

國防科技學術合作研究計畫成果報告

轉向與姿態導控系統設計

計畫編號：96-2623-7-009-011-D

執行期間：96年01月01日至96年12月31日

計畫主持人：林清安

共同主持人：

執行單位：國立交通大學電機與控制工程學系(所)

中華民國97年03月16日

轉向與姿態導控系統設計

中文摘要

本計畫探討飛彈攔截系統中轉向與姿態控制系統的設計與模擬。本年度的研究重點在系統模式及模擬程式的建立。已建立的子系統模式包括目標與攔截器的三自由度的運動方程式、地面雷達的量測誤差模式、紅外線尋標器的數學模式、三維比例導引律等。模擬程式以MATLAB/Simulink合成。數值模擬的目的是要了解各子系統參數，如雷達量測誤差大小、控制系統頻寬、尋標器的精準度等對攔截效能的影響。模擬結果顯示雷達的速度量測誤差對攔截效能(以截殺機率來度量)影響最大。未來的計畫將探討轉向及姿態控制系統的設計及相關的六自由度攔截模擬。

關鍵詞：轉向與姿態控制系統、三自由度模擬、飛彈攔截系統、比例導引律

Guidance Divert and Attitude Control System Design

Abstract

This research investigates the design and simulation of divert and attitude control system for target-interceptor engagements. The emphasis of this year effort is on the development of system models and the implementation of simulation programs. The subsystem models developed include: three degree-of-freedom equations of motion for target and interceptor, measurement models for ground-based radar, mathematical models for infrared seeker, and three-dimensional proportional navigation guidance law. Based on these subsystem models, the simulation program is implemented using MATLAB/Simulink software. One of the purposes of simulation is to understand the effect of subsystem parameters such as radar measurement accuracy, control system bandwidth, resolution of seeker, etc. on the performance of the interceptor system. Simulation results indicate that error in radar velocity measurement has the most significant effect on kill probability. Future research will investigate divert and attitude control system design and the related six degree-of-freedom simulations.

Keywords : divert and attitude control system, three degree-of-freedom simulation, missile interceptor, proportional navigation guidance law

目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
目錄.....	iii
第一章、序論.....	1
第二章、飛彈系統建立.....	2
2.1 飛彈的物理特性.....	2
2.1.1 標準飛彈三型簡介.....	2
2.2 座標系統.....	3
2.2.1 慣性座標 S_I	3
2.2.2 地面座標 S_N	3
2.2.3 球座標 S_S	3
2.2.4 瞄準線座標 S_L	4
2.2.5 體座標 S_B	4
2.2.6 S_I 轉換成 S_N	5
2.2.7 S_I 轉換成 S_L	5
2.3 運動方程式.....	6
第三章、導引律.....	7
3.1 比例導引律的概念.....	7
3.2 二維TPN.....	7
3.3 三維TPN.....	9
第四章、子系統的數學模式.....	12
4.1 地面雷達.....	12
4.1.1 雷達量測位置資訊的數學模式.....	12
4.1.2 雷達量測速度資訊的數學模式.....	14
4.2 紅外線尋標器.....	14
4.3 空氣阻力&重力.....	15
4.4 飛行控制系統.....	17
第五章、程式規劃以及執行.....	18
5.1 模擬方塊圖和方程式.....	18
5.1.1 運動方程式(EOM).....	18
5.1.2 雷達(radar4).....	18

5.1.3 環境參數(ENVI).....	19
5.1.4 空氣阻力(Drag Force).....	19
5.1.5 停止條件(Boolean).....	20
5.1.6 其他計算(AUX1).....	20
5.1.7 系統輸出(Output)	21
5.1.8 導引控制 1(CNTL1)	21
5.1.9 導引控制 2(CNTL2)	22
5.2 參數化模擬流程	23
5.3 最小誤差距離(Miss Distance)	24
5.4 初始航向誤差(三度空間)	25
5.5 零力誤差(Zero Effort Miss)	26
5.6 截殺率(Kill Probability)	26
第六章、參數化模擬及結果.....	27
6.1 個案一.....	27
6.1.1 理想狀態.....	27
6.1.2 雷達有位置誤差而沒有速度誤差.....	29
6.1.3 雷達有位置誤差也有速度誤差.....	33
6.2 個案二.....	36
6.2.1 雷達有位置誤差也有速度誤差.....	36
6.2.2 正確的角速度.....	37
第七章、結論與未來發展方向.....	39
參考文獻.....	40
相關資料蒐集.....	41
附錄A 模擬使用的程式及說明.....	43
附錄B 模組圖.....	45

圖目錄

圖 2.1 標準飛彈三型	2
圖 2.2 慣性座標、地面座標與球座標示意圖.....	4
圖 2.3 瞄準線座標與體座標示意圖.....	4
圖 2.4 S_1 轉換 S_N 示意圖.....	5
圖 2.5 S_1 轉換 S_L 示意圖.....	6
圖 3.1 目標與攔截飛彈在 x-y 平面的軌跡.....	7
圖 3.2 理想碰撞三角形、領先角度與初始航向誤差.....	8
圖 3.3 攔截飛彈與目標在三維 S_1 座標的示意圖.....	9
圖 3.4 相對位置與 S_s 座標之間的關係.....	9
圖 4.1 雷達測距示意圖.....	12
圖 4.2 λ_e 與 ψ_e 的計算示意圖.....	13
圖 4.3 紅外線尋標器與目標在空間中的位置示意圖.....	14
圖 4.4 真實瞄準線與紅外線尋標器之間的示意圖.....	15
圖 4.5 線性內插計算空氣密度的示意圖.....	16
圖 5.1 主要流程圖.....	23
圖 5.2 中途導引與終端導引流程.....	24
圖 5.3 最小誤差距離與模擬最接近點的示意.....	24
圖 5.4 三度空間的初始航向誤差示意圖.....	26
圖 6.1 個案一理想狀態在空間中的運動軌跡結果.....	28
圖 6.2 個案一理想狀態的導引加速度結果.....	28
圖 6.3 攔截飛彈的加速度結果（個案一雷達有位置誤差沒有速度誤差）.....	31
圖 6.4 不同的 k 值在中途階段真實相對位置的誤差結果.....	31
圖 6.5 不同的 k 值在終端階段真實相對位置的誤差結果.....	32
圖 6.6 攔截飛彈的加速度結果（個案一雷達有位置和速度誤差）.....	35
圖 6.7 不同 n 值與相對速度誤差結果.....	35

第一章、序論

隨著中國軍事現代化，近年來在海峽對岸部署了 600 多枚 M 族飛彈，據說 2010 年會增加到 1000 枚[13]。以 M-9 飛彈(東風十五號)來說，射程達 600 公里，彈頭載荷能力 500 公斤，圓周半徑公差(CEP)是 300 公尺，速度達 5 馬赫，發射後飛到台灣只需 5-10 分鐘。台灣面對這些威脅，積極發展反彈道防禦系統刻不容緩。

美國的高層反彈道飛彈防禦系統包括陸基的戰區高層大氣防禦(THAAD)飛彈、陸基攔截器(GBI)，海基的標準飛彈二型 Block IVA、標準飛彈三型，還有空載雷射系統。目前比較接近完成的是標準飛彈的部份，從 1997 年 1 月 24 日試射成功攔截射程 400 公里的藍斯飛彈(Lance)，攔截高度約 12 公里。在 2002 年 6 月 13 日在太平洋上的導向飛彈巡洋艦「伊利湖」號發射標準三型成功在海面一百六十多公里的太空擊中假彈頭，在 2006 年 6 月 22 日的第八次飛試，標準三型(SM-3 Block 1A)又成功攔截靶彈，證明了標準飛彈三型的攔截成果。

整個攔截的過程結合了地面或空中雷達的偵測、戰鬥指揮系統、還有攔截飛彈。由於要攔截的目標為彈道飛彈，飛行時間短，目標小速度快，攔截的準確度要求高，所以雷達、紅外線尋標器、導引律及控制系統的規格要求相對提高。

目前台灣已有愛國者二型的防空飛彈，但攔截高度不夠，攔截成功也可能掉落到市區造成損害。所以我們希望能以美國高層反彈道飛彈防禦系統為藍圖，參考標準飛彈三型的攔截過程，建立參數化的數學模式，深入去研究各組成部分要求的規格，將來希望能發展適合台灣的飛彈防禦系統。

本研究主要是模擬整個攔截過程的後半段，暫時不考慮姿態，僅討論三個自由度運動，分成兩個部份。第一部份是屬於中途導引的階段。第二部份則是屬於終端導引的階段。以標準飛彈三型為藍圖去設計我們的攔截過程，建立紅外線尋標器、雷達、導引律、飛行控制系統以及環境影響等的模擬程式，去討論雷達量測誤差、飛行控制系統、導引律的實現等對攔截過程的影響。

本報告第一章是序論；第二章飛彈系統建立；第三章導引律的實現；第四章雷達、紅外線尋標器、空氣阻力、重力以及飛行控制系統等子系統的數學模式；第五章參數化模擬程式的規劃以及執行流程；第六章參數化模擬結果以及討論；第七章是結論與未來發展的方向。

第二章、飛彈系統建立

本章討論飛彈系統數學模式的建立。數學模式為分析、設計和模擬所必需，飛彈的數學模式分成很多部份，每一個部份都有獨立的數學方程式或資料。為了實現，我們把它分成各部份分別來討論。分成物理特性、座標系統、運動方程式、導引律、子系統等部份。在本章先介紹物理特性、座標系統、及運動方程式。導引律和子系統留到下一章再介紹。

2.1 飛彈的物理特性

要建立飛彈模型，必須先知道飛彈的物理特性，我們以標準飛彈三型(Block 2004)為藍圖，如圖2.1，建立我們的攔截飛彈的模式。

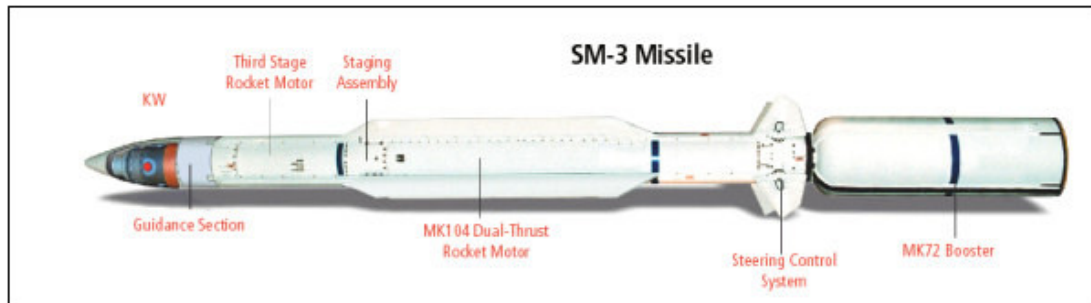


圖2.1 標準飛彈三型[5]

2.1.1 標準飛彈三型簡介

標準飛彈三型(Block 2004)是屬於美國海軍彈道飛彈防禦系統(BMDS)的一部分，部署在神盾級驅逐艦上，主要是攔截短、中程彈道飛彈。標準飛彈三型共有四節，第一二節分別為MK72和MK104火箭，第三節是MK136火箭，最四節則為MK142動能攔截器(KV)。

當敵方發射彈道飛彈(以下稱為目標)時，被神盾艦上的AN/SPY-1雷達偵測到，並持續追蹤，神盾戰系就會計算評估攔截時間，下達發射指令，發射標準飛彈三型(以下稱為攔截飛彈)，之後持續傳送目標的資料給攔截飛彈。第一節MK72推進器和第二節MK104雙推力火箭發動機將攔截飛彈送到外太空，第三節的MK136火箭，負責在太空中的飛行，太空飛行的過程中，攔截飛彈前端的鼻罩會彈脫，露出內部的MK142動能攔截器，並調整攔截彈道，直到MK142動能攔截器鎖定目標，開始最終階段攔截，利用高速撞擊，摧毀目標。

依據承包商雷神公司的資料，標準飛彈三型MK142動能攔截器的高解析度長波紅外線尋標器能在三百公里外偵測到彈道飛彈，並辨識目標。藉由攔截器上的「軌控與姿控系統」(Divert and Attitude Control System, DACS)，運用噴流的方式，在最終階段內精確控制飛行軌道和姿態，達成直接撞擊[4]。

攔截飛彈從發射升空，到完成攔截，都持續的接收到神盾戰系傳來的目標資訊，這其中包含了雷達偵測到目標的資訊、攔截飛彈本身量測到的資訊，整合這些系統參數的資訊，運用導引律計算出加速度修正量，調整飛行軌跡，完成攔截。

我們想要知道這些系統參數對攔截過程的影響，所以我們嘗試模擬標準飛彈三型在鼻罩彈脫之後，到完成攔截。這個部份可分成兩個階段，第一階段為一開始，攔截飛彈的鼻罩已經彈脫，但動能攔截器還沒有鎖定目標，直到動能攔截器鎖定target。第二階段為鎖定之後的最終階段攔截。由標準三型動能攔截器的紅外線尋標器的可視範圍(Field of View)大約只有一度，在最終階段必須藉由DACS調整姿態一直對準目標，我們推測其所使用的導引律應為真比例導引律(True Proportional Navigation, TPN)。

2.2 座標系統

為方便在三度空間描述飛彈的軌跡以及導引律的公式推導，我們假設地球為正球體會自轉不考慮公轉，並定義下面五個座標系統：

- (i) 慣性座標 S_I (Earth-centered inertial coordinate)
- (ii) 地面座標 S_N (North-East-Down (NED) coordinate)
- (iii) 球座標 S_S (Spherical coordinate)
- (iv) 瞄準線座標 S_L (Line-of-sight (LOS) coordinate)
- (v) 體座標 S_B (Body coordinate)

2.2.1 慣性座標 S_I

使用慣性座標系統是為方便描述目標與攔截飛彈在空間中的運動方程式。座標的原點在地心， X_I 軸在赤道平面上指向通過(時間 $t=0$ 時的)格林威治經線的方向，即指向經度零度緯度零度的方向， Z_I 軸指向北極點， Y_I 軸符合右手座標系統，如圖2.2。 X_I 、 Y_I 、 Z_I 三軸為模擬開始時的方向，不隨地球自轉而移動。

2.2.2 地面座標 S_N

使用地面座標是為方便描述目標與攔截飛彈相對於地表的軌跡。座標原點在雷達站的位置， X_N 軸為雷達站所在的地表平面指向北方， Y_N 軸為雷達站所在的地表平面指向東方， Z_N 軸符合右手座標系統，如圖2.2。由於地球會自轉，故 X_N 、 Y_N 、 Z_N 三軸和地面座標的原點會隨著地球自轉而移動。

