鑑教材內容，對於教材設計有著高度的肯定，並具多數教師有興趣使用及樂於推廣；

由以上的功能及效果，研究者得以肯定製作不同版本及圖文互動模式的過程中，所投入的時間及研究；而藉由受教者及專業評鑑的雙重肯定，多能達到預期的動機，也是研究者所樂於見到的結果。



6-2 檢討與建議

接下來區分教材設計及實際施教、課堂反應的情形作檢討，以及接下來可作改進的建議。

在教材的製作上，有鑑於傳統授課時，教師授課的內容受限、速度較慢的缺點，研究者以文字、圖像作為物件導向，配合滑鼠與教授者語言，製作了基本的數位素材；並依據不同的需求，分別製作教師使用及學生自修的版本；而依據文字的複雜程度與解題的需求，也完成不同類型的開關模式，符合不同模式的教學。從數學教材的特性來看，以圖形為導向的分析過程，讓學生容易了解，卻往往無助於學生閱讀能力的提昇；而以文字為導向的證明過程，有助於解題能力的培養，然而學生在理解時卻常常便出現了問題。要針對學習者運用最適當的開關，開關多的時候適性化高，操作的方便度有所不足，常常會淪為教師個人專用的教材；然而開關少的時候，操作的直覺與方便性強，便在適用性上會打了折扣。

從教材設計的原則與幾何發展的層次來看，應有以下幾點需加注意：

1. 此教材雖經由學生回饋暨教師評鑑的高度肯定，但是缺乏綜合評鑑的前後測，以及傳統教學的對照比較，在數據上的呈現稍嫌不足，這是下次再進行同教材教學時，可以做為比較，或由其他教師試用後，可再作討論的地方；
2. 數位教材的製作費時費工，依據的學習理論也有天壤之別。應先依據相關概念及理論，先行製作適當版本並留下紀錄，日後作修改暨再製時方能省時省力；
3. 數位教材的優點在於訊息量多時得以同步處理，然而刺激過多卻造成容易遺忘的缺點；是否有方法使完成的成果保留，並將半成品逐步作紀錄，將是爾後製作數位教材時，極為重要的關鍵；
4. 在幾何發展的層次上，此教材的設計依據，主要是第一層次的分析期，進入第二層次關係期最重要的關鍵，教材的設計與教師的引導，將具有極大的影響，甚至達到學生有興趣進入第三層次的結果。

然而本研究在製作上的不足，主要有以下幾點：

1. 雖然研究者依學生反應暨專家建議製作了不同類型的版本，然而在實際教學時因時間受限，無法依不同版本作施測比較，探討對學習的影響；
2. 本教材主要透過外顯式按鈕的設計、滑鼠的使用及指標的定位，配合教師的口語導引造成學生學習，如何在其中取得一個平衡點，兼顧圖像與訊息接近，又能避免滑鼠干擾視覺，仍有其難處。甚至在語言、文字與圖像及指標位置出現順序的討論上，仍需作更深入的探討；
3. 本教材依教材設計的原則、學生學習的完整，以及教師使用的便利上，都還有進步的空間，如何在色調的過於淡化或複雜中權衡，兼顧補救教學與延伸教

學，使教師使用上更為直觀，都是接下來再製作時，可以再注意的地方；

而在實際施教時，所遇到的困難及解決之道如下：

1. 教室或電腦教室的秩序維持及場地借用、器材安裝等狀況，回歸教學本質，若學生真能由教學的過程中真正學習到預備學習的內容，進一步在練習或評量得到肯定，達到教學目標後，相信在教學時的配合度與期待，將使得教師的教學更為輕鬆，學生的學習更有效率；
2. 至於課堂教學的反應，此次教材在教學的時候，由於用了大量的數位素材，呈現上方便許多，有時卻造成教學速度的過快，部份學生無法完全吸收；或是需要一再重覆，使得已學會的同學跟著再學習。若能調整速度，依據教師經驗，透過適當的呈現次數，將教材作最有效的呈現，使得時間上的接續能夠符合學生反應，這樣的教學將會更成功；
3. 純粹的數位化教學，與傳統教學比較仍有其不足的地方，若能以數位教學講解搭配傳統練習並用，相信可使學習效果事半功倍。

最後在其他教師於課堂與學生於課後的操作上，相信在說明檔的補充與影音示範檔的製作後，教材所呈現的效果將可相得益彰。而若有充足時間，將相關的功能向使用教師或學生作解說暨示範教學，以及針對同一份教材，根據需要錄影不同的教學方式，相信在操作、使用及日後教材本身的修改與補充上，該有更佳的效果。



6-3 展望

以往在數位教材的製作上，教師常常望之卻步；或是有了現成的教材，不願花時間去研究、嚐試。如今在 PowerPoint 的介面下，使用容易，修改也不成問題，只要配合適當的 MathPS 軟體使用教學，在互動與繪圖上有了基礎，加上認知理論與訊息處理理論的基礎，自然對於教材的製作與使用，將能願意去嚐試與再製。

製作這份數位教材，自 2006 年底迄今，半年多的時間說長不長，說短不短；教材製作的時間花費工夫，最重要的還是其可行性及日後的發展及推廣，期待因為此教材的製作，藉以拋磚引玉，日後有機會再行製作更多的教材；或是吸引更多有志之士，有效率地製作同樣具備理論基礎與實用性的教材；甚至藉由訊息逐步呈現的特性，加以結合好的教材與工具，如目前政府正大力推動的「電子白板」或「按按按」設備，製作更有互動性的數位素材，得以裨益更多的教師與學子。



