行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※

※　　　　　路網敏感性分析方法之整合研究　　　　　※

※　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　※

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

計畫類別：¦ 個別型計畫　　□整合型計畫

計畫編號：NSC89－2416－H－009－022－

執行期間：88 **年** 08 **月** 01 **日至** 89 **年** 07 **月** 31 **日**

計畫主持人：卓訓榮

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

□赴國外出差或研習心得報告一份

□赴大陸地區出差或研習心得報告一份

□出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

□國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立交通大學運輸工程與管理學系

中　華　民　國　八十九　年　七　月　三十一　日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告
路網敏感性分析方法之整合研究
The Study of The Unified Network Sensitivity Analysis

計畫編號：NSC 89-2416-H-009-022-
執行期限：88 年 8 月 01 日至 89 年 7 月 31 日
主持人：卓訓榮　國立交通大學運輸工程與管理學系
計畫參與人員：林培煒　執行機構及單位名稱

一、中文摘要

均衡路網流量的敏感性分析可提供非常好的資訊以供決策分析、系統分析及規劃參考，尤其對複雜的路網設計、號誌設計及各種二階層的路網設計模式的求解，可提供寶貴的資訊。均衡路網流量可以用 Smith[4]和 Dafermos [6]所提出的變分不等式（Variational Inequality Problem，簡稱 VIP）的模式來表示。而 Tobin[8]提出 VIP 之敏感性分析方法，Tobin 和 Friesz[9]指出因路徑流量之非唯一性，不能直接用在均衡路網的敏感性分析。因此，Tobin 和 Friesz[9]以線性規劃方法求得一組正路徑流量，將其理論應用在交通路網上。但以線性規劃方法求解需滿足非退化（Nondegenerate）的條件，應用範圍受到限制，只能用在流量為正的路徑數小於或等於流量為正的路段數加上起迄組數目的路網上。所以，卓訓榮等[10][12]分別以廣義反矩陣方法和最短距離方法推出可行解空間，再進行敏感性分析[14]。以上一連串的求解方法，不斷地放寬假設，使其方法能應用的範圍更加廣泛。本研究擬將所有變分不等式之敏感性分析的方法作一整理，並且希望能以數學方法證明其中之之關連性。
關鍵詞：均衡路網，變分不等式，敏感性分析

Abstract

The study of sensitivity analysis in equilibrium network can provide very well information for choice making analysis, system analysis and planning, especially for complexity network design, signal design, and the solution of any bilevel network design model. The equilibrium network flow can be presented by Variational Inequality Problem （VIP） proposed by Smith [4] and Dafermos [6]. The sensitivity analysis method of VIP proposed by Tobin [8] can't solve the sensitivity analysis of the equilibrium network directly. The linearly planning method provided by Tobin and Friesz [9] can make a positive path flow. This method can be used only in a small network problem. The generalized inverse matrix method and the minimum distance method proposed by Cho [10][12] can solve the large network problem. This two method provide a feasible solution space first, then process the sensitivity analysis [14]. Many of the solution methods release the assumption constantly to make the sensitivity analysis used in equilibrium network more widely. This research will unify those solution methods and wish to use mathematics to prove the relation between those methods.
Keywords: Equilibrium Network，Variational Inequality，Sensitivity Analysis

二、緣由與目的

繼 Wardrop[1]提出道路使用者均衡（User Equilibrium）之行為準則後，有關均衡路網流量的模式相繼而出。首先，Backmann[2] 等人以數學規劃法（Mathematical Programming，簡稱 MP）建立了第一個均衡路網流量模式。接下來，Aashtiani[3]摒棄了路段成本函數的 Jacobian 必須滿足對乘性之假設，建立了以路徑為變數的數學模式，稱為非線性互補

問題（Nonlinear Complementarity Problem，簡稱 NCP）。另外，Smith[4]及 Dafermos0[6]亦以路徑和路段為變數分別建立變分不等式模式（Variational Inequality Problem，簡稱 VIP）。而這三種求取均衡路網流量的數學模式，可以在某些條件下互相轉換[7]。