2.2.3 球座標 S_S

使用球座標是為方便推導3D的TPN導引定律。將原本三軸的距離資訊轉換成一個距離資訊跟兩個角度資訊，兩個角度分別為水平角(Θ)與垂直角(Φ)，如圖2.2。

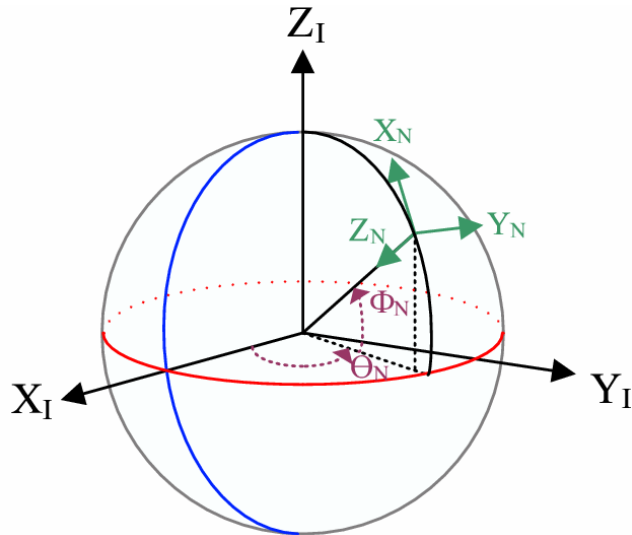


圖2.2 慣性座標、地面座標與球座標的示意圖。

2.2.4 瞄準線座標 S_L

此座標用來表示TPN導引律中的相對位置，為方便描述紅外線尋標器的誤差。座標原點為攔截飛彈的質心， X_L 軸為從原點指向目標質心的方向，即實際的視線方向， Y_L 軸平行 $X_I - Y_I$ 平面且垂直於 X_L 軸並指向視線的左邊， Z_L 軸符合右手座標系統，如圖2.3。

2.2.5 體座標 S_B

此座標用來表示攔截飛彈的姿態。座標原點為攔截飛彈的質心， X_B 軸為攔截飛彈的長軸方向，指向前方，即紅外線尋標器的視線方向， Y_B 軸平行 $X_I - Y_I$ 平面且垂直於 X_B 軸並指向攔截飛彈的左邊， Z_B 軸符合右手座標系統，如圖2.3。

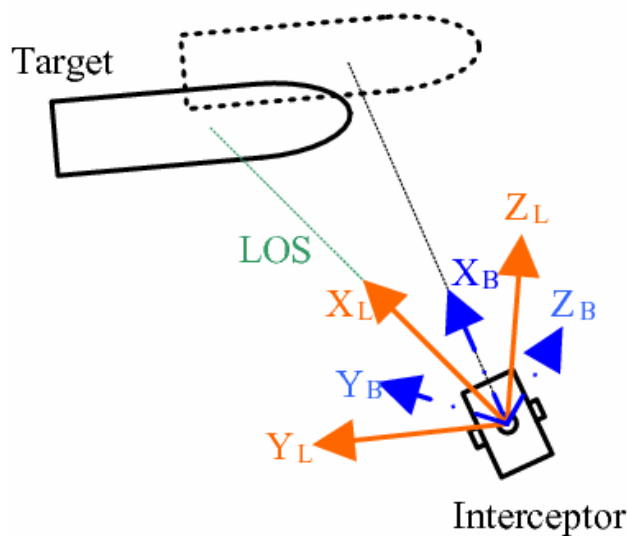


圖2.3 瞄準線座標與體座標的示意圖。

2.2.6 S_I 轉換成 S_N

假設空間中一個物體在 S_I 座標為 $\mathbf{X}_{o,I} = [x_{o,I} \ y_{o,I} \ z_{o,I}]^T$ ，雷達站在 S_I 座標為 $\mathbf{X}_{r,I} = [x_{r,I} \ y_{r,I} \ z_{r,I}]^T$ ，利用轉換矩陣的公式，參考圖2.4，我們可以得到物體的 S_N 座標如下：

$$\mathbf{X}_{o,N} = \mathbf{T}_{NI} \cdot (\mathbf{X}_{o,I} - \mathbf{X}_{r,I}) \quad (2.1)$$

$$\text{其中 } \mathbf{T}_{NI} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_N + \pi/2) & 0 & \sin(\phi_N + \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi_N + \pi/2) & 0 & \cos(\phi_N + \pi/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_N & \sin\theta_N & 0 \\ -\sin\theta_N & \cos\theta_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\theta_N = \tan^{-1}\left(\frac{y_{r,I}}{x_{r,I}}\right), \quad \phi_N = \tan^{-1}\left(\frac{z_{r,I}}{\sqrt{x_{r,I}^2 + y_{r,I}^2}}\right).$$

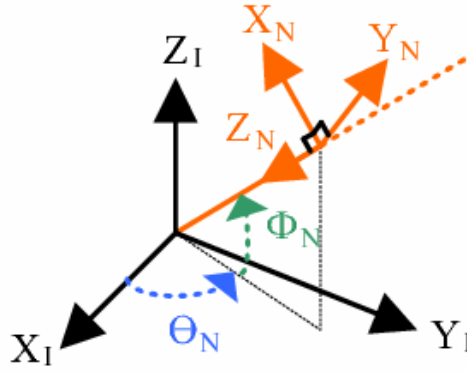


圖2.4 S_I 轉換 S_N 示意圖。

2.2.7 S_I 轉換成 S_L

同樣的方式，假設攔截飛彈在 S_I 座標為 $\mathbf{X}_{m,I} = [x_{m,I} \ y_{m,I} \ z_{m,I}]^T$ ，目標在 S_I 座標為 $\mathbf{X}_{t,I} = [x_{t,I} \ y_{t,I} \ z_{t,I}]^T$ ，則相對位置 $\mathbf{r}_{tm,I} = \mathbf{X}_{t,I} - \mathbf{X}_{m,I} = [x \ y \ z]^T$ ，利用轉換矩陣的公式，參考圖2.5，我們可以得到物體的 S_L 座標如下：

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{T}_{LI} \cdot \mathbf{r}_{tm,I} \quad (2.2)$$

$$\text{其中 } \mathbf{T}_{L_I} = \begin{bmatrix} \cos \phi_L & 0 & \sin \phi_L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_L & 0 & \cos \phi_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_L & \sin \theta_L & 0 \\ -\sin \theta_L & \cos \theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \theta_L = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right),$$

$$\phi_L = \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)。$$

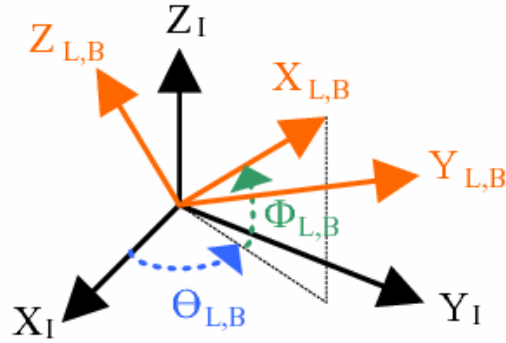


圖2.5 S_I 轉換 S_L 示意圖。

2.3 運動方程式

我們假設攔截飛彈的姿態已經控制好了，即 S_B 與 S_L 重合，將原本要考慮的六個自由度簡化成三個自由度的運動模式，只要考慮攔截飛彈受到外力作用造成的位置與速度的改變，於是我們可以得到攔截飛彈在 S_I 座標的運動方程式為

$$\begin{aligned} \dot{v}_{xm} &= a_{xm} & \dot{x}_m &= v_{xm} \\ \dot{v}_{ym} &= a_{ym} & \dot{y}_m &= v_{ym} \\ \dot{v}_{zm} &= a_{zm} & \dot{z}_m &= v_{zm} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 a_{xm} 、 a_{ym} 、 a_{zm} 為攔截飛彈的 S_I 加速度分量， v_{xm} 、 v_{ym} 、 v_{zm} 為攔截飛彈的速度分量， x_m 、 y_m 、 z_m 為攔截飛彈的位置分量。除了導引加速度外，攔截飛彈的加速度還來自重力和空氣阻力。

目標的運動方程式與(2.3)式類似

$$\begin{aligned} \dot{v}_{xt} &= a_{xt} & \dot{x}_t &= v_{xt} \\ \dot{v}_{yt} &= a_{yt} & \dot{y}_t &= v_{yt} \\ \dot{v}_{zt} &= a_{zt} & \dot{z}_t &= v_{zt} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中目標的加速度分量 a_{xt} 、 a_{yt} 、 a_{zt} 來自重力和空氣阻力， v_{xt} 、 v_{yt} 、 v_{zt} 為目標的速度分量， x_t 、 y_t 、 z_t 為目標的位置分量。

第三章、導引律

導引律決定攔截飛彈爲了攔截目標，完成撞擊截殺(hit-to-kill)所需要的速度改變。其中最常使用的是比例導引律(Proportional Navigation, PN Law)，因爲比例導引律比較容易實現。又從2.1節中，標準飛彈三型的終端攔截過程，推測其使用的導引定律爲真比例導引律(TPN)，所以我們選擇TPN爲我們的導引律。以下我們先了解比例導引律的概念，再討論簡單的二維TPN以及較複雜的三維TPN。

3.1 比例導引律的概念

比例導引律是最常用來做導引飛彈的導引律。攔截飛彈經過比例導引律的導引，能在碰撞點與目標發生碰撞，完成攔截，只要在碰撞的過程中，兩個物體之間的視線方向固定不變。基本概念是以改變攔截飛彈的速度來維持視線方向的固定不變，視線方向往某方向改變，則攔截飛彈的速度也往某方向作一定比例的改變，即攔截飛彈的加速度與視線方向的改變率成正比。

從這個基本概念延伸出來的比例導引律很多，像是真比例導引律(True Proportional Navigation, TPN)、純比例導引律(Pure Proportional Navigation, PPN)、輔助比例導引律(Augmented Proportional Navigation, APN)等等，這些比例導引律公式都類似，最大的不同在於加速度的方向。在模擬中，我們以真比例導引律做爲我們的導引律。以下我們從二維TPN談起。

3.2 二維TPN

從Guelman提出的真比例導引律[7]，我們可以知道二維TPN的推導。假設攔截飛彈與目標皆爲等速度運動，如圖3.1，

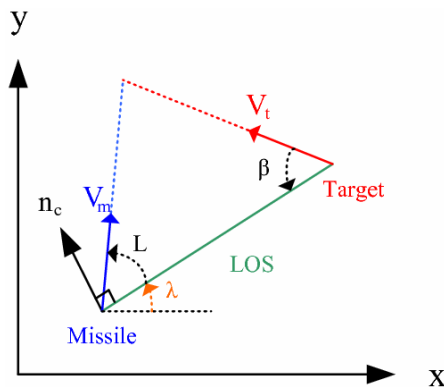


圖3.1 目標與攔截飛彈在x-y平面的軌跡

則真比例導引律的導引加速度爲

$$n_c = N \cdot V_c \cdot \dot{\lambda} \quad (3.1)$$

其中 N 為有效導引常數，通常為3~5， V_c 為飛彈與目標的接近速度， $\dot{\lambda}$ 為視線的角度對時間的微分， n_c 垂直於視線方向，其極性是以 $|\dot{\lambda}|$ 減小為標準來決定。

我們定義理想碰撞三角形為攔截飛彈與目標都沒有加速度作用而會碰撞的軌跡，此時飛彈與視線之間的角度為領先角度(Lead angle)，而飛彈偏離此角度的大小則稱為初始航向誤差(Heading error, HE)，如圖3.2。

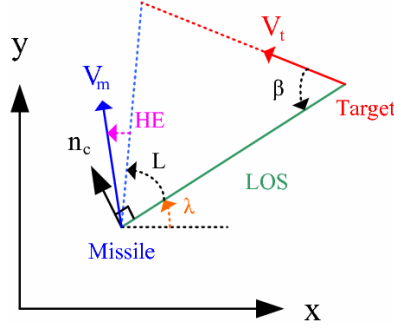


圖3.2 理想碰撞三角形、領先角度與初始航向誤差

假設攔截飛彈位置為 \mathbf{X}_m 速度為 \mathbf{V}_m ，目標位置為 \mathbf{X}_t 速度為 \mathbf{V}_t ，則相對位置 $\mathbf{r} = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m = [x \ y]^T$ ，相對速度 $\mathbf{v} = \mathbf{V}_t - \mathbf{V}_m = [v_x \ v_y]^T$ ，我們可以得到攔截飛彈與目標的接近速度

$$V_c = \mathbf{v}^T \mathbf{r} = v_x \cdot x + v_y \cdot y \quad (3.2)$$

因為視角 $\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ，所以視角對時間的一次微分

$$\frac{d}{dt}(\lambda) = \dot{\lambda} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y} \cdot x - y \cdot \dot{x}}{x^2} \quad (3.3)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{v_y \cdot x - y \cdot v_x}{x^2 + y^2} \quad (3.4)$$

而從理想碰撞三角形中可以知道，攔截飛彈與目標在垂直於視線方向的速度應該相等才能完成理想碰撞三角形，即

$$|\mathbf{V}_t| \sin \beta = |\mathbf{V}_m| \sin L \quad (3.5)$$

“ $|\cdot|$ ”為向量 \cdot 的絕對值

所以理想碰撞三角形的領先角度

$$L = \sin^{-1}\left(\frac{|\mathbf{V}_t| \sin \beta}{|\mathbf{V}_m|}\right) \quad (3.6)$$

3.3 三維TPN

實際上，攔截飛彈的飛行軌跡是屬於三維空間的，目標與攔截飛彈並不一定會在一個平面上，所以將二維TPN拓展成三維TPN。

假設攔截飛彈在 S_I 座標的位置 \mathbf{r}_m ，速度 \mathbf{V}_m ，目標在 S_I 座標的位置 \mathbf{r}_t ，速度 \mathbf{V}_t ，如圖3.3，

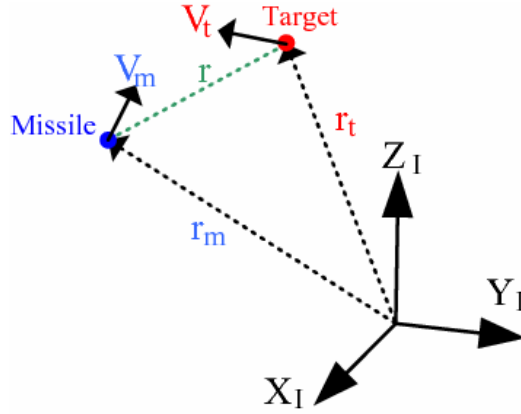


圖3.3 攔截飛彈與目標在三維 S_I 座標的示意圖

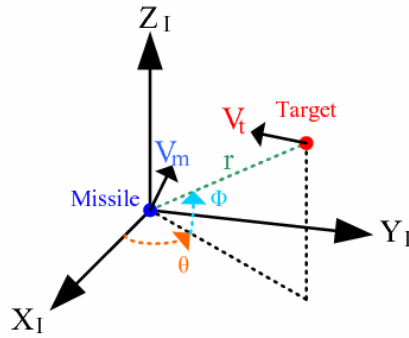


圖3.4 相對位置與 S_S 座標之間的關係

則相對位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m = [x \ y \ z]^T$ ，相對速度 $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}_t - \mathbf{V}_m = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ ，將

\mathbf{r} 和 \mathbf{V} 轉換成 S_S 座標，如圖3.4，

則相對位置

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \mathbf{e}_r \quad (3.7)$$

其中

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.9)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (3.10)$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.11)$$