參考文獻

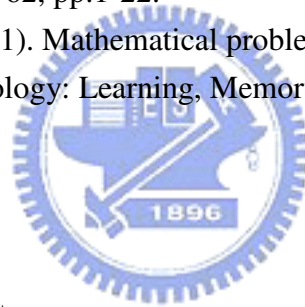
中文部份

- Eysenck, M. W., & Keane, M. T. (2003)。 *認知心理學*(李素卿譯，第五版)。台北：五南。
- Gange, E. D. (1998)。 *教學心理學—學習的認知基礎*(岳修平譯)。台北：遠流。
- Byrnes, J. P. (2004)。 *心智·大腦與學習*(游婷雅譯,柯華葳審訂)。台北：洪葉。
- Kemp, J. E., & Smellie, D. C. (1997)。 *教學媒體的企劃、製作與運用*(中國視聽教育學會譯)。台北：正中。
- Skemp, R. R. (1995)。 *數學學習心理學*(陳澤民譯)。台北：九章。
- Walle, J. A. (2005)。張英傑、周菊美(譯)。 *中小學數學科教材教法*。台北：五南。
- Zimbardo, P. G., & Gerrig, R. J. (1999)。 *心理學*(游恆山譯，第十四版)。台北：五南。
- 王美雪(2005)。 *運用資訊科技融入國中數學教學對學生學習成效之影響*。彰化師範大學科學教育研究所未出版之碩士論文。
- 王英洲(2003)。 *教學媒體融入教學面臨的阻礙*。資訊與教育雜誌，85，5-14。
- 李進福(2006)。 *數學教材設計之研究—以視覺設計理論為基礎*。交通大學網路學習專班未出版之碩士論文。
- 邱建偉(2005)。 *在數學簡報系統上設計數學教材之研究*。交通大學網路學習專班未出版之碩士論文。
- 國立編譯館(1981)。 *數學科教學研究*。台北：正中。
- 康軒出版社(2007)。 *96 年度康軒版教師手冊*。台北：康軒。
- 張春興(1994)。 *教育心理學—三化取向的理論與實踐*。台北：東華。
- 張春興(1996)。 *現代心理學*。台北：東華書局。
- 張春興、林清山(1989)。 *教育心理學*。台北：東華。
- 陳明璋(2005)。 *數學簡報系統 math ps*。陳明璋主編。 *萬腦奔騰數學網(第三輯)*。新竹市：交通大學理學院網路學習碩士專班。
- 陳啓明(2000)。 *不同題目表徵型式及相關因素對國小五年級學生解題表現之影響*。嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版。
- 陳淑英(1986)。 *視聽媒體與方法在教學上應用之研究*。台北：文景。
- 曾慧敏(2003)。 *教育心理學*。台北：心理。
- 黃幸美(2004)。 *兒童的數學問題解決與思考*。台北：心理。
- 甯自強(1992)。 *藉由解題活動了解兒童及促進兒童增加對數學的了解*。教師之友，32 卷，5 期，45-47 頁。
- 葉玉珠(2003)。 *教育心理學*。台北：心理。
- 葉重新(2006)。 *心理學(簡明版)*。台北：心理。

- 劉秋木(1996)。《國小數學科教學研究》。台北：五南。
- 蔡勝雄(2001)。《網際網路融入國二數學科教學之個案研究---三角形的基本性質》。
高雄師範大學數學研究所未出版之碩士論文。
- 鄭麗玉(1993)。《認知心理學－理論與應用》。台北：五南。
- 應雅鈴(2007)。《應用數學報系統發展國小數感教學模組之行動研究》。台北教育大學
數學教育研究所未出版之碩士論文。
- 謝堅(2006)。《國小數學教材分析－幾何》。台北：教育研究院籌備處。
- 羅綸斯(2002)。《多媒體與網路基礎教學——理論、實務與研究》。台北：博碩。
- 蘇柏奇(2006)。《數學教材設計之研究－以知覺理論為基礎》。交通大學網路學習專班
未出版之碩士論文。

西文部份

- Edgen, P. D. & Kauchak, D. (1992). *Educational Psychology: Classroom Connections*.
New York: Macmillan.
- Goswami, U. (1991). *Analogical reasoning: What development? A review of research
and theory*. *Child development*, 62, pp.1-22.
- Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). *Mathematical problem solving by analogy*.
Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17,
398-415.



網路資源

- 奇摩知識「何謂『資訊融入教學』」
(<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/?qid=1306030109479>)
- 完形心理學的視覺法則
(<http://gc.shu.edu.tw/~tjchiang/indite/GestaltPsychology/gestalt-02-02.htm>)
- NLVM-Congruent Triangles
(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_165_g_3_t_3.html?open=instructions)
- NLVM-Areas of Irregular
Shapes(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_282_g_3_t_3.html?open=activities)
- 台北市九十六學年度中小學多媒體單元教材甄選活動(<http://tmrc.tp.edu.tw/event/>)
- The Earth in
Space(<http://www.project2061.org/publications/rs1/online/RESEARCH/REPORTS/RPT12.HTM>)

附件(一) 全等教材的原始與實際教學時數詳細比較表

主題	目標	原始節數	實際授課節數	備註
1. 三角形全等的意義	<ol style="list-style-type: none"> 1. 能理解當兩個平面圖形能完全疊合時，就稱這兩個圖形「全等」。 2. 能理解兩個全等圖形，它們的形狀一樣，而且大小相等。 3. 能理解當兩個三角形完全疊合時，就稱它們「全等」。 4. 能理解疊合時對應點、對應邊、對應角的意義。 5. 能理解 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的讀法和意義。 6. 理解如果兩個三角形同時滿足三雙對應邊相等和三雙對應角相等時，兩個三角形全等。 	1 節	0.5 節	檢附基本練習，配合教材 1 簡報 1~8
2. 三角形的 SSS、SAS 尺規作圖與全等性質	<ol style="list-style-type: none"> 1. 理解已知兩雙對應邊相等的兩個三角形不一定會全等。 2. 能作三角形的 SSS 尺規作圖。 3. 能理解三角形的 SSS 全等性質。 4. 能作三角形的 SAS 尺規作圖。 5. 能理解三角形的 SAS 全等性質。 6. 能理解兩個三角形滿足 SSA 的情形時，不一定能做出一個三角形。 7. 能理解三角形沒有 	4 節	2.5 節	透過條件的說明，簡單練習全等性質的題目，了解全等性質的種類，並接著練習全等性質的作圖，配合教材 1 簡報 9~21 及教材 2 簡報 1~17

