

目錄

	頁次
目錄.....	1
前言.....	5
文獻回顧.....	6
第一章 解析推導土壤與結構物之互制系統.....	7
1-1 圓柱座標三維波動方程式.....	7
1-2 傳遞矩陣.....	10
第二章 軸對稱沉埋基礎振動的解析解.....	15
2-1 外部區域.....	16
2-2 內部區域.....	19
2-3 垂直界面模態參與係數.....	25
2-4 超越方程式求解根.....	26
第三章 阻抗矩陣.....	29
3-1 牽引力的假設分佈模式.....	29
3-2 阻抗矩陣的推導.....	31

第四章 剛性圓板之扭轉振動.....	35
4-1 拉夫模態的頻率方程式.....	35
4-2 特解的模態波數.....	37
4-3 模態函數.....	37
4-4 B矩陣.....	38
4-5 D矩陣.....	39
4-6 K矩陣.....	39
4-7 數值結果討論.....	40
第五章 剛性圓板之垂直振動.....	42
5-1 雷利模態的頻率方程式.....	42
5-2 特解的模態波數.....	43
5-3 模態函數.....	43
5-4 B矩陣.....	45
5-5 D矩陣.....	46
5-6 K矩陣.....	46
5-7 數值結果討論.....	47
第六章 剛性圓板沉埋基礎之扭轉振動.....	48

6-1	拉夫模態的頻率方程式.....	49
6-2	特解的模態波數.....	50
6-3	模態函數.....	51
6-4	B矩陣.....	52
6-5	D矩陣.....	53
6-6	K矩陣.....	53
6-7	數值結果討論.....	54
第七章 剛性圓板沉埋基礎之垂直振動.....		56
7-1	拉夫模態的頻率方程式.....	56
7-2	特解的模態波數.....	57
7-3	模態函數.....	57
7-4	B矩陣.....	59
7-5	D矩陣.....	59
7-6	K矩陣.....	60
7-7	數值結果討論.....	62
第八章 結論與展望.....		63

參考文獻	65
附表.....	67
附圖.....	69

前言

台灣位於菲律賓板塊與歐亞大陸板塊交接處，也就是地處環太平洋地震帶西側之中部附近，由於板塊運動活躍，因而地震頻仍加上近年來九二一大地震所造成重大災害。因此在進行結構動力分析時，地震力的考量是不容忽視。早期研究結構物動態行為時，往往假設結構物建築於剛性岩盤上，意即將土壤視為剛性，因此將結構系統的動態行為完全取決於結構本身的特性，土壤的性質並未考量進去。這與實際土壤-結構系統的行為有所不同，特別是當結構物勁度大而座落於軟弱土層時，土壤-結構互制 (Soil-structure interaction) 的行為必須更加瞭解。

文獻回顧

土壤和結構物的互制系統在地震分析中扮演很重要的角色，一般都以近似方法處理土壤和結構物互制系統，Tzong 和 Penzien [1] 的混合模式法模式利用次結構的方法來分析計算土壤和結構物互制的影響。在這個模式中遠域的半無限域的土壤由阻抗矩陣來表示。因此，早期發展使用在分析方面，對於半無限域的土壤介質之研究包含，Lysmer 和 Kuhlemeyer [2]，White, Valliapan 和 Lee [3] 的黏滯阻尼邊界，White [4] 的傳遞邊界，Ahmad 和 Banerjee [5] 的邊界元素和 Chow 和 Smith [6] 的無限元素。二十年前無限元素法的導出，起源於 Ungless [8] 和 Bettles [9]，這個概念與有限元素法很相像。但是這種方法則需要龐大的計算量由 Yun 和 Kim [10] 發展出來。邊界元素法的好處在於只需離散邊界的元素並大大的減少計算量，Pak 和 Guzina [11] 邊界元素方法利用 Green' s function 當成基本解來建構土壤的阻抗矩陣，但是美中不足的是必需處理奇異值與邊界不連續的問題。為了免除這種情形，Liou [12] 導出層狀土壤之解析解而免除使用 Green' s function。

本計畫書將使用層狀土壤之解析解，發展出一套土壤結構互制系統的程式。程式的發展完成與數值的分析中：會面臨到彈性波在分層土壤之間傳遞的問題並且彈性波數值的計算將被解析與預測，對於分層土壤與結構互制系統中的彈性波中的超越函數也將會被解析與數值的推導出。將求得的彈性波數值代入土壤內域與外域的模態來求得各土層之間的形狀函數，並且透過土壤的形狀函數的求得來建構土壤系統對基礎的阻抗勁度矩陣。最後將推導結合結構與阻抗矩陣之運動方程式並寫成一土壤-結構互制行為之分析程式。

第一章 解析推導土壤與結構物之互制系統

1.1 圓柱座標三維波動方程式

一般對於均質、等向、完全彈性的介質而言，三維彈性波傳波動方程式，在圓柱座標系統下的方程式

$$\begin{aligned} -\rho \ddot{u}_r &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2G}{r} \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} + 2G \frac{\partial \Omega_\theta}{\partial z} \\ -\rho \ddot{u}_z &= (\lambda + 2G) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2G}{r} \frac{\partial (r\Omega_\theta)}{\partial r} + 2G \frac{\partial \Omega_r}{\partial \theta} \\ -\rho \ddot{u}_\theta &= (\lambda + 2G) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2G \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} + 2G \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (1-1)$$

其中 u_r 、 u_z 和 u_θ 分別為 r 、 z 和 θ 三方向上的位移， λ 和 G 為複數型態的 *Lame's* 常數， ρ 為質量密度， ω 為振動頻率，

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (1-2)$$

是為體積膨脹函數(Dililation)及

$$\begin{aligned} 2\Omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 2\Omega_r &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ 2\Omega_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (1-3)$$

是為旋轉函數(Rotation)。在土壤與結構物的互制分析中，我們將所有系統分成遠域與近域來探討。圖二表示結構沉埋於土壤的互制系統，在此系統中近域的部分選取結構物和底下的土壤，遠域部份即為結構物底下以外的土壤。

為了解 (1-1) 式 Sezawa [14] 將半空間的位移場對方位角做傅氏展開 (Fourier series expansion) 即

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_n \bar{u}_r^n \begin{pmatrix} \text{Cos}n\theta \\ \text{Sinn}\theta \end{pmatrix} \\ \sum_n \bar{u}_z^n \begin{pmatrix} \text{Cos}n\theta \\ \text{Sinn}\theta \end{pmatrix} \\ \sum_n \bar{u}_\theta^n \begin{pmatrix} -\text{Sinn}\theta \\ \text{Cos}n\theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (1-4)$$

在彈性波考量往下傳的情況，將 (1-4) 代入 (1-1) 波動方程式可解得

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_r^n(r, z) \\ \bar{u}_z^n(r, z) \\ \bar{u}_\theta^n(r, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kH'_n & \frac{n}{r}H_n & -v'H_n \\ -kvH_n & 0 & k^2H_n \\ \frac{n}{r}kH_n & H'_n & -v'\frac{n}{r}H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-vz} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-v'z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-v'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}_n \quad (1-5)$$

由於存在土壤之間不僅只有入射波也要同時考量反射波。將反射波考量進來利用分離變數的技巧，解得第 n 項的傅氏級數分量為

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^n_r(r, z) \\ \bar{u}^n_z(r, z) \\ \bar{u}^n_\theta(r, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) \\ 0 & kH_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 & H'_n(kr) \end{bmatrix} K_1 e A \quad (1-6)$$

其中

$$K_1 = \begin{bmatrix} k & k & 0 & 0 & -v' & v' \\ -v & v & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

而 $e = \text{diag}(e^{-vz}, e^{vz}, e^{-v'z}, e^{v'z}, e^{-v'z}, e^{v'z})$, $v = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_p^2}\right)}$, $v' = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega^2}{c_s^2}\right)}$, $c_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2G)}{\rho}}$

和 $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 分別為壓力波和剪力波波速, k 為水平方向的波數, $H_n(kr) = H_n^{(2)}(kr)$

為第二類 Hankel 函數, $H'_n(kr) = \frac{d(H_n(kr))}{dr}$, $A = (A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2)^T$ 為未知常數。

將 (1-6) 式乘上彈性係數矩陣, 可以求得應力場的第 n 項的傅氏級數分量為

$$\begin{bmatrix} \tau_{rz}(r, z) \\ \sigma_{zz}(r, z) \\ \tau_{\theta z}(r, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) \\ 0 & kH_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 & H'_n(kr) \end{bmatrix} K_2 e A \quad (1-8)$$

其中

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2kGv & 2kGv & 0 & 0 & G(2k^2 - k_\beta^2) & G(2k^2 - k_\beta^2) \\ G(2k^2 - k_\beta^2) & G(2k^2 - k_\beta^2) & 0 & 0 & -2kGv' & 2kGv' \\ 0 & 0 & -Gv' & Gv' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

而 $k_\beta = \frac{\omega}{c_s}$ 。

1.2 傳遞矩陣

將 (1-6) 與 (1-8) 式寫成一式，並且括大成 6×6 的矩陣可得

$$Y = \hat{H}(r) \begin{bmatrix} E' & 0 \\ 0 & E'' \end{bmatrix} e(z) B \quad (1-10)$$

或者

$$Y = \hat{H} E e(z) B \quad (1-11)$$

其中 $Y = (u_r, u_z, \tau_{rz}, \sigma_{zz}, u_\theta, \tau_{\theta z})^T$ 為位移-應力向量， $B = (A_1, A_2, C_1, C_2, B_1, B_2)^T$ ，且

$$E' = \begin{bmatrix} k & k & -v' & v' \\ -v & v & k & k \\ -2kGv & 2kGv & G(2k^2 - k_\beta^2) & G(2k^2 - k_\beta^2) \\ G(2k^2 - k_\beta^2) & G(2k^2 - k_\beta^2) & -2kGv' & 2kGv' \end{bmatrix} \text{ 和 } E'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Gv' & Gv' \end{bmatrix},$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H'_n(kr) & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 \\ 0 & kH_n(kr) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H'_n(kr) & 0 & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) \\ 0 & 0 & 0 & kH_n(kr) & 0 & 0 \\ \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 & 0 & 0 & H'_n(kr) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 & 0 & H'_n(kr) \end{bmatrix}$$

由於層狀土壤中，兩層水平交界面上的位移和應力為連續，若將作標系統 Z 軸平移至土層的第 $(j-1)$ 層的表面可得

$$Y_{j-1} = \hat{H}E_j e(z)B \quad (1-12)$$

因此可知未知系數 B 為

$$B = e(-z)E_j^{-1}\hat{H}^{-1}Y_{j-1} \quad (1-13)$$

若第 $j-1$ 層土層表面與第 j 層表面相差厚度 h_j ， h_j 即為第 j 層土壤厚度，因此可知第 j 層的表面應力位移向量為

$$Y_j = \hat{H}E_j e(z + h_j)B \quad (1-14)$$

將 (1-13) 式代入 (1-14) 式將未知系數 B 消除，可得第 j 層土壤與第 $j-1$ 層土壤應力位移向量之間的關係(圖一)為

$$Y_j = \hat{H}E_j e(h_j)E_j^{-1}\hat{H}^{-1}Y_{j-1} \quad (1-15)$$

或者

$$Y_j = \hat{H}a_j\hat{H}^{-1}Y_{j-1} \quad (1-16)$$

其中

$$a_j = E_j e(h_j) E_j^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

為第 j 層的傳遞矩陣 (Transfer matrix)，此矩陣中

$$a_1 = \begin{bmatrix} \frac{2k^2}{k_\beta^2}(CH-CH')+CH & -\frac{k}{k_\beta^2}[(2k^2-k_\beta^2)\frac{SH}{v}-2v'SH'] & \frac{-1}{Gk_\beta^2}(v'SH'-k^2\frac{SH}{v}) & -\frac{k}{Gk_\beta^2}(CH-CH') \\ \frac{k}{k_\beta^2}[2vSH-(2k^2-k_\beta^2)\frac{SH'}{v}] & CH-\frac{2k^2}{k_\beta^2}(CH-CH') & \frac{k}{Gk_\beta^2}(CH-CH') & -\frac{1}{Gk_\beta^2}(vSH-k^2\frac{SH'}{v}) \\ G(\frac{4k^2}{k_\beta^2}vSH-\frac{(2k^2-k_\beta^2)}{k_\beta^2}(\frac{SH'}{v})) & \frac{-2kG}{k_\beta^2}(2k^2-k_\beta^2)(CH-CH') & \frac{2k^2}{k_\beta^2}(CH-CH')+CH' & -\frac{k}{k_\beta^2}(2vSH-(2k^2-k_\beta^2)\frac{SH'}{v}) \\ \frac{2kG}{k_\beta^2}(2k^2-k_\beta^2)(CH-CH') & G(-\frac{(2k^2-k_\beta^2)^2}{k_\beta^2}\frac{SH}{v}+\frac{4k^2}{k_\beta^2}v'SH') & \frac{k}{k_\beta^2}((2k^2-k_\beta^2)\frac{SH}{v}-2v'SH') & CH-\frac{2k^2}{k_\beta^2}(CH-CH') \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} CH' & \frac{SH'}{Gv'} \\ Gv'SH' & CH' \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

上面的矩陣中， $CH = cush(vh_j)$ ， $CH' = \cosh(v'h_j)$ ， $SH = \sinh(vh_j)$ 和

$SH' = \sinh(v'h_j)$ ，因此我們可以了解傳遞矩陣融合了土壤的特性，包括土壤的厚

度和 *Lame's* 常數，若土層有 m 層的水平交界面，透過傳遞矩陣(1-16)式利用

交界面上位移-應力向量連續，我們可得到第 m 層剛性基底的位移-應力向量用

自由表面的位移-應力向量表示為：

$$Y_m = \hat{H} a_m a_{m-1} \cdots a_2 a_1 \hat{H}^{-1} Y_0 = \hat{H} T_m \hat{H}^{-1} Y_0 \quad (1-20)$$

其中 $T_m = a_m a_{m-1} \cdots a_1$ 為 m 層土壤時的傳遞矩陣。因此只要求得表面位移-應力模態 $H^{-1}Y_0$ 每層某一點位移和應力可由 (1-6) 式和 (1-8) 式求得。

在圓柱座標系統下內域及外域垂直交界面上 σ_{rr} , τ_{rz} 和 $\tau_{r\theta}$ 的第 n 項的傅氏級數分量為：

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(z) \\ \tau_{rz}(z) \\ \tau_{r\theta}(z) \end{cases} = (H_1 F_1 + H_2 F_2) e(z) B \quad (1-21)$$

其中

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & kH_n & 0 \\ H'_n & 0 & \frac{n}{r}H_n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} (-\frac{H'_n}{r} + \frac{n^2}{r^2}H_n) & (\frac{n}{r}H'_n - \frac{n}{r^2}H_n) \\ 0 & 0 \\ (\frac{n}{r}H'_n - \frac{n}{r^2}H_n) & (-\frac{H'_n}{r} + (\frac{n^2}{r^2} - \frac{k^2}{2})H_n) \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -2kGv & 2kGv & G(2k^2 - k_\beta^2) & G(2k^2 - k_\beta^2) & 0 & 0 \\ -G(2v^2 + k_\beta^2) & -G(2v^2 + k_\beta^2) & 2kGv' & -2kGv' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Gv' & Gv' \end{bmatrix}$$

和

$$F_2 = \begin{bmatrix} 2kG & 2kG & -2Gv' & 2Gv' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 2G \end{bmatrix}。$$

將 (1-13) 式代入 (1-21) 式將未知係數 B 消除，可得第 j 層土壤在深度 z 的應力位移向量之間的關係為

$$t_j(z) = (H_1 F_1 + H_2 F_2) e_j(z - h_{j-1}) E_j^{-1} a_{j-1} \cdots a_1 \hat{H}^{-1} Y_0 \quad (1-22)$$

其中 $t_j(z) = (\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta})^T \Big|_{r=a_0}$ ， a_0 為圓柱的半徑，(1-22) 式， F_i ， $e_j(z - h_{j-1})$ 和 E_j^{-1} 可表示成

$$F_1 e(z - h_{j-1}) E_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{G}{k_\beta^2} (4k^2 v SH - (2k^2 - k_\beta^2)^2 \frac{SH'}{v'}) & -\frac{2kG}{k_\beta^2} (2k^2 - k_\beta^2) (CH - CH') & & & \\ \frac{2kG}{k_\beta^2} (-(2v^2 + k_\beta^2) CH + (2k^2 - k_\beta^2) CH') & \frac{G}{k_\beta^2} ((2k^2 - k_\beta^2)(2v^2 + k_\beta^2) \frac{SH'}{v'} - 4k^2 v' SH') & & & \\ & 0 & & & 0 \\ \frac{2k^2}{k_\beta^2} (CH - CH') + CH' & \frac{k}{k_\beta^2} ((2k^2 - k_\beta^2) \frac{SH'}{v'} - 2v SH) & 0 & 0 & \\ \frac{k}{k_\beta^2} (2v' SH' - (2v^2 + k_\beta^2) \frac{SH}{v}) & \frac{1}{k_\beta^2} ((2v^2 + k_\beta^2) CH - 2k^2 CH') & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & Gv' SH' & CH' \end{bmatrix}$$

