

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫名稱：螺旋真空泵浦與螺旋壓縮機轉子系統化分析設計與製造(2/2)

計畫編號：NSC-89-2212-E-009-088

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

主持人：曾錦煥 交通大學機械系 教授

一、摘要

一 螺旋轉子對是一組以相同轉速相對運動之共軛運動對，由於為形成封閉之氣室，轉子輪廓線必須同時具有「原始創成曲線」與「被創成曲線」分佈於單一轉子上。本研究將利用微分幾何與齒輪原理之方法，系統化完成齒形輪廓線之合成。即經由僅給定數個特定參數值，就可讓所有曲線之幾何參數完全被決定，並滿足切線連續之條件。轉子曲面之接觸線及回吹孔面積之計算也將被完成。並針對轉子輪廓進行最佳化設計。

二、簡介

螺旋壓縮機轉子是由一對被包覆在密閉氣室中的公轉子及母轉子所組成，公轉子及母轉子在外形上相異。當轉子對旋轉時，氣體從吸入口 (suction nozzle) 被吸入轉子內葉形成的空間 (interlobe space)，由於公轉子與母轉子互相嚙合，當轉子對繼續旋轉，此空間便被封閉，氣體便不會洩漏。在轉子運轉過程中，轉子對的嚙合點不斷地延旋轉軸向，由吸入口往排出口前進，嚙合點愈往前進，上述空間便愈來愈小，故氣體的壓力也愈來愈大，而達成氣體壓縮的效果。在上述空間延旋轉軸向前進時，下一個空間也開始形成，送進新的氣體，如此不斷的循環，構成完整的壓縮過程。為了避免氣體在壓縮的過程中洩漏，公轉子與母轉子必須是共軛運動對 (conjugate)，所以在生產轉子對的過程中，對於精度的要求是非常高的。

傳統上，螺旋壓縮機轉子的基本外形是由一些原始創成曲線 (original generating curves) 構成，而這些原始創成曲線又是由點、直線或是曲線所適當地分段組成。由於公轉子與母轉子必須是共軛運動對，若其中之一的的外形是由多條直線或曲線段所組成的原始創成曲線，則另一個轉子的外形也必定是由多條直線或曲線段所構成的被創成曲線 (generated curves)。在原始創成曲線與被創成曲線上，都不允許有尖點存在，亦即代表原始創成曲線與被創成曲線本身是連續的，此外它們的一階微分也必須是連續的，這使得設計者在設計原始創成曲線時的難度變得相當地高。在幾何理論上，兩條共軛的曲線(面)必須滿足嚙合方程式 (equation of meshing)，亦即：在共軛點上，兩條共軛曲線(面)的

相對速度方向會垂直於共軛點的法向向量。故，兩條嚙合曲線(面)既不會分離，也不會互相嵌入。在設計轉子對的外形時，即是以一原始創成曲線(面)為基礎，利用座標轉換將此原始創成曲線(面)轉換至與之共軛的轉子的運動座標上，最後利用數值方法求「經過轉換的創成曲線(面)與上述嚙合方程式的聯立解」，解得的結果即為被創成曲線(面)。由於創成曲線與被創成曲線都被要求連續及一階微分連續，故決定原始創成曲線上之設計參數的難度非常高。在過去，這個決定設計參數的工作都是利用試誤法達成，而這篇文章則提出了一個系統化決定設計參數的方法，藉由這個方法，設計者可以尋找最佳的設計參數，並利用它們合成及產生螺旋壓縮機的轉子外形。

三、轉子節面輪廓之創成

本文將以圖 1 的輪廓線為例，說明如何利用一有系統方法來合成壓縮機螺旋轉子對之輪廓線，其中 S_a ， S_b 和 S_f 分別代表公轉子、母轉子和固定框架之座標系。