	SSA 或 ASS 全等性質。 8. 能理解兩個直角三角形 RHS 全等性質。			
3. 三角形的 ASA、AAS 尺規作圖與全等性質	1. 理解兩個三角形只有兩雙對應角相等，則不一定全等。 2. 理解三角形的全等性質中沒有 AAA 全等性質。 3. 能作三角形的 ASA 尺規作圖。 4. 能理解三角形的 ASA 全等性質。 5. 能理解三角形的 AAS 全等性質。 6. 能作三角形的 AAS 尺規作圖。	3 節	3 節	接續上節課作圖，完成全等性質作圖配合練習，並完成相關尺規作圖例題，配合教材 2 簡報 18~48
4. 三角形全等性質的應用	1. 能驗證角平分線作圖。 2. 能驗證角平分線上任一點到角的兩邊距離相等。 3. 能驗證到一個角的兩邊等距離的點，必在此角的角平分線上。 4. 能驗證垂直平分線作圖。 5. 能驗證一線段的垂直平分線上的點到此線段兩端點的距離相等。 6. 能驗證若有一點，到某線段兩端點距離相等，則這個點會在該線段的垂直平分線上。 7. 能驗證等腰三角形的兩底角相等。 8. 能驗證若三角形的兩個內角相等，則此三角形	4 節	4 節	除原始課本內容，安排約 1.5 節進階證明練習題，配合教材 3 全

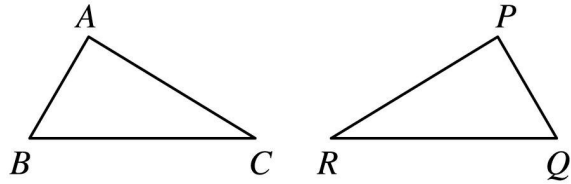
	<p>必為等腰三角形。</p> <p>9. 能驗證等腰三角形的頂角平分線會垂直平分底邊。</p> <p>10. 能驗證等腰三角形底邊的垂直平分線通過頂點。</p>			
--	---	--	--	--



附件(二) 「全等練習之一：全等概念的引進與說明」

姓名：_____ 座號：_____

1. 如右圖， $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ，其中 A 、 B 、 C 的對應頂點分別為 P 、 Q 、 R ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{QR} = 8$ ， $\overline{PR} = 4\sqrt{3}$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle R = 30^\circ$ 。下列敘述何者

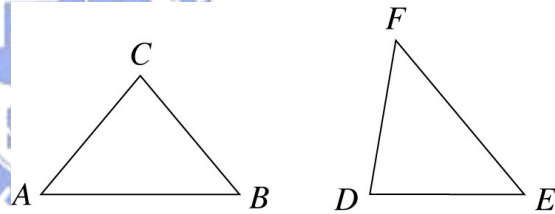


錯誤？答：_____。

- (A) $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$ (B) $\overline{PQ} = 4$ (C) $\angle P = 80^\circ$ (D) $\angle Q = 60^\circ$

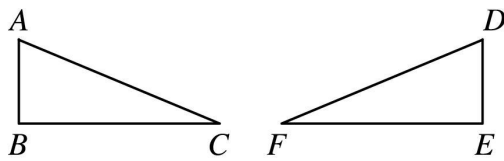
2. 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， A 、 B 、 C 的對應頂點分別為 D 、 E 、 F ，若 $\overline{AB} = (2x+3)$ 公分， $\overline{BC} = (4x-2)$ 公分， $\overline{AC} = 3x$ 公分， $\overline{DE} = (3x-2)$ 公分，則 $x =$ _____， $\triangle DEF$ 周長 = _____ 公分。

3. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle B = 50^\circ$ ， $\overline{AB} = 13$ ， $\overline{AC} = 10$ ； $\triangle DEF$ 中， $\angle D = 80^\circ$ ， $\overline{DE} = \overline{DF}$ ， $\overline{EF} =$



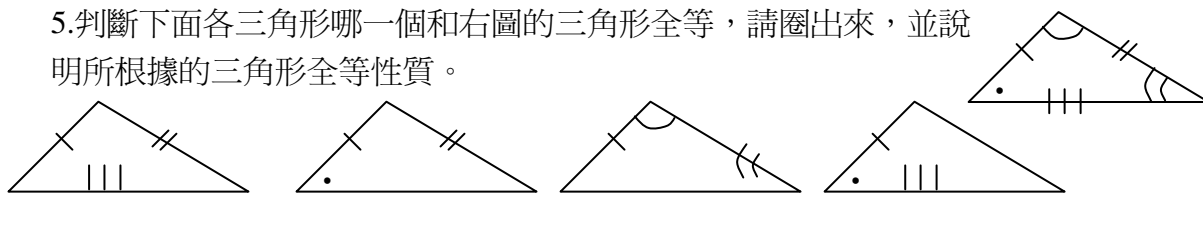
13，則根據三角形_____全等性質，可以得到 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ ，且 $\triangle EFD$ 周長 = _____。

4. 如右圖，已知 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 都是直角三角形， $\overline{AB} = \overline{DE}$ ， $\overline{AC} = \overline{DF}$ ，根據三角形_____全等性質，



質，可以得到 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。若 $\overline{AB} = 5$ 公分， $\overline{AC} = 13$ 公分，則 $\triangle DEF$ 的面積為_____平方公分。