而相對速度

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}| \mathbf{e}_r + \mathbf{r} \dot{e}_r = |\dot{\mathbf{r}}| \mathbf{e}_r + \mathbf{r} (\cos \phi \cdot e_\theta \cdot \dot{\theta} + \dot{\phi} \cdot e_\phi) \quad (3.12)$$

其中

$$e_\theta = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$e_\phi = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$e_r \times e_\theta = e_\phi \quad (3.15)$$

” \times ”為外積

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \frac{d}{dt} |\mathbf{r}| = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3.16)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y\dot{x} - y\dot{y}}{x^2 + y^2} \quad (3.17)$$

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\dot{z}(x^2 + y^2 + z^2) - z(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (3.18)$$

三維TPN導引律的導引加速度方程式為[2]

$$a_{tpn} = N \mathbf{V}_c \times \boldsymbol{\Omega} \quad (3.19)$$

其中 a_{tpn} 為三維TPN導引加速度， $\boldsymbol{\Omega}$ 為角速度。 N 為導引常數，通常為3~5， \mathbf{V}_c 為攔截飛彈接近目標的速度也就是相對速度在視線上面的投影量

$$\mathbf{V}_c = (\mathbf{V}^T \mathbf{r}) \mathbf{e}_r \quad (3.20)$$

$$\text{而角速度則定義[9]為 } \boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} = e_r \times \dot{e}_r \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_r &= \frac{d}{dt} e_r(\theta, \phi) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} e_r(\theta, \phi) + \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} e_r(\theta, \phi) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \phi (-\sin \theta) \\ \cos \phi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\theta} + \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \dot{\phi} \\
&= \cos \phi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\theta} + \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \theta \\ -\sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \dot{\phi} \\
&= \cos \phi \cdot e_\theta \cdot \dot{\theta} + e_\phi \cdot \dot{\phi} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

則角速度

$$\Omega = \cos \phi \cdot \dot{\theta} \cdot e_\phi - \dot{\phi} \cdot e_\theta \tag{3.23}$$

所以TPN導引加速度為

$$a_{tpn} = -N(\mathbf{V}^T \mathbf{r}) (\cos \phi \cdot \dot{\theta} \cdot e_\theta + \dot{\phi} \cdot e_\phi) \tag{3.24}$$

我們將(3.19)式分解成相對位置與相對速度可以表示的形式，如(3.24)式，透過(3.7)式、(3.9)式、(3.10)式、(3.12)式、(3.13)式、(3.14)式、(3.17)式以及(3.18)式計算出各分量，再帶入(3.24)式，求得三維TPN導引律的導引加速度。

我們模擬的兩個階段都採用三維TPN導引律。第一階段，也就是中途導引階段，相對位置與相對速度的訊息由雷達量測提供。雷達在攔截飛彈與目標位置的量測，會有誤差，隨著量測的目標距離雷達越遠誤差越大，甚至超過某個範圍，雷達就會失去所量測的目標，而雷達在速度方面的計算方式更複雜，誤差也更大，我們在第四章會描述我們是如何去模擬雷達的量測資訊。第二階段，是屬於終端導引階段，相對速度的訊息仍然由雷達量測提供，而相對位置改為紅外線尋標器提供，由於雷達越遠誤差越大，若改由攔截飛彈本身可以量測的資訊，可以減少誤差，提高攔截成功率。

在我們的模擬中，是將(3.19)式分解成相對位置與相對速度可以表示的形式，在(3.21)角速度的計算上也是分解成相對位置與相對速度的形式，實際上攔截飛彈在角速度的計算上可能是藉由陀螺儀的量測而得到，並非由相對位置與相對速度來計算的。

第四章、子系統的數學模式

本章所要探討的是攔截飛彈的其他輔助子系統的數學模式。這些子系統包括地面雷達、紅外線尋標器、空氣阻力和重力、飛行控制系統。在我們的模擬中，假設攔截飛彈的姿態已受控制，即在中途導引階段，攔截飛彈的姿態已受控制為對準瞄準線的方向；在終端導引階段，攔截飛彈的姿態也已受控制為對準紅外線尋標器計算出目標的方向。

4.1 地面雷達

標準飛彈三型是屬於雷達半主動歸航導引[10]，在中途導引時，持續接收來自雷達的目標資訊，在終端導引時，才由紅外線尋標器提供目標的資訊。本小節要討論地面雷達的數學模式。

4.1.1 雷達量測位置資訊的數學模式

雷達測量基本原理為向空間中某個方位發射電磁波，然後計算電磁波碰到物體反射回來的時間求得距離，再利用本身已經知道的方位與發射仰角，就可以知道物體的座標了[12]，如圖4.1。

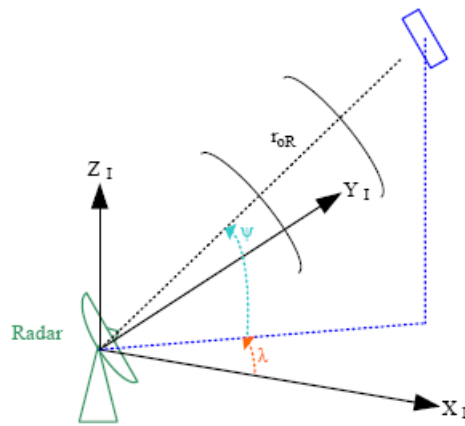


圖4.1 雷達測距示意圖，其中 r_{oR} 為物體距離雷達站的直線距離， λ 為方位角， ψ 為仰角。

假設雷達站的 S_I 座標為 \mathbf{r}_R ，則在空間中飛行的物體在 S_I 座標 \mathbf{r}_o

$$\mathbf{r}_o = \mathbf{r}_R + r_{oR} \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \lambda \\ \cos \psi \sin \lambda \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

其中 $r_{oR} = |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_R| = \left[\begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \right]^T$ 為直線距離， $\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 為方位角，

$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ 為仰角。

現在的科技發達，在直線測距的技術上非常進步，精確度可達公釐以下，在方位角和仰角的量測，精確度則較低。所以我們假設雷達在量測直線距離沒有誤差，誤差來自方位角 λ 和仰角 ψ 。利用已知的正確方位角和仰角加入高斯雜訊的方式表示誤差

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \lambda + \lambda_e \\ \psi_m &= \psi + \psi_e \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 λ 為正確方位角， λ_e 為誤差量， λ_m 為雷達量測到的， ψ 為正確仰角， ψ_e 為誤差量， ψ_m 為雷達量測到的。

而 λ_e 與 ψ_e 的計算如圖4.2所示，其中 u 為理想獨立分佈(i.i.d.)的高斯隨機數列且變異數(variance)=1， $\sigma_{\lambda, \psi}$ 為標準差， $F(z) = \frac{1}{k}(1 + z^{-1} + \dots + z^{-k+1})$ 為有限脈衝響應(FIR)濾波器，長度為 k 。若 k 值越大，則代表誤差量之間的相關性越大，即隨機數列的變動較平緩。

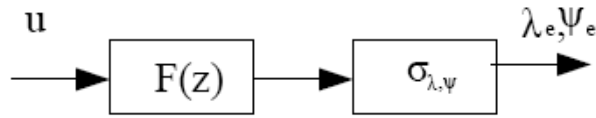


圖4.2 λ_e 與 ψ_e 的計算示意圖。

再將 λ_m 和 ψ_m 代入即可得到經過雷達量測的空間中飛行的物體在 S_1 座標 $\hat{\mathbf{r}}_o$

$$\hat{\mathbf{r}}_o = \mathbf{r}_R + r_{oR} \begin{bmatrix} \cos \psi_m \cos \lambda_m \\ \cos \psi_m \sin \lambda_m \\ \sin \psi_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

在中途導引階段的模擬中，經過雷達量測的攔截飛彈與目標的位置資訊皆用上述的方法計算。

4.1.2 雷達量測速度資訊的數學模式

雷達本身在求物體的速度時，可利用都卜勒效應(The Doppler Effect)去求得物體的速度，或是利用位置資訊與時間差求得速度。在此對於雷達量測速度資訊的數學模式我們簡化為正確資訊再加上誤差的方式去表示，也就是上一小節雷達量測方位角與仰角的方式，如下

$$\hat{v}_o = v_o + v_e \quad (4.4)$$

其中 \hat{v}_o 為雷達量測的速度， v_o 為正確的速度，誤差量 v_e 是理想獨立分佈(i.i.d.)的高斯隨機數列通過長度為 n 的濾波器和標準差 σ_v 所計算出來的。

4.2 紅外線尋標器 IR seeker

以標準飛彈三型動能攔截器的紅外線尋標器來說，能在外太空距離目標的三百公里外[4]，偵測到彈道飛彈，並辨識出目標，鎖定。紅外線尋標器的原理是接收彈道飛彈的推進器或是與空氣摩擦造成的熱所散發出的紅外線，得到二維的紅外線影像，再利用影像處理的方式更進一步得到目標在紅外線尋標器的方位。

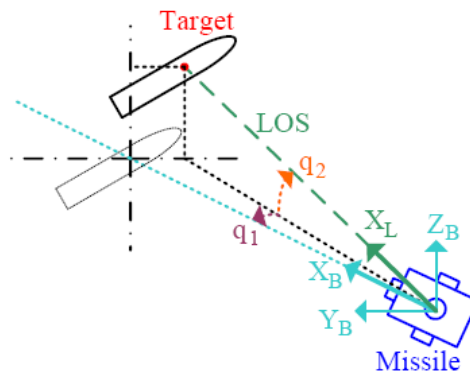


圖4.3 紅外線尋標器與目標在空間中的位置示意圖，其中 X_B 為攔截飛彈的體座標， X_L 為攔截飛彈的瞄準線座標， q_1, q_2 分別為瞄準線投影到體座標上的水平角與垂直角。

由於標準飛彈三型的紅外線尋標器可視範圍(Field of View, FOV)上下左右大約一度，在紅外線尋標器鎖定目標之後，攔截飛彈的姿態控制必須使瞄準線與彈體之間的角度小於紅外線的可視範圍，攔截飛彈才能搜索得到目標的方位，又紅外線尋標器的可視範圍是以 256×256 的像素去表示，所以一個像素之間的角度

大約是 $68 \mu\text{rad} (= \frac{\pi}{180} / 256 = 68 \times 10^{-5} \text{ rad})$ 。

在我們的終端模擬中，假設攔截飛彈的姿態已受控制，能將攔截飛彈的姿態控制在紅外線尋標器計算出的目標方位，也就是紅外線尋標器可視範圍的中心位置，即瞄準線與彈體方向重合。實際上紅外線尋標器的處理是以像素的方式，也就是在中心點位置上下左右只要不超過0.5個像素都會被判斷為在中心位置，會有小角度的誤差，如圖4.4所示，

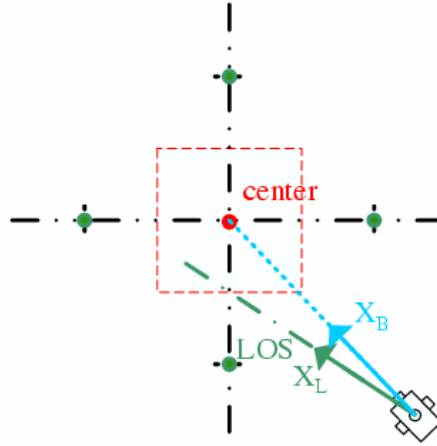


圖4.4 真實瞄準線與紅外線尋標器之間的示意圖，真實的瞄準線在紅色虛線方塊中的任何位置，都會被判斷為在中心的位置。

爲了描述這個小角度的誤差，我們利用紅外線尋標器的彈體方向(等同於瞄準線)加上兩個誤差去表示：假設攔截飛彈在 S_1 座標的位置 \mathbf{r}_m ，目標在 S_1 座標的位置

\mathbf{r}_t ，則相對位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m = [x \ y \ z]^T$ ，利用 S_1 轉換成 S_B

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{T}_{B1} \cdot \mathbf{r} \quad (4.5)$$

其中 \mathbf{T}_{B1} 為轉換矩陣，從 S_1 轉換成 S_B ，在此瞄準線與彈體方向重合。則

$$\hat{\mathbf{r}}_b = \mathbf{r}_b + |\mathbf{r}_b| \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

其中 q_1, q_2 為獨立均勻分布於 $[-34 \times 10^{-6}, 34 \times 10^{-6}]$ 之隨機數列。

再轉回 S_1 ，我們就可以得到經過紅外線尋標器的誤差數學模式為

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T}_{B1}^T \cdot \hat{\mathbf{r}}_b \quad (4.7)$$

4.3 空氣阻力&重力

大氣密度是隨高度增加而減少，在距離地表25公里的高空上大氣密度大約只有海平面的3%，原本有一個大氣密度大致的換算公式供飛機等飛行體模擬使用，但我們模擬的高度超出此公式的合理範圍，於是另採用[6]所定的標準大氣密度表。以資料庫查詢的方式，在兩筆資料之間用線性內插法來計算其值，如圖4.5，假設高度A空氣密度 ρ_1 、高度B空氣密度 ρ_2 ，則高度C空氣密度為

$$\rho = \rho_1 + \frac{C-A}{B-A} (\rho_2 - \rho_1) \quad (4.8)$$

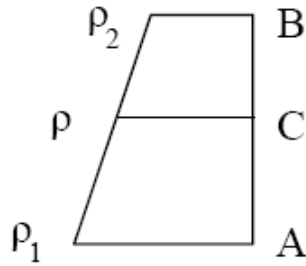


圖4.5 線性內插計算空氣密度的示意圖。

空氣阻力定義為

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \quad (4.9)$$

其中 F_D 為空氣阻力，作用在速度的相反方向， ρ 為物體當時的空氣密度， v 為物體當時的速度， A 為接觸面積， C_D 為空氣阻力係數。

空氣阻力係數 C_D 為一特性函數，會因為飛彈外型、材質，與空氣接觸的截面積不同而有所改變，因為我們模擬的高度，空氣阻力的影響有限，故我們簡化計算，暫定 $C_D = 0.4$ 並假設飛彈和目標的接觸面積為圓形。

在空間中物體所受的重力加速度來自於重力，根據牛頓第二運動定律，地表以上的物體所受的重力為[11]

$$F = mg = \frac{GMm}{(R_e + r_o)^2}$$

其中 G 為重力常數， M 為地球質量， R_e 為地球半徑， r_o 為高度。所以我們可以得到重力加速度為

$$g = \frac{GM}{(R_e + r_o)^2}$$

作用方向為指向地心。為簡化計算，我們假設模擬的時候所受的重力加速度皆為 9.80665 m/s^2 。

4.4 飛行控制系統

當飛彈接收到導引加速度命令時，會下命令給飛行控制系統，再由飛行控制系統作用產生所需的導引加速度。在中途導引階段及終端導引階段，飛行控制系統均利用推進器來產生所需的導引加速度。為了討論導引律的效率，我們將飛行控制系統簡化成標準二階系統[1]

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.10)$$

其中 ω_n 為自然頻率， ζ 為阻尼比。在我們的模擬中，我們固定 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ，則 $\omega_n/2\pi$ 就是飛行控制系統的3-dB頻寬，單位為Hz，系統的步階頻率響應不會有穩態誤差，且overshoot大約只有5%。最後我們改變 ω_n 去看飛行控制系統的頻寬對攔截過程的影響。