公轉子具有五個螺旋葉片和相同數目的槽面，其節圓半徑為 r_{mb1} ，旋轉軸則位在 O_a 上；母轉子具有六個肋部，其節圓半徑為 r_{fb2} ，旋轉軸則位在 O_b 上。如圖 1 所示，公轉子的某一齒是由三條原創成 (generating) 曲線 $\mathbf{r}_{c1}^{(a)}$ ， $\mathbf{r}_e^{(a)}$ ， $\mathbf{r}_{c2}^{(a)}$ ，以及一條被創成 (generated) 曲線 $\mathbf{r}_{c3,conj}^{(a)}$ 所組成的；母轉子則由一條原創成曲線 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 和三條被創成之曲線 $\mathbf{r}_{c1,conj}^{(b)}$ ， $\mathbf{r}_{e,conj}^{(b)}$ ， $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 所構成的。上標(a)和(b)代表曲線向量表示在 S_a 或 S_b 座標系。 $\mathbf{r}_{c1}^{(a)}$ ， $\mathbf{r}_{c2}^{(a)}$ ，和 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 是分別以 O_{c1} ， O_{c2} ，和 O_{c3} 為圓心的圓弧曲線(circular arc)； $\mathbf{r}_e^{(a)}$ 是橢圓的某一段，其一端點與 $\mathbf{r}_{c1}^{(a)}$ 和 $\mathbf{r}_{c2}^{(a)}$ 連續相切； $\mathbf{r}_{e,conj}^{(b)}$ ， $\mathbf{r}_{c1,conj}^{(b)}$ ， $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 和 $\mathbf{r}_{c3,conj}^{(a)}$ 是分別與 $\mathbf{r}_e^{(a)}$ ， $\mathbf{r}_{c1}^{(a)}$ ， $\mathbf{r}_{c2}^{(a)}$ 和 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 分別嚙合之被創成曲線。

3.1 公轉子之橢圓曲線 \mathbf{r}_e 的公式

如圖 1 所示，表示在 S_a 座標系上的公轉子之橢圓曲線 $\mathbf{r}_e^{(a)}$ 可以透過(1)橢圓長軸與短軸之長度 l 和 s ，(2) 公轉子中心 O_a 至橢圓中心之距離，以及(3)橢圓

的角參數 μ_e 等來表示。母轉子節面之輪廓 $\mathbf{r}_{e,conj}^{(b)}$ 則可以依據齒輪原理與座標轉換而求得。

3.2 公轉子之圓弧曲線 \mathbf{r}_{c1} 和 \mathbf{r}_{c2} 的公式

表示在 S_a 座標系上的公轉子之圓弧曲線 \mathbf{r}_{c1} 和 \mathbf{r}_{c2} 的公式，可以透過(1) $\mathbf{r}_i^{(a)}$ 的半徑 r_i ，(2)是表示在 S_a 座標系之圓弧曲線 $\mathbf{r}_i^{(a)}$ 的圓心座標 (x_i, y_i) ，以及(3)圓弧曲線的角參數 μ_i 來表示。同樣的，母轉子節面之輪廓 $\mathbf{r}_{i,conj}^{(b)}$ 則可以依據齒輪原理與座標轉換而求得。

3.3 母轉子之圓弧曲線 \mathbf{r}_{c3} 的公式

表示在 S_b 座標系上的母轉子之圓弧曲線 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 的公式，可以透過(1) $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 的半徑 r_{c3} ，以及(2)圓弧曲線 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 的圓心座標 (x_{c3}, y_{c3}) 來描述。並透過齒輪原理和座標轉換方法，可以求得表示在 S_a 座標系的公轉子節面輪廓 $\mathbf{r}_{c3,conj}^{(a)}$ 。

四、轉子節面輪廓之合成

雖然原創成曲線和被創成曲線可以透過上面公式來導出，然而從設計的觀點，很難決定哪一幾何參數必須先確定，哪些參數是被計算出來的，尤其是 r_{c3} 會影響 $\mathbf{r}_{c3,conj}$ 的端點與 \mathbf{r}_{c2} 相交時是否仍然保持相切。

除此之外， $\mathbf{r}_{c2,conj}$ 和 \mathbf{r}_{c3} 之相交點也必須保持相切。因此，本文將會利用最佳化工具來求得輪廓線之改善參數值。