5. 判斷下面各三角形哪一個和右圖的三角形全等，請圈出來，並說明所根據的三角形全等性質。



6. 若兩三角形全等，則下列敘述何者錯誤？答：_____。

(A) 兩三角形周長相等 (B) 兩三角形面積不一定相等 (C) 兩三角形對應角相等 (D) 兩三角形對應邊相等。

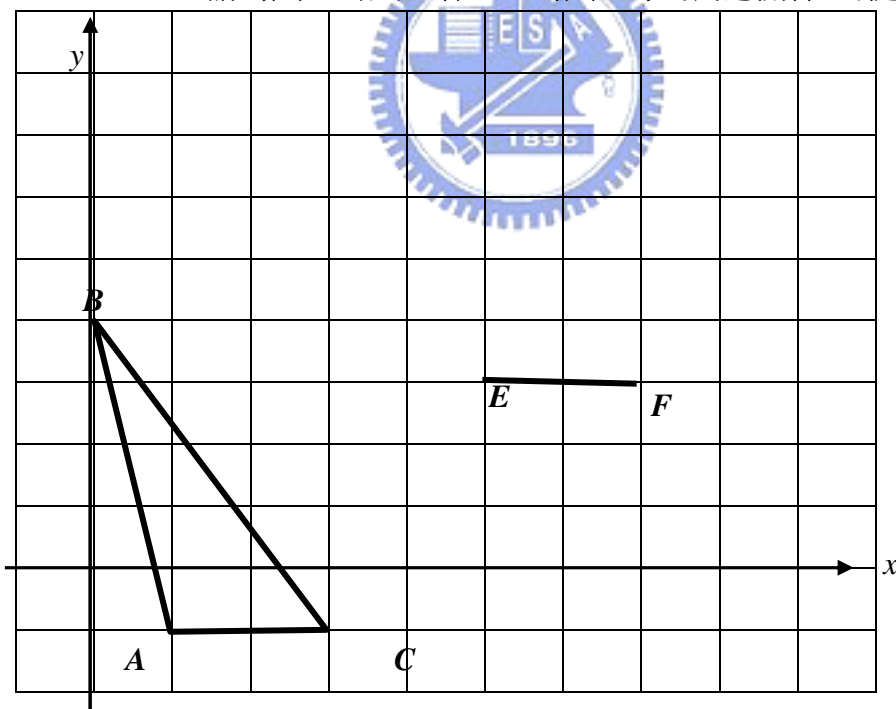
7. 三角形的全等性質共有_____、_____、_____、_____、_____等五種。

8. 用下列各選項中的已知條件，何者無法畫出固定的 $\triangle ABC$ ？答：_____

(A) $\angle A = 30^\circ$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 3$ (B) $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 3$, $\angle A = 60^\circ$ (C) $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\overline{AC} = 8$ (D) $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 3$ 。

9. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中， $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\angle B = \angle Q = 90^\circ$, $\overline{BC} = \overline{QR}$, $\angle C = \angle R$, $\overline{AC} = \overline{PR}$, $\angle A = \angle P$, 由上列 6 個條件中取三個，哪一個性質不能使 $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ ？答：_____ (A) RHS (B) SAS (C) AAS (D) ASS

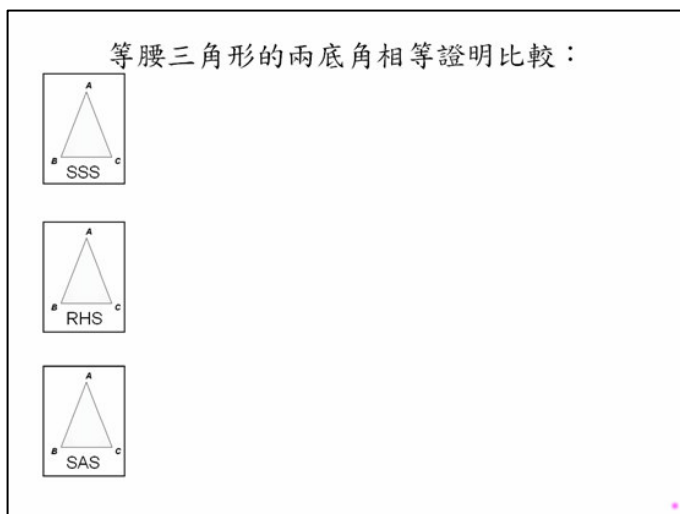
10. 如圖，在坐標平面上畫出 D 點，並連接 \overline{DE} 、 \overline{DF} 使得 $\triangle ABC$ 與新的三角形全等，且 $\angle F = \angle C$ 。請寫出 D 點的坐標，並寫出全等的對應關係。(提示：D 有四個解。)



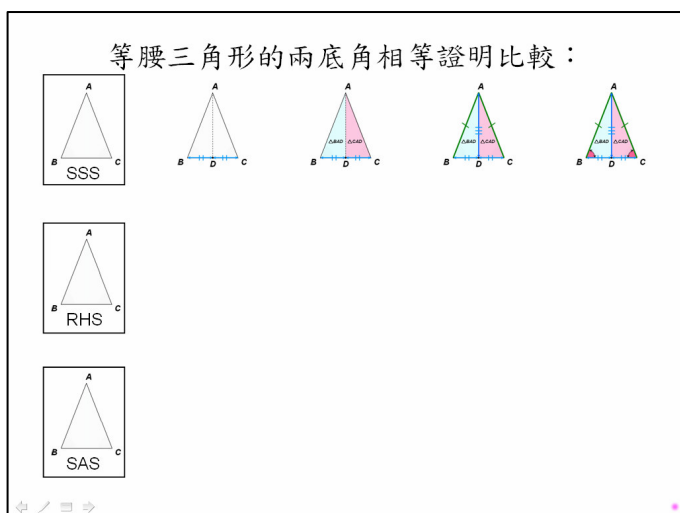
※第一次以電腦全程上數學課，不曉得你的感覺如何？請寫出你在這兩堂課的收穫，並說明上課是否有不懂或希望老師能改進的地方。