和

$$F_2 e(z - h_{j-1}) E_j^{-1} = \begin{bmatrix} 2G (\frac{2k^2}{k_\beta^2} (CH - CH') + CH') & \frac{2kG}{k_\beta^2} (2v' SH' - (2k^2 - k_\beta^2) \frac{SH}{v}) & & & \\ & 0 & & & 0 \\ \frac{2}{k_\beta^2} (k^2 \frac{SH}{v} - v' SH') & -\frac{2k}{k_\beta^2} (CH - CH') & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 2GCH' & 2 \frac{SH'}{v'} \end{bmatrix}$$

第二章 軸對稱沉埋基礎振動的解析解

土壤與結構物的互制分析中，我們將問題分成遠域與近域的邊界條件來探討，因此我們會把注意力集中在兩者交界面上。圖二表示結構沉埋於土壤的互制系統，在此系統中近域的部分選取結構物和底下的土壤，遠域部分即為結構物底下以外的土壤，因此我們將結構物與土壤分開（圖三）， S_1 、 S_2 在交界面上分別受到 $t_{b1}e^{i\omega t}$ 和 $t_{b2}e^{i\omega t}$ 的外應力作用，這樣的問題 Liou [12] 將土壤分成外部區域（Exterior domain）和內部區域（Interior domain）兩部份來求解並且對 S_1 、 S_2 交界面上做特解表面位移 Bessel function 的展開。本文將使用類似 Liou 的方式將特解表面應力做 Bessel function 的展開，並對內外域的邊界條件求得不同的頻率方程式與表面波的模態。由於在交界面上對特解表面應力做 Bessel function 的展開因此必須滿足以下的邊界條件：

1. 自由面的邊界條件：內外域齊性解表面應力在 $z=0$ 必須為零。
2. 剛性基底的邊界條件：基底位移在 $z=h$ 必須為零。
3. 輻射邊界條件： $r \rightarrow \infty$ ，位移和應力必須為零，但波是向外傳遞。
4. 垂直面應力邊界條件： $r=a_0$ 和 $0 \leq z \leq d$ 必須等於 t_{b1} 。
5. 水平面應力邊界條件： $z=d$ 和 $0 \leq r \leq a_0$ 必須等於 t_{b2} 。

其中

$$t_{b1}(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\theta) t_{b1}^{(n)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(n)}(z) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \\ \tau_{rz}^{(n)}(z) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \\ \tau_{r\theta}^{(n)}(z) \begin{cases} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \end{bmatrix} \quad r = a_0 \quad \text{and} \quad 0 \leq z \leq d \quad (2-1)$$

和

$$t_{b2}(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\theta) t_{b2}^{(n)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tau_{rz}^{(n)}(r) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \\ \sigma_{zz}^{(n)}(r) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \\ \tau_{\theta z}^{(n)}(r) \begin{cases} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \end{bmatrix} \quad z = d \quad \text{and} \quad 0 \leq r \leq a_0 \quad (2-2)$$

我們為求得 (1-1) 式並且滿足 (1)-(5) 式的邊界條件，土壤的部份分成外部區域 (Exterior domain) 和內部區域 (Interior domain) 兩部份來求解：

2.1 外部區域

對於外部區域除了滿足控制方程式外，還必須滿足三個邊界條件：自由面的邊界條件、剛性基底的邊界條件和輻射邊界條。對於 S_1 面上的應力要等於 t_{b1} ，而 S_3 面上應力和位移外域與內域要保持連。由 (1-20) 式可知當外域解的水平面分層土壤可寫成

$$Y_m^{(e)} = \hat{H} T_m^{(e)} \hat{H}^{-1} Y_0^{(e)} \quad (2-3)$$

其中 $Y_m^{(e)} = (u_r^{(e)}, u_z^{(e)}, \tau_{rz}^{(e)}, \sigma_{zz}^{(e)}, u_\theta^{(e)}, \tau_{\theta z}^{(e)})^T$ 是為外部區域第 m 層水平交界面上的

位移-應力向量，且

$$T_m^{(e)} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(e)} & t_{12}^{(e)} & t_{13}^{(e)} & t_{14}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{21}^{(e)} & t_{22}^{(e)} & t_{23}^{(e)} & t_{24}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{31}^{(e)} & t_{32}^{(e)} & t_{33}^{(e)} & t_{34}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{41}^{(e)} & t_{42}^{(e)} & t_{43}^{(e)} & t_{44}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55}^{(e)} & t_{56}^{(e)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65}^{(e)} & t_{66}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

為傳遞矩陣。我們將外域的齊性邊界條件：自由表面和剛性基底代入(2-3)式可

得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{rz}^{(e)} \\ \sigma_{zz}^{(e)} \\ 0 \\ \tau_{\theta z}^{(e)} \end{bmatrix}_m = \hat{H} \begin{bmatrix} t_{11}^{(e)} & t_{12}^{(e)} & t_{13}^{(e)} & t_{14}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{21}^{(e)} & t_{22}^{(e)} & t_{23}^{(e)} & t_{24}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{31}^{(e)} & t_{32}^{(e)} & t_{33}^{(e)} & t_{34}^{(e)} & 0 & 0 \\ t_{41}^{(e)} & t_{42}^{(e)} & t_{43}^{(e)} & t_{44}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55}^{(e)} & t_{56}^{(e)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65}^{(e)} & t_{66}^{(e)} \end{bmatrix} \hat{H}^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ 0 \\ 0 \\ u_\theta \\ 0 \end{bmatrix}_0 \quad (2-5)$$

假設土層剛性基底水平面無滑動，由 (2-5) 式可得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m = H \begin{bmatrix} t_{11}^{(e)} & t_{12}^{(e)} & 0 \\ t_{21}^{(e)} & t_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{55}^{(e)} \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{bmatrix}_0 \quad (2-6)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} H'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r}H_n(kr) \\ 0 & kH_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r}H_n(kr) & 0 & H'_n(kr) \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

在 (2-6) 式中我們可以得到兩條超越函數為非零解的頻率方程式

$$t_{11}^{(e)}t_{22}^{(e)} - t_{12}^{(e)}t_{21}^{(e)} = 0 \quad (2-8)$$

(2-8) 式 所解出的波數是為雷利表面模態 (Rayleigh modes) ,

$$t_{55}^{(e)} = 0 \quad (2-9)$$

(2-9) 式 所解出的波數是為拉夫表面模態 (Love modes) 。分別將 (2-8) 式和

(2-9) 式求得的波數代回 (2-5) 式可以求得

$$\hat{H}^{-1}Y_0^{(e)} = (1, \xi_i, 0, 0, 0, 0)^T \alpha_i^{(e)} \quad (2-10)$$

是為第 i 個雷利模態，其中 $\xi_i = -\frac{t_{11}^{(e)}}{t_{12}^{(e)}} = -\frac{t_{21}^{(e)}}{t_{22}^{(e)}}$,

$$\hat{H}^{-1}Y_0^{(e)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \alpha_j^{(e)} \quad (2-11)$$

是為第 j 個拉夫模態， $\alpha_i^{(e)}$ 和 $\alpha_j^{(e)}$ 為相對應模態的參與因子 (Modal

participation factor)。由 (1-22) 垂直交界面 S_1 和 S_3 面上的外域解應

力方程式為

$$t_j^{(e)}(z) = (H_1F_1 + H_2F_2)e_j(z - h_{j-1})E_j^{-1}a_{j-1} \cdots a_1 \hat{H}^{-1}Y_0^{(e)} \quad (2-12)$$

由於 (2-8) 式和 (2-9) 式所解得的波數的根有無限多個，所對應的表面模態也會有無限多個，但外域解的應力-位移場的形狀函數只須取前幾個模態來表示之，將 (2-10) 式和 (2-11) 式的表面模態代入 (2-3) 式與 (2-12) 式可求得垂直交界面位移和應力向量為

$$u^{(e)}(z) = \sum N^{(e)}(z)\alpha^{(e)} \quad (2-13)$$

$$t^{(e)}(z) = \sum G^{(e)}(z) \alpha^{(e)} \quad (2-14)$$

其中 $N^{(e)}(z)$ 和 $G^{(e)}(z)$ 是為位移-應力模態形狀函數。

2.2 內部區域

對於內部區域而言，由於 S_1 面上和 S_2 面上分別受有應力 t_{b1} 和 t_{b2} ，也就是非齊性的邊界面（Nonhomogeneous boundary），其內部區域的位移和應力的解包含齊性解（Homogeneous solution）與特解（Particular solution）。

齊性解必須滿足齊性的邊界條件，即自由表面和剛性基底的邊界條件，因為齊性解不須滿足輻射條件，所以在水平面的分層土壤只需將（2-3）式中用 Bessel 函數來替代 Hankel 函數為

$$Y_n^{(i)} = J T_n^{(i)} J^{-1} Y_0^{(i)} \quad (2-15)$$

其中 $Y_n^{(i)} = (u_r^{(i)}, u_z^{(i)}, \tau_{rz}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}, u_\theta^{(i)}, \tau_{\theta z}^{(i)})_n^T$ 是為內部區域第 n 層水平交界面上的位移-應力向量，且 $T_n^{(i)}$ 為 n 層內域土壤的傳遞矩陣與 $T_m^{(e)}$ 為相似，矩陣 J 與 \hat{H} 矩陣相似不同的是將 Hankel 函數改成 Bessel 函數，將自由表面和剛性基底的邊界條件代入（2-15）可得

與外域相似兩條超越函數為非零解的頻率方程式

$$t_{11}^{(i)} t_{22}^{(i)} - t_{12}^{(i)} t_{21}^{(i)} = 0 \quad (2-16)$$

(2-16) 式所解出的波數是為內域解雷利表面模態 (Rayleigh modes) ,

$$t_{55}^{(i)} = 0 \quad (2-17)$$

(2-17) 式所解出的波數是為內域解拉夫表面模態 (Love modes) 。分別將

(2-16) 式和 (2-17) 式求得的波數代回 (2-15) 式可以求得

$$J^{-1}Y_0^{(i)} = (1, \eta_i, 0, 0, 0, 0)^T \alpha_i^{(i)} \quad (2-18)$$

是為第 i 個雷利模態，其中 $\eta_i = -\frac{t_{11}^{(i)}}{t_{12}^{(i)}} = -\frac{t_{21}^{(i)}}{t_{22}^{(i)}}$,

$$J^{-1}Y_0^{(j)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \alpha_j^{(i)} \quad (2-19)$$

是為第 j 個拉夫模態， $\alpha_i^{(i)}$ 和 $\alpha_j^{(i)}$ 為相對應模態的參與因子 (Modal

participation factor)。由 (1-22) 垂直交界面 S_3 面上的內域解應力方程

式為

$$t_j^{(i)}(z-d_2) = (J_1 F_1 + J_2 F_2) e_j(z-h_{j-1}) E_j^{-1} a_{j-1} \cdots a_1 J^{-1} Y_0^{(e)}$$

(2-20)

其中 J_1 和 J_2 矩陣相似於 H_1 和 H_2 矩陣，不同的是將 H_1 和 H_2 矩陣的 Hankel 函數改成 Bessel 函數，由於 (2-16) 式和 (2-17) 式所解得的波數的根有無限多個，所對應的表面模態也會有無限多個，但內域解的應力-位移場的形狀函數只須取前幾個模態來表示之，將 (2-18) 式和 (2-19) 式的表面模態代入 (2-15) 式與 (2-20) 式可求得自由面和垂直交界面位移和應力向量為

$$u_{h,S_2}^{(i)}(r) = \sum N_{h,S_2}^{(i)}(r) \alpha_h^{(i)} \quad (2-21)$$

$$t_{h,S_2}^{(i)}(r) = 0 \quad (2-22)$$

和

$$u_{h,S_3}^{(i)}(z-d_2) = \sum N_{h,S_3}^{(i)}(z-d_2)\alpha_h^{(i)} \quad (2-23)$$

$$t_{h,S_3}^{(i)}(z-d_2) = \sum G_{h,S_3}^{(i)}(z-d_2)\alpha_h^{(i)} \quad (2-24)$$

關於特解的部份，其特解必需滿足特解的邊界條件，即表面應力等於 t_{b2} 為 (2-2) 式 與剛性基底，我們可藉由 Liou[13]， t_{b2} 在 r 方向做 Bessel 函數展開可得特解表面應力為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} \tau_{rz}^n(r) \\ \sigma_{zz}^n(r) \\ \tau_{\theta z}^n(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\tau_{rz}(r) - \tau_{\theta z}(r)}{2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_{zz}(r) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\tau_{rz}(r) + \tau_{\theta z}(r)}{2} \quad (2-25)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{rz}(r) - \tau_{\theta z}(r)}{2} &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i J_{n+1}(k_i r) A_i + k_0 J_{n+1}(k_0 r) A_0 \\ \sigma_{zz}(r) &= \sum_{j=1}^{\infty} k_j J_n(k_j r) B_j + k_0 J_n(k_0 r) B_0 \\ \frac{\tau_{rz}(r) + \tau_{\theta z}(r)}{2} &= \sum_{l=1}^{\infty} k_l J_{n-1}(k_l r) C_l + k_0 J_{n-1}(k_0 r) C_0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

我們可以利用 Bessel 函數的正交性來求得特解參與係數為

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\tau_{rz}(a) - \tau_{\theta z}(a)}{2k_0^{(1)} J_{n+1}(k_0^{(1)} a)} \\
A_{n+1}(k_i) &= \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{\tau_{rz}^n(r) - \tau_{\theta z}^n(r)}{2} \right) J_{n+1}(k_i r) dr - k_0^{(1)} A_0 \int_0^{a_0} J_{n+1}(k_0^{(1)} r) J_{n+1}(k_i r) r dr}{k_i^{(1)} \int_0^{a_0} J_{n+1}^2(k_i r) r dr} \\
B_0 &= \frac{\sigma_{zz}(a)}{k_0^{(2)} J_n(k_0^{(2)} a)} \\
B_n(k_j) &= \frac{\int_0^{a_0} r (\sigma_{zz}(r)) J_n(k_j r) dr - k_0^{(2)} B_0 \int_0^{a_0} J_n(k_0^{(2)} r) J_n(k_j r) r dr}{k_j^{(2)} \int_0^{a_0} J_n^2(k_j r) r dr} \\
C_0 &= \frac{\tau_{rz}(a) + \tau_{\theta z}(a)}{2k_0^{(3)} J_{n-1}(k_0^{(3)} a)} \\
C_{n-1}(k_l) &= \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{\tau_{rz}^n(r) + \tau_{\theta z}^n(r)}{2} \right) J_{n-1}(k_l r) dr - k_0^{(3)} C_0 \int_0^{a_0} J_{n-1}(k_0^{(3)} r) J_{n-1}(k_l r) r dr}{k_l^{(3)} \int_0^{a_0} J_{n-1}^2(k_l r) r dr}
\end{aligned}$$

在 (2-25) 式中其特解波數為 k_i , k_j 和 k_l 分別為 $J_{n+1}(k_i a_0) = 0$, $J_n(k_j a_0) = 0$,

$J_{n-1}(k_l a_0) = 0$ 為了求得特解的表面模態 (2-25) 式中可改寫為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} \tau_{rz}^n(r) \\ \sigma_{zz}^n(r) \\ \tau_{\theta z}^n(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{J}_n^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} A_{n+1}(k_i) + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{J}_n^j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} B_n(k_j) + \sum_{l=0}^{\infty} \bar{J}_n^l \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C_{n-1}(k_l) \quad (2-27)$$

其中

$$\bar{J}_n = \begin{bmatrix} J_n'(kr) & 0 & \frac{n}{r} J_n(kr) \\ 0 & k J_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r} J_n(kr) & 0 & J_n'(kr) \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

為了求得表面位移的模態與表面應力的模態的轉換關係，將特解的剛性基底

邊界條件代入 (2-15) 式為

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{rz}^{(i)} \\ \sigma_{zz}^{(i)} \\ 0 \\ \tau_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix}_m = J \begin{bmatrix} t_{11}^{(i)} & t_{12}^{(i)} & t_{13}^{(i)} & t_{14}^{(i)} & 0 & 0 \\ t_{21}^{(i)} & t_{22}^{(i)} & t_{23}^{(i)} & t_{24}^{(i)} & 0 & 0 \\ t_{31}^{(i)} & t_{32}^{(i)} & t_{33}^{(i)} & t_{34}^{(i)} & 0 & 0 \\ t_{41}^{(i)} & t_{42}^{(i)} & t_{43}^{(i)} & t_{44}^{(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{55}^{(i)} & t_{56}^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{65}^{(i)} & t_{66}^{(i)} \end{bmatrix} J^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ \tau_{rz}^{(i)} \\ \sigma_{zz}^{(i)} \\ u_\theta \\ \tau_{\theta z}^{(i)} \end{bmatrix}_0 \quad (2-29)$$

由 (2-29) 式當 $z = h_j - d$ 時可得到表面應力與表面位移的轉換關係為

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m = \bar{J}_n \begin{bmatrix} t_{11}^{(i)} & t_{12}^{(i)} & 0 \\ t_{21}^{(i)} & t_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{55}^{(i)} \end{bmatrix} \bar{J}_n^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{bmatrix}_0 + \bar{J}_n \begin{bmatrix} t_{13}^{(i)} & t_{14}^{(i)} & 0 \\ t_{23}^{(i)} & t_{24}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{56}^{(i)} \end{bmatrix} \bar{J}_n^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix}_0 \quad (2-30)$$

由 (2-30) 式可得表面應力與表面位移的模態之間轉換關係為

$$\bar{J}_n^{-1} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\theta \end{bmatrix}_0 = Q_n \bar{J}_n^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{rz} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix}_0 \quad (2-31)$$