第五章、程式規劃以及執行

我們利用MATLAB7.1.0.246(R14)軟體來撰寫程式，主程式的部份是利用MATLAB/simulink的方塊圖來撰寫的，模擬的初始參數設定以及結果顯示圖則是用m-file的方式來撰寫。

主程式的部份，因為飛彈有很多子系統，所以我們採用結構化的方式，將飛彈的子系統以模組的方式來撰寫，好處為方便討論和比較不同模組之間對於整個模擬結果的影響，最後再將各個模組組合成系統。

5.1 模擬方塊圖和方程式

我們模擬分成中途和終端兩個階段，差別在於導引方式，所以主要有兩個主程式，其他飛彈的子系統，像是空氣阻力與重力、雷達、運動方程式都是相同的。以下我們先列出相同的模組，詳細的模擬方塊圖參照附錄B

5.1.1 運動方程式(EOM)

目的：主要是將加速度積分成速度，速度積分成位置

輸入： $am_{limited}$ 為導引律計算出來在 S_1 座標的加速度值

$Gravity_t$ 、 $Gravity_m$ 為目標與攔截飛彈的重力加速度

$DragForce_t$ 、 $DragForce_m$ 為目標與攔截飛彈的空氣阻力所造成的加速度

輸出： V_t 、 V_m 為目標與攔截飛彈在 S_1 座標的速度

X_t 、 X_m 、 X_r 為目標、攔截飛彈與雷達在 S_1 座標的位置

方程式：

$$\dot{V}_t = Gravity_t + DragForce_t$$

$$\dot{V}_m = am_{limited} + Gravity_m + DragForce_m$$

$$\dot{V}_r = \omega \cdot [-X_r(2) \quad X_r(1) \quad 0]^T$$

$$\dot{X}_t = V_t$$

$$\dot{X}_m = V_m$$

$$\dot{X}_r = V_r$$

ω 為地球自轉角速度= 7.29211×10^{-5} rad/s

5.1.2 雷達(radar4)

目的：主要是雷達的數學模式，計算雷達量測的位置與速度資訊

輸入： V_t 、 V_m 為目標與攔截飛彈在 S_1 座標的速度

X_t 、 X_m 、 X_r 為目標、攔截飛彈與雷達在 S_1 座標的位置

$rand$ 、 $velocityRand$ 為i.i.d.高斯隨機數列，即4.1.1節的 u

σ_{angle} 、 $\sigma_{velocity}$ 為單位誤差量，即4.1.1節的 $\sigma_{t,m}$

輸出： $\mathbf{V}_{t,r}$ 、 $\mathbf{V}_{m,r}$ 為經過雷達量測後，目標與攔截飛彈在 S_1 座標的速度

$\mathbf{X}_{t,r}$ 、 $\mathbf{X}_{m,r}$ 為經過雷達量測後，目標與攔截飛彈在 S_1 座標的位置

方程式：

$$\mathbf{X}_{or} = \mathbf{X}_o - \mathbf{X}_r = [x \quad y \quad z]^T$$

$$\lambda_o = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\psi_o = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\lambda_{or} = \lambda_o + \sigma_{\text{angle}} \cdot \text{rand}(1)$$

$$\psi_{or} = \psi_o + \sigma_{\text{angle}} \cdot \text{rand}(2)$$

$$\mathbf{X}_{o,r} = \mathbf{X}_o + |\mathbf{X}_{or}| \begin{bmatrix} \cos \psi_{or} \cos \lambda_{or} \\ \cos \psi_{or} \sin \lambda_{or} \\ \sin \psi_{or} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{o,r} = \mathbf{V}_o + \sigma_{\text{velocity}} \cdot \text{velocityRand}$$

其中o為t或m

5.1.3 環境參數(ENVI)

目的：主要是計算重力、空氣密度、聲速

輸入： \mathbf{V}_t 、 \mathbf{V}_m 為目標與攔截飛彈在 S_1 座標的速度

\mathbf{X}_t 、 \mathbf{X}_m 為目標與攔截飛彈在 S_1 座標的位置

輸出： Gravity_t 、 Gravity_m 為目標與攔截飛彈的重力加速度

ρ_t 、 ρ_m 為目標與攔截飛彈的空氣密度

SoundSpeed_t 、 SoundSpeed_m 為目標與攔截飛彈的聲音速度

方程式：

$$\text{Gravity}_o = -9.80665 \cdot \frac{\mathbf{X}_o}{|\mathbf{X}_o|}$$

其中o為t或m

5.1.4 空氣阻力(Drag Force)

目的：主要是計算目標與飛彈的空氣阻力的數學模式

輸入： \mathbf{V}_t 、 \mathbf{V}_m 為目標與攔截飛彈在 S_1 座標的速度

ρ_t 、 ρ_m 為目標與攔截飛彈的空氣密度

A_t 、 A_m 為目標與攔截飛彈的參考面積

SoundSpeed_t、SoundSpeed_m 為目標與攔截飛彈的空氣速度

輸出：DragForce_t、DragForce_m 為目標與攔截飛彈的空氣阻力所造成的加速度

方程式：

$$\text{DragForce}_o = \frac{1}{2} \rho_o \cdot A_o \cdot |\mathbf{V}_o|^2 \cdot \left(\frac{-\mathbf{V}_o}{|\mathbf{V}_o|} / m_o \right)$$

其中o為t或m

5.1.5 停止條件(Boolean)

目的：主要是計算何時停止模擬的條件

輸入： \mathbf{V}_t 、 \mathbf{V}_m 為目標與攔截飛彈在 S_t 座標的速度
 \mathbf{X}_t 、 \mathbf{X}_m 為目標與攔截飛彈在 S_t 座標的位置
 m_m 為攔截飛彈的質量

輸出： $|\mathbf{r}|$ 為相對位置的絕對值

STOP 為模擬停止

方程式：

$$\mathbf{r} = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_m$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_t - \mathbf{V}_m$$

只要 $\mathbf{V}^T \mathbf{r} > 0$ 或 $m_m < 0$ 或 $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}_{\text{relative}}|$ ，則 STOP 為真，停止模擬

5.1.6 其他計算(AUX1)

目的：主要是計算高度和 S_N 座標的結果

輸入： \mathbf{V}_t 、 \mathbf{V}_m 為目標與攔截飛彈在 S_t 座標的速度
 \mathbf{X}_t 、 \mathbf{X}_m 、 \mathbf{X}_r 為目標、攔截飛彈與雷達在 S_t 座標的位置

輸出： $\mathbf{V}_{t,N}$ 、 $\mathbf{V}_{m,N}$ 為目標與攔截飛彈在 S_N 座標的速度

$\mathbf{X}_{t,N}$ 、 $\mathbf{X}_{m,N}$ 為目標與攔截飛彈在 S_N 座標的位置

H_t 、 H_m 為目標與攔截飛彈的高度

方程式：

$$H_o = |\mathbf{X}_o| - RA$$

$$\mathbf{X}_{or} = \mathbf{X}_o - \mathbf{X}_r = [x \quad y \quad z]^T$$

$$\lambda_o = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\psi_o = \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\mathbf{T}_{NI} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_N + \pi/2) & 0 & \sin(\psi_N + \pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi_N + \pi/2) & 0 & \cos(\psi_N + \pi/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda_N & \sin \lambda_N & 0 \\ -\sin \lambda_N & \cos \lambda_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{o,N} = \mathbf{T}_{NI} \cdot \mathbf{X}_{or}$$

其中o為t或m，RA為地球平均半徑

5.1.7 系統輸出(Output)

目的：主要是輸出模擬結果

再列出不同的模組

5.1.8 導引控制1(CNTL1)

目的：主要是中途導引加速度的計算和攔截飛彈的質量

輸入： $\mathbf{V}_{t,r}$ 、 $\mathbf{V}_{m,r}$ 為經過雷達量測後，目標與攔截飛彈在 S_I 座標的速度

$\mathbf{X}_{t,r}$ 、 $\mathbf{X}_{m,r}$ 為經過雷達量測後，目標與攔截飛彈在 S_I 座標的位置

n為導引常數，n=5

am_{limited} 為導引律計算出來在 S_I 座標的加速度值

m_m 為攔截飛彈的質量

輸出： am_{limited} 為導引律計算出來在 S_I 座標的加速度值

amb_{limited} 為導引律計算出來在 S_B 座標的加速度值

m_m 為攔截飛彈的質量

方程式：

$$\mathbf{r} = \mathbf{X}_{t,r} - \mathbf{X}_{m,r}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{t,r} - \mathbf{V}_{m,r}$$

$am = T(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ ，其中 $T(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ 為TPN導引律

$$amb = T_{BI} \cdot am$$

$$amb_{\text{limited}} = \begin{cases} amb_{\text{max}} & , \text{ if } |amb| \geq |amb_{\text{max}}| \\ amb & , \text{ if } |amb| < |amb_{\text{max}}| \end{cases}$$

$$am_{\text{limited}} = T_{BI} \cdot amb_{\text{limited}}$$

$$\dot{m}_m = \frac{m_m \cdot \text{amb}_{\text{limited}}}{g_0 I_{\text{sp}}}$$

5.1.9 導引控制2(CNTL2)

目的：主要是終端導引加速度的計算和飛彈的質量

輸入： $\mathbf{V}_{t,r}$ 、 $\mathbf{V}_{m,r}$ 為經過雷達量測後，目標與攔截飛彈在 S_I 座標的速度

\mathbf{X}_t 、 \mathbf{X}_m 為目標與攔截飛彈在 S_I 座標的位置

n 為導引常數， $n=5$

$\text{amb}_{\text{limited}}$ 為導引律計算出來在 S_I 座標的加速度值

m_m 為攔截飛彈的質量

uniRand 為獨立均勻分布於 $[-34 \times 10^{-6}, 34 \times 10^{-6}]$ 之隨機數列，

即4.2節的 q_1, q_2

輸出： $\text{amb}_{\text{limited}}$ 為導引律計算出來在 S_I 座標的加速度值

$\text{amb}_{\text{limited}}$ 為導引律計算出來在 S_B 座標的加速度值

m_m 為攔截飛彈的質量

方程式：

$$\mathbf{r} = \mathbf{X}_{t,r} - \mathbf{X}_{m,r}$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{T}_{BI} \cdot \mathbf{r}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_b = \mathbf{r}_b + \text{uniRand}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T}_{BI}^T \cdot \hat{\mathbf{r}}_b$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{t,r} - \mathbf{V}_{m,r}$$

$\text{amb} = T(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$ ，其中 $T(\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{V})$ 為 TPN 導引律

$$\text{amb} = \mathbf{T}_{BI} \cdot \text{amb}$$

$$\text{amb}_{\text{limited}} = \begin{cases} \text{amb}_{\text{max}} & \text{if } |\text{amb}| \geq |\text{amb}_{\text{max}}| \\ \text{amb} & \text{if } |\text{amb}| < |\text{amb}_{\text{max}}| \end{cases}$$

$$\text{amb}_{\text{limited}} = \mathbf{T}_{BI} \cdot \text{amb}_{\text{limited}}$$

$$\dot{m}_m = \frac{m_m \cdot \text{amb}_{\text{limited}}}{g_0 I_{\text{sp}}}$$

5.2 參數化模擬流程

爲了比較不同參數對攔截過程的影響，我們設計參數化的模擬流程，固定所有參數，針對某個參數數值，去跑模擬。同樣的參數，我們改變高斯隨機數列的種子(seed)去跑模擬一百次，求得平均結果。之後再改變參數的數值，重新再跑模擬一百次，得到另外的結果，程式主要流程圖如圖5.1、圖5.2

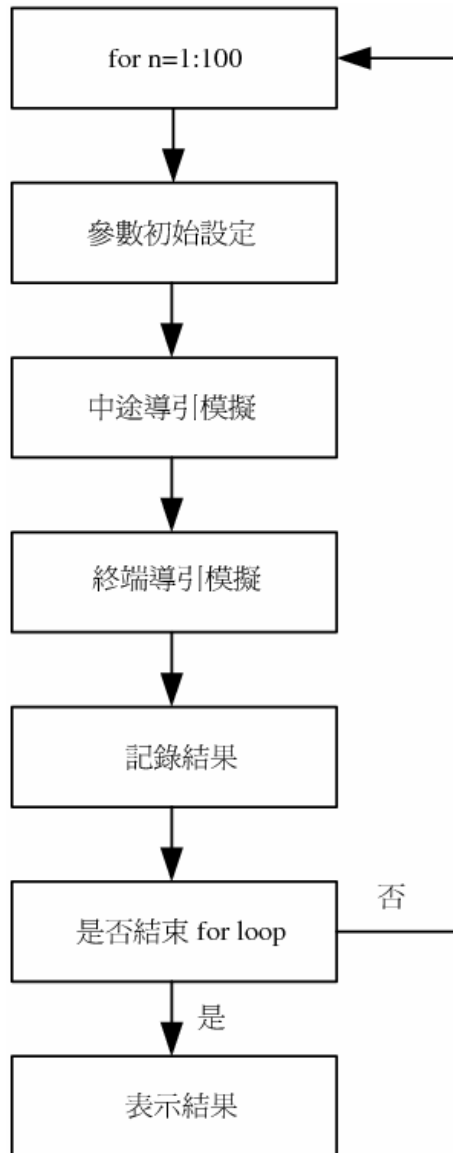


圖5.1 主要流程圖

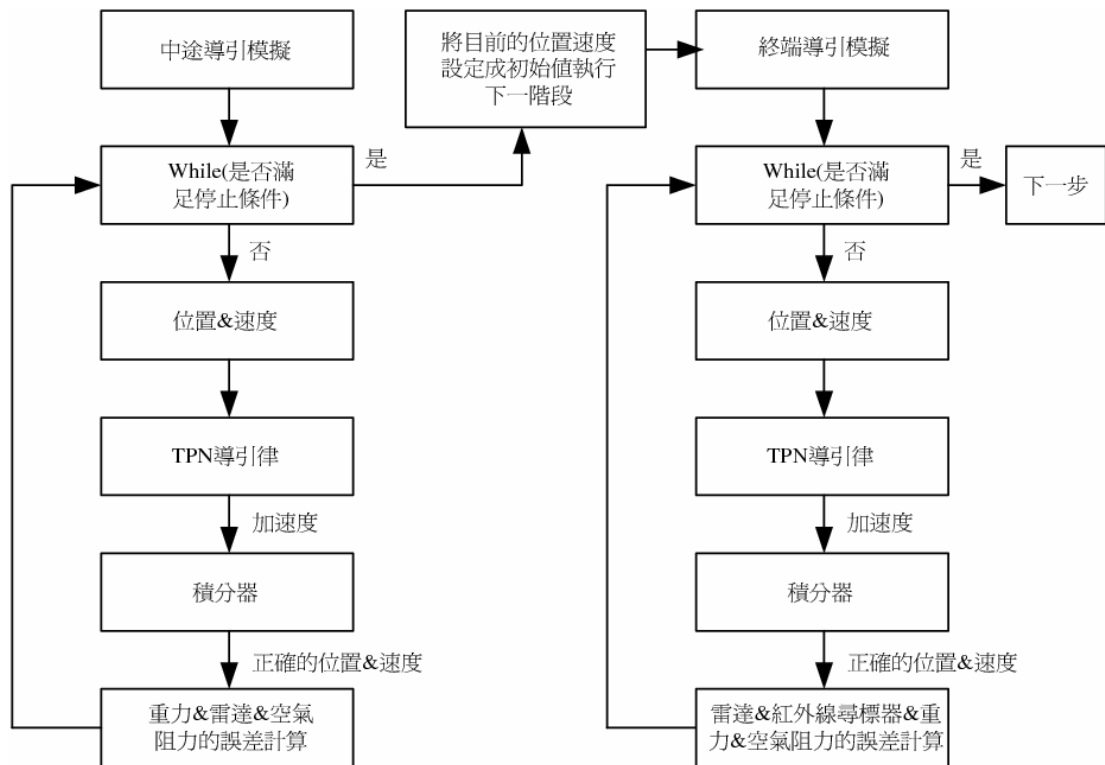


圖5.2 中途導引與終端導引流程圖

5.3 最小誤差距離(Miss Distance)