附件(三) 「等腰三角形的兩底角相等證明比較」作法

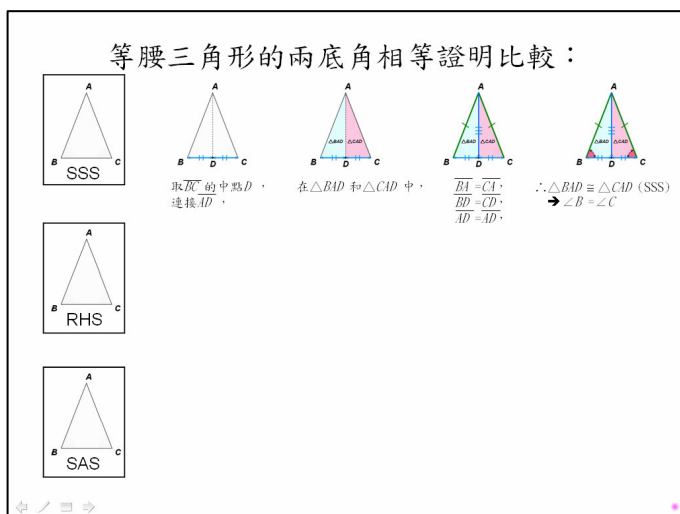
1.簡報標題、版面設定及原圖擷取作為新簡報開關(加框、加說明方塊)：



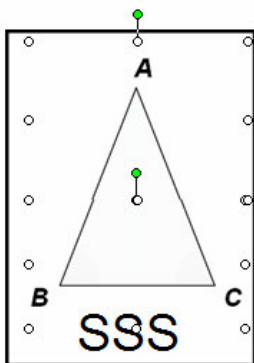
2.原始簡報分次擷取圖形，分散對齊後貼於新簡報：



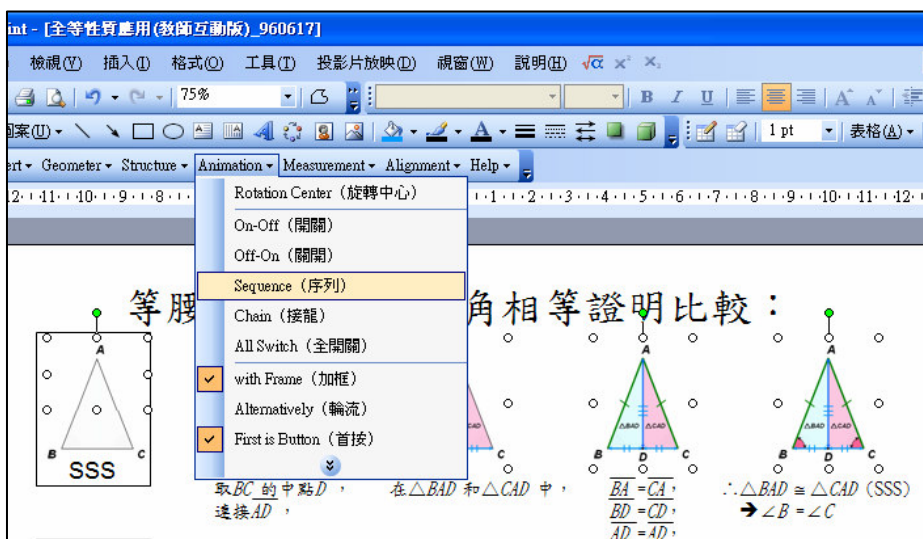
3.原始簡報複製文字，適當編排後貼於新簡報：



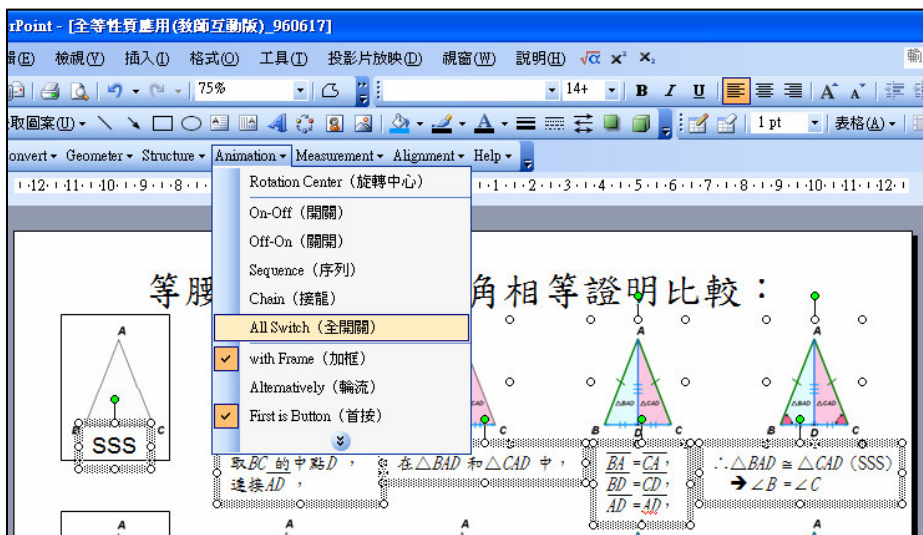
4.將新簡報開關原形複製，並利用裁剪工具將其分割為上下兩半，並加以密貼：



5.分別利用上半及下半圖形，作為圖形及文字的開關；依序選取上半及相關圖形作動畫(Animation)中的序列(Sequence)，並取消輪流(Alternatively)，勾選首按(First is Button)：



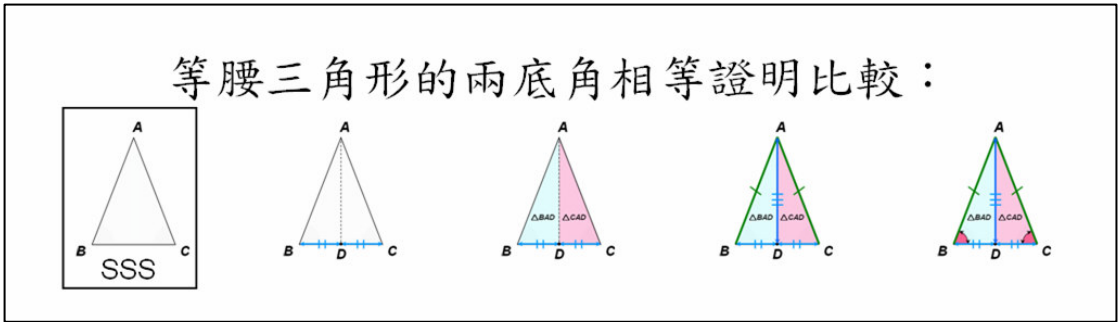
6.再以說明方塊(此處以 SSS 為例)為圖形及文字的全開關，依序選取 SSS 文字方塊及所有相關圖形、文字，作動畫(Animation)中的全開關(All Switch)：