其中

$$Q_n = - \begin{bmatrix} t_{11}^{(i)} & t_{12}^{(i)} & 0 \\ t_{21}^{(i)} & t_{22}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{55}^{(i)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_{13}^{(i)} & t_{14}^{(i)} & 0 \\ t_{23}^{(i)} & t_{24}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{56}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

我們將 (2-27) 式乘上 Q_n 可以得到特解表面位移向量為

$$u_{b2}(r) = \begin{bmatrix} u_r^n(r) \\ u_z^n(r) \\ u_\theta^n(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{J}_n^i Q_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \beta_{n+1}(k_i) + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{J}_n^j Q_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_n(k_j) + \sum_{l=0}^{\infty} \bar{J}_n^l Q_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \beta_{n-1}(k_l) \quad (2-33)$$

由 (2-27) 式和 (2-33) 式可以得到特解自由面的位移-應力向量為

$$u_{p,S_2}^{(i)}(r) = \sum N_{p,S_2}^{(i)}(r) \beta_p^{(i)} \quad (2-34)$$

$$t_{p,S_2}^{(i)}(r) = \sum G_{p,S_2}^{(i)}(r) \beta_p^{(i)} \quad (2-35)$$

關於垂直面的位移-應力向量的求得，我們先將特解表面應力轉換位移矩陣 Q_n

求得如下

$$Q_n = \begin{bmatrix} \frac{t_{13}t_{22} - t_{12}t_{23}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & \frac{t_{14}t_{22} - t_{12}t_{24}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & 0 \\ \frac{t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & \frac{t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & 0 \\ \frac{t_{13}t_{21} - t_{11}t_{23}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & \frac{t_{14}t_{21} - t_{11}t_{24}}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t_{56}}{t_{55}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

我們在 (2-36) 式中發現若 vh 與 $v'h$ 很大時， e^{-vh} 與 $e^{-v'h}$ 趨近為零

$Coshvh = Sinhvh$ 與 $Coshv'h = Sinhv'h$ 因此 Q_n 為

$$Q_n = \begin{bmatrix} \frac{-vk_\beta^2}{\Lambda} & \frac{k(2vv' - 2k^2 + k_\beta^2)}{\Lambda} & 0 \\ \frac{k(2vv' - 2k^2 + k_\beta^2)}{\Lambda} & \frac{-vk_\beta^2}{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Gv'} \end{bmatrix}$$

我們發現上式的 Q_n 與半無限土壤的轉換矩陣相同。

因此我們可由 (2-27) 式，(2-33) 式和 (2-36) 式可以得到特解自由面的位移-應力模態為

$$J^{-1}Y_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ 1 \\ 0 \\ -Q_{33} \\ -1 \end{bmatrix} \beta_{n+1}(k_i) + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \beta_n(k_j) + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ 1 \\ 0 \\ Q_{33} \\ 1 \end{bmatrix} \beta_{n-1}(k_l) \quad (2-37)$$

將 (2-37) 式所得到的自由面位移-應力向量特解模態，代入 (2-15) 式與

(2-20) 式可求得特解垂直交界面位移和應力向量為

$$u_{p,S_3}^{(i)}(z) = \sum N_{p,S_3}^{(i)}(z) \beta_P^{(i)} \quad (2-38)$$

$$t_{p,S_3}^{(i)}(z) = \sum G_{p,S_3}^{(i)}(z) \beta_P^{(i)} \quad (2-39)$$

如此我們可以將內域解的齊性解和特解組合起來

$$u_{S_2}^{(i)}(r) = \sum N_{h,S_2}^{(i)}(r)\alpha_h^{(i)} + \sum N_{p,S_2}^{(i)}(r)\beta_p^{(i)} \quad (2-40)$$

$$t_{S_2}^{(i)}(r) = \sum G_{p,S_2}^{(i)}(r)\beta_p^{(i)} \quad (2-41)$$

和

$$u_{S_3}^{(i)}(z) = \sum N_{h,S_3}^{(i)}(z)\alpha_h^{(i)} + \sum N_{p,S_3}^{(i)}(z)\beta_p^{(i)} \quad (2-42)$$

$$t_{S_3}^{(i)}(z) = \sum G_{h,S_3}^{(i)}(z)\alpha_h^{(i)} + \sum G_{p,S_3}^{(i)}(z)\beta_p^{(i)} \quad (2-43)$$

2.3 垂直界面模態參與係數

我們將外部區域與內部區域垂直交界面的應力和位移向量組合起來（圖四），(2-13)式和(2-42)式中， α_e 、 $\alpha_h^{(i)}$ 為未知的模態參與係數，為了求解這兩個未知模態參與係數，則必需引入 S_3 面上位移和應力的連續條件。圖五為外部區域的受力圖，在垂直交界面的外域部份利用其交界面應力連續的條件而透過變分的技巧對 α_e 做變分為

$$\int_{S_1} \delta u_e(z)(t_e(z) + t_{b1}(z))dS + \int_{S_3} \delta u_e(z)(t_e(z) - t^{(i)}(z))dS = 0 \quad (2-44)$$

將 (2-13) 式、(2-1)式與 (2-43) 式代入 (2-44) 式，且 $\delta\alpha_e$ 為任意值，因此

我們可以求得外域 S_1 與 S_3 的垂直交界面的模態參與因子的關係如下：

$$K_{ee}\alpha_e - K_{eh}\alpha_h^{(i)} = K_{ep}\beta_p^{(i)} - V_{b1} \quad (2-45)$$

其中

$$K_{ee} = \int_{S_1+S_3} N^{(e)T}(z)G^{(e)}(z)dS \quad (2-46)$$

$$K_{eh} = \int_{S_3} N^{(e)T}(z) G_{h,S_3}^{(i)}(z) dS \quad (2-47)$$

$$K_{ep} = \int_{S_3} N^{(e)T}(z) G_{p,S_3}^{(i)}(z) dS \quad (2-48)$$

$$V_{b1} = \int_{S_1} N^{(e)T}(z) t_{b1}(z) dS \quad (2-49)$$

圖六為內部區域的受力圖，在垂直交界面的內域部份利用其交界面位移連續的條件而透過變分的技巧對 $\alpha_h^{(i)}$ 做變分為

$$\int_{S_3} \delta t_i(z) (u_i(z) - u_e(z)) dS = 0 \quad (2-50)$$

(2-13) 式、(2-42) 式與 (2-43) 式代入 (2-50) 式，且 $\delta\alpha_h^{(i)}$ 為任意值，因此我們可以求得內域解 S_3 的垂直交界面的模態參與因子的關係如下：

$$-K_{he}\alpha_e + K_{hh}\alpha_h^{(i)} = -K_{hp}\beta_p^{(i)} \quad (2-51)$$

其中

$$K_{he} = \int_{S_3} G_h^{(i)T}(z) N^{(e)}(z) dS \quad (2-52)$$

$$K_{hh} = \int_{S_3} G_h^{(i)T}(z) N_h^{(i)}(z) dS \quad (2-53)$$

$$K_{hp} = \int_{S_3} G_h^{(i)T}(z) N_p^{(i)}(z) dS \quad (2-54)$$

我們將 (2-45) 和 (2-51) 兩式寫成矩陣的形式為

$$\begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_e \\ \alpha_h^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ep} \\ -K_{hp} \end{bmatrix} [\beta_p^{(i)}] + \begin{bmatrix} V_{b1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

由 (2-55) 式可求得未知 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 與 S_1 面和 S_3 面模態參與系數之間的關係為

$$\begin{bmatrix} \alpha_e \\ \alpha_h^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} K_{ep} \\ -K_{hp} \end{bmatrix} [\beta_p^{(i)}] + \begin{bmatrix} V_{b1} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (2-56)$$

當 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 求得後便可以進行土壤與結構物交界面的阻抗矩陣的求解。

2.4 超越方程式求解根

在建立土壤與結構物互制系統之分析模型之前，我們已經將內域與外域的彈性波數值推導出如表一，(2-8) 式、(2-9) 式、(2-16) 式和 (2-17) 式為超越函數的形式，因此在複數平面上有無限多個根，由於本文外域取 Hankel 函數的第二類，為了滿足外域解的輻射條件，在取彈性波數值時必需在複數平面上取下半平面來滿足輻射條件如圖七，關於超越函數的求解 Newton' s and Muller' s [7] 提供一個好的方法在複數平面求根，但美中不足的是這個方法需要一個初始的猜想根，Liou [12] 提出一個找尋初始根的位置並且利用 Muller' s 方法求得根的精確值。若假設 $f(z)$ 為超越函數

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2-57)$$

其中 $z = x + iy$ 為複數的根並且 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 分別為超越函數 $f(z)$ 的實部與虛部，我們要使得目標函數 $f(z) \approx 0$ ，並且將複數平面離散化如圖七，圖八表示小區塊中若四個角點同時滿足

$$u_i(x, y)u_j(x, y) \leq 0 \quad \text{and} \quad v_i(x, y)v_j(x, y) \leq 0, \quad 1 \leq i, j \leq 4 \quad \text{and} \quad i \neq j \quad (2-58)$$

當我們得知 $u(x, y) = 0$ 與 $v(x, y) = 0$ 有同時經過小區塊上我們可以求得小區塊四個角點為

$$\begin{aligned} u(x_5, y_5) = 0, \quad u(x_6, y_6) = 0 \\ v(x_7, y_7) = 0, \quad v(x_8, y_8) = 0 \end{aligned} \quad (2-59)$$

假如我們將區塊分割夠小， z_5 和 z_6 可以用線性方程式來近似 $u(x, y) = 0$ 為

$$l_r(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (2-60)$$

其中 $a_1 = y_5 - y_6$ ， $b_1 = x_6 - x_5$ 和 $c_1 = x_5y_6 - y_5x_6$ 。相同地， z_7 和 z_8 可以用線性方程式來近似 $v(x, y) = 0$ 為

$$l_i(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2-61)$$

其中 $a_2 = y_7 - y_8$ ， $b_2 = x_8 - x_7$ 和 $c_2 = x_7y_8 - y_7x_8$ 。因此我們可以將 (2-60) 式和 (2-61) 式聯立求解可得

$$y_n = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_2a_1 - b_1a_2} \quad (2-62)$$

$$x_n = -(b_1y_n + c_1)/a_1, \quad \text{if } a_1 \geq a_2 \quad (2-63)$$

或

$$x_n = -(b_2y_n + c_2)/a_2, \quad \text{if } a_2 \geq a_1 \quad (2-64)$$

最後我們便可以將超越函數的根 $z_n = x_n + iy_n$ 求出後，我們有了初始根的位置便可以引進 Newton' s and Muller' s 的方法求得根的精確位置。

第三章 阻抗矩陣

為了求得動力反矩陣，將 (2-56) 式所求得的 α_e 與 $\alpha_h^{(i)}$ 兩個未知的模態參與係數與 β_p 和 V_{b1} 之間的關係後，本章將對 S_1 面與 S_2 面上分佈牽引力的形式 (Piecewise linear stress) 與結構物有限元素的模式互相配合再利用虛功原理與倒數定理來求得動力反矩陣。

3.1 牽引力的假設分佈模式

對於每一個傅氏級數分量而言， S_1 面和 S_2 面上的牽引力分佈，我們假設分別在 z 方向與 r 方向應力分佈為片段線性 (Piecewise linear stress)。在 S_1 面上的牽引力為 t_{b1} ，我們可假設在 z 方向每一個傅氏級數分量為

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(z) &= \sum_{j=1}^{m_1-1} h_j(z) q_j + h_0 q_0 + h_{m_1} q_{m_1} = h_1^T q_1 \\ \tau_{rz}(z) &= \sum_{j=1}^{m_1-1} h_j(z) p_j + h_0 p_0 + h_{m_1} p_{m_1} = h_1^T p_1 \\ \tau_{r\theta}(z) &= \sum_{j=1}^{m_1-1} h_j(z) s_j + h_0 s_0 + h_{m_1} s_{m_1} = h_1^T s_1\end{aligned}\tag{3-1}$$

其中

$$h_j(z) = \begin{cases} 1 + \frac{z - jb_1}{b_1} & \text{if } (j-1)b_1 \leq z \leq jb_1, \text{ and } 1 \leq j \leq m_1 \\ 1 - \frac{z - jb_1}{b_1} & \text{if } jb_1 \leq z \leq (j+1)b_1, \text{ and } 0 \leq j \leq m_1 - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\tag{3-2}$$

，且在 $(0, d)$ 區間分成 m_1 等分，寬度 $b_1 = \frac{d}{m_1}$ ， q_j 、 p_j 和 s_j 分別為 σ_{rr} 、 τ_{rz} 和 $\tau_{r\theta}$ 在 S_1 面上的節點應力強度。在 S_2 面上的牽引力為 t_{b2} ，我們可假設在 r 方向每一個傅氏級數分量為

$$\begin{aligned}\tau_{rz}(r) &= \sum_{j=1}^{m_2-1} h_j(r) q_j + h_0 q_0 + h_{m_2} q_{m_2} = h_2^T q_2 \\ \sigma_{zz}(r) &= \sum_{j=1}^{m_2-1} h_j(r) p_j + h_0 p_0 + h_{m_2} p_{m_2} = h_2^T p_2 \\ \tau_{\theta z}(r) &= \sum_{j=1}^{m_2-1} h_j(r) s_j + h_0 s_0 + h_{m_2} s_{m_2} = h_2^T s_2\end{aligned}\quad (3-3)$$

其中

$$h_j(r) = \begin{cases} 1 + \frac{r - jb_2}{b_2} & \text{if } (j-1)b_2 \leq r \leq jb_2, \text{ and } 1 \leq j \leq m_2 \\ 1 - \frac{r - jb_2}{b_2} & \text{if } jb_2 \leq r \leq (j+1)b_2, \text{ and } 0 \leq j \leq m_2 - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\quad (3-4)$$

，且在 $(0, a_0)$ 區間分成 m_2 等分，寬度 $b_2 = \frac{a_0}{m_2}$ ， q_j 、 p_j 和 s_j 分別為 τ_{rz} 、 σ_{zz} 和 $\tau_{\theta z}$ 在 S_2 面上的節點應力強度。將 (3-1) 式和 (3-3) 式寫成矩陣的形式

$$t_{b1} = \begin{bmatrix} h_1^T & 0 & 0 \\ 0 & h_1^T & 0 \\ 0 & 0 & h_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = H_1 P_1\quad (3-5)$$

和

$$t_{b2} = \begin{bmatrix} h_2^T & 0 & 0 \\ 0 & h_2^T & 0 \\ 0 & 0 & h_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = H_2 P_2\quad (3-6)$$

3.2 阻抗矩陣的推導

在 3.1 節中，我們已經將土層 S_1 面和 S_2 面上的應力假設分別在 z 方向與 r 方向分佈為片段線性（Piecewise linear stress），因此分別將 (3-5) 和 (3-6) 分別代入 (2-49) 和 (2-26) 分佈在 S_1 面和 S_2 面上的模態參與係數 V_{b1} 和 β_p 可以表示

$$V_{b1} = D_{P1} P_1 \quad (3-7)$$

$$\beta_p = D_{P2} P_2 \quad (3-8)$$

其中

$$D_{P1} = \int_{S_1} N_e^T(z) H_1(z) dS \quad (3-9)$$

$$\beta_p = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{h_m(a_0)}{k_0 J_n(k_0 a_0)} \\ \int_0^b (rh_1(r) J_n(k_j r)) dr & \dots & \int_{m-b}^{mb} (rh_1(r) J_n(k_j r)) dr - k_0 \beta_0 \int_0^{a_0} J_n(k_0 r) J_n(k_j r) r dr \\ \frac{k_j \int_0^{a_0} J_n^2(k_j r) r dr}{k_j \int_0^{a_0} J_n^2(k_j r) r dr} & \dots & \frac{\int_{m-b}^{mb} (rh_1(r) J_n(k_j r)) dr - k_0 \beta_0 \int_0^{a_0} J_n(k_0 r) J_n(k_j r) r dr}{k_j \int_0^{a_0} J_n^2(k_j r) r dr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} = D_{P2} P_2 \quad (3-10)$$

在 (2-56) 式中，我們已經求得未知 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 與 S_1 面和 S_3 面上模態參與係數 V_{b1} 和 β_p 之間的關係，所以可以將 (3-7) 和 (3-8) 式代入 (2-56) 式中為

$$\begin{bmatrix} \alpha_e \\ \alpha_h^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{ep} \\ -K_{hp} \end{bmatrix} [D_{P2}] P_2 + \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_{P1} \\ 0 \end{bmatrix} P_1 \quad (3-11)$$

由 (3-11) 式可求出 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 與 P_1 和 P_2 之間的比率關係。當比率關係求得後我們可以將 (3-11) 式寫成

$$\alpha_e = [\xi_1] [D_{P2}] P_2 + [\xi_3] P_1 \quad (3-12)$$

$$\alpha_h^{(i)} = [\xi_2] [D_{P2}] P_2 + [\xi_4] P_1$$

(3-13)

其中 ξ_1 為 α_e 與 P_2 之間的關係， ξ_3 為 α_e 與 P_1 之間的關係， ξ_2 為 $\alpha_h^{(i)}$

與 P_2 之間的關係， ξ_4 為 $\alpha_h^{(i)}$ 與 P_1 之間的關係。

土層 S_1 和 S_2 表面上的位移為

$$u_{S_1}(z) = \sum N^{(e)}(z)\alpha_e \quad (3-14)$$

$$u_{S_2}(r) = \sum N_h^{(i)}(r)\alpha_h^{(i)} + \sum N_p(r)\alpha_p \quad (3-15)$$