路網的敏感性分析（Network Sensitivity Analysis），是指路網上的流量因些微的路網容量改變（例如號誌的時制些微變動或是路段容量的稍微改變），或需求量的改變，對整個路網流量的影響程度。尤其是在進行不同政策分析（Policy Analysis）時，若有很多替代方案（Alternatives），不需要每次都要計算路網均衡，透過路網的敏感性分析，直接可得到分析結果。另外，敏感性分析可視為用路人受外在決策變數改變（如號誌時制改變）所產生的行為反應（如選擇另外路徑等）。因此在二階層路網設計時，一般我們無法掌握的下階層用路人對上階層決策變數所產生的反應數（Reaction Function），可以應用敏感性分析產生的結果，建立反應函數的近似函數（Approximation Function）。

Tobin[8]提出了變分不等式的敏感性分析的定理，但是，此定理卻無法直接應用在均衡路網流量的敏感性分析上。因為均衡路網流量的問題不滿足敏感性分析方法的唯一性條件（Uniqueness Condition）。在均衡路網中，路段（Arc）的流量是唯一的，但路徑（Path）的流量卻非唯一的。而敏感性分析是分析路徑的變動狀況，所以我們無法直接應用 Tobin 的定理。Tobin 和 Friesz[9]以線性規劃方法解決了唯一性的問題，由路段流量求出一組路徑流量後，對該組路徑流量作敏感性分析。但是，該研究所假設的非退化（Nondegenerate）特性，使得正流量的路徑數必須小於或等於正流量路段數加上起迄點數的和。這個假設只能應用於簡單或較小的路網，所以該方法的使用範圍並不廣泛。

卓訓榮[10]以廣義反矩陣方法將可行解空間由路徑轉到路段，再以路段的可行解空間分析敏感性問題，避免了唯一性的困擾。在轉換的過程中，假設存在一組 K 值，使得該組路徑解全為正值，但卻沒有提供找到 K 值的方法。卓訓榮和羅仕京[11]提出找 K 值的方法，發展出一套演算法以補足如何找尋上述 K 值的不足。卓訓榮等[12]亦提出最短距離方法，在已知一組路徑正流量解及微擾程度並不大的假設下進行可行解集合的轉換。其結果和廣義反矩陣完全相同，卻沒有求取 K 值的問題。

Tobin[8]提出變分不等式之敏感性分析，可以求得變分不等式的敏感性資訊。但是，均衡路網問題在轉換為變分不等式的型式時，由於路徑流量解的非唯一性，使得無法直接應用 Tobin 提出的變分不等式敏感性分析。因此，Tobin 和 Friesz[9]以線性規劃方法求得一組路徑正路徑，克服路徑非唯一性的問題，再利用正流量進行路網敏感性分析，但卻未說明如何找到一組非退化解。卓訓榮[10]的廣義反矩陣方法及卓訓榮等[12]的最短距離方法，克服了路徑非唯一性及如何找非退化解的問題。而卓訓榮和羅仕京[11]也為廣義反矩陣方法中的找尋 K 值的問題發展一套演算法。

以敏感性分析求解均衡路網的問題之文獻回顧到此告一段落。Tobin 和 Friesz[9]在線性規劃方法中已經證明了，均衡路網微之擾結果和路徑流量的選取無關，也就是不論選取哪一組路徑流量，所得到的路網微擾結果都一樣。然而，由文獻中的例題可以看出廣義反矩陣方法及最短距離方法也應有其特性，卻缺乏證明，本研究希望能利用數學方法證明此兩種方法亦存在路徑流量的獨立性。另外，廣義反矩陣方法與最短距離方法所求得的敏感性分析方程式非常相似。廣義反矩陣方法和最短距離方法都是先將可行解空間由路徑變數轉換成路段變數，使得路徑變數不存在，則路段流量符合定理中的唯一性。兩者的不同可以由式（1）與（2）看出

$$h_{£} = \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f^0 \\ T(£) \end{bmatrix} + \left[I - \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix} \right] k \qquad (1)$$

$$h(£) = \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f^0 \\ T(£) \end{bmatrix} + \left[I - \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta^0 \\ \Lambda \end{bmatrix} \right] h^* \qquad (2)$$

其中式（1）是由廣義反矩陣求得，式

（2）為最短距離法求得。兩者最大的差異就是向量k和向量h^*的不同，但兩者皆為常數。廣義反矩陣法是由列滿秩的條件下求得，而最短距離法是在一組已知的h^*下選擇h使h與h^*最接近。這是否意味著由廣義反矩陣方法所得到的可行解空間和以最短距離方法所得到的可行解空間是相同的，也是本研究希望探討的課題。