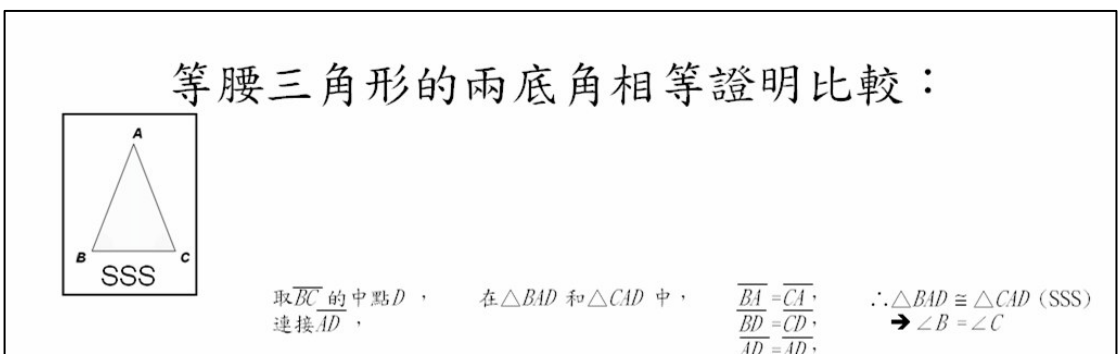
7.依上述 2.~6.步驟，重覆製作其餘全等性質證明序列開關：

8.完成後使用方式大致如下：

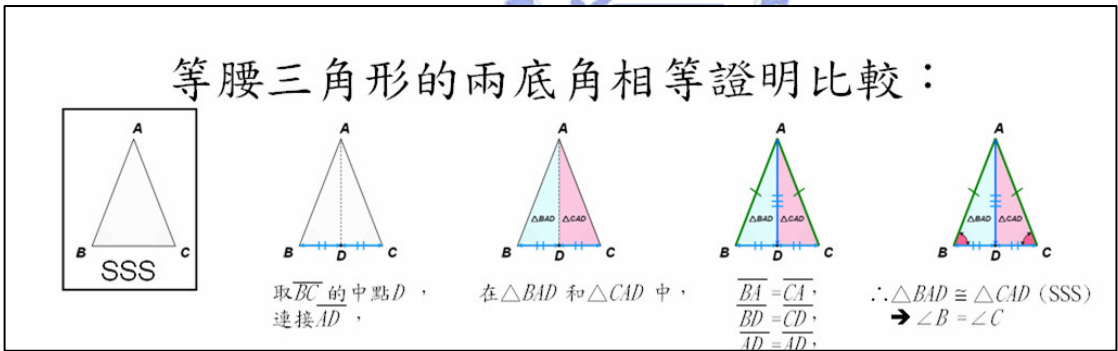
①按圖形上方產生圖形序列：



②按圖形下方產生文字序列：



③按說明方塊(SSS)圖形及文字全開(關)：



附件(四) 「全等練習之一：全等概念的引進與說明」學生回饋

※第一次以電腦全程上數學課，不曉得你的感覺如何？請寫出你在這兩堂課的收穫，並說明上課是否有不懂或希望老師能改進的地方。

- A1. 可以一直重解，做起來也比較方便，學起來比較容易懂，缺點是容易不專心。之前留下來學過一次，這次等於複習了一遍，改進的地方可能還好。
- A2. 還不錯，收穫很多，但是希望老師可以用講義以及圖例，再改變數據，才能引導我們做題，因為課本的解釋太深奧，又沒有實際又標示出圖的邊或解，如何形成A、S，所以，希望老師可以替我們加強。
- A3. 電腦的動畫看了比較能懂。
- A4. 還不錯，電腦的圖解比在黑板上畫得來得容易了解，但秩序的確很難顧。
- A5. ①嗯……很有趣，比起在黑板上的講解，來得印象深刻。
②學習到了三角形的全等性質，有著六(五)種：SSS、SAS、ASA、AAS 及 RHS
③希望能自己操作看看，能體驗一下。
- A6. 看的比較容易懂，但是看了兩節課的電腦會很累。
- A7. 讚，看得很了解
- A8. OK！
- A9. 無…
- A10. 還滿好的；因為可以比較容易理解，但是我還是分不清三角形的全等性質。
- A11. ①感覺用電腦上課比在教室上課還比較聽的懂。
②沒有不懂的，但還要在(再)加油！
- A12. 噢～讚！！
- A13. 哇哈*棒。
- A14. 很好，但希望同學可以專心點，才不會煩到我，這樣才比較專心。
- A15. 很好，沒有。
- A16. 無。
- A17. 我覺得用電腦上數學課，可以比較清楚了解過程，而且進度比較快，但是老師有時候講太快了，聽不太了解，同學上課也比在教室吵，大致上還不錯！
- A18. 沒有。
- A19. OK！
- A20. 有點吧！不了解有沒有問題？！我也不知。
- A21. 感覺很新鮮，我認為不用改了。
- A22. 太麻煩了～不好。