將 (3-8) 式、(3-12) 式與 (3-13) 式代入 (3-14) 式與 (3-15) 式可以表示為

$$u_{S_1}(z) = \sum N^{(e)}(z)[\xi_1\alpha_p + \xi_3P_1] \quad (3-16)$$

$$u_{S_2}(r) = \sum N_h^{(i)}(r)[\xi_4]P_1 + \sum [N_h(r)\xi_2 + N_p(r)]\alpha_p \quad (3-17)$$

(3-16) 式與 (3-17) 式寫成矩陣的形式

$$\begin{bmatrix} u_{S_1}(z) \\ u_{S_2}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_e(z)[\xi_3] & N_e(z)[\xi_1]D_{P_2} \\ N_h(r)\xi_4 & [N_h(r)\xi_2 + N_p(r)]D_{P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = f_{ss}P \quad (3-18)$$

其中 $P = (P_1, P_2)^T$ ，

$$f_{ss} = \begin{bmatrix} N_e(z)[\xi_3] & N_e(z)[\xi_1] \\ 0 & [N_h(r)\xi_2 + N_p(r)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{P_1} & 0 \\ 0 & D_{P_2} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

將土壤表面應力 t_0 ，(3-5) 式與 (3-6) 式寫成矩陣的形式

$$t_0 = \begin{bmatrix} t_{b1}(z) \\ t_{b2}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(z) & 0 \\ 0 & G_p(r)D_{P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = HP \quad (3-20)$$

(3-20)

其中

$$H = \begin{bmatrix} H_1(z) & 0 \\ 0 & G_p(r)D_{P_2} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

(3-21)

將 (3-18) 式與 (3-20) 式代入土壤與結構物交界面上，應力分佈下的虛功為：

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{S_1+S_2} \delta t_0^T u_0 dS \\
&= \delta P^T \int_{S_1+S_2} H^T f_{SS} dS P \\
&= \delta P^T QP
\end{aligned} \tag{3-22}$$

其中 $Q = \int_{S_1+S_2} H^T f_{SS} dS$ 為對稱的矩陣。

其次考慮基處本身，假設第 n 個傅氏分量 (θ 方向之變化被分離) 的有限元模式的位移為：

$$\bar{u}_0 = Nv \tag{3-23}$$

其中 N 為有限元素模式的形狀函數， v 為 S_1 面與 S_2 面上的節點位移，由位移所得的虛功為

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{S_1+S_2} \delta t_0^T \bar{u}_0 dS \\
&= \delta P^T \int_{S_1+S_2} H^T N dS v \\
&= \delta P^T Bv
\end{aligned} \tag{3-24}$$

其中

$B = \int_{S_1+S_2} H^T N dS$ ，由 (3-22) 式與 (3-24) 式可得

$$QP = Bv \tag{3-25}$$

為了求得作用力和假設應力間的關係，我們再次使用互易功原理

(Maxwell-Betti)，今考量兩組系統的作用：

(1) 由交界面上牽引力 t_0 作用而產生有限元素模式結點上的位移為 v 。

(2) 由有限元素模式結點作用力 F 而產生交界面上的位移為 \bar{u}_0 。

根據互易功原理(Maxwell-Betti)可得

$$F^T v = \int_{s_1+s_2} t_0^T \bar{u}_0 dS = P^T \int_{s_1+s_2} H^T N dS v = P^T Bv \tag{3-26}$$

其中 F 為有限元模式的廣義結點力。由 (3-26) 式可以求得廣義結點力 F 為

$$F = B^T P \quad (3-27)$$

將(3-25) 代入阻抗矩陣的 (3-27) 式求得如下：

$$F = B^T Q^{-1} B v = I v \quad (3-28)$$

其中 I 為阻抗矩陣，如此本研究便可以進行阻抗矩陣數值程式的開發。

第四章 剛性圓板之扭轉振動

本章節中將舉出一簡單的例子來求出阻抗矩陣的方法，並且以解析和數值的方法對求解彈性波數，圖九為一圓形無質量的剛性圓板置於土層表面，假設受到一扭轉振動的諧合載重，對於軸對稱的問題而言，當圓形無質量的剛性圓板受扭轉振動時，(2-2)式中當 $n=0$ 時，且只有考量拉夫模態 (Love modes) 發生時，因此所有的位移和應力只有在 θ 方向上才有值，位移和應力向量只存在 u_θ 和 $\tau_{\theta z}$ 存在，我們可以將 (3-28) 式所得到的式子求得阻抗矩陣並對模態參與係數做數值的分析與求解。

4.1 拉夫模態 (Love modes) 的頻率方程式

由第二章中可知內外域解的拉夫頻率方程式分別為 (2-9) 式與 (2-17) 式。為發展數值解來求得超越函數，我們對於單一土層系統而言，拉夫頻率方程式為

$$t_{55} = CH' = \cosh v'd = 0 \quad (4-1)$$

由於

$$e^{iv'd} = \cos v'd + i \sin v'd \quad (4-2)$$

$$e^{-iv'd} = \cos v'd - i \sin v'd \quad (4-3)$$

由 (4-2) 式和 (4-3) 式可將 (4-1) 化簡為

$$\cosh v'd = \cos iv'd = 0 \quad (4-4)$$

因此我們可順利求得解析解的拉夫波數值為

$$iv'd = \left(\frac{2N+1}{2}\right)\pi, \quad N = 0,1,2\dots \quad (4-5)$$

我們可以將 $v' = \sqrt{k^2 - \omega^2 / c_s^2}$ 代入 (4-5) 式中求得波數的解析解為

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{2N+1}{2d}\pi\right)^2}, \quad N = 0,1,2,3\dots \quad (4-6)$$

位移向量在圓柱座標下我們可以表示成通解的形式 (General form) :

$$u(r, z, t) = [(Ae^{iv'z} + Be^{-iv'z})e^{ikr}]e^{i\omega t} + [(Ce^{iv'z} + De^{-iv'z})e^{-ikr}]e^{i\omega t}$$

若考量波傳方向往 r 的方向入射而無反射波可知 $A = B = 0$ ，位移向量為

$$u(r, z, t) = [(Ce^{iv'z} + De^{-iv'z})]e^{i(-kr + \omega t)}$$

當波數值求得後，我們可以知道波數值在外域的條件下必需滿足輻射的條件

，第一類與第二類 Hankel 函數的級數解的為

$$H_n^{(1)(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(\pm i x - \pi/4) \quad (4-7)$$

可知取第一類與第二類 Hankel 函數分別代表 r 的方向的反射波與入射波，在

本文的例子中僅考量表面波往外傳無反射波故本文取第二類 Hankel 函數，往

若 $k = A + iB$ 代入 (4-7) 式，為了滿足輻射的條件必需取複數平面的下半平面

也就是 B 為負。我們可以利用 2.4 節中的方法進行數值程式的求解，圖十 至 圖

十二 分別為 ω 增加所求到的數值解，我們可以發現到一個有趣的現象，當 ω

逐漸增加時其波數值的根會往實數軸增加，並且我們比較數值解與解析解的根

如表二所示，可以發現理論解與數值解完成吻合，並且可知在取波數值的根時

應先取靠近實數軸的根，越靠近實數軸的根分別代表越低模態的根因此這些根

在振動上最為重要。

4.2 特解的模態波數

我們將扭轉振動的諧合載重代入(2-25) 式中，並將 τ_{θ_z} 做 Bessel 函

數展開可得特解表面應力為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\theta_z}^0(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} k_i J_1(k_i r) \beta_1(k_i) + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_l J_{-1}(k_l r) \beta_{-1}(k_l) \quad (4-8)$$

其中

$$\beta_1(k_i) = \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{-\tau_{\theta_z}^0(r)}{2} \right) J_1(k_i r) dr - k_0^{(1)} A_0^{(1)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(1)} r) J_1(k_i r) dr}{k_i \int_0^{a_0} r J_1^2(k_i r) dr} \quad (4-9)$$

$$\beta_{-1}(k_l) = \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{\tau_{\theta_z}^0(r)}{2} \right) J_1(k_l r) dr - k_0^{(3)} C_0^{(3)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(3)} r) J_1(k_l r) dr}{k_l \int_0^{a_0} r J_1^2(k_l r) dr}$$

因為 $J_{-1}(kr) = -J_1(kr)$ ，所以可得 $\beta_1(k_i) = \beta_{-1}(k_l)$ ，因此可將 (4-8) 改寫為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\theta_z}^0(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_i J_1(k_i r) \beta_1^*(k_i) \quad (4-10)$$

其中

$$\beta_1^*(k_i) = \frac{\int_0^{a_0} r (\tau_{\theta_z}^0(r)) J_1(k_i r) dr - k_0^{(1)} A_0^{(1)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(1)} r) J_1(k_i r) dr}{k_i \int_0^{a_0} r J_1^2(k_i r) dr} \quad (4-11)$$

在 (4-10) 式中，為了滿足邊界 $r = a_0$ 牽引力 τ_{θ_z} 不為零，第一個波數取

$k_0 = 0.5k_1$ 其餘為

$$J_1(k_i a_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (4-12)$$

4.3 模態函數

我們以經順利將齊解的波數與特解的波數求得後，我們分別將外域解與內域解的拉夫模態(2-11) 式和 (2-19)式代入 (2-3) 式、(2-12) 式、(2-15) 式及 (2-20) 式求得內外域解的齊性模態為

$$\begin{cases} N^{(e)}(z) = H'_0(ka_0) \cosh v'z \\ G^{(e)}(z) = 2G \cosh v'z \left[-\frac{H'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} H_0(ka_0) \right] \end{cases} \quad (4-13)$$

$$\begin{cases} N_h^{(i)}(z) = J'_0(ka_0) \cosh v'z \\ G_h^{(i)}(z) = 2G \cosh v'z \left[-\frac{J'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} J_0(ka_0) \right] \end{cases} \quad (4-14)$$

$$\begin{cases} N_h^{(i)}(r) = J'_0(kr) \\ G_h^{(i)}(r) = 0 \end{cases} \quad (4-15)$$

在 (4-10) 式中我們以經將應力特解的模態求出，將 (4-10) 式代入轉換位移應力矩陣 (2-36) 式可求出位移特解的模態，在求得特解表面模態後分別代入 (2-15) 式及(2-20) 式求得內域解的特解模態為

$$\begin{cases} N_p(r) = \frac{J'_0(kr)}{Gv'} \tanh v'd \\ G_p(r) = -J'_0(kr) \end{cases} \quad (4-16)$$

$$\begin{cases} N_p(z) = \frac{J'_0(ka_0)}{Gv'} [\tanh v'd \cosh v'z - \sinh v'z] \\ G_h^{(i)}(z) = \frac{2}{v'} \left[-\frac{J'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} J_0(ka_0) \right] [\tanh v'd \cosh v'z - \sinh v'z] \end{cases} \quad (4-17)$$

4.4 B 矩陣

由 (3-24) 中 可知

$$B = \int_{S_1+S_2} H^T N dS \quad (4-18)$$

對於圖九的扭轉振動問題， dS 積分面只有 S_2 而已，所以 $dS = 2\pi r dr$ ，有限元素在扭轉振動問題中形狀函數為 $N = r$ ， H 在 (3-3) 式中取 $m_2 = m$ ，因此可以求得 B 矩陣為

$$B = \int_{S_2} H^T N dS = \text{col} (B_1, B_2 \cdots B_{m+1}) \quad (4-19)$$

其中

$$B_{j+1} = 2\pi \int_0^{a_0} h_j(r) r^2 dr = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{12} b^3 & , \text{當 } j=0 \\ \frac{6m^2 - 4m + 1}{12} b^3 & , \text{當 } j=m \\ \frac{6j^2 + 1}{6} b^3 & , \text{當 } j \neq 0, \text{或 } m \end{cases} \quad (4-20)$$

4.5 D 矩陣

在 3.2 節中我們已經知道 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 可表示成 β_p 與 V_{b1} 之間的比率關係，要求得 β_p 與 V_{b1} 首先要求得 D_{P_1} 與 D_{P_2} ，在本例題中與上一節一樣， dS 積分面只有 S_2 而已故

$$D_{P_2} = \int_{S_2} G_P^T(r) H_2(r) dS \quad (4-21)$$

將 (4-16) 式求得的形狀函數代入 (4-21) 式中可得

$$[D_{P_2}]_{ij} = -2\pi \int_0^{a_0} k_i J_1(k_i r) h_{j-1}(r) r dr \quad (4-22)$$

4.6 K 矩陣

在 2.3 節中 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 的求得必需借由內域外域垂直交界面的積分，在

(2-56) 式中若

$$K = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

在本節中將以解析的方式來描述 K 的反矩陣之數值不穩定現象，並提出一個好方法來處理這個問題。我們將 (4-13) 式與 (4-14) 式代入 (4-23) 可求得

$$[K_{ee}]_{ii} = 2GH'_0(k_i a_0) \left(-\frac{H'_0(k_i a_0)}{a_0} - \frac{k_i^2}{2} H_0(k_i a_0) \right) \int_0^d [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_i z)] dz \quad (4-24)$$

$$[K_{eh}]_{ij} = 2GH'_0(k_i a_0) \left(-\frac{J'_0(k_j a_0)}{a_0} - \frac{k_j^2}{2} J_0(k_j a_0) \right) \int_0^d [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (4-24)$$

$$[K_{he}]_{ji} = 2GH'_0(k_j a_0) \left(-\frac{J'_0(k_i a_0)}{a_0} - \frac{k_i^2}{2} J_0(k_i a_0) \right) \int_0^d [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (4-25)$$

$$[K_{hh}]_{jj} = 2GJ'_0(k_j a_0) \left(-\frac{J'_0(k_j a_0)}{a_0} - \frac{k_j^2}{2} J_0(k_j a_0) \right) \int_0^d [(\cosh v'_j z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (4-26)$$

我們可以將齊性解的高模態波數代入後，虛部越大發現 $[K_{ee}]$ ， $[K_{hh}]$ 對角線之值會很小，這樣會造成 K 的反矩陣之數值不穩定現象(奇異矩陣的產生)，我們發現 K 的反矩陣之數值不穩定現象的產生乃是 Hankel 函數和 Bessel 函數所造成的，因此為了克服這個問題，我們發現 Hankel 函數和 Bessel 函數為模態的變數與垂直面的積分無關，所以我們可以將它併入模態參與係數中，以克服數值不穩定現象。

4.7 數值結果與討論

在 4.6 節中我們已經提出如何克服算準模態之間的比率關係，由 (3-28) 式中可知阻抗矩陣為

$$I = B^T Q^{-1} B \quad (4-27)$$

於圖九中，圓板的半徑為 a_0 ，土壤的遲滯阻尼 (Hysteretic Damping)

$\xi = 0.05$ ，而複數型的剪力波數 (Complex Shear Modulus $G = 1 + 2\xi i$)，包生比為 μ ，土壤密度為 ρ ；於是我們取各參數值為 $a_0 = 0.5$ ， $d = 1$ ， $\xi = 0.05$ ， $G = 1 + 2\xi i$ ， $\mu = \frac{1}{3}$ ， $\rho = 1$ ；來進行數值程式的撰寫，圖十三和圖十四分別為

無因次扭轉阻抗矩陣的實數部份 $\text{Re}(\frac{I_T}{Ga_0^3})$ 與虛數部份 $\text{Im}(\frac{I_T}{Ga_0^3})$ ，而橫座標為無

因次的頻率 $\frac{\omega a_0}{2\pi \text{Re}(c_s)}$ ；在圖十六和圖十七中表示取齊性解加上特解的波數值

所得的結果，我們可以和 Liou [12] 所做的結果加以比較，我們發現當我們齊性解加上特解取到 50 個時，阻抗矩陣已經收斂不錯了，並且我們可以觀察出一

個有趣的現象，那就是實部和虛部的尖峰值所對應的橫軸無因次的頻率會相

同，這些特性頻率也就是在當 $k = 0$ ，由 (4-6) 式中可得

$$\omega = \frac{\pi \times c_s (2N + 1)}{2d}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4-28)$$

若將各數值代入 ($c_s \approx 1, d = 1$) 則可得到

$$\omega = \frac{\pi(2N + 1)}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4-29)$$

所以無因次頻率為

$$\frac{\omega a_0}{2\pi \text{Re}(c_s)} = \frac{2N + 1}{8}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (4-30)$$

由 (4-30) 式可求出前四個無因次頻率為 0.125，0.375，0.625，0.875 與圖十三與圖十四完全吻合。

第五章 剛性圓板之垂直振動

在第四章中已經成功的發展出一套程式求出扭轉阻抗矩陣，並且以解析和數值的方法求得彈性波數值，本章節將更深入來探討阻抗矩陣的求解，圖十五為一圓形無質量的剛性圓板置於土層表面，假設受到一垂直振動的諧合載重，對於軸對稱的問題而言，當圓形無質量的剛性圓板受垂直振動時，(2-2)式中當 $n=0$ 時，且只有考量雷利模態 (Rayleigh modes) 發生時，因此所有的位移和應力只存在於 r 方向和 z 方向，我們可知位移和應力向量與 θ 方向是無關的，我們可以將 (3-28) 式所得到的式子求得阻抗矩陣並對模態參與係數做數值的分析與求解。