我們定義最小誤差距離(Miss Distance)為攔截飛彈與目標在攔截過程中最近的距離做為我們模擬的結果。由於我們的模擬相對速度高達每秒三公里，想要達成最小誤差距離在50公分內的精度，在模擬時為求精確，故在MATLAB/simulink的解方程的部份採用變數的形式，設定模擬的停止條件為相對位置的絕對值小於50公分，或是相對距離增加了，參照5.1.5節，最後計算出來最接近的資料，可能不是整個攔截過程中最接近的時候，是發生在最接近的時間點之前或是之後，如圖5.3，所以我們透過最小平方公式去計算出最小誤差距離。

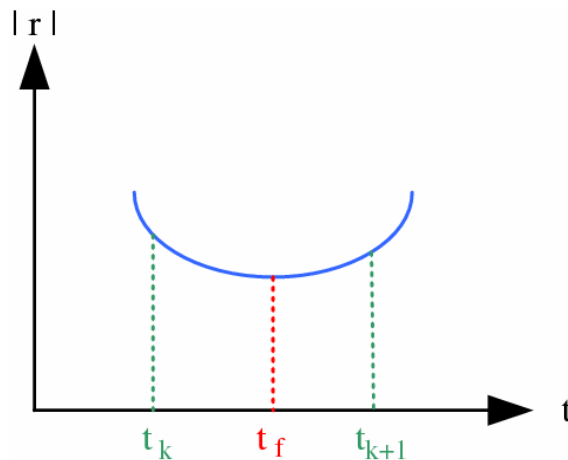


圖5.3 最小誤差距離(發生在 t_f)與模擬最接近點(發生在 t_k 或 t_{k+1})示意圖

假設模擬最後接近的相對位置為 $\mathbf{r}(t_k)$ ，相對速度為 $\mathbf{V}(t_k)$ ，則發生最小誤差距離的相對距離為

$$\mathbf{r}(t_f) \approx \mathbf{r}(t_k) + \mathbf{V}(t_k) \Delta t \quad (5.1)$$

其中 $\Delta t = t_f - t_k$ 。

令 $\mathbf{r}(t_f) = 0$ ，我們解 $\mathbf{V}(t_k) \Delta t = -\mathbf{r}(t_k)$ 得到

$$\Delta t = -\left(\mathbf{V}(t_k)^T \mathbf{V}(t_k)\right)^{-1} \mathbf{V}(t_k)^T \mathbf{r}(t_k) \quad (5.2)$$

再代入(5.1)式，則可得到發生最小誤差距離的時間點為

$$t_f = t_k + \Delta t \quad (5.4)$$

最小誤差距離為

$$\left| \mathbf{r}(t_f) \right| = \left| \mathbf{r}(t_k) + \mathbf{V}(t_k) \Delta t \right| \quad (5.5)$$

5.4 初始航向誤差(三度空間)

從3.2節我們定義出二維理想攔截三角形與初始航向誤差，現在我們要定義三度空間的初始航向誤差。假設三維理想攔截三角形，如圖5.4，從(3.5)式可知

$$\left| \mathbf{V}_i \right| \sin \beta = \left| \mathbf{V}_m \right| \sin L = \left| \mathbf{V}_i \right| \sin L \quad (5.6)$$

其中 $\beta = \cos^{-1} \left(\frac{-\mathbf{V}_i^T \mathbf{r}}{\left| \mathbf{V}_i \right| \cdot \left| \mathbf{r} \right|} \right)$ ，可以得到

$$L = \sin^{-1} \left(\frac{\left| \mathbf{V}_i \right| \sin \beta}{\left| \mathbf{V}_m \right|} \right) \quad (5.7)$$

由於 \mathbf{V}_i 、 \mathbf{V}_m 和目標與攔截飛彈之間的視線(即相對位置 \mathbf{r}) 在同一平面上，此平面就是三維理想攔截三角形所在平面，用兩個向量去表示，分別為 \mathbf{r} 與 \mathbf{r}^\perp ，其中

$\mathbf{r}^\perp = \mathbf{V}_i - \left(\mathbf{V}_i^T \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{\left| \mathbf{r} \right|}$ ，則我們可以得到完成三維理想攔截三角形最佳攔截飛彈的速度為

$$\mathbf{V}_i = \left| \mathbf{V}_m \right| \sin L \cdot \left(\frac{\mathbf{r}^\perp}{\left| \mathbf{r}^\perp \right|} \right) + \left| \mathbf{V}_m \right| \cos L \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{\left| \mathbf{r} \right|} \right) \quad (5.8)$$

雖然 $|\mathbf{V}_m| = |\mathbf{V}_i|$ ，但是實際上攔截飛彈的速度 \mathbf{V}_m 不一定等於 \mathbf{V}_i ，假設

$\mathbf{V}_\Delta = \mathbf{V}_m - \mathbf{V}_i = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ ，則定義三度空間的初始航向誤差 HE_θ 為 \mathbf{V}_Δ 在 S_1 座標

上的水平角， HE_ψ 為 \mathbf{V}_Δ 在 S_1 座標上的垂直角

$$HE_\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad (5.9)$$

$$HE_\psi = \tan^{-1}\left(\frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right) \quad (5.10)$$

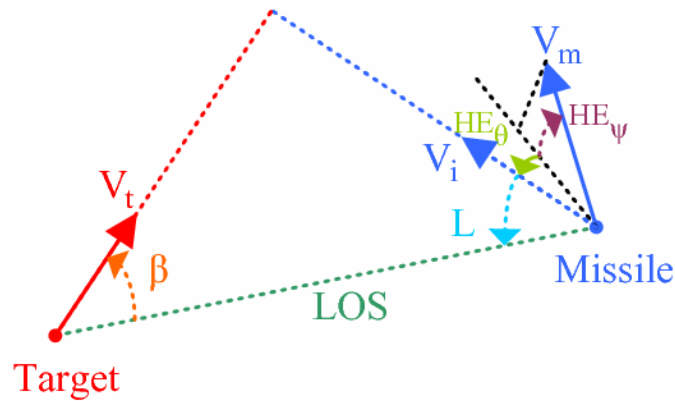


圖5.4 三度空間的初始航向誤差示意圖

5.5 零力誤差(Zero Effort Miss)

零力誤差(ZEM)就是攔截飛彈與目標在沒有外力作用下，最靠近的距離。我們使用零力誤差來表示一開始必須修正的誤差量有多少，也就是攔截飛彈經過導引加速度導引之後，若能將零力誤差距離消除到50公分內則表示攔截成功。

我們在求零力誤差時，利用另外的MATLAB/simulink方塊圖，直接代入目標與攔截飛彈的初始位置和速度，使其僅受重力與空氣阻力影響，去模擬目標與攔截飛彈的最小誤差距離，則模擬出來的最小誤差距離就是所求的零力誤差。

5.6 截殺率(Kill Probability)

我們定義截殺率為成功完成攔截次數除以總模擬次數的百分比，例如總模擬次數為一百次，其中有九十五次成功完成攔截，則表示截殺率為95%。截殺率是為了方便表示攔截的結果。

第六章、參數化模擬及結果

本章討論參數化模擬以及結果，在參數的選擇方面，我們希望知道雷達的位置量測誤差、速度量測誤差、加入的高斯隨機數列所通過的濾波器、紅外線尋標器鎖定距離以及飛行控制系統的頻寬等對最小誤差距離的影響。在做參數化模擬時，我們一次改變一個參數，其餘的不變，看其影響，另外我們又分成兩個個案去做討論，分別為個案一與個案二，差別在於目標與攔截飛彈的初始位置與速度不同，其他環境設定都相同。

其他的環境假設如下：

- (i) 雷達站位於東經120.9990306度、北緯24.79964167度(新竹市建功國小)。
- (ii) 地球半徑為6367474.844 m。
- (iii) 空氣阻力常數 $C_D = 0.4$ 。
- (iv) 導引常數 $N = 5$ 。
- (v) 目標的質量 $m_t = 500$ kg，參考面積 $A_t = \pi \cdot 1^2$ m²。

- (vi) 攔截飛彈的質量 $m_m = 30$ kg，參考面積 $A_m = \pi \cdot (0.5)^2$ m²，產生的最大

加速度(在 S_B 座標)為 $1.5g = 14.7$ m/s²。

6.1 個案一

目標與攔截飛彈的初始設定如下：

- (i) 目標初始位置在 S_N 座標為 (472, -216, -75) km。
- (ii) 攔截飛彈初始位置在 S_N 座標為 (28, 21, -45) km。
- (iii) 目標初始速度在 S_N 座標為 (-1492, 1365, -1125) m/s。
- (iv) 攔截飛彈初始速度在 S_N 座標為 (1592, -31, -1077) m/s。
- (v) 初始航向誤差 $HE_\phi = 10^\circ$ 、 $HE_\theta = 10^\circ$ 。
- (vi) 零力誤差 $ZEM = 51.13$ km。

6.1.1 理想狀態

理想狀態是我們用來做比較的，假設攔截飛彈的推進器是完美的，即飛行控制系統為理想($H(s) = 1$)，以三維TPN導引律計算的加速度去做導引，且雷達與紅外線尋標器不考慮誤差。模擬結果如圖6.1、圖6.2所示。

1. 模擬飛行的總時間 $t_{time-to-go} \approx 150 \text{ sec}$ 。
2. 最小誤差距離 $\text{Miss Distance} = 0 \text{ m}$ 。
3. 所需最大加速度(在 S_B 座標)大約是 11 m/s^2 相當於 $1g$ 。

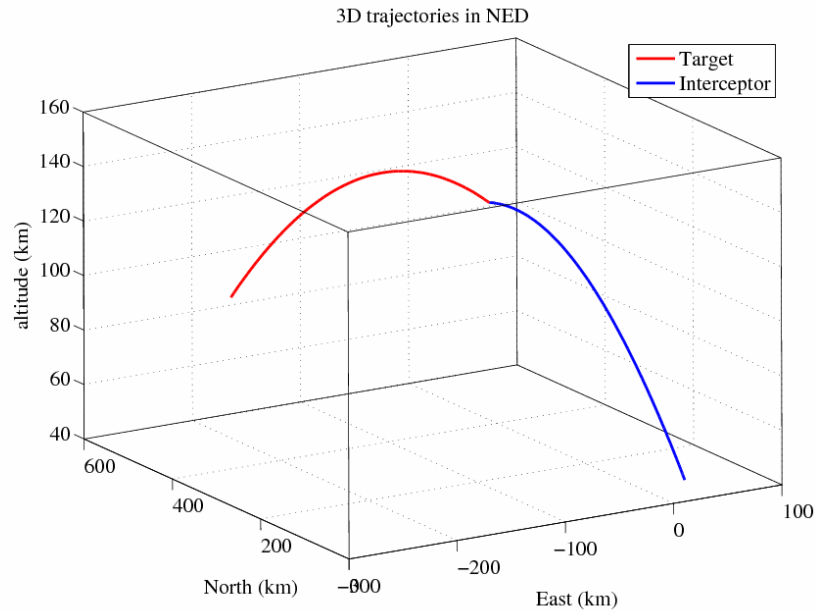


圖6.1 表示個案一理想狀態在空間中的運動軌跡(在 S_N 座標)，其中藍色代表攔截飛彈，紅色代表目標。

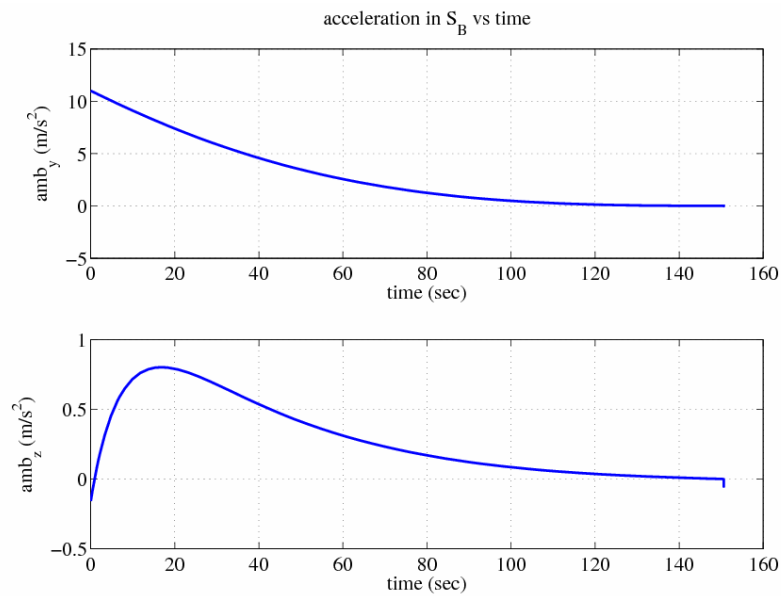


圖6.2 表示個案一理想狀態的導引加速度(在 S_B 座標)

6.1.2 雷達有位置誤差而沒有速度誤差

我們假設雷達在位置的量測上有誤差，而在速度的量測上沒有誤差。我們討論位置濾波器的長度(k)、位置標準差大小(σ_ψ 或 σ_λ)、飛行控制系統的頻寬(ω_n)、鎖定距離(lock-on range)等參數對攔截過程的影響。

1. 改變位置濾波器的長度(k)，固定位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.1所示。

k	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	28.2469	0.0011	100%
2	28.1796	0.0011	100%
3	28.1270	0.0011	100%
4	28.0411	0.0011	100%
5	27.9070	0.0011	100%

表6.1 改變位置濾波器的長度(k)，固定其他參數。

位置濾波器的長度(k)越長代表加到位置的誤差之間的相關性越大，變動越平緩，有利於減小終端導引前的零力誤差(ZEM)，如圖6.3、圖6.4、圖6.5所示。

2. 改變位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda$)，固定位置濾波器的長度(k=5)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.2所示。

$\sigma_\psi = \sigma_\lambda$ (rad)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
0.0001	27.9070	0.0011	100%
0.0003	36.4448	0.0011	100%
0.0005	48.9222	0.0011	100%
0.0007	63.3376	0.0011	100%
0.0010	86.5259	0.0011	100%