附件(五) 「全等性質作圖」學習單

姓名：
座號：

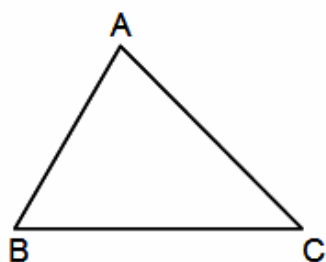
SSS 作圖

《作法》

1. 已知： $\triangle ABC$

求作：一個三角形，使它的三邊分別等於
 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA}

座號：

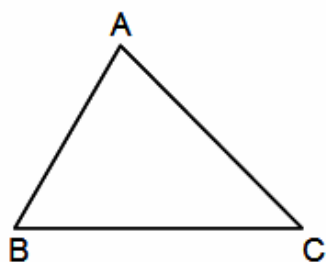


SAS 作圖

《作法》

2. 已知： $\triangle ABC$

求作：一個三角形，使它的兩邊分別等於
 \overline{AB} 、 \overline{BC} ，而且兩邊的夾角等於 $\angle B$

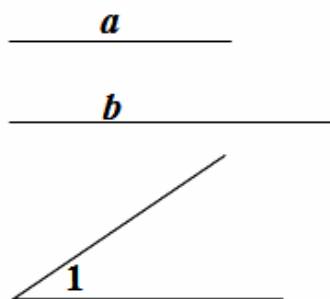


SSA 作圖

《作法》

3. 已知：長度為 a 、 b 的兩條線段和 $\angle 1$

求作：一個三角形，使它的兩邊分別等於 a 、 b ，而且邊長為 a 的對角為 $\angle 1$

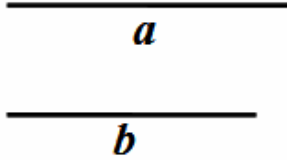


RHS 作圖

4. 已知：兩線段長 $a \cdot b$ ，且 $a > b$ 。

《作法》

求作：以 a 為斜邊， b 為一角的直角三角形。

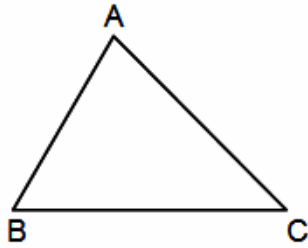


ASA 作圖

5. 已知： $\triangle ABC$

《作法》

求作：一個三角形，使它的兩角分別等於 $\angle B$ 和 $\angle C$ ，而此兩角的夾邊等於 \overline{BC}

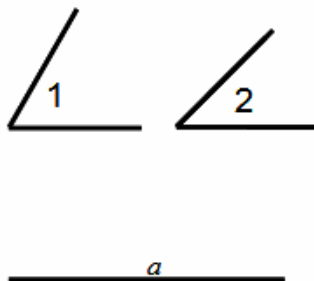


AAS 作圖

6. 已知： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 及 $\angle 1$ 的對邊長 a 。

《作法》

求作：滿足條件的三角形。



附件(六) 「三角形的全等性質」教學學生回饋表

基本資料：男/女 上次段考成績：

一、本單元共包含「全等概念的引進」、「全等性質的作圖」及「全等性質的應用」，請問：

1. 在「全等概念的引進」內容中，你覺得你自己：
完全懂了 還有一些不懂 一半一半 只懂一些 完全不懂
2. 上完「全等概念的引進」內容後，你覺得回家功課的書寫：
完全沒問題 有一些不會 一半一半 只會一些 完全不會
3. 在「全等性質的作圖」內容中，你覺得你自己：
完全懂了 還有一些不懂 一半一半 只懂一些 完全不懂
4. 上完「全等性質的作圖」內容後，你覺得回家功課的書寫：
完全沒問題 有一些不會 一半一半 只會一些 完全不會
5. 在「全等性質的應用」內容中，你覺得你自己：
完全懂了 還有一些不懂 一半一半 只懂一些 完全不懂
6. 上完「全等性質的應用」內容後，你覺得回家功課的書寫：
完全沒問題 有一些不會 一半一半 只會一些 完全不會

二、本單元利用了兩種方式「電腦教室廣播」及「教室單槍螢幕投影」的資訊融入教學方式上課，你覺得兩者的上課方式優缺點為何？與傳統的黑板教學比較起來，哪一種方式你比較容易聽得懂呢？（請依序寫出「電腦教室廣播」、「教室單槍螢幕投影」與「傳統黑板教學」你容易聽懂的程度）

1. 「電腦教室廣播」優點：
缺點：
2. 「教室單槍螢幕投影」優點：
缺點：
3. 「電腦教室廣播」、「教室單槍螢幕投影」與「傳統的黑板教學」容易聽懂程度的比較：