5.1 雷利模態 (Rayleigh modes) 的頻率方程式

由第二章中可知內外域解的雷利頻率方程式分別為 (2-8) 式與 (2-16) 式。為發展數值解來求得超越函數，我們對於單一土層系統而言，雷利頻率方程式為

$$t_{11} * t_{22} - t_{12} * t_{21} = 0 \quad (5-1)$$

我們無法以解析方式求得雷利頻率方程式的解，但我們可以利用 2.4 節中的方法進行數值程式的求解，當波數值求得後，我們可以知道波數值在外域的條件下必需滿足輻射的條件，當 $r \rightarrow \infty$ 時 $H_n^{(2)}(kr) \rightarrow 0$ ，第二類 Hankel 函數的級數解的為

$$H_n^{(2)}(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right) \exp(-ix + n\pi/2 - \pi/4) \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{1!(8ix)} + \dots\right] \quad (5-2)$$

若 $k = A + iB$ 代入 (5-2) 式，為了滿足輻射的條件必須取複數平面的下半平面也就是 B 為負。我們可以利用 2.4 節中的方法進行數值程式的求解，圖十六至圖十八 分別為 ω 增加所求到的數值解，我們可以發現到一個有趣的現象，當 ω 逐漸增加時其波數值的根會往實數軸增加，並可以發現數值解的波數值增多，根據扭轉振動的波數解析解的根的位置，我們可知在取波數值的根時也應先取靠近實數軸的根，越靠近實數軸的根分別代表越低模態的根。

5.2 特解的模態波數

我們將垂直振動的諧合載重代入(2-25) 式中，並將 $\tau_{zz}(r)$ 做 Bessel 函數展開可得特解表面應力為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{zz}^n(r) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k_j J_0(k_j r) \beta_0(k_j) \quad (5-3)$$

其中

$$\beta_0(k_j) = \int_0^{a_0} r(\tau_{zz}^0(r)) J_0(k_j r) dr \quad (5-4)$$

在 (5-3) 式中，為了滿足邊界 $r = a_0$ 牽引力 τ_{zz} 不為零，第一個波數取

$k_0 = 0.5k_1$ 其餘為

$$J_0(k_j a_0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5-5)$$

5.3 模態函數

我們以經順利將齊解的波數與特解的波數求得後，我們分別將外域解與內域解的雷利模態(2-10) 式和 (2-18)式代入 (2-3) 式、(2-12) 式、(2-15) 式及 (2-20) 式求得內外域解的齊性模態為

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} H'_0(ka_0)(t_{11}^{(e)} + t_{12}^{(e)}\xi_i) \\ kH_0(ka_0)(t_{21}^{(e)} + t_{22}^{(e)}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} kH_0(ka_0)(P_{21} + P_{22}\xi_i) - \frac{H'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11} + q_{12}\xi_i) \\ H'_0(ka_0)(P_{11} + P_{12}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} J'_0(ka_0)(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ kJ_0(ka_0)(t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_h^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} kJ_0(ka_0)(P_{21} + P_{22}\eta_i) - \frac{J'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11} + q_{12}\eta_i) \\ J'_0(ka_0)(P_{11} + P_{12}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} J'_0(kr)(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ kJ_0(kr)(t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z=0, \quad \text{and} \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ G_h^{(i)}(r) = 0 \end{array} \right. \quad (5-8)$$

其中

$$F_1 e^{(z-h_{j-1})} E_j^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{35} & P_{36} \end{bmatrix}$$

和

$$F_2 e^{(z-h_{j-1})} E_j^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{25} & q_{26} \end{bmatrix}$$

在 (5-8) 式中我們可以發現 $G_h^{(i)}(r) = 0$ ，這一項正好符合齊性解的邊界條件，並且在 (5-3) 式中我們以經將應力特解的模態求出，將 (5-3) 式代入轉換位移應力矩陣 (2-36) 式可求出位移特解的模態，在求得特解表面模態後分別代入 (2-15) 式及 (2-20) 式求得內域解的特解模態為

$$\left\{ \begin{array}{l} N_p^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} J'_0(ka_0)(t_{11}^{(i)} Q_{12} + t_{12}^{(i)} Q_{22} + t_{14}^{(i)}) \\ kJ_0(ka_0)(t_{21}^{(i)} Q_{12} + t_{22}^{(i)} Q_{22} + t_{24}^{(i)}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_p^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} kJ_0(ka_0)(P_{21} Q_{12} + P_{22} Q_{22} + P_{24}) - \frac{J'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11} Q_{12} + q_{12} Q_{22} + q_{14}) \\ J'_0(ka_0)(P_{11} Q_{12} + P_{12} Q_{22} + P_{14}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_p^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} J'_0(kr) Q_{12} \\ kJ_0(kr) Q_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = 0, \quad \text{and} \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ G_h^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ kJ_0(kr) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-9)$$

5.4 B 矩陣

由 (3-24) 中可知

$$B = \int_{S_1+S_2} H^T N \, dS \quad (5-10)$$

對於圖十五的垂直振動問題， dS 積分面只有 S_2 而已，所以 $dS = 2\pi r dr$ ，

有限元素在垂直振動問題中形狀函數為 $N=1$ ， H 在 (3-3) 式中取

$m_2 = m$ ，因此可以求得 B 矩陣為

$$B = \int_{S_2} H^T N dS = \text{col} (B_1, B_2 \cdots B_{m+1}) \quad (5-11)$$

其中

$$B_{j+1} = 2\pi \int_0^{a_0} h_j(r) r dr = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{6} b^2 & , \text{當 } j=0 \\ \frac{3m-1}{6} b^2 & , \text{當 } j=m \\ j b^2 & , \text{當 } j \neq 0, \text{或 } m \end{cases} \quad (5-12)$$

5.5 D 矩陣

在 3.2 節中我們已經知道 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 可表示成 β_p 與 V_{b1} 之間的比率關係，要求得 β_p 與 V_{b1} 首先要求得 D_{P_1} 與 D_{P_2} ，在本例題中與上一節一樣， dS 積分面只有 S_2 而已故

$$D_{P_2} = \int_{S_2} G_P^T(r) H_2(r) dS \quad (5-13)$$

將 (5-9) 式求得的形狀函數代入 (5-13) 式中可得

$$[D_{P_2}]_{ij} = 2\pi \int_0^{a_0} k_i J_0(k_i r) h_{j-1}(r) r dr \quad (5-14)$$

5.6 K 矩陣

在 2.3 節中 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 的求得必需借由內域外域垂直交界面的積分，在 (2-56) 式中

$$K = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

在 4.6 節中已經成功的描述 K 反矩陣之數值不穩定現象，並發現 K 的反矩陣之數值不穩定現象的產生乃是 Hankel 函數和 Bessel 函數所造成的，同樣的我們可以改寫形狀函數將它併入模態參與係數中，以克服數值不穩定現象如下

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)}(t_{11}^{(e)} + t_{12}^{(e)}\xi_i) \\ t_{21}^{(e)} + t_{22}^{(e)}\xi_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ G^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} (P_{21} + P_{22}\xi_i) - \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)a_0}(q_{11} + q_{12}\xi_i) \\ \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)}(P_{11} + P_{12}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)}(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_h^{(i)}(z) = \begin{bmatrix} (P_{21} + P_{22}\eta_i) - \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)a_0}(q_{11} + q_{12}\eta_i) \\ \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)}(P_{11} + P_{12}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5-17)$$

當我們將新的形狀函數改寫完成，便可以精確求得 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 與 β_p 之間的比率關係，便可以進行數值程式的分析。

5.7 數值結果與討論

在 5.6 節中我們已經提出如何克服算準模態之間的比率關係，由 (3-28) 式中可知阻抗矩陣為

$$I = B^T Q^{-1} B \quad (5-18)$$

於圖十五中，圓板的半徑為 a_0 ，土壤的遲滯阻尼 (Hysteretic Damping) $\xi = 0.05$ ，而複數型的剪力波數 (Complex Shear Modulus $G = 1 + 2\xi i$)，包生比為 μ ，土壤密度為 ρ ；於是我們取各參數值為 $a_0 = 0.5$ ， $d = 1$ ， $\xi = 0.05$ ， $G = 1 + 2\xi i$ ， $\mu = \frac{1}{3}$ ， $\rho = 1$ ；來進行數值程式的撰寫，圖十九和圖二十分別為無因次垂直振動阻抗矩陣的實數部份 $\text{Re}(\frac{I_V}{Ga_0^3})$ 與虛數部份 $\text{Im}(\frac{I_V}{Ga_0^3})$ ，而橫座標為無因次的頻率 $\frac{\omega a_0}{2\pi \text{Re}(c_s)}$ ；在圖十九和圖二十中表示取齊性解加上特解的波數值所得的結果，我們可以和 Liou [12] 所做的結果加以比較，我們發現當我們齊性解加上特解取到 50 個時，阻抗矩陣已經收斂不錯了。

第六章 剛性圓板沉埋基礎之扭轉振動

本章節中將舉出一個例子來驗證沉埋基礎之阻抗矩陣，並且發展出一套沉埋基礎之扭轉振動程式和 Aviles [16] 作比較驗證程式，圖二十一為一圓形無質量的剛性圓板沉埋於土層，假設受到一扭轉振動的諧合載重，對於軸對稱的問題而言，當圓形無質量的剛性圓板受扭轉振動時，(2-2)式中當 $n=0$ 時，且只有考量拉夫模態 (Love modes) 發生時，因此所有的位移和應力只有在 θ 方向上才有值，位移和應力向量只存在 u_θ 和 τ_α 存在，我們可以將 (3-28) 式所得到的式子求得阻抗矩陣並對模態參與係數做數值的分析與求解。

6.1 拉夫模態 (Love modes) 的頻率方程式

由第二章中可知內外域解的拉夫頻率方程式分別為 (2-9) 式與 (2-17) 式。為發展數值解來求得超越函數，我們對於單一土層系統而言，拉夫頻率方程式為

$$t_{55} = CH' = \cosh v'd = 0 \quad (6-1)$$

由於

$$e^{iv'd} = \cos v'd + i \sin v'd \quad (6-2)$$

$$e^{-iv'd} = \cos v'd - i \sin v'd \quad (6-3)$$

由 (6-2) 式和 (6-3) 式可將 (6-1) 化簡為

$$\cosh v'd = \cos iv'd = 0 \quad (6-4)$$

因此我們可順利求得解析解的拉夫波數值為

$$iv'd = \left(\frac{2N+1}{2}\right)\pi, \quad N = 0,1,2,\dots \quad (6-5)$$

我們可以將 $v' = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_s^2}$ 代入 (6-5) 式中求得波數的解析解為

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{2N+1}{2d}\pi\right)^2}, \quad N = 0,1,2,3,\dots \quad (6-6)$$

因此由 (6-6) 式我們分別可以求出內域與外域齊性解的波數分別為

$$k_e = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{2N+1}{2d_1}\pi\right)^2}, \quad N = 0,1,2,3,\dots \quad (6-7)$$

其中 d_1 為外域場土壤的深度。

$$k_h = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{2N+1}{2d_3}\pi\right)^2}, \quad N = 0,1,2,3,\dots \quad (6-8)$$

其中 d_3 為內域場土壤的深度。

6.2 特解的模態波數

在土壤表面分別受到 $t_{b1}(z)$ 和 $t_{b2}(r)$ 方向上的兩個力量作用，在垂直面方向僅受 $\tau_{\alpha z}(z)$ 在垂直面作用，因此由第三章的推導可知：

$$\tau_{\alpha z}(z) = h_0(z)S_0 + h_1(z)S_1 + \dots + h_m(z)S_m = h_i^T(z)S_i \quad (6-9)$$

將扭轉振動的諧合載重代入 (2-25) 式中，並將 $\tau_{\alpha z}$ 做 Bessel 函數展開可得特解表面應力為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\alpha z}^0(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} k_i J_1(k_i r) \beta_1(k_i) + \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_l J_{-1}(k_l r) \beta_{-1}(k_l) \quad (6-10)$$

其中

$$\beta_1(k_i) = \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{-\tau_{\theta z}^0(r)}{2} \right) J_1(k_i r) dr - k_0^{(1)} A_0^{(1)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(1)} r) J_1(k_i r) dr}{k_i \int_0^{a_0} r J_1^2(k_i r) dr} \quad (6-11)$$

$$\beta_{-1}(k_l) = \frac{\int_0^{a_0} r \left(\frac{\tau_{\theta z}^0(r)}{2} \right) J_1(k_l r) dr - k_0^{(3)} C_0^{(3)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(3)} r) J_1(k_l r) dr}{k_l \int_0^{a_0} r J_1^2(k_l r) dr}$$

因為 $J_{-1}(kr) = -J_1(kr)$ ，所以可得 $\beta_1(k_i) = \beta_{-1}(k_l)$ ，因此可將 (6-11) 改寫為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\theta z}^0(r) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k_i J_1(k_i r) \beta_1^*(k_i) \quad (6-12)$$

其中

$$\beta_1^*(k_i) = \frac{\int_0^{a_0} r (\tau_{rz}^0(r)) J_1(k_i r) dr - k_0^{(1)} A_0^{(1)} \int_0^{a_0} r J_1(k_0^{(1)} r) J_1(k_i r) dr}{k_i \int_0^{a_0} r J_1^2(k_i r) dr} \quad (6-13)$$

在 (6-13) 式中，為了滿足邊界 $r = a_0$ 牽引力 $\tau_{\theta z}$ 不為零，第一個波數取 $k_0 = 0.5k_1$ 其餘為

$$J_1(k_i a_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (6-14)$$

6.3 模態函數

我們以經順利將齊解的波數與特解的波數求得後，我們分別將外域解與內域解的拉夫模態(2-11) 式和 (2-19)式代入 (2-3) 式、(2-12) 式、(2-15) 式及 (2-20) 式求得內外域解的齊性模態為

$$\begin{cases} N^{(e)}(z) = H'_0(ka_0) \cosh v'z \\ G^{(e)}(z) = 2G \cosh v'z \left[-\frac{H'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} H_0(ka_0) \right] \end{cases} \quad (6-15)$$

$$\begin{cases} N_h^{(i)}(z-d_2) = J'_0(ka_0) \cosh v'(z-d_2) \\ G_h^{(i)}(z-d_2) = 2G \cosh v'(z-d_2) \left[-\frac{J'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} J_0(ka_0) \right] \end{cases} \quad (6-16)$$

$$\begin{cases} N_h^{(i)}(r) = J'_0(kr) \\ G_h^{(i)}(r) = 0 \end{cases} \quad (6-17)$$

在 (6-10) 式中我們以經將應力特解的模態求出，將 (6-10) 式代入轉換位移應力矩陣 (2-36) 式可求出位移特解的模態，在求得特解表面模態後分別代入 (2-15) 式及 (2-20) 式求得內域解的特解模態為

$$\begin{cases} N_p(r) = \frac{J'_0(kr)}{Gv'} \tanh v'd_3 \\ G_p(r) = -J'_0(kr) \end{cases} \quad (6-18)$$

$$\begin{cases} N_p(z-d_2) = \frac{J'_0(ka_0)}{Gv'} [\tanh v'd_3 \cosh v'(z-d_2) - \sinh v'(z-d_2)] \\ G_h^{(i)}(z-d_2) = \frac{2}{v'} \left[-\frac{J'_0(ka_0)}{a_0} - \frac{k^2}{2} J_0(ka_0) \right] [\tanh v'd_3 \cosh v'(z-d_2) - \sinh v'(z-d_2)] \end{cases} \quad (6-19)$$

6.4 B 矩陣

由 (3-24) 中可知

$$B = \int_{S_1+S_2} H^T N \, dS \quad (6-20)$$

對於圖二十一之扭轉振動問題， dS 積分面分別有 S_1 和 S_1 ，所以在 S_1 面上

$dS_1 = 2\pi a_0 dz$ ，在 S_2 面上 $dS_2 = 2\pi r dr$ ，有限元素在扭轉振動問題中形狀函數分別為 $N_1 = a_0$ 、 $N_2 = r$ ， H 在 (3-3) 式中取 $m_1 = m_2 = m$ ，因此可以求得 B 矩陣為

$$B = \int_{S_1} H^T N dS + \int_{S_2} H^T N dS = \text{col}(B_1, B_2 \cdots B_{2m+2}) \quad (6-21)$$

其中

$$B_{j+1} = 2\pi \int_0^{a_0} h_j(r) r^2 dr = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{12} b^3 & , \text{當 } j=0 \\ \frac{6m^2 - 4m + 1}{12} b^3 & , \text{當 } j=m \\ \frac{6j^2 + 1}{6} b^3 & , \text{當 } j \neq 0, \text{或 } m \end{cases} \quad (6-22)$$