在進行合成之前，一些幾何參數必須事先給定：

1. N_1, N_2 ：分別代表公母轉子之齒數；
2. C ：公母轉子旋轉軸之間的距離；
3. l, s ：分別代表橢圓 \mathbf{r}_e 的長軸與短軸之長度；
4. r_{c2} ：圓弧曲線 \mathbf{r}_{c2} 之半徑；
5. μ_{m1} ：公轉子的某個齒之起始角度；
6. d ：公轉子中心 O_a 至橢圓中心的距離。

其餘的幾何數值可以依據下列步驟得到：

步驟1：圓弧曲線 \mathbf{r}_{c1} 的參數

從圖 1 可以知道， \mathbf{r}_{c1} 的半徑可以透過 d, s 和 μ_{m1} 三個參數計算而出。

步驟2：圓弧曲線 \mathbf{r}_{c2} 和 \mathbf{r}_{c3} 的參數

依據參考文獻，圓弧曲線 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 的圓心 O_{c3} 應該位於在母轉子中心 O_b 和頂點 $F(x_{ff}, y_{ff})$ 之間的極線 (limiting ray) 上。為了使位於母轉子的被創成曲線 $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 可以連續且與 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 相切，圓弧曲線 $\mathbf{r}_{c3}^{(b)}$ 的圓心 O_{c3} ： $(x_{oc3}^{(b)}, y_{oc3}^{(b)})$ 必須滿足一條件，該條件就是 O_{c3} 至 F 的距離必須與 O_{c3} 至 $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 的距離相等。依據(1)此等距離條件和(2)垂直於 $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 之線的方程式，可

以進一步解出被創成的曲線 $\mathbf{r}_{c2,conj}^{(b)}$ 之參數 μ_{c2} ， μ_1 和圓心 O_{c3} 之座標。所有的幾何參數值都可以透過以上的分析而系統的求出。

五、轉子曲面之創成

轉子曲面之形成可以藉由將轉子之輪廓對旋轉軸進行螺旋運動(screw motion)。

5.1 轉子曲面之接觸線

當兩轉子啮合時，轉子曲面 1 和曲面 2 的接觸線可以之描繪可以透過曲面方程式和啮合方程式之聯立(在啮合點位置，相對速度與法向量互相垂直)來表示。藉由觀察不同的 μ_1 和 μ_2 ，可以得到位於轉子曲面 1 和曲面 2 上的接觸線群(family of contact lines)。圖 2 顯示了位在公轉子上不同旋轉角度(0°, 15°, 30°)之接觸線。

5.2 作用線

從轉子的端面($X_f - Y_f$ 平面)觀察所得之接觸線的投影(projections)，如圖 3(a)所示，是利用座標轉換方式將接觸點轉換至固定座標系 S_f 而求得的。此投影稱之為作用線。圖 3(b)和 3(c)分別為位在 $Y_f - Z_f$ 平面和 $X_f - Z_f$ 平面之接觸線。不同線型代表接觸線位在不同的轉子曲面啮合區(surface patches)。這些接觸線在轉子啮合過程中形狀會維持不變，但會沿著 Z_f 軸方向移動。由於接觸線上的每一點之座標都可以透過上列式子求出，因此接觸線的真正長度可以利用數值方法計算而出。接觸線的長度代表洩漏線(leakage line)之長度，而此長度是決定於轉子之輪廓外型。

5.3 回吹口面積之計算

回吹口是由機殼尖端(housing cusp)和轉子頂端所形成之小三角形區域。圖 4 是機殼與轉子之節面。公轉子的一個葉片接觸底部的機殼尖端與啮合轉子，因此從孔穴 I 至孔穴 II 間產生了洩漏路徑。所謂的洩漏三角形並未在卡氏座標系，它僅能透過曲線(curvilinear)座標來加以定義。圖 5 是在一典型螺旋壓縮機中的洩漏三角形。洩漏三角形雖然可以實際看的見，但是很難去定義它，有許多論文都在探討回吹口之定義和計算其面積。