表6.2 改變位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda$)，固定其他參數。

位置標準差大小越小，表示雷達量測位置越準確，有利於減小終端導引前的零力誤差(ZEM)。

3. 改變飛行控制系統的頻寬(ω_n)，固定位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、位置濾波器的長度(k=5)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.3所示。

ω_n (Hz)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	26.6551	0.0099	100%
3	27.5794	0.0033	100%
5	27.7300	0.0021	100%
10	27.9070	0.0011	100%
20	28.0190	0.0006	100%

表6.3 改變飛行控制系統的頻寬(ω_n)，固定其他參數。

飛行控制系統的頻寬越大，表示標準二階的頻率響應越快，越快達成所需的導引加速度，有利於減小最小誤差距離。

4. 改變鎖定距離，固定飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、位置濾波器的長度(k=5)，則模擬結果如表6.4所示。

鎖定距離	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
100	27.9070	0.0011	100%
50	12.1991	0.0011	100%
30	12.4047	0.0011	100%
20	11.7011	0.0011	100%
10	13.1547	0.0011	100%

表6.4 改變鎖定距離，固定其他參數。

鎖定距離對於最小誤差距離的變化不明顯，主要的原因在於假設的目標是屬於自由落體狀態，但是對於終端導引前的零力誤差有影響，由於鎖定距離越近，大致上終端導引前的零力誤差也越小。

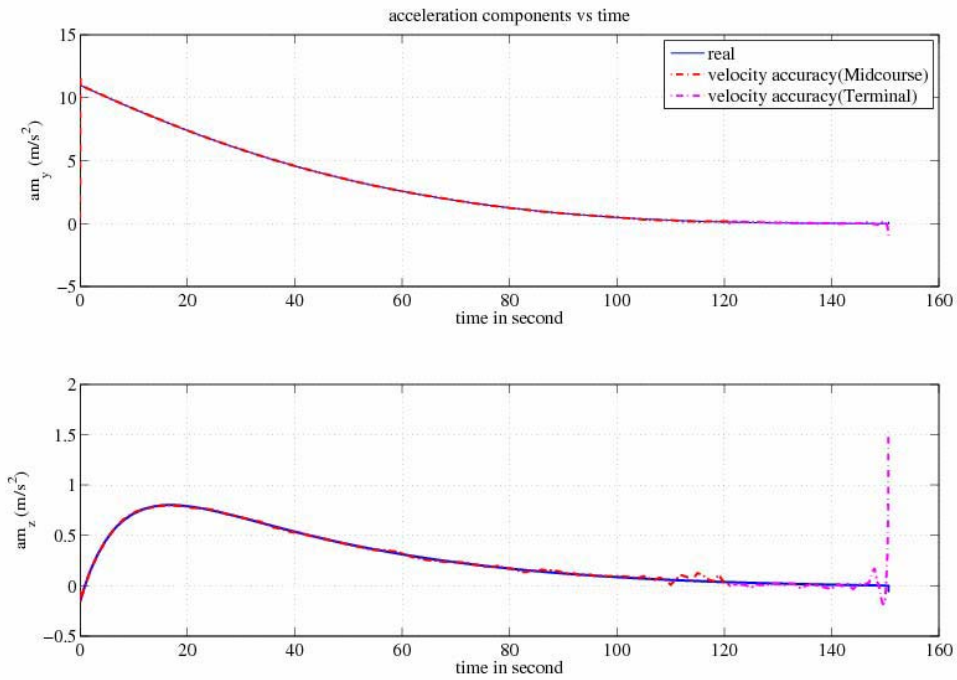


圖6.3 攔截飛彈的加速度(在 S_B 座標)示意圖，其中藍色實線為理想的狀態，紅色及粉紅色虛線，屬於個案一假設雷達有位置誤差沒有速度誤差($k=5$ 、

$\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad、 $\omega_n = 10$ Hz、鎖定距離=100km)的情況。

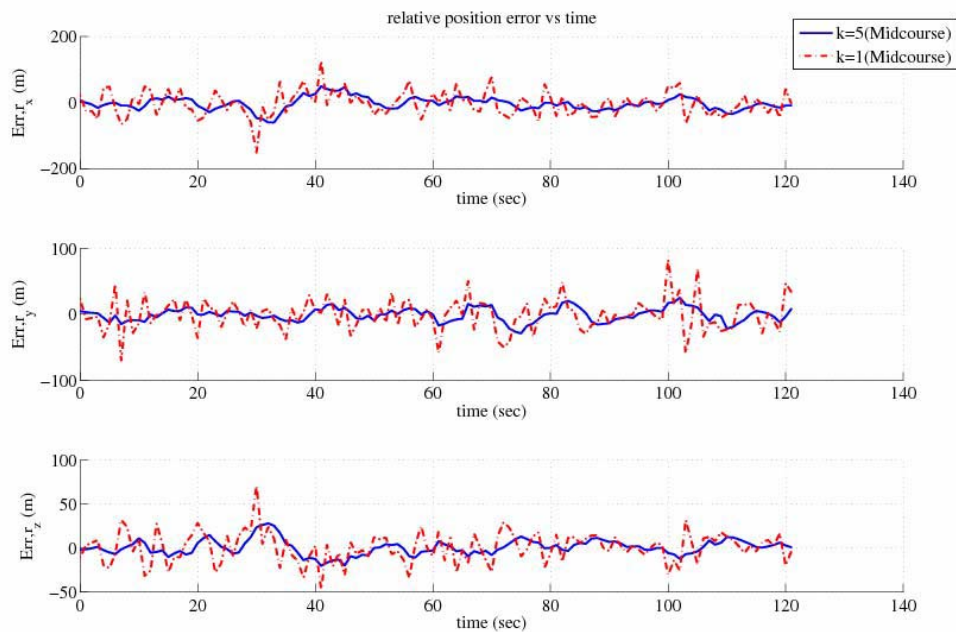


圖6.4 不同的 k 值在中途階段真實相對位置的誤差(在 S_I 座標)之間的關係，可以看出 k 值越大，則誤差曲線越趨於緩和，屬於個案一假設雷達有位置誤差沒有速度誤差($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad、 $\omega_n = 10$ Hz、鎖定距離=100km)。

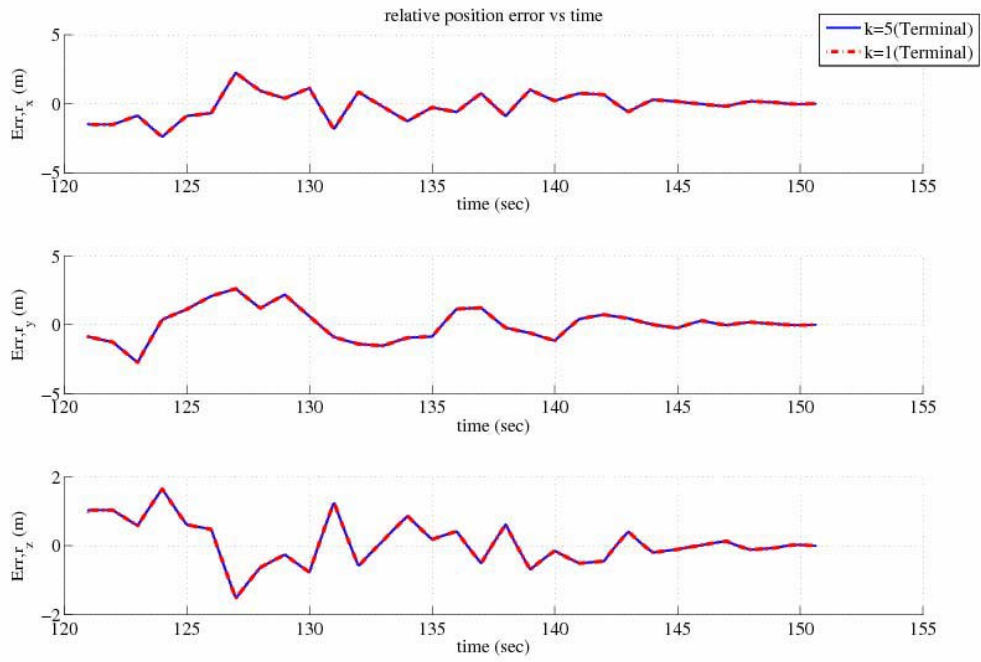


圖6.5 不同的k值在終端階段真實相對位置的誤差(在 S_1 座標)之間的關係，由於終端階段改由紅外線尋標器提供相對位置的資訊，所以k值不影響到終端階段的相對位置誤差，與圖6.6 中途階段的相對位置誤差比較，紅外線尋標器的誤差比較小，屬於個案一假設雷達有位置誤差沒有速度誤差($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad、 $\omega_n = 10$ Hz、鎖定距離=100km)。

6.1.3 雷達有位置誤差也有速度誤差

我們假設雷達在位置和速度的量測上有誤差。我們討論速度雜訊濾波器的長度(n)、速度標準差大小(σ_v)、飛行控制系統的頻寬(ω_n)、鎖定距離(lock-on range)等參數對攔截過程的影響。

1. 改變速度標準差大小(σ_v)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小($\sigma_\nu = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度濾波器的長度(n=5)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.5所示。

σ_v (m/s)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
0.5	28.8517	0.0130	100%
1	31.2358	0.0422	100%
2	41.3940	0.1575	96%
5	84.8599	1.0116	37%
10	165.2979	4.0521	10%

表6.5 改變速度標準差大小(σ_v)，固定其他參數。

速度標準差大小越小，表示雷達在速度的量測越準確，有利於減少終端導引前的零力誤差和最小誤差距離，從模擬的結果可看出 $\sigma_v \leq 1$ ，截殺率是100%。

2. 改變速度濾波器的長度(n)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小($\sigma_\nu = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度標準差大小($\sigma_v = 2$ m/s)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.6所示。

n	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	43.4156	0.6191	63%
2	43.1910	0.3416	77%
3	42.6952	0.2333	89%
4	42.0854	0.1773	94%
5	41.3940	0.1575	96%

表6.6 改變速度濾波器的長度(n)，固定其他參數。

速度濾波器的長度(n)越長，代表加到速度上的誤差之間的相關性越大，變動越平緩，有利於減小最小誤差距離，如圖6.6、圖6.7所示。

3. 改變飛行控制系統的頻寬(ω_n)，固定位置濾波器的長度($k=5$)、位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度濾波器的長度($n=5$)、速度標準差大小($\sigma_v = 2$ m/s)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.7所示。

ω_n (Hz)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	40.8268	0.4144	69%
3	41.2239	0.1952	96%
5	41.3022	0.1724	96%
10	41.3940	0.1575	96%
20	41.4273	0.1516	96%

表6.7 改變飛行控制系統的頻寬(ω_n)，固定其他參數。

飛行控制系統的頻寬越大，表示標準二階的頻率響應越快，越快達成所需的導引加速度，有利於減小最小誤差距離。

4. 改變鎖定距離，固定位置濾波器的長度($k=5$)、位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度濾波器的長度($n=5$)、速度標準差大小($\sigma_v = 2$ m/s)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)，則模擬結果如表6.8所示。

鎖定距離(km)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
100	41.3940	0.1575	96%
50	23.9241	0.1575	96%
30	17.7541	0.1575	96%
20	14.8926	0.1575	96%
10	13.6382	0.1575	96%

表6.8 改變鎖定距離，固定其他參數。

鎖定距離越小，則有利於減小終端導引前的零力誤差。

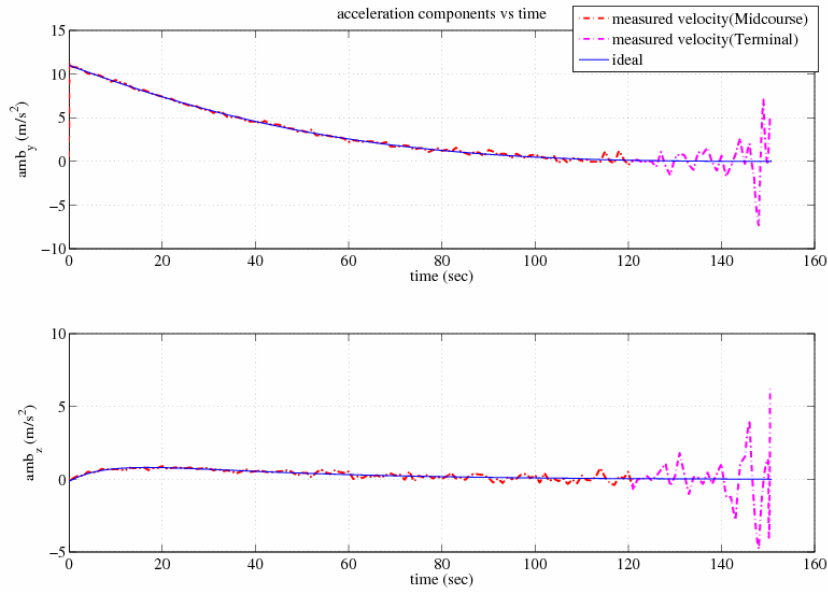


圖6.6 攔截飛彈的加速度(在 S_B 座標)示意圖，其中藍色實線為理想的狀態，紅色及粉紅色虛線，屬於個案一假設雷達有位置和速度誤差($k=5$ 、 $\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad、 $n=5$ 、 $\sigma_v = 2$ m/s、 $\omega_n = 10$ Hz、鎖定距離=100km)的情況。

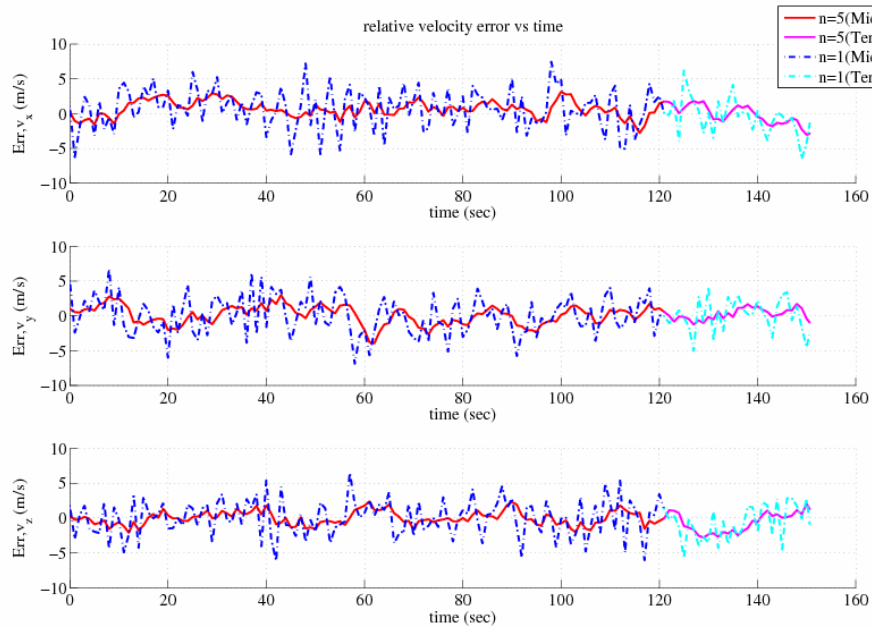


圖6.7 不同n值與相對速度誤差(在 S_I 座標)之間的關係，由於導引律計算的相對速度在中途與終端都是雷達量測的，所以中途與終端都差不多，n值越大則誤差曲線越趨於平緩，屬於個案一假設雷達有位置和速度誤差($k=5$ 、 $\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad、 $\sigma_v = 2$ m/s、 $\omega_n = 10$ Hz、鎖定距離=100km)的情況。