三、結果與討論

廣義反矩陣方法和最短距離方法都是先將可行解空間由路徑變數轉換成路段變數，使得路徑變數不存在，則路段流量符合定理中的唯一性。廣義反矩陣法是由列滿秩的條件下求得，而最短距離法是在一組已知的 h^*下選擇 h 使 h 與 h^*最接近。兩者所求得的敏感性分析結果是相同的。

此二式都是在相同的假設下求得，其結果都是一樣的。唯一的不同是最短距離方法是在一組已知的 h^*下選擇 h 使得 h 與 h^*最接近。而廣義反矩陣則是由任意的一組 k 求得 h。定理 1 證明了 k 和 h^*獨立於路段可行解空間，詳細證明請參考已刊登之期刊[15]。

定理 1：k 和 h^*獨立於路段可行解空間 $\Omega(\varepsilon)$。

因此，廣義反矩陣法中的常數項 k 和最短距離法中的路徑流量變數 h^*均獨立於路段可行解空間$\Omega(\varepsilon)$。我們也可以得到以廣義反矩陣法和以最短距離法所求得之路段可行解空間是相同的。接下來我們將證明路徑型態選取的獨立性。

我們關心的是將Δ切割成不同的路段／路徑投影矩陣Δ^0，經過微擾之後，是否會得到相同的結果。在進行敏感性分析時，對於所求得之路徑解分別為式（1）和式（2）。式中$\left(I-\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}\right)k$項及$\left(I-\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}\right)h^*$相對於$\varepsilon$為常數項，將不造成影響，所以會造成影響的只有$\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}f^0\\ T(\pounds)\end{bmatrix}$項。以下將證明選取相同的路段／路徑投影矩陣$\Delta$，切割成不同的$\Delta^0$，會得到相同的敏感性分析結果。

假設在同一個路網當中，已知起迄流量 T，經過均衡路網流量計算後，得到了一組唯一的路段流量 f。已知路徑與路段的轉換方程式為$\Delta h = f$，且 f 是唯一的；而路徑與起迄對轉換方程式為$\Lambda h = T$, T 亦是唯一的。我們也可以將這兩個方程式寫成：

$$\begin{bmatrix}\Delta_{m\times n}\\ \Lambda_{k\times n}\end{bmatrix} h_{n\times 1}=\begin{bmatrix}f_{m\times 1}\\ T_{k\times 1}\end{bmatrix} \tag{3}$$

而Δ又可以分割成$\begin{bmatrix}\Delta^0_{r\times n}\\ \Delta^r\end{bmatrix}$，使得$\begin{bmatrix}\Delta^0_{r\times n}\\ \Lambda_{k\times n}\end{bmatrix}$為列滿秩（Full Row Rank），$f^0$是相對應於$\Delta^0$的流量。得到

$$\begin{bmatrix}\Delta^0\\ \Lambda\end{bmatrix}_{(r+k)\times n} h(\pounds)_{n\times 1}=\begin{bmatrix}f^0\\ T(\pounds)\end{bmatrix}_{(r+k)\times 1} \tag{4}$$

由路段／路徑投影矩陣Δ切割成兩組不同路徑型態分別為$[\Delta^0_1]_{r\times n}$和$[\Delta^0_2]_{r\times n}$。f^0_1和 f^0_2為相對應於$[\Delta^0_1]_{r\times n}$和$[\Delta^0_2]_{r\times n}$的路段流量。如果式（5）成立，則路徑／路段投影矩陣的切割則不會影響敏感性分析結果。

$$\begin{bmatrix}\Delta^0_1\\ \Lambda\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}f^0_1\\ T(\pounds)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta^0_2\\ \Lambda\end{bmatrix}^-\begin{bmatrix}f^0_2\\ T(\pounds)\end{bmatrix} \tag{5}$$

定理 2 為獨立性的證明。我們先提出一個引，以供定理 2 之應用。引 1 及定理 2 之詳細證明請參考已刊登之期刊[15]。

引 1：若$\begin{bmatrix}[\Delta^0_1]_{r\times n}\\ [\Lambda]_{k\times n}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}[\Delta^0_2]_{r\times n}\\ [\Lambda]_{k\times n}\end{bmatrix}$為列獨立，則存在一矩陣 $B\in F^{(r+k)\times(r+k)}$，使得

$$[B]_{(r+k)\times(r+k)}\begin{bmatrix}[\Delta^0_1]_{r\times n}\\ [\Lambda]_{k\times n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\Delta^0_2]_{r\times n}\\ [\Lambda]_{k\times n}\end{bmatrix} \tag{6}$$