本文是利用轉子側腹(flank)上的三點和機殼尖點來定義洩漏三角形。洩漏三角形的第一個頂點是位於當公轉子側腹後翼(trailing flank)在分離邊緣(verge of separating)上時的一點(圖 4 和 5 的第 1 點)；洩漏三角形的第二個頂點是位於與下方尖端對齊之母轉子側腹後翼上的一點(圖 4 和 5 的第 2 點)；洩漏三角形的第三個頂點可以由兩轉子間之接觸點來定義(圖 4 和 5 的第 3 點)。當這三點之作標定義出後，回吹口之面積即可利用數值方法計算出來。

六、轉子輪廓之最佳化設計

藉由介面整合軟體(Yang 與曾錦煥, 1993)之幫助，Mathematica 3.0 與最佳化工具 MOST 1.1(曾錦煥

等人, 1993)兩者之計算結果可自動完成最佳化程序, 且在 MOST 當中, 考量到經度、可靠度與效率, 取連續二次方程式(SQP)作為單目標最佳化解題核心。本文中最佳化之目標為減少接觸線長度與回吹孔面積, 考慮以下三種情況:

一: 前文提及之合成程序中, 取 l , s , r_{c2} , n_{ml} , 與 d 這五個變數作為最小化接觸線長度之設計變數。表 1 與圖 6 列出改善之結果, 接觸線長度由 139.63 mm/mesh 縮減為 110.85 mm/mesh; 然而回吹孔面積卻由 6.64 mm² 增加到 28.16 mm²。

二: 與第一種情形同理, 同樣取 l , s , r_{c2} , n_{ml} , 與 d 這五個變數作為設計變數, 但最小化目標為回吹孔之面積。改善之結果列於圖 7 與 1 中, 回吹孔面積由 6.64 mm² 降為 2.63 mm², 但接觸線長度由 139.63 mm/mesh 增加至 146.84 mm/mesh。

由第一與第二情形可知, 接觸線增長則會使回吹孔面積縮小(Singh and Bowman, 1990; Yoshimura, 1990), 這兩種情況的目標函數本質上是相斥的, 是典型的多目標函數問題。因此選用限制法(Constraint Method, Neufville, 1990)來描述此多目標問題, 其基本觀念為, 最佳化其中單一目標時, 將其他目標當作限制條件, 因此多目標問題即可轉化為單目標問題, 如下第三種情形所示。

三: 取同樣這五個設計變數, 並將問題重新定義為單目標最佳化問題, 定義其中之目標函數為最小化接觸線長度, 並拘限其回吹孔面積必須小於 3 mm²。結果示於圖 8 與表 1 中, 接觸線長度由 139.63 mm/mesh 縮減為 124.67 mm/mesh, 回吹孔面積為 2.72 mm², 條件滿足。本例中接觸線長與回吹孔面積同時降低其值, 確實可使螺旋壓縮機之效能提升。

七、結論

本文導出完整的螺旋轉子輪廓創成過程, 並提出一種系統化的輪廓線合成方法。利用商用套裝分析軟體 Mathematica 的符號及數值運算能力, 自動的推導及簡化方程式, 經由僅給定數個特定參數值, 就可讓所有曲線之幾何參數完全被決定, 並滿足切線連續之條件。另外也完成轉子曲面之接觸線及回吹孔面積之計算。最後針對三種狀況進行轉子輪廓最佳化設計, 當