6.5 D 矩陣

在 3.2 節中我們已經知道 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 可表示成 β_p 與 V_{b1} 之間的比率關係，要求得 β_p 與 V_{b1} 首先要求得 D_{P_1} 與 D_{P_2} ，在本例題中因為有沉埋基礎， dS 積分面有 S_1 和 S_2 故：

$$D_{P_1} = \int_{S_1} N_e^T(z) H_1(z) dS \quad (6-23)$$

其中 $V_{b1} = D_{p1} P_1$ ，

$$D_{P_2} = \int_{S_2} G_P^T(r) H_2(r) dS \quad (6-24)$$

其中 $\beta_p = D_{p2} P_2$

6.6 K 矩陣

在 2.3 節中 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 的求得必需借由內域外域垂直交界面的積分，在 (2-56) 式中若

$$K = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

在本節中將以解析的方式來描述 K 的反矩陣之數值不穩定現象，並提出一個好方法來處理這個問題。我們將 (6-15) 式與 (6-16) 式代入 (6-17) 可求得

$$[K_{ee}]_{ii} = 2GH'_0(k_i a_0) \left(-\frac{H'_0(k_i a_0)}{a_0} - \frac{k_i^2}{2} H_0(k_i a_0) \right) \int_0^{d_1} [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_i z)] dz \quad (6-26)$$

$$[K_{eh}]_{ij} = 2GH'_0(k_i a_0) \left(-\frac{J'_0(k_j a_0)}{a_0} - \frac{k_j^2}{2} J_0(k_j a_0) \right) \int_{d_2}^{d_1} [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (6-27)$$

$$[K_{he}]_{ji} = 2GH'_0(k_j a_0) \left(-\frac{J'_0(k_i a_0)}{a_0} - \frac{k_i^2}{2} J_0(k_i a_0) \right) \int_{d_2}^{d_1} [(\cosh v'_i z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (6-28)$$

$$[K_{hh}]_{jj} = 2GJ'_0(k_j a_0) \left(-\frac{J'_0(k_j a_0)}{a_0} - \frac{k_j^2}{2} J_0(k_j a_0) \right) \int_{d_2}^{d_1} [(\cosh v'_j z)(\cosh v'_j z)] dz \quad (6-29)$$

我們可以將齊性解的高模態波數代入後，虛部越大發現 $[K_{ee}]$ ， $[K_{hh}]$ 對角線之值會很小，這樣會造成 K 的反矩陣之數值不穩定現象(奇異矩陣的產生)，我們發現 K 的反矩陣之數值不穩定現象的產生乃是 Hankel 函數和 Bessel 函數所造成的，因此為了克服這個問題，我們發現 Hankel 函數和 Bessel 函數為模態的變數與垂直面的積分無關，所以我們可以將它併入模態參與係數中，以克服數值不穩定現象。

6.7 數值結果與討論

由第三章我們以經成功的推導沉埋基礎之阻抗矩陣，在本章節利用解析方式發展出一套程式並且和 Aviles[15]作比較分析，從 (3-28) 式中可知阻抗矩陣為

$$I = B^T Q^{-1} B \quad (4-27)$$

於圖二十一中，圓板的半徑為 a_0 ，土壤的遲滯阻尼 (Hysteretic Damping) $\xi = 0.05$ ，而複數型的剪力波數 (Complex Shear Modulus $G = 1 + 2\xi i$)，包生比為 μ ，土壤密度為 ρ ；於是我們取各參數值為 $a_0 = 0.5$ ， $d_1 = 1$ ， $\xi = 0.05$ ， $G = 1 + 2\xi i$ ， $\mu = \frac{1}{3}$ ， $\rho = 1$ ；來進行數值程式的撰寫，圖二十二和圖三十一分別為無因次扭轉阻抗矩陣的實數部份 $\text{Re}(\frac{I_T}{Ga_0^3})$ 與虛數部份 $\text{Im}(\frac{I_T}{Ga_0^3})$ 由土壤埋入深 d_2 並取 $R = a_0$ 可得 $d_2/R = 0$ ， $d_2/R = 0.25$ ， $d_2/R = 0.5$ ， $d_2/R = 0.75$ ， $d_2/R = 1$ ，而橫座標為無因次的頻率 $\frac{\omega a_0}{2\pi \text{Re}(c_s)}$ ；在圖二十二和圖三十一中表示取齊性解加上特解的波數值所得的結果，結果顯示當齊性解加上特解達到 20 個以上便有好的收斂結果，我們可以和 Aviles [15] 所做的結果加以比較，我們發現當我們齊性解加上特解取到 20 個時，阻抗矩陣已經收斂不錯了。

第七章 剛性圓板沉埋基礎之垂直振動

在第六章中已經成功的發展出一套程式求出沉埋基礎之扭轉阻抗矩陣，並且以解析和數值的方法求得彈性波數值，本章節將更深入來探討沉埋基礎之垂直阻抗矩陣的求解，圖三十二為一圓形無質量的剛性圓板沉埋於土層，假設受到一垂直振動的諧合載重，對於軸對稱的問題而言，當圓形無質量的剛性圓板受垂直振動時，(2-2)式中當 $n=0$ 時，且只有考量雷利模態 (Rayleigh modes) 發生時，因此所有的位移和應力只存在於 r 方向和 z 方向，我們可知位移和應力向量與 θ 方向是無關的，我們可以將 (3-28) 式所得到的式子求得阻抗矩陣並對模態參與係數做數值的分析與求解。

7.1 雷利模態 (Rayleigh modes) 的頻率方程式

由第二章中可知內外域解的雷利頻率方程式分別為 (2-8) 式與 (2-16) 式。為發展數值解來求得超越函數，我們對於單一土層系統而言，雷利頻率方程式為

$$t_{11} * t_{22} - t_{12} * t_{21} = 0 \quad (7-1)$$

我們無法以解析方式求得雷利頻率方程式的解，但我們可以利用 2.4 節中的方法進行數值程式的求解，當波數值求得後，我們可以知道波數值在外域的條件下必需滿足輻射的條件，當 $r \rightarrow \infty$ 時 $H_n^{(2)}(kr) \rightarrow 0$ ，第二類 Hankel 函數的級數解的為

$$H_n^{(2)}(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right) \exp(-ix + n\pi/2 - \pi/4) \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{i!(8ix)} + \dots\right] \quad (7-2)$$

若 $k = A + iB$ 代入 (7-2) 式，為了滿足輻射的條件必須取複數平面的下半平面也就是 B 為負。我們可以利用 2.4 節中的方法進行數值程式的求解，分別求出內域與外域的彈性波數與模態。

7.2 特解的模態波數

在土壤表面分別受到 $t_{b1}(z)$ 和 $t_{b2}(r)$ 方向上的兩個力量作用，在垂直面方向僅受 $\tau_{rz}(z)$ 在垂直面作用，因此由第三章的推導可知：

$$\tau_{rz}(z) = h_0(z)S_0 + h_1(z)S_1 + \cdots + h_m(z)S_m = h_i^T(z)S_i \quad (7-3)$$

在水平面我們將垂直振動的諧合載重代入(2-25) 式中，並將 $\tau_{zz}(r)$ 做 Bessel 函數展開可得特解表面應力為

$$t_{b2}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{zz}^n(r) \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} k_j J_0(k_j r) \beta_0(k_j) \quad (7-4)$$

其中

$$\beta_0(k_j) = \int_0^{a_0} r (\tau_{zz}^0(r)) J_0(k_j r) dr \quad (7-5)$$

在 (5-3) 式中，為了滿足邊界 $r = a_0$ 牽引力 τ_{zz} 不為零，第一個波數取

$k_0 = 0.5k_1$ 其餘為

$$J_0(k_j a_0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7-6)$$

7.3 模態函數

我們以經順利將齊解的波數與特解的波數求得後，我們分別將外域解與內域解

的雷利模態(2-10) 式和 (2-18)式代入 (2-3) 式、(2-12) 式、(2-15) 式及

(2-20) 式求得內外域解的齊性模態為

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} H'_0(ka_0)(t_{11}^{(e)} + t_{12}^{(e)}\xi_i) \\ kH_0(ka_0)(t_{21}^{(e)} + t_{22}^{(e)}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} kH_0(ka_0)(P_{21} + P_{22}\xi_i) - \frac{H'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11} + q_{12}\xi_i) \\ H'_0(ka_0)(P_{11} + P_{12}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(z - d_2) = \begin{bmatrix} J'_0(ka_0)(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ kJ_0(ka_0)(t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_h^{(i)}(z - d_2) = \begin{bmatrix} kJ_0(ka_0)(P_{21} + P_{22}\eta_i) - \frac{J'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11} + q_{12}\eta_i) \\ J'_0(ka_0)(P_{11} + P_{12}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} J'_0(kr)(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ kJ_0(kr)(t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = 0, \quad \text{and} \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ G_h^{(i)}(r) = 0 \end{array} \right. \quad (7-9)$$

其中

$$F_1 e^{(z - h_{j-1})} E_j^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{35} & P_{36} \end{bmatrix}$$

和

$$F_2 e(z-h_{j-1}) E_j^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{25} & q_{26} \end{bmatrix}$$

在 (7-9) 式中我們可以發現 $G_h^{(i)}(r)=0$ ，這一項正好符合齊性解的邊界條件，並且在 (7-6) 式中我們以經將應力特解的模態求出，將 (7-6) 式代入轉換位移應力矩陣 (2-36) 式可求出位移特解的模態，在求得特解表面模態後分別代入 (2-15) 式及(2-20) 式求得內域解的特解模態為

$$\left\{ \begin{array}{l} N_p^{(i)}(z-d_2) = \begin{bmatrix} J'_0(ka_0)(t_{11}^{(i)}Q_{12} + t_{12}^{(i)}Q_{22} + t_{14}^{(i)}) \\ kJ_0(ka_0)(t_{21}^{(i)}Q_{12} + t_{22}^{(i)}Q_{22} + t_{24}^{(i)}) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_p^{(i)}(z-d_2) = \begin{bmatrix} kJ_0(ka_0)(P_{21}Q_{12} + P_{22}Q_{22} + P_{24}) - \frac{J'_0(ka_0)}{a_0}(q_{11}Q_{12} + q_{12}Q_{22} + q_{14}) \\ J'_0(ka_0)(P_{11}Q_{12} + P_{12}Q_{22} + P_{14}) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_p^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} J'_0(kr)Q_{12} \\ kJ_0(kr)Q_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z=0, \quad \text{and} \quad 0 \leq r \leq a_0 \\ G_h^{(i)}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ kJ_0(kr) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-11)$$

7.4 B 矩陣

由 (3-24) 中可知

$$B = \int_{S_1+S_2} H^T N \, dS \quad (7-12)$$

對於圖三十一的扭轉振動問題， dS 積分面分別有 S_1 和 S_2 ，所以在 S_1 面上

$dS_1 = 2\pi a_0 dz$ ，在 S_2 面上 $dS_2 = 2\pi r dr$ ，有限元素在扭轉振動問題中形狀函數

分別為 $N_1 = 1$ 、 $N_2 = 1$ ， H 在 (3-3) 式中取 $m_1 = m_2 = m$ ，因此可以求得 B

矩陣為

$$B = \int_{S_1} H^T N dS + \int_{S_2} H^T N dS = \text{col}(B_1, B_2 \cdots B_{2m+2}) \quad (7-13)$$

其中

$$B_{j+1} = 2\pi \int_0^{a_0} h_j(r) r dr = 2\pi \begin{cases} \frac{1}{6} b^2 & , \text{當 } j=0 \\ \frac{3m-1}{6} b^2 & , \text{當 } j=m \\ j b^2 & , \text{當 } j \neq 0, \text{或 } m \end{cases} \quad (7-14)$$

7.5 D 矩陣

在 3.2 節中我們已經知道 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 可表示成 β_p 與 V_{b1} 之間的比率關係，要求得 β_p 與 V_{b1} 首先要求得 D_{P_1} 與 D_{P_2} ，在本例題中因為有沉埋基礎， dS 積分面有 S_1 和 S_2 故：

$$D_{P_1} = \int_{S_1} N_e^T(z) H_1(z) dS \quad (7-15)$$

其中 $V_{b1} = D_{p1} P_1$ ，

$$D_{P_2} = \int_{S_2} G_P^T(r) H_2(r) dS \quad (7-16)$$

其中 $\beta_p = D_{p2} P_2$

7.6 K 矩陣

在 2.3 節中 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 的求得必需借由內域外域垂直交界面的積分，在

(2-56) 式中

$$K = \begin{bmatrix} K_{ee} & -K_{eh} \\ -K_{he} & K_{hh} \end{bmatrix} \quad (7-17)$$

在 4.6 節中已經成功的描述 K 反矩陣之數值不穩定現象，並發現 K 的反矩陣之數值不穩定現象的產生乃是 Hankel 函數和 Bessel 函數所造成的，同樣的我們可以改寫形狀函數將它併入模態參與係數中，以克服數值不穩定現象如下

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)}(t_{11}^{(e)} + t_{12}^{(e)}\xi_i) \\ t_{21}^{(e)} + t_{22}^{(e)}\xi_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ G^{(e)}(z) = \begin{bmatrix} (P_{21} + P_{22}\xi_i) - \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)a_0}(q_{11} + q_{12}\xi_i) \\ \frac{H'_0(ka_0)}{kH_0(ka_0)}(P_{11} + P_{12}\xi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_h^{(i)}(z-d_2) = \begin{bmatrix} \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)}(t_{11}^{(i)} + t_{12}^{(i)}\eta_i) \\ t_{21}^{(i)} + t_{22}^{(i)}\eta_i \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_h^{(i)}(z-d_2) = \begin{bmatrix} (P_{21} + P_{22}\eta_i) - \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)a_0}(q_{11} + q_{12}\eta_i) \\ \frac{J'_0(ka_0)}{kJ_0(ka_0)}(P_{11} + P_{12}\eta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (7-19)$$

當我們將新的形狀函數改寫完成，便可以精確求得 α_e 和 $\alpha_h^{(i)}$ 與 β_p 之間的比

率關係，便可以進行數值程式的分析。

7.7 數值結果與討論

在 7.6 節中我們已經提出如何克服算準模態之間的比率關係，由 (3-28) 式中可知阻抗矩陣為

$$I = B^T Q^{-1} B \quad (7-20)$$

於圖三十二中，圓板的半徑為 a_0 ，土壤的遲滯阻尼 (Hysteretic Damping) $\xi = 0.05$ ，而複數型的剪力模數 (Complex Shear Modulus $G = 1 + 2\xi i$)，包生比為 μ ，土壤密度為 ρ ；於是我們取各參數值為 $a_0 = 0.5$ ， $d_1 = 1$ ， $\xi = 0.05$ ， $G = 1 + 2\xi i$ ， $\mu = \frac{1}{3}$ ， $\rho = 1$ ；來進行數值程式的撰寫，圖三十三和圖四十分別為無因次扭轉阻抗矩陣的實數部份 $\text{Re}(\frac{I_T}{Ga_0})$ 與虛數部份 $\text{Im}(\frac{I_T}{Ga_0})$ 由土壤埋入深 d_2 並取 $R = a_0$ 可得 $d_2/R = 0$ ， $d_2/R = 0.25$ ， $d_2/R = 0.5$ ， $d_2/R = 1$ ，而橫座標為無因次的頻率 $\frac{\omega a_0}{2\pi \text{Re}(c_s)}$ ；在圖三十三和圖四十中表示取齊性解加上特解的波數值所得的結果，結果顯示當齊性解加上特解達到 20 個以上便有好的收斂結果，我們發現當我們齊性解加上特解取到 20 個時，阻抗矩陣已經收斂不錯了。

第八章 討論與展望

總結前面幾章所述，我們可以得到以下的結論

1. 我們在解析推導動力反矩陣的過程中，首先解析求得彈性波數的控制方程，使用有效的數值新方法求得複數根(Complex roots)，並且對於如何選取無限個複數根(Complex roots)做解析與數值的論證，並已發展出一套程式可以精確求得超越函數的複數根。
2. 我們已經成功的將阻抗矩陣解析推導出，在解析推導的過程中發現齊性解的模態與特解的模態之間比率關係是為重要。由本文可知在高頻的模態對阻抗矩陣貢獻雖小但在算模態之間比率關係卻會造成算反矩陣的奇異現象，因此在發展程式的過程中提出一個新方法克服了高頻率產生奇異矩陣的現象，並舉出一簡單的例子加以解析和數值的論證。
3. 本文雖已成功解析推導動力反矩陣，並做出三個簡單的特例來論證本文的可行性，包含無沉埋基礎扭轉振動、無沉埋基礎垂直振動、沉埋基礎扭轉振動、沉埋基礎垂直振動。我們將持續研究求出垂直振動和翻轉振動的沉埋基礎的阻抗矩陣。

4. 在未來我們將解析推導把求得的土壤阻抗勁度矩陣與不同的結構物加以結合，來進行分析層狀土壤與結構物之間互制系統，並求得結構物與土壤之間的反應。

5. 地震波在分層土壤間的交互行為問題在土壤動力學與地震工程扮演很重要的角色，許多發表之期刊對於此問題大多以有限元素法和邊界元素法來分析，本文所提方法將避免有限元素法的高計算量且免除邊界元素法中的奇異值積分問題以大大提昇計算效率，本論文完成後，於將來做為提供地震波傳遞在土層與結構物之間互制系統分析之參考與設計。

参考文献

1. Tzong T. J. and Penzien J. (1986) "Hybrid modelling of a single-layer half-space system in soil-structure interaction," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, 517-530.
2. Lysmer J. and Kuhlemeyer R. L. (1969) "Finite dynamic model for infinite media, " *J. Eng. Mech. Div.*, Vol.95, 859-877.
3. White W., Valliapan S. and Lee I. K. (1977) "Unified boundary for finite dynamic model." *J. Eng. Mech. Div.*, Vol.95, 103.
4. White H., (1986) "Dynamic finite element analysis of three-dimensional soil models with a transmitting element.," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.14, 41-60.
5. Ahmad S. and Banerjee (1988) "Multi-domain BEM for two-dimensional problems in elastodynamics.," *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol.26, 891-911.
6. Chow Y. K. and Smith I. M. (1981) "Static and Periodic infinite solid elements.," *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol.17, 503-526.
7. Conte S. D. and de Boor C. (1980) "Elementary Numerical Analysis.," McGraw-Hill. New York, 72-127.
8. Ungless R. F. (1973) "An infinite element, M. A. Sc. dissertation, University of British Columbia
9. Bettles P. (1977) "Infinite element," *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol.11, 54-64.
10. Yun C. B., Kim D. K. and Kim J. M. (2000) "Analytical

frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium.," Engineering Structure, Vol.22, 258-271.