三、對於此次全程實行資訊融入教學的上課方式，你的任何建議或覺得需要改進的地方：

附件(七) 比較「電腦教室廣播」及「教室單槍螢幕投影」個別優缺點

1. 「電腦教室廣播」優點：

可以重複修改，不懂可以一直問。

有冷氣吹

圖片較清楚，比較舒服。

不懂可以一直重來，老師也不累。

1. 不懂可以請老師再來一次。2. 過程內容較清楚

很好

1. 可以吹冷氣 2. 而且不必擦來擦去 3. 黑板比較麻煩 4. 重覆播

好，可重看

有動畫，做幾次不是問題

可以比較了解 更清楚

可以重覆學習

可以一人一台電腦，不懂很快就能重來

可以吹冷氣

較快速

可以快速重複一次作圖

容易聽到聲音。

一人一台電腦不用擠，麥克風很清楚

可以比較懂

容易看的懂，翻轉的一些圖，比較容易懂

可不斷重複學，又可以吹冷氣

1. 叫的較清楚 2. 看的也比較清楚

可以讓每個人看自己的電腦而且不會看不懂。

看的比較清楚

可以重複一直把不會的圖弄好，弄懂！！ 有時冷氣不強(呵，開玩笑啦)沒有缺點耶！！

省事

很涼快。可以重複聽，圖比較清楚。

比較聽的懂

可以吹冷氣

每個人都有一個螢幕看

可以用動的看，不會被人擋住

不反光

冷氣。

數是

方便

2. 「教室單槍螢幕投影」優點：

缺點：

比較不專心，學習稍差點。

比較不專心

老師比較管不到我們。

環境太舒適。

1. 同學較容易分心

可 sleep

老師看不到那些人在玩！

電腦不好

容易分心

有人不專心……

自己無法自行操作

會不太認真

太豪華了

制序問題

制序亂

有些人不會看。

會講話，太舒服想睡

爬上爬下很累

不容易專心

很難專注

1. 有點吵 2. 錄影不自在

很多人會聊天、玩鬧。

電腦看太久眼睛會累。

會不專心。

沒有

不能睡覺

會吵鬧

不知道

冷氣不強

不認真

好睡

缺點：

不用離開教室，也可以有電腦教室的效果。

不知道

老師比較容易管我們。

不懂可以一直重來，老師也不累。

1. 老師不用那麼累 2. 可以節省時間，進度較快

可摸黑

看得到那些人在玩，在睡覺，在聊天

好，可重看

方便不用上4樓

螢幕比較大

可以清楚了解

不懂很快就能重來。

有比較專心

較快速

比較方便不用到黑板

可以比較顯目。

在教室上很方便，不用跑到別的地方

很方便

比較清楚、了解老師在說哪些部份

看得到

1. 不用跑到4F

可以不用爬電腦教室。

不用上樓

不用爬到4樓吧！！

清楚

可以不用爬樓梯

聽不太懂

可以睡覺

全班可以專注些

可以用動的看，不會被人擋住

X

專心一點

熱

方便

還是會不專心

比較不專心

坐後面的人，有時候會看不清楚。

太暗，對眼睛不好。

1. 缺少練習 2. 印象並不深刻

不聽者較多

沒冷氣，聲音小，暗！！！！

太暗

看不清楚

有些模糊

銀幕太小。

看不太懂。

看不太清楚

制序問題

後面同學會想睡覺

螢幕太淡。

37個人擠一個螢幕會不清楚

很多人看一個螢幕很辛苦

坐位看不太清楚，需移動位子

難專注

1. 看不到清楚 2. 暗

很多人看不懂、而且很多人會不專心、看不到。

會看不清楚

很容易吵鬧

頭要一直動看不清楚。

沒有

不能吹冷氣

有的人會看不到

不知道

反光，好熱。

熱

不睡

3. 「電腦教室廣播」、「教室單槍螢幕投影」與「傳統的黑板教學」容易聽種程度的比較：

電>單>黑



電，容易聽

電>單>黑

單>電>黑

電腦教學比較清楚，但是傳統的教學經過自己實際操練過，印象較深刻。

電>單>黑

電>單>黑

電>單>黑

電

電>單>黑

①前者較好，比較容易了解，②因為在黑板上作圖的話後面的同學看的比較清楚，不懂的可以重複再說。可能看的不太清楚。

可以，沒問題，還可以(單>電>傳)

電>單>黑

電

電>單>黑

傳統的黑板教學

電>單>黑

電>單>黑

電>單>黑

電>單>黑

電

電>黑>單

電>單>黑

電>單>黑

電>單>黑

高

電>單>黑

用電腦教室廣播

電>單>黑

電>單>黑

只懂一些

電腦教室廣播我比較適應，因為你可以一直重複題目都聽不懂。

黑>單>電

高



附件(八) 學生針對此次資訊教學的建議及需要改進的地方(參考上次段考成績)

沒有。學生們自己需要控制自己。(90)

No.()

感覺上還不錯，但是有時要借電腦教室或單槍投影機，有點麻煩。(74)

夠好啦！辛苦了！(76)

希望同學能多認真學習，大致上還不錯！(95)

無(91)

冷氣在強點，聲音在大聲，字在深點(20)

買新電腦()

完美了，不用改進(87)

可以更好，很棒……！(63)

可以自行操作(54)

沒～不錯的方式(76)

不要錄影(45)

沒有(39)

沒有(57)

教慢一點。(95)

很好 不用改(96)

不用(41)

沒有(61)

無法認真上課(87)

少了射影機…一切會更好 $\geq \leq$ 秩序問題再加強！！(85)

沒有了，因為以經做了不錯了！甘巴茶(22)

速度可以慢一點(26)

聲音清楚，冷氣強呀！！(31)

不要在教室(67)

會忘記 =‘=(69)

把不懂的地方聽懂，問懂。(42)

1. 早點開冷氣()

用教室的話，最好安排座位()

還可以()

冷氣好熱(65)

很好，謝謝。(36)

都好()

()



附件(九) 「全等三角形性質教學」數位教材

教師使用意見調查表

基本資料：(請在以下您覺得合適答案後的“□”內打勾)

姓別：男□ 女□

服務年資：1~5□ 6~10□ 11~15□ 16~20□ 21~25□ 25 以上□

任教科目：數學□ 資訊□ 其他：_____□ (可複選)

任教年級：數學科：七□ 八□ 九□年級 (可複選)

職稱：主任□ 組長□ 導師□ (____年級) 專任教師□

請問您對「全等三角形性質教學」數位教材看法？

- | | 非
常
同
意 | 同
意 | 無
意
見 | 不
同
意 | 非
常
不
同
意 |
|------------------------------|------------------|--------|-------------|-------------|-----------------------|
| 01. 本教學素材與學習內容吻合度高····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 02. 本數位教材能有效地呈現教學內容····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 03. 本數位教材能協助學生在課後進行複習····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 04. 本教學素材能引起學習者的學習動機····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 05. 本教學素材內容的難易度適合學生····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 06. 本數位教材在操作上方便教師使用····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 07. 使用本數位教材教學能有效地促進師生間的互動 | □ | □ | □ | □ | □ |
| 08. 本教學素材能加強學習者在課堂上的理解與操作 | □ | □ | □ | □ | □ |
| 09. 不需要其它媒體輔助，教師可只用本教材教好本單元 | □ | □ | □ | □ | □ |
| 10. 使用本數位教材教學能達成既定的教學目標····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 11. 使用本數位教材教學能有效地減少教師的教學時間 | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12. 使用本數位教材教學能有效的誘導學生思考····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13. 您將有意願配合教學使用本數位教材····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 14. 您樂於推薦本教學素材給有可能的使用者····· | □ | □ | □ | □ | □ |
| 15. 其他建議： | | | | | |