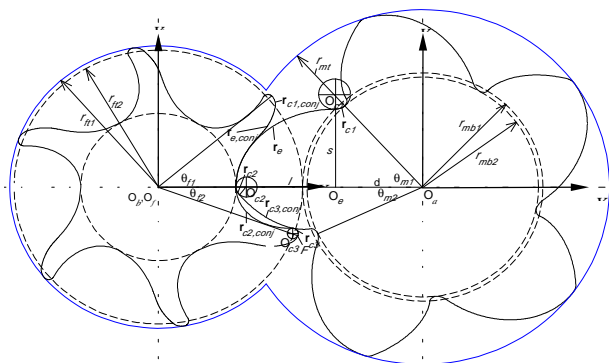


圖 1 轉子輪廓之幾何關係

令接觸線長度為目標函數; 回吹孔面積為限制條件, 結果顯示接觸線長度及回吹孔面積能同時縮小, 這對螺旋壓縮機轉子輪廓最佳化提供了一個有用的建議。

參考文獻

Su, S.H., and [Tseng, C.H.](#), "Synthesis and Optimization for Rotor Profiles in Twin Rotor Screw Compressors," ASME, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, September 2000.

	初始設計	情況一	情況二	情況三
目標函數		接觸線	回吹孔面積	接觸線長
限制條件		$r_{c1} \geq 0$	$r_{c1} \geq 0$	回吹孔面積 ≤ 3.00 , $r_{c1} \geq 0$
設計變數				
l (mm)	37.33	35.17	38.53	37.34
s (mm)	31.00	31.58	31.59	35.00
r_{c2} (mm)	4.00	4.098	3.69	3.192
n_{ml}	48	45	47.25	48
d (mm)	33.33	31.70	34.18	33.34
接觸線長 (mm/mesh)	139.63	110.85	146.84	124.67
回吹孔面積 (mm ²)	6.64	28.16	2.63	2.72