11. Pak R. Y. and Guzina B. B. (1999) "Seismic soil-structure interaction analysis by direct boundary element methods.," International Journal of Solids and Structures, Vol.36, 4743-4766.
12. Liou G. S. (1989) "Analytic solutions for soil-structure interaction in layered media.," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, 667-949.
13. Liou G. S. and Lee G. C. (1992) "Impedance matrices for axial symmetric foundations on layered media.," Structural Eng. / Earthquake Eng., Vol.9, 33-44.
14. Sezawa K. (1929) "Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution.," Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ., Vol.6, 1-18.
15. Aviles J. and Perez-Rocha L. E. (1996) "A Simplified procedure for torsional impedance functions of embedded foundations in a soil layer.," Computers and Geotechnics, Vol.19, No2, 97-115.

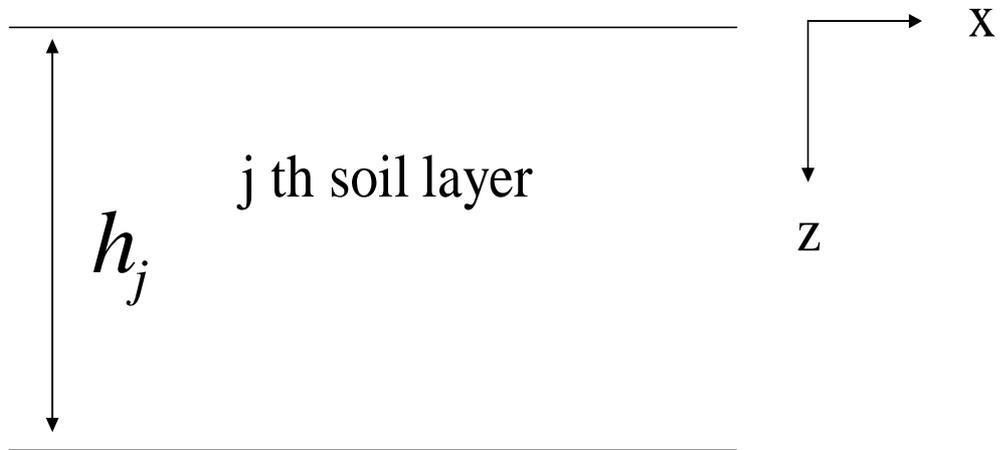
Complex wave number			
Basic equations	For Love modes	Exterior domain	$t_{55}^{(e)} = 0$
		Interior domain	$t_{55}^{(i)} = 0$
	For Rayleigh modes	Exterior domain	$t_{11}^{(e)} \times t_{22}^{(e)} - t_{12}^{(e)} \times t_{21}^{(e)} = 0$
		Interior domain	$t_{11}^{(i)} \times t_{22}^{(i)} - t_{12}^{(i)} \times t_{21}^{(i)} = 0$

表一 彈性波數在分層土壤之間傳送的超越方程式

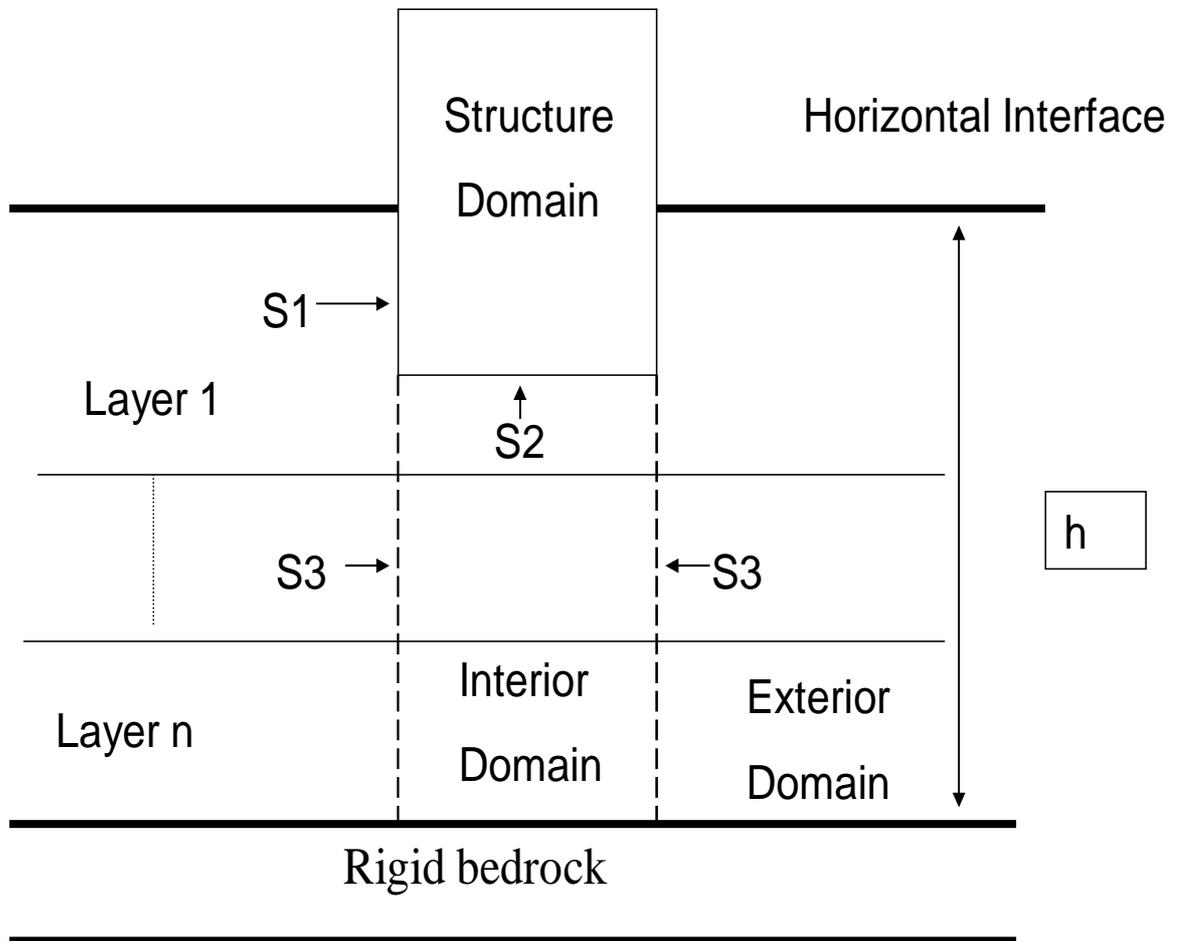
$\omega=0.4$	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
解析解	0.00521 - I 1.519	0.00168 - I 4.695	0.00101 - I 7.843	0.00072 - I 10.98	0.00056 - I 14.1316	0.00045 - I 17.274
數值解	0.00521 - I 1.519	0.00168 - I 4.695	0.00101 - I 7.843	0.00072 - I 10.98	0.00056 - I 14.1316	0.00045 - I 17.274
$\omega=2$	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
解析解	1.2324 - I 0.160	0.0463 - I 4.271	0.02606 - I 7.597	0.01831 - I 10.81	0.01414 - I 13.996	0.01153 - I 17.16
數值解	1.2324 - I 0.160	0.0463 - I 4.271	0.02606 - I 7.597	0.01831 - I 10.81	0.01414 - I 13.996	0.01153 - I 17.16
$\omega=6$	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
解析解	5.7681 - I 0.308	3.6972 - I 0.482	0.3484 - I 5.114	0.1929 - I 9.235	0.13906 - I 12.815	0.10991 - I 16.214
數值解	5.7681 - I 0.308	3.6972 - I 0.482	0.3484 - I 5.114	0.1929 - I 9.235	0.13906 - I 12.815	0.10991 - I 16.214

表二 比較彈性波數值的解析解與數值解

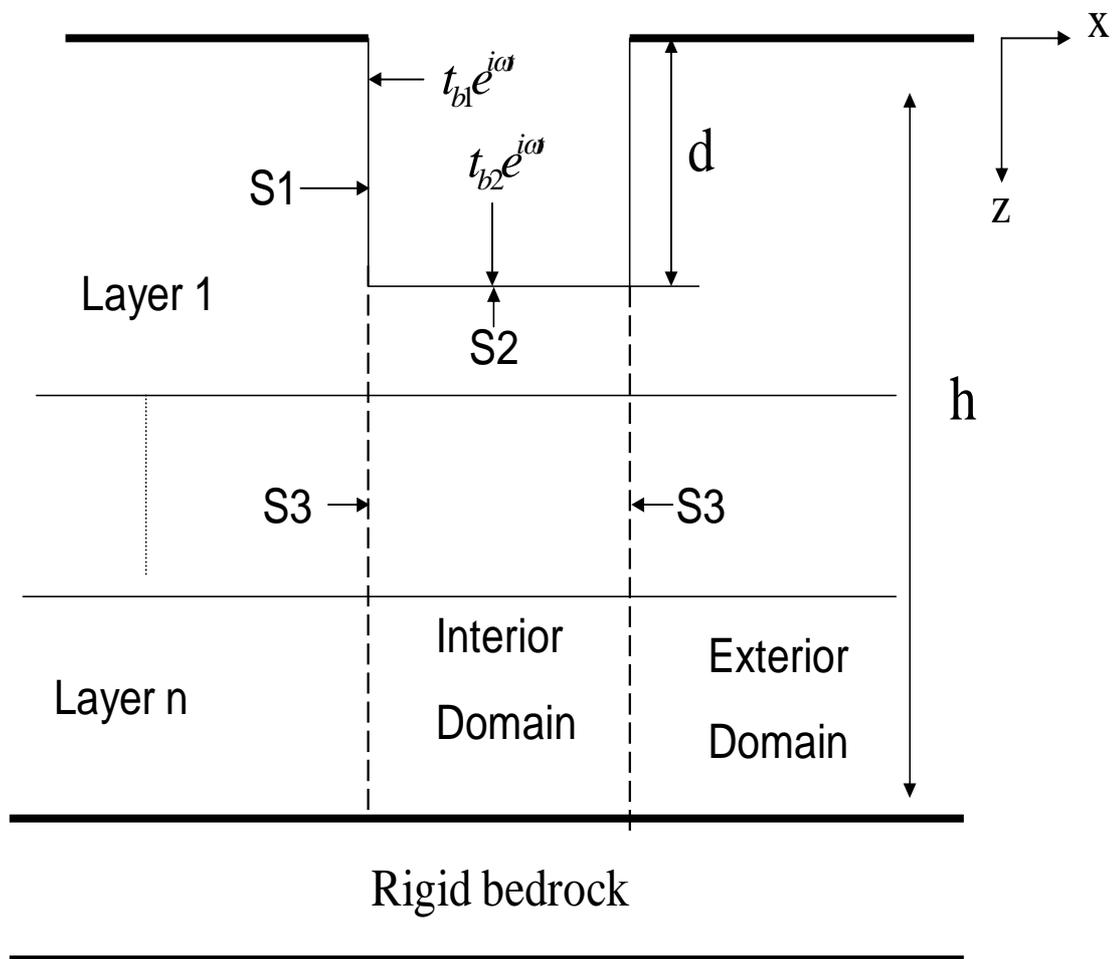
$$Y_j = \hat{H}a_j \hat{H}^{-1} Y_{j-1}$$