定理 2：選取不同的路段／路徑投引矩陣Δ^0所得到的微擾結果會相同。

四、計畫成果自評

卓訓榮提出的廣義反矩陣方法與最短

距離方法，其所求得的均衡路網之敏感性分析，路徑流量無非退化性的假設，但假設敏感性分析具有路徑之獨立性，且其結果已被應用在求解路網設計上。本研究即在證明廣義反矩陣方法和最短距離方法所求得之敏感性分析具有路徑流量和路徑選取的獨立性，補足以廣義反矩陣方法及最短距離方法求取路網敏感性分析之假設前提的證明，並已得到證明。

就一個大型的路網而言，均衡路網之路段流量是唯一解，但是路徑流量卻可以有無限多組解，因此，在進行路網設計或規劃時，選取哪一組路徑流量才能符合實際的情形，使規劃者困擾不已。廣義反矩陣法和最短距離法即是利用敏感性分析的方法，對於某些路段的拓寬或道路的新增，不需要每次都要計算路網均衡，透過路網的敏感性分析，直接可得到分析結果。而本研究證明了不論選取哪一組路徑，最後所得到的敏感性分析是一樣的。因此，我們只要找到任意一組正路徑流量解，就可以該組路徑流量進行敏感性分析。

本研究使得廣義反矩陣方法和最短距離方法的推導過程更加完整。如此，研究學者可以將此兩種路網敏感性分析的方法繼續應用在路網設計、交通控制等研究上。

五、參考文獻

[1] J. C. Wardrop, “Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research”, Proceeding, Institute of Civil Engineers, Vol. 1, pp. 325-378.（1952）

[2] M. J. Beckmann, C. B. McGuire and C. B. Winston, “Studies in the Economics of Transportation”, Yale University Press. New Haven, Conn. （1956）

[3] H. Z. Ashtiani, “The Multi-modla Traffic Assignment Problem”, Ph.D. Dissertation, M. I. T.（1979）

[4] M. J. Smith, “The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria,” Transportation Research B, Vol. 13, pp. 295-304, （1979）

[5] S. C. Dafermos, “The Traffic Assignment Problem for Multiclass-user Transportation Network”, Transportation Science, Vol. 6, pp. 73-87, （1972）

[6] S. C. Dafermos, “Traffic Equilibria and Variational Inequalities”, Transportation Science, Vol 14, pp. 42-54, （1980）

[7] **卓訓榮，李治輝，「靜態路網交通量指派模式與求解法之回顧」，運輸計畫季刊，第二十四卷，第三期，頁** 283-**頁** 298**，民國八十四年。**

[8] R. L. Tobin,"Sensitivity Analysis for Variational Inequalities ", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.48, pp. 191-204. (1986).

[9] R. L. Tobin and T. L. Friesz " Sensitivity Analysis for Equilibrium Network Flow, " Transpn Science, Vol.22 (4), pp.242-250. (1988).

[10] **卓訓榮，「以廣義反矩陣方法探討均衡路網流量的敏感性分析」，運輸計劃季刊，第二十卷，第一期，頁** 1-**頁** 14**，民國八十年。**

[11] **卓訓榮，羅仕京，「以廣義反矩陣的特性推導路徑非負流量之研究」，已被運輸學刊接受，民國八十七年。**

[12] **卓訓榮，「以最短距離方法探討均衡路網流量的敏感性分析」，交通大學運輸工程與管理學系研究報告，民國八十年。**

[13] **卓訓榮，「最短距離與廣義反矩陣敏感性分析方法之比較」，運輸計畫季刊，第二十一卷，第一期，頁** 23-**頁** 34**，民國八十一年。**

[14] **卓訓榮，「均衡路網流量之敏感性分析與路段、路徑空間轉換模式之探討」，國科會研究報告，國立交通大學，民國八十三年。**

[15] **卓訓榮，林培煒，「均衡路網流量敏感性分析路網資訊獨立性之研究」，運輸學刊，第十一卷，第四期，頁** 73-**頁** 86**，民國八十九年。**