表 1 三情況中之最佳化解

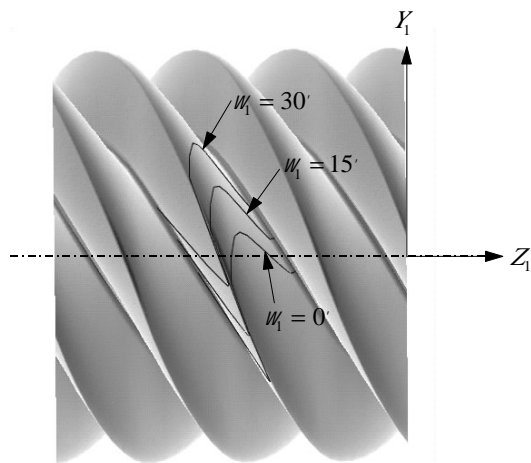


圖 2 位於公轉子曲面上之接觸線

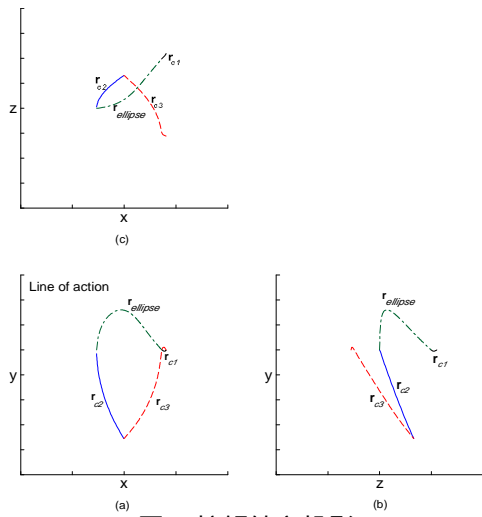


圖 3 接觸線之投影

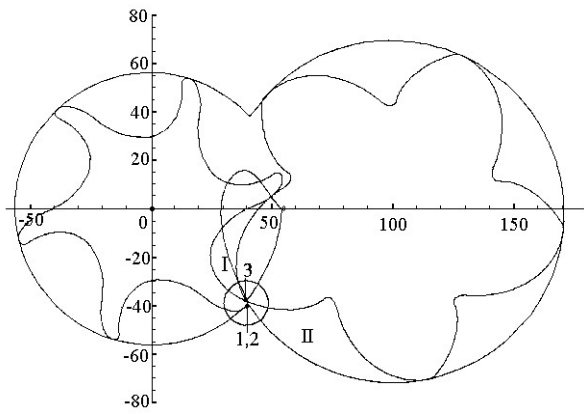


圖 4 從回吹口處觀看之端面

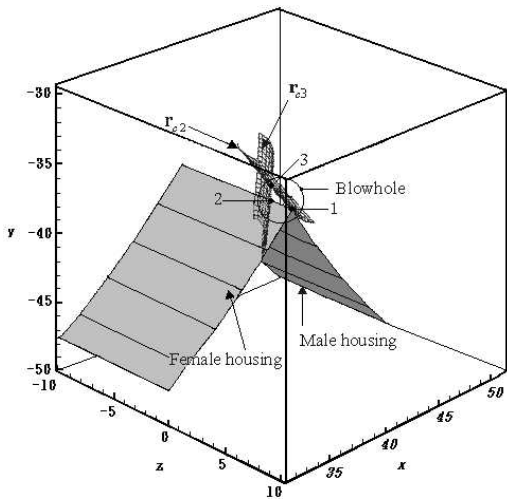


圖 5 洩漏三角形之定義

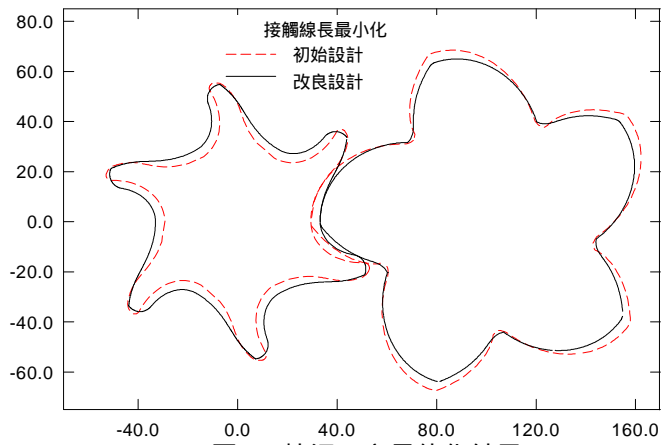


圖 6 情況一之最佳化結果

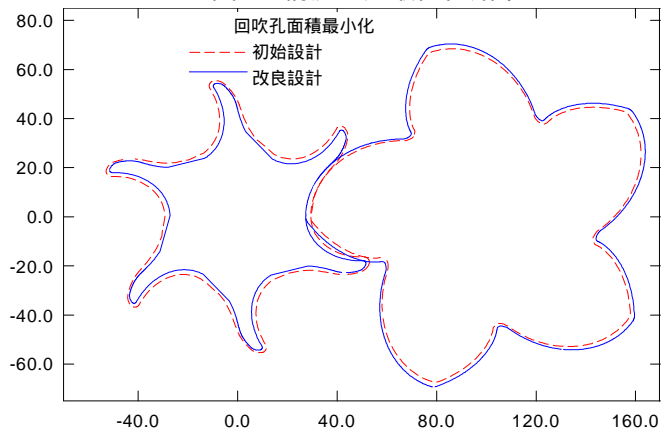


圖 7 情況二之最佳化結果

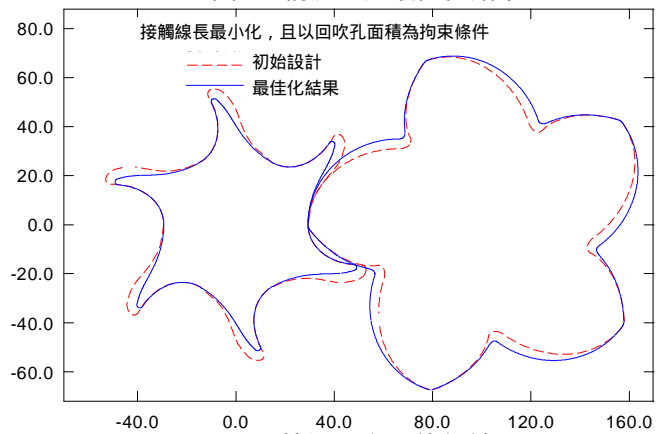


圖 8 情況三之最佳化結果