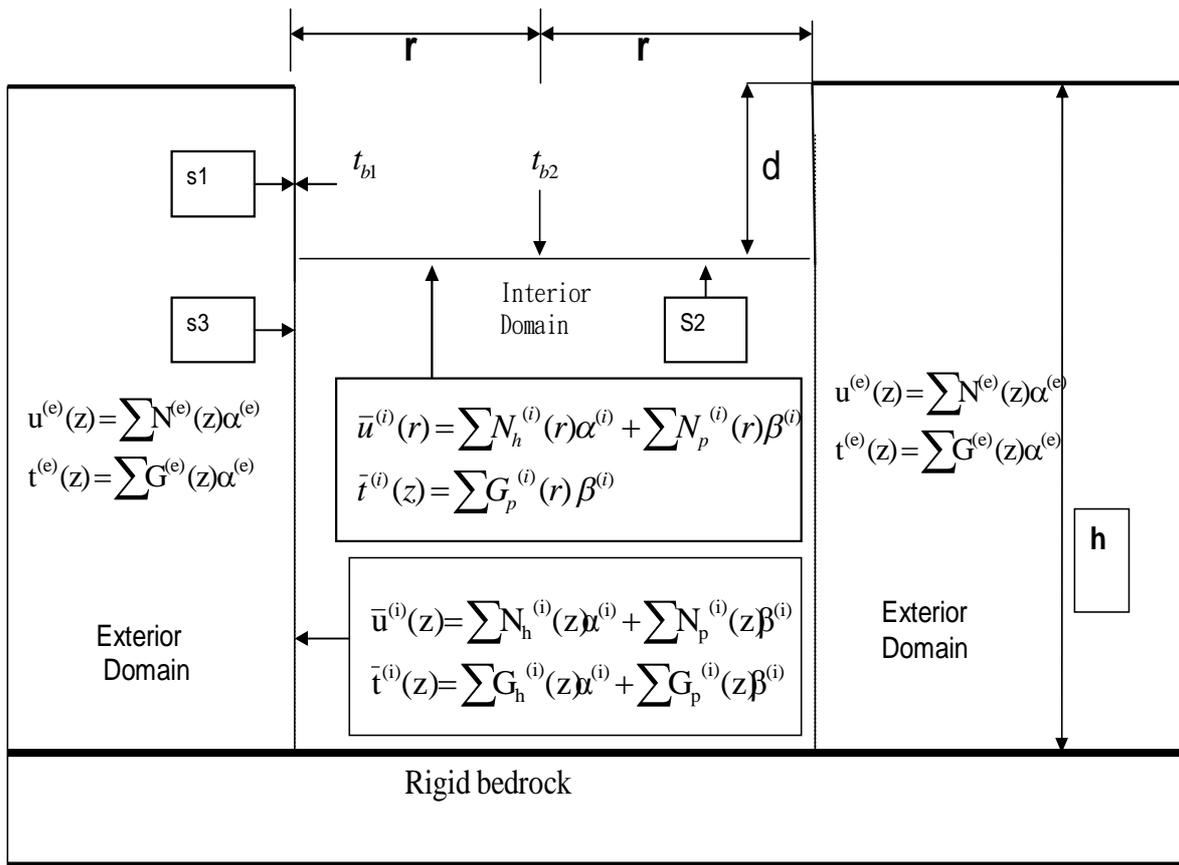
圖一 兩層土壤應力位移轉換矩陣



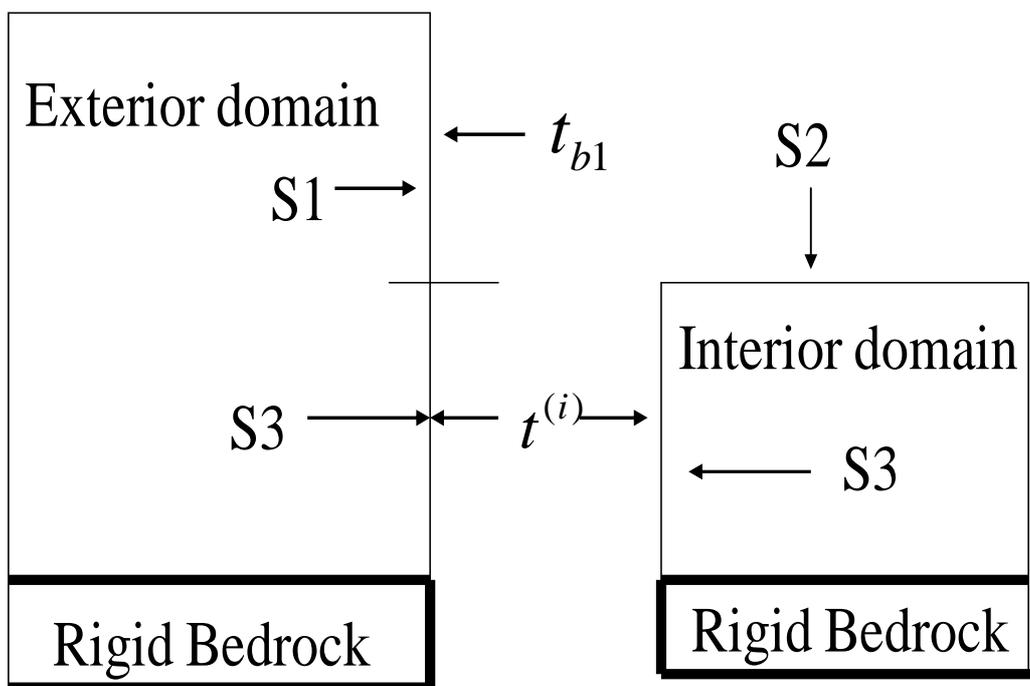
圖二 結構沉埋於土壤的互制系統



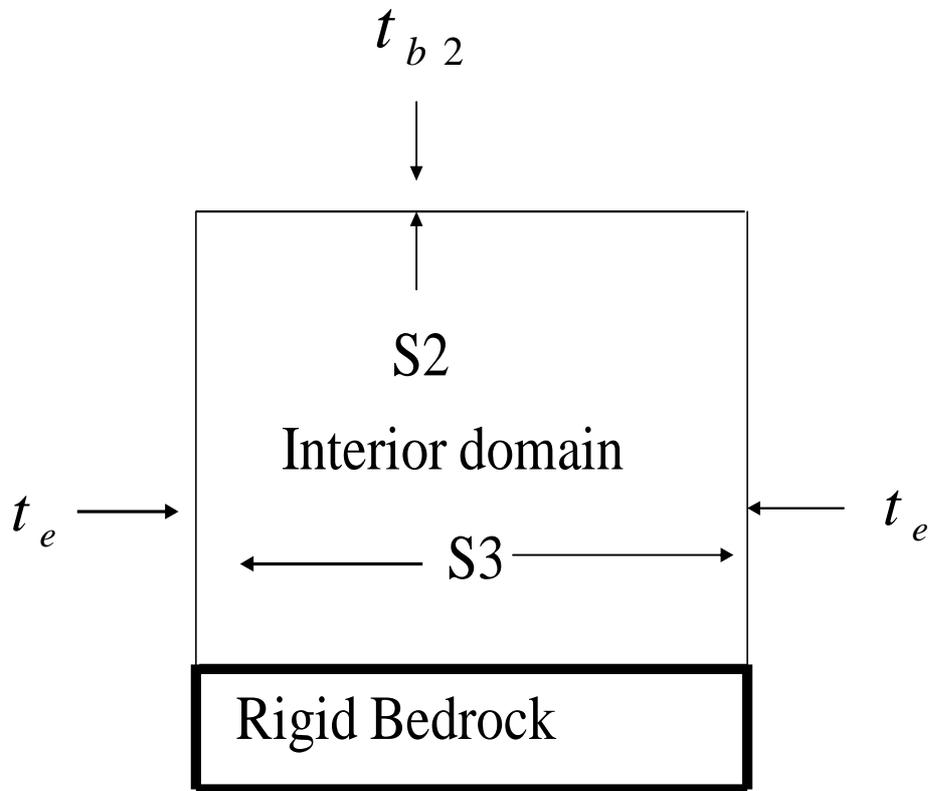
圖三 表面應力作用於結構與土壤的交界面



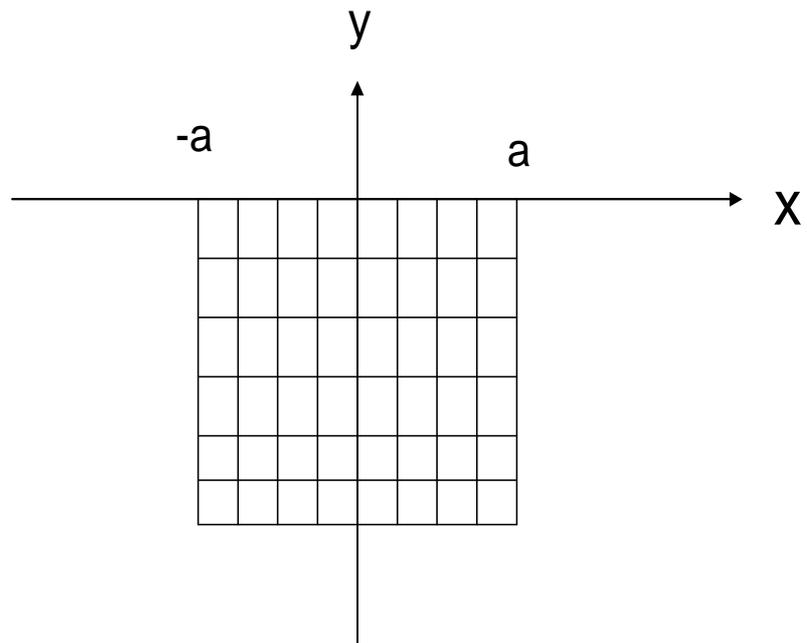
圖四 外部區域與內部區域應力與位移形狀函數



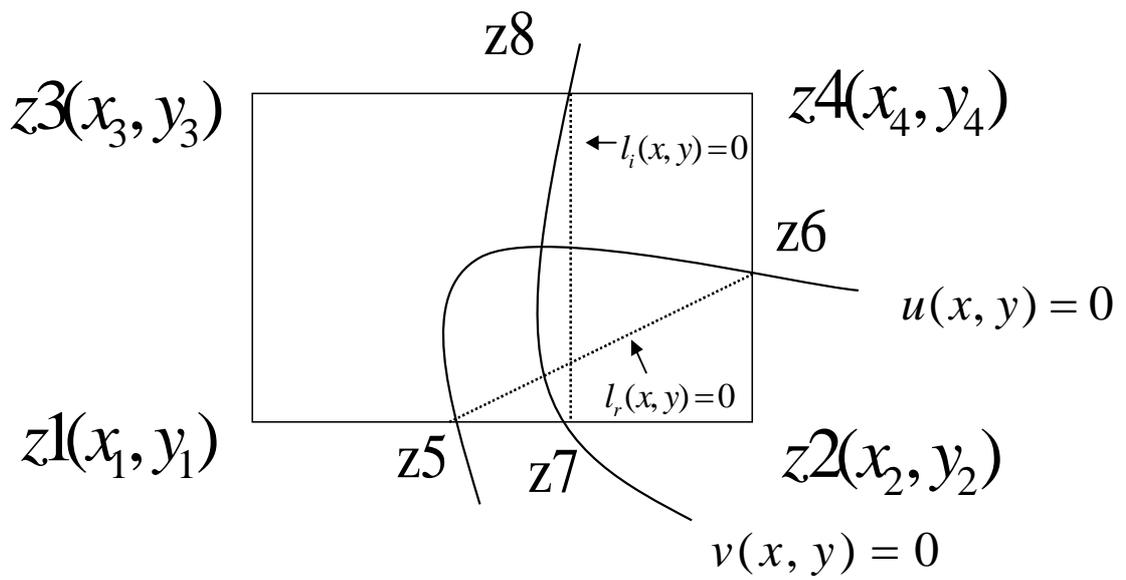
圖五 外部區域垂直交界面受力圖



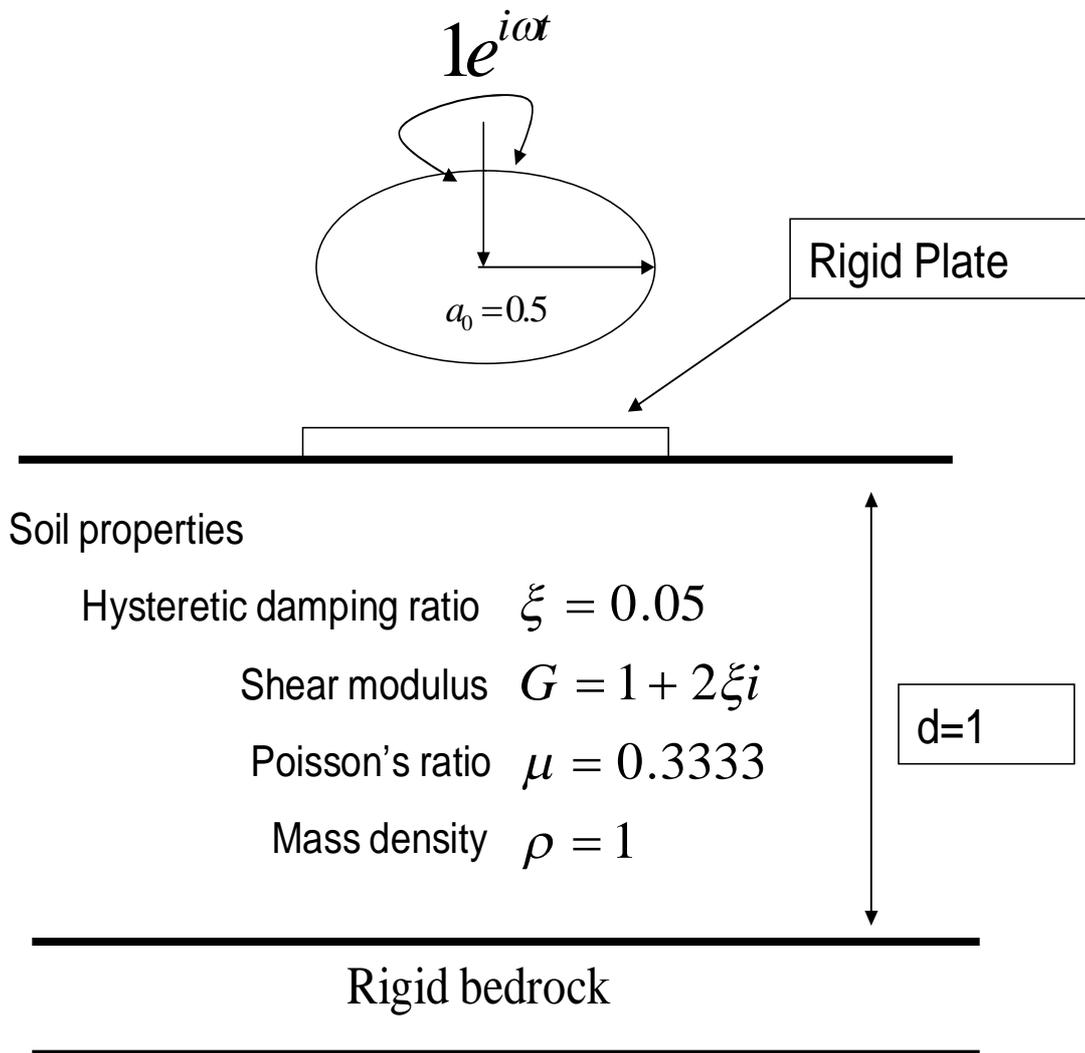
圖六 內部區域垂直交界面受力圖



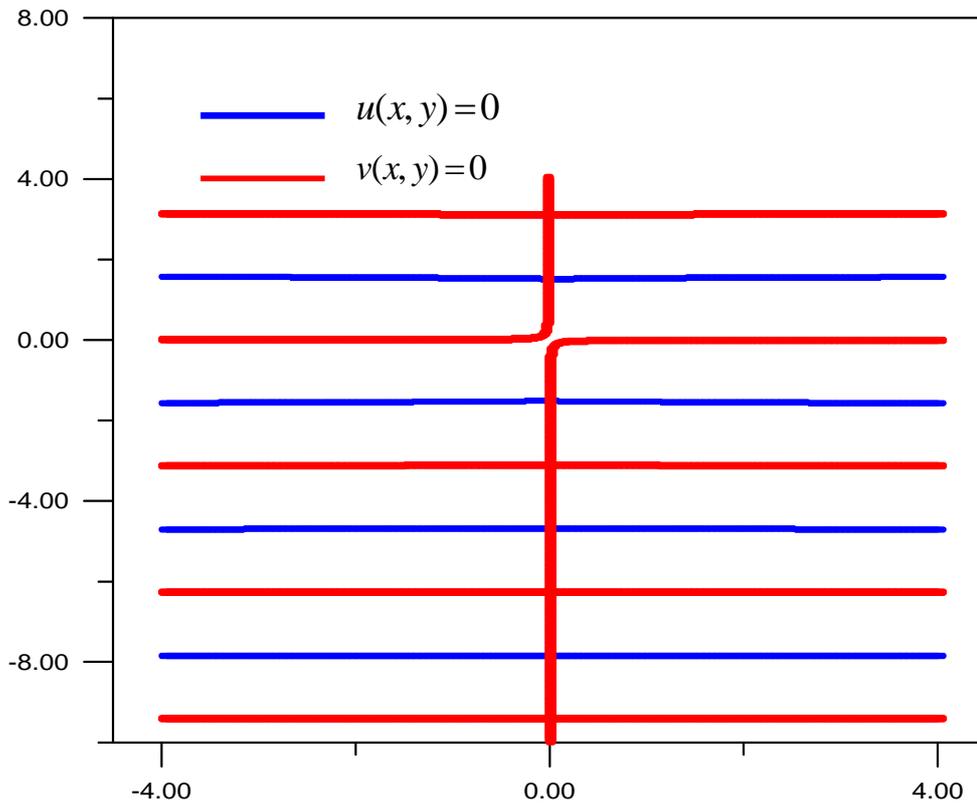
圖七 複數平面分割區塊 $-a \leq x \leq a$ 和 $0 \leq y \leq b$



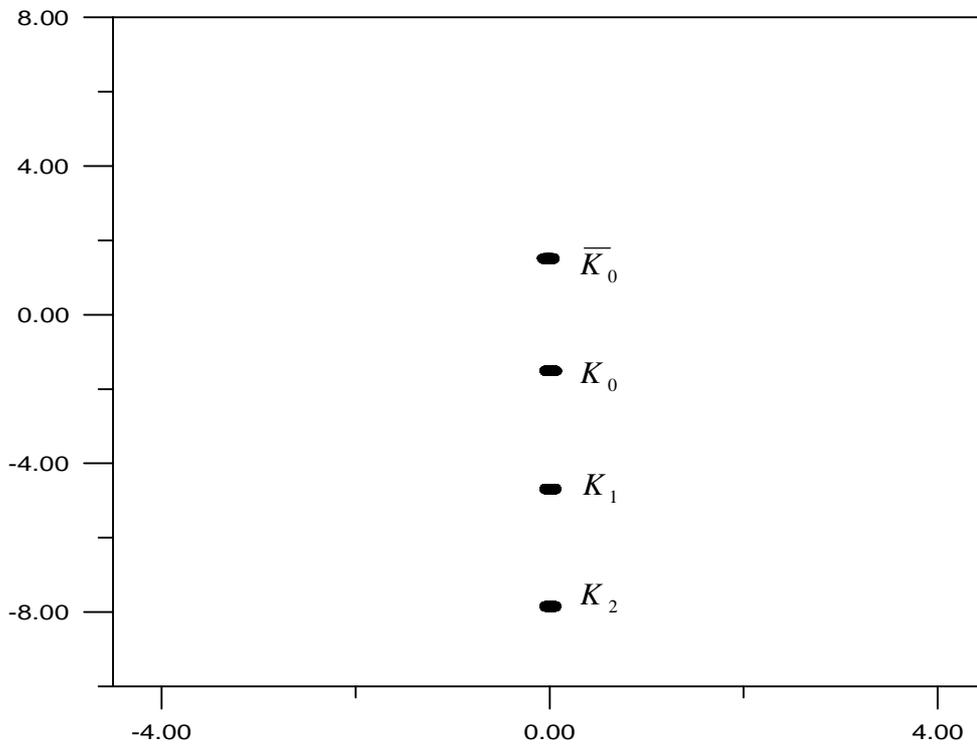
圖八 小區塊內複數根的位置



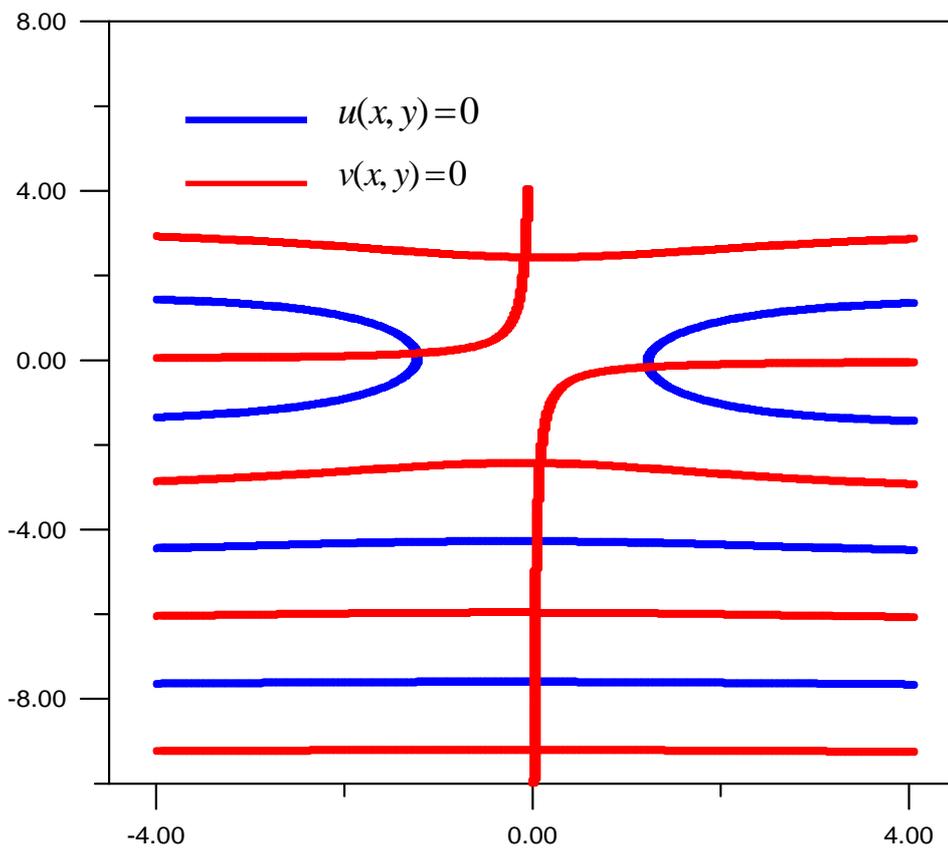
圖九 剛性圓板之扭轉振動