6.2 個案二

目標與攔截飛彈的初始設定如下：

- (i) 目標初始位置在 S_N 座標為 (326, -84, -139) km。
- (ii) 攔截飛彈初始位置在 S_N 座標為 (28, 21, -45) km。
- (iii) 目標初始速度在 S_N 座標為 (-1549, 1386, -219) m/s。
- (iv) 攔截飛彈初始速度在 S_N 座標為 (1753, -27, -788) m/s。
- (v) 初始航向誤差 $HE_\phi = 17.5^\circ$ 、 $HE_\theta = 17.5^\circ$ 。
- (vi) 零力誤差 $ZEM = 51.28$ km。

6.2.1 雷達有位置誤差也有速度誤差

我們假設雷達在位置和速度的量測上有誤差，我們討論速度雜訊濾波器的長度(n)、速度標準差大小(σ_v)對攔截過程的影響。

1. 改變速度標準差大小(σ_v)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度濾波器的長度(n=5)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.9所示。

σ_v (m/s)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
0.5	200.7097	0.0140	100%
1	201.6301	0.0449	100%
2	203.8948	0.1624	97%
5	214.8619	1.0015	35%
10	249.7700	3.9399	9%

表6.9 改變速度標準差大小(σ_v)，固定其他參數。

不同的個案，在終端導引前的零力誤差也不同，個案二的初始航向誤差比較大，所以終端導引前的零力誤差也比較大，但是速度標準差大小越小，同樣有利於減小終端導引前的零力誤差和最小誤差距離。

2. 改變速度濾波器的長度(n)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度標準差大小($\sigma_v = 2$ m/s)、飛行控制系統的頻寬($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.10所示。

n	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	203.5337	0.5782	60%
2	203.7350	0.3106	85%
3	204.1568	0.2274	90%
4	203.9952	0.1866	95%
5	203.8948	0.1624	97%

表6.10 改變速度濾波器的長度(n)，固定其他參數。

個案不同，但是速度濾波器的長度(n)的影響相同，速度濾波器的長度(n)越長，代表加到速度上的誤差之間的相關性越大，變動越平緩，有利於減小最小誤差距離。

6.2.2 正確的角速度

在實現導引律計算時，角速度的計算可能是由攔截飛彈的陀螺儀所量測到的或其他方式量測得到的，並非我們所想的是由相對速度與相對位置，於是我們嘗試去求出正確的角速度代入導引律計算比較攔截的結果。作法為參考(3.23)式，利用正確的相對速度與相對位置去計算 $\cos\phi \cdot \dot{\theta}$ 和 $\dot{\phi}$ ，利用有誤差的相對速度與相對位置去計算 $\mathbf{V}^T \mathbf{r}$ 、 e_θ 和 e_ϕ 。

我們討論正確的角速度與速度標準差(σ_v)、正確角速度與速度濾波器長度(n)對攔截過程的影響。

1. 改變速度標準差大小(σ_v)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小

($\sigma_\psi = \sigma_\lambda = 10^{-4}$ rad)、速度濾波器的長度(n=5)、飛行控制系統的頻寬

($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.11所示。

σ_v (m/s)	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
0.5	198.0931	5.62e-9	100%
1	198.1303	8.55e-9	100%
2	198.0328	8.67e-9	100%
5	198.0980	6.16e-9	100%
10	198.1198	4.02e-9	100%

表6.11 改變速度標準差大小(σ_v)，固定其他參數。

2. 改變速度濾波器的長度(n)，固定位置濾波器的長度(k=5)、位置標準差大小 ($\sigma_y = \sigma_z = 10^{-4}$ rad)、速度標準差大小($\sigma_v = 2$ m/s)、飛行控制系統的頻寬 ($\omega_n = 10$ Hz)、鎖定距離=100 km，則模擬結果如表6.12所示。

n	ZEM (m)	Miss Distance (m)	Kill Probability
1	198.2405	8.64e-9	100%
2	198.1690	9.60e-9	100%
3	198.1253	7.29e-9	100%
4	198.0431	7.58e-9	100%
5	198.0328	8.67e-9	100%

表6.12 改變速度濾波器的長度(n)，固定其他參數。

從表6.11、表6.12和前一節6.2.1做比較，我們可以發現，若角速度計算正確，則攔截的過程近乎理想，顯示在我們的模擬中，角速度誤差的計算方式影響最小誤差距離很大。進一步去分析(3.24)式，發現原因是因為(3.17)式(計算 $\dot{\theta}$)與(3.18)式(計算 $\dot{\phi}$)是利用相對位置與相對速度的乘積，由於相對位置與相對速度都有誤差，相乘造成誤差更大，使得最小誤差距離也變大了。

第七章、結論與未來發展方向

本研究提供了飛彈攔截系統的數學模式及初步的攔截模擬程式，目前是以比較理想的條件下進行系統分析，暫時不考慮攔截飛彈的姿態，以標準飛彈三型為藍圖，建立了三自由度運動(攔截飛彈和目標)、紅外線尋標器、導控、雷達、大氣密度與重力及空氣阻力等各部份數學模型。在導引律上，我們將三維TPN的公式分解成相對速度與相對位置的方式去實現導引律，設計我們的導控模式。在雷達上，參考雷達基本原理去建立雷達的模型，加入誤差計算，使攔截模擬更真實。在紅外線尋標器的部份，以標準飛彈三型的動能攔截器為藍圖，不考慮姿態的前提下，做了一些比較理想的假設，建立了紅外線尋標器的數學模式。

我們做了攔截模擬以及一些參數化的分析，結果可供評估攔截系統的可行性以及相關子系統的參考，目前結論有

- 1.雷達量測速度的誤差，對利用相對位置和相對速度來計算導引加速度的方式影響很大，雷達在速度量測上，超過1m/s，會使截殺率大幅下降。
- 2.雷達量測速度的誤差，會直接反映在導引律的角速度計算上面，造成真實的角速度與計算的角速度上很大的差別，若能改進導引律的角速度計算，以陀螺儀所測得的角速度或是姿態控制所記錄攔截飛彈的角速度，則能提高導引加速度的準確性，使得最小誤差距離下降、截殺率大幅提升。
- 3.雷達量測位置的誤差，對終端導引前的零力誤差有影響，量測位置越準確，終端導引前的零力誤差距離越小。
- 4.飛行控制系統的頻寬，對最小誤差距離有影響，頻寬越大，表示加速度的達成越快，則最小誤差距離越小。
- 5.攔截飛彈鎖定的距離越短，表示其在終端導引前的中途導引作的多，則終端導引前的零力誤差距離越小。

未來我們將繼續發展更接近實際的攔截系統、設計及模擬程式，加入姿態的部份，其中包括：

1. 姿態轉向控制系統的設計(開關式推力器)
2. 六個自由度運動(攔截飛彈)與三自由度運動(目標)
3. 子系統規格模擬

希望能提供更完整、更實際的”轉向與姿態導控系統設計”的模擬程式，提供未來發展硬體的評估與參考。

參考文獻

- [1] C. A. Lin, "Guidance divert and altitude control system design," Midterm Report, NSC-96-2623-7-009-011-D, July. 2007.
- [2] F. Tyan, "Unified Approach to Missile Guidance Laws: A 3D Extension," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.41, No.4, pp.1178-1199, Oct.2005.
- [3] Y. He and Q. Yong, "Thaad-like high altitude theater missile defense: strategic defense capability and certain countermeasures analysis," *Science and Global Security*, Vol.11, pp.151-202, 2003.
- [4] 陳科祥, "美國高層反彈道飛彈防禦系統研發現況," 中科院二所飛行控制組, 2008 Jan. 29.
- [5] "Standard Missile III," Raytheon Corporation.
- [6] C. A. Lin, "Six Degree-of-Freedom Simulation of Launch Vehicle Dynamics A preliminary report," Jan. 17, 2006.
- [7] M. Guelman, "The closed-form solution of true proportional navigation," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.12, No.4, pp.472-482, July.1976
- [8] Ciann-Dong Yang and Chi-Ching Yang, "A unified approach to proportional navigation," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.33, No.2, pp.557-567, Apr.1997
- [9] "angular velocity," http://en.wikipedia.org/wiki/Angular_velocity
- [10] 尹相隆, 飛彈導引系統 1984 年 7 月 175 期
<http://203.68.20.65/science/content/1984/00070175/0003.htm>
- [11] "重力加速度," <http://tw.knowledge.yahoo.com/question/?qid=1007021305991>
- [12] "雷達," <http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%B7%E9%81%94>
- [13] "飛彈," <http://tw.knowledge.yahoo.com/question/?qid=1106110415004>

相關資料蒐集

論文：

- [1] David Wright, "An Analysis of the 25 January 2002 Test of the Aegis-LEAP Interceptor for Navy Theater-Wide," Union of Concerned Scientists Working Paper
- [2] M. R. Ananthasayanam, Prashant Vohra, A. Bhattacharya, and R. Srivastava, "Estimation of LOS Rates and Angles using EKF from noisy seeker measurements," International Conference on Signal Processing & Communication (SPCOM), 2004.
- [3] F. Tyan, "Unified Approach to Missile Guidance Laws: A 3D Extension," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.41, No.4, pp.1178-1199, Oct.2005.
- [4] 林清安, "轉向與姿態導控系統設計(I)," 期中報告, NSC-96-2623-7-009-011-D, 2007年7月.
- [5] 林清安, "中高空飛行體次服控制系統理論與設計," 期末報告, NSC87-2623-D-009-014, 1998年.
- [6] 盧健勝, "飛彈攔截機動目標之導引律設計," 國立交通大學控制工程學系碩士論文, 2004.
- [7] 謝春燕, 李為民, 婁壽春, "反導系統攔截彈技術綜述," 飛航導彈, 2004年第三期.

網頁：

- [1] "Raytheon RIM-161 Standard SM-3,"
<http://www.designation-systems.net/dusrm/m-161.html>
- [2] THAAD/DACS – Pratt & Whitney
<http://www.pw.utc.com/vgn-ext-templating/v/index.jsp?vgnextrefresh=1&vgnextoid=ca10376b41dee010VgnVCM100000c45a529fRCRD>
- [3] 海軍艦艇的防空先鋒-標準系列飛彈
<http://www.youth.com.tw/joanna/Military/M93.03.09-A.htm>
- [4] 阿連特演示驗證固體轉向與高度控制系統設計_TOM新聞
<http://army.news.tom.com/1019/1211/2005/1/5-56989.html>
- [5] 有關飛彈的導引與飛行控制 台灣茶黨
<http://taiwanbbs.org/cgi/index.pl?b=mil,m=1126330050>

影片：

- [1] MDA的網站 <http://www.mda.mil/mdalink/html/video.html>

此次美國利用改良的標準飛彈三型打失控的衛星：

[1] 美導彈射星首枚擊中精采畫面[虛擬時空]

<http://home.xnsk.com/dispbbs.asp?boardID=4&ID=40010>

[2] 中華網論壇-圖文詳解此次美國衛星攔截實驗

http://military.club.china.com/data/thread/1011/138/18/40/7_1.html

[3] 美國海基導彈射星首枚集中間諜衛星

<http://big5.thethirdmedia.com/g2b.aspx/ido.3mt.com.cn/Article/200802/show916275c30p1.html>

[4] Spy satellite shutdown hinges on tricky factors – Space – msnbc.com

<http://www.msnbc.msn.com/id/23253805>

[5] Navy Will Attempt to Down Spy Satellite – washingtonpost.com

<http://www.washingtonpost.com/wp-dyn/content/article/2008/02/14/AR2008021401704.html?sid=ST2008021403174>

[6] BM/CM與ATBM/ATCM最新發展動態與評論 台灣茶黨

<http://taiwanbbs.org/cgi/index.pl?b=mil,v=display,m=1118901027,s=120>

附錄 A 模擬使用的程式及說明

程式說明：

start_ideal.m	執行理想狀態的模擬主程式。
start_midcourseAndTerminal.m	執行個案一和個案二的模擬主程式。
cool05_ini.m	是程式初值資料設定。
parameter2.m	是地球物理特性以及重力常數的設定。
newVm.m	是改變攔截飛彈的初始速度，使其符合要求的初始航向誤差。
result_plot9.m	是繪圖模擬結果。
errorPlot.m	是繪圖相對位置相對速度與真實相對位置相對速度的差。
amb_limitation.m	是限制加速度大小值不超過最大值。
angleVelocityCompare.m	是比較真實的角速度與三維TPN公式的角速度誤差。
assign4.m	是利用最小平方法去計算最小誤差距離。
dragforce.m	是計算空氣阻力加速度。
gravity.m	是計算重力加速度。
HE_phi.m	是計算初始航向誤差在垂直方。
HE_theta.m	是計算初始航向誤差在水平方。
makeRandomNoise.m	是計算加入到雷達與紅外線尋標器的雜訊大小。
massLoss.m	是計算導引加速度所消耗掉的質量。
newIR.m	是計算紅外線尋標器的資訊。
radar4.m	是計算雷達量測的資訊。
tpn.m	是計算三維 TPN 的導引加速度。
tpn2ter.m	是計算正確角速度的導引加速度。
transI2LOS.m	是將 S_I 轉換成 S_L 。
transLOS2I.m	是將 S_L 轉換成 S_I 。
zmd.m	是計算零力誤差(不考慮重力與空氣阻力的數學解)。實際上的計算是利用 gogogo03.mdl 實際去模擬的。
gogogo00.mdl	理想三維 TPN 的 simulink 系統方塊。
gogogo03.mdl	不做導引僅受空氣阻力與重力的 simulink 系統方塊。
gogogo01.mdl	中途階段雷達有位置誤差沒有速度誤差的 simulink 系統方塊。
gogogo02.mdl	終端階段雷達有位置誤差沒有速度誤差的 simulink 系統方塊。
gogogo11.mdl	中途階段雷達有位置誤差也有速度誤差的 simulink 系統方塊。
gogogo12.mdl	終端階段雷達有位置誤差也有速度誤差的 simulink 系統方塊。
gogogo21.mdl	中途階段角速度正確的 simulink 系統方塊。
gogogo22.mdl	終端階段角速度正確的 simulink 系統方塊。

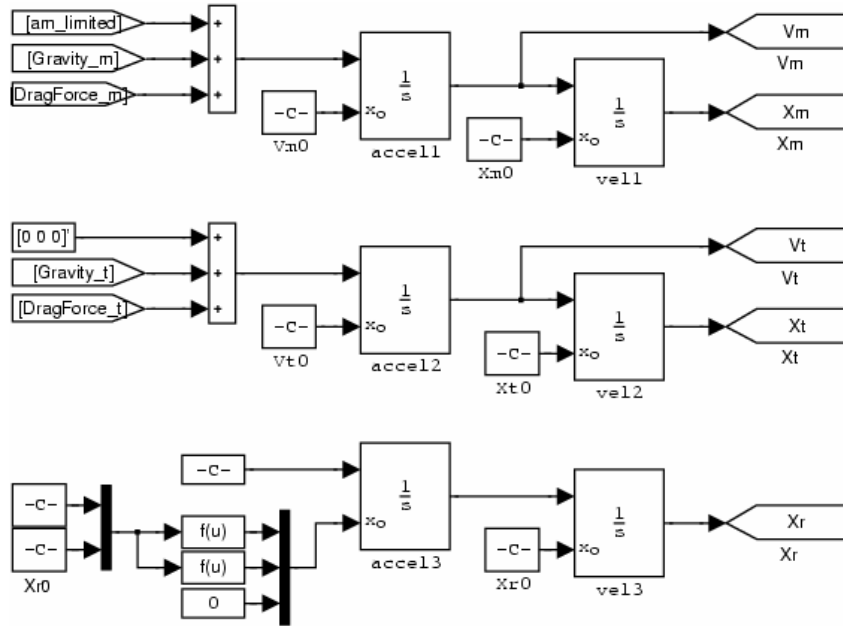
randomAngle.mdl 產生高斯隨機數列的模擬程式。

uniRandom.mdl 產生 uniform distributed random sequence 的模擬程式。

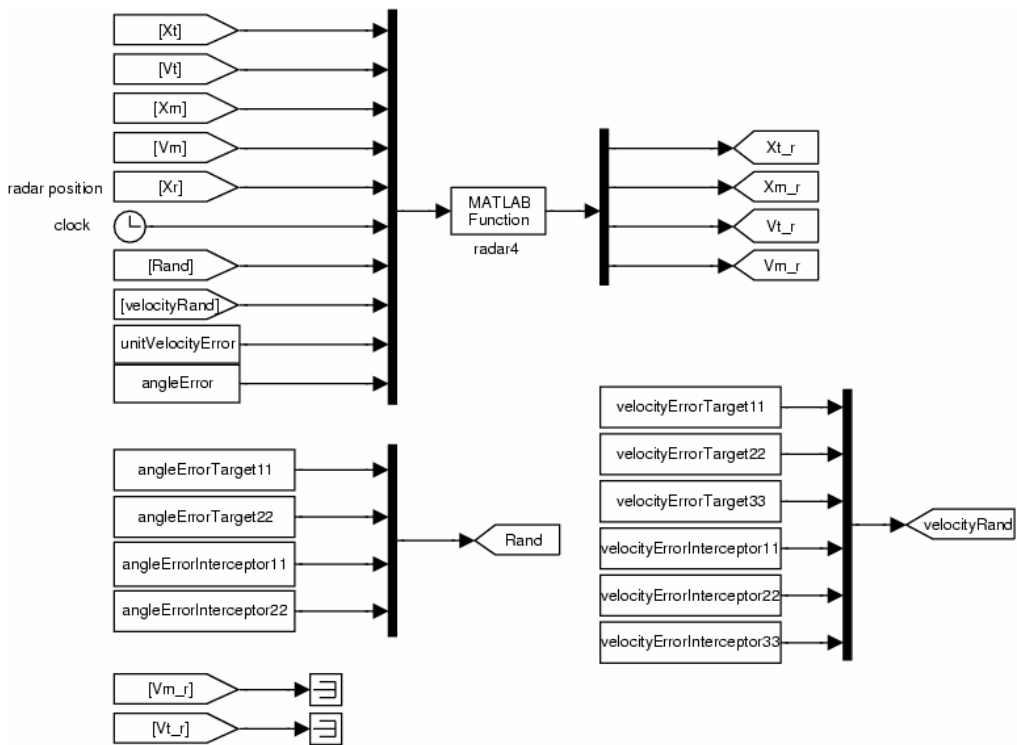
執行程式步驟：

1. 將模擬程式複製到一目錄下，開啟 MATLAB，進入該目錄。
2. 打開 cool05_ini.m 設定初值及初始航向誤差。
3. 執行模擬程式可分成以下七個部份：
 - a. 模擬理想狀態，則執行 start_ideal.m。
 - b. 模擬雷達量測位置有誤差，量測速度沒有誤差的個案，則先打開 start_midcourseAndTerminal.m 修改程式第 93 行程式碼為 gogogo01 以及第 99 行程式碼為 gogogo02，再執行程式。
 - c. 模擬雷達量測位置有誤差，量測速度也有誤差的個案，則先打開 start_midcourseAndTerminal.m 修改程式第 93 行程式碼為 gogogo11 以及第 99 行程式碼為 gogogo12，再執行程式。
 - d. 模擬角速度正確，則先打開 start_midcourseAndTerminal.m 修改程式第 93 行程式碼為 gogogo21 以及第 99 行程式碼為 gogogo22，再執行程式。
 - e. 模擬不同的鎖定距離，則需修改程式第 21 行的 relative_error=我們想要鎖定的距離。
 - f. 模擬初始的零力誤差距離，則先打開 start_midcourseAndTerminal.m 修改程式第 93 行和第 99 行程式碼為 gogogo03，再執行程式，則最小誤差距離即為初始的零力誤差距離。
 - g. 模擬終端導引前的零力誤差距離，則先打開 start_midcourseAndTerminal.m 修改程式第 99 行程式碼為 gogogo03，再執行程式，則最小誤差距離即為終端導引前的零力誤差距離。
4. 執行 result_plot9.m，即可繪圖結果。
5. 執行 errorPlot.m，即可得到相對位置相對速度與實際相對位置相對速度的差。

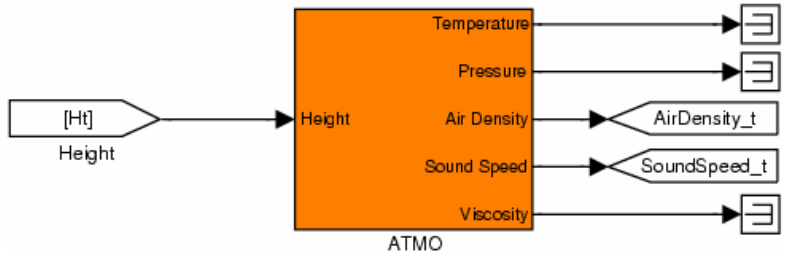
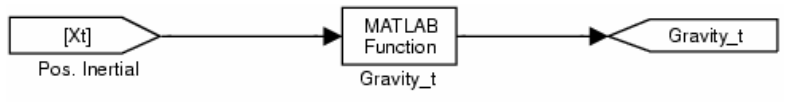
附錄 B 模組圖



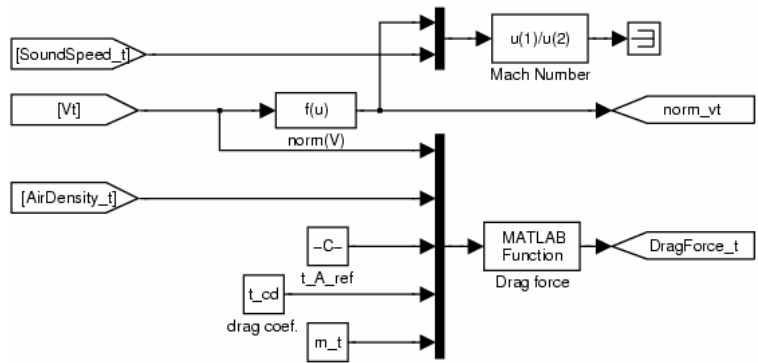
EOM



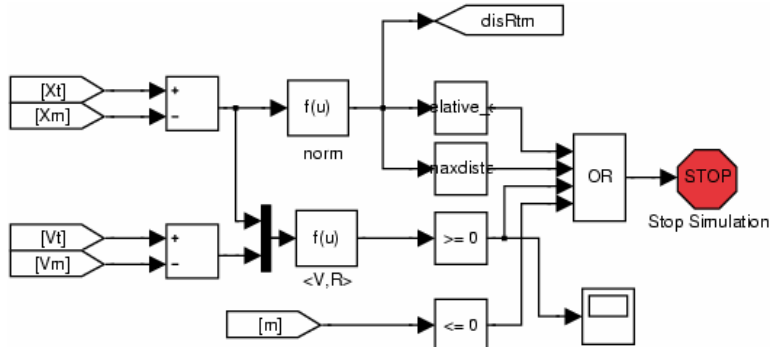
radar4



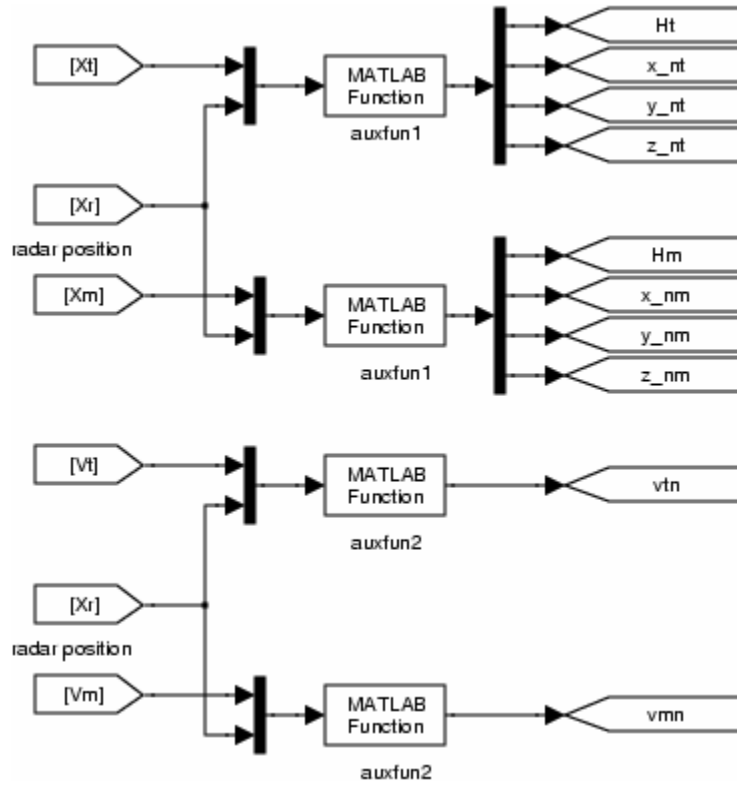
ENVI



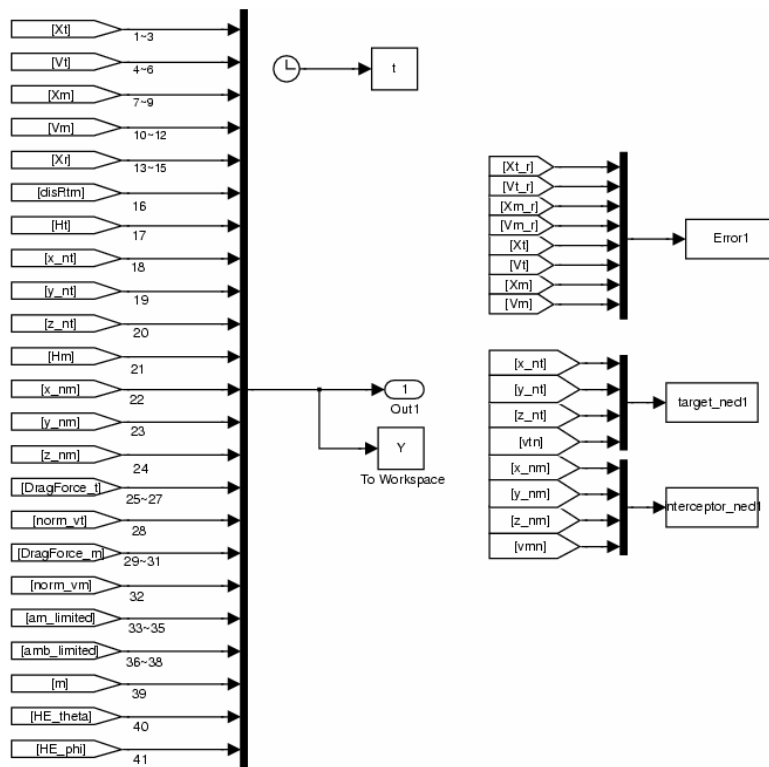
Drag Force



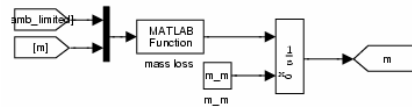
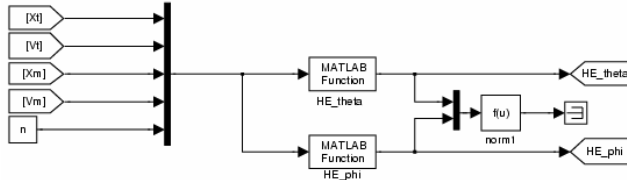
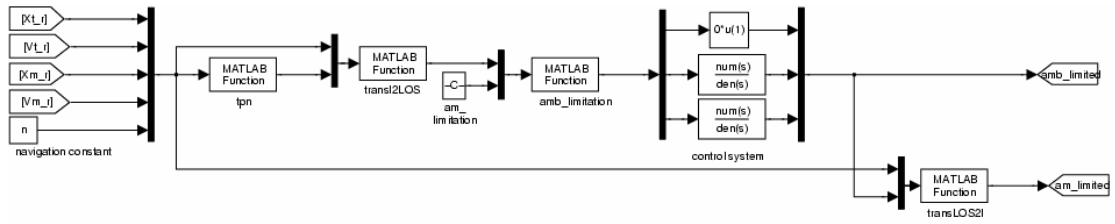
Boolean



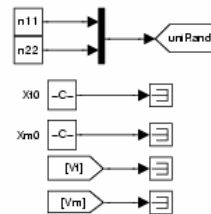
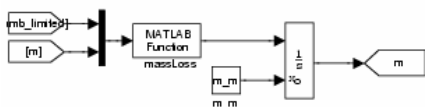
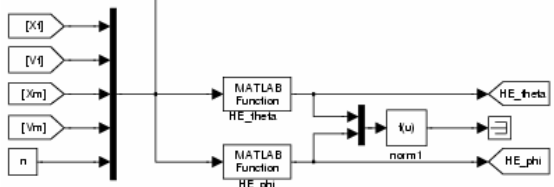
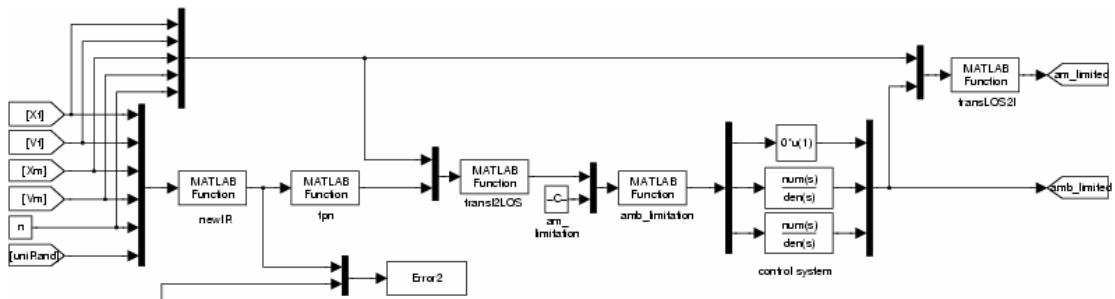
AUX1



Output



CNTL1



CNTL2

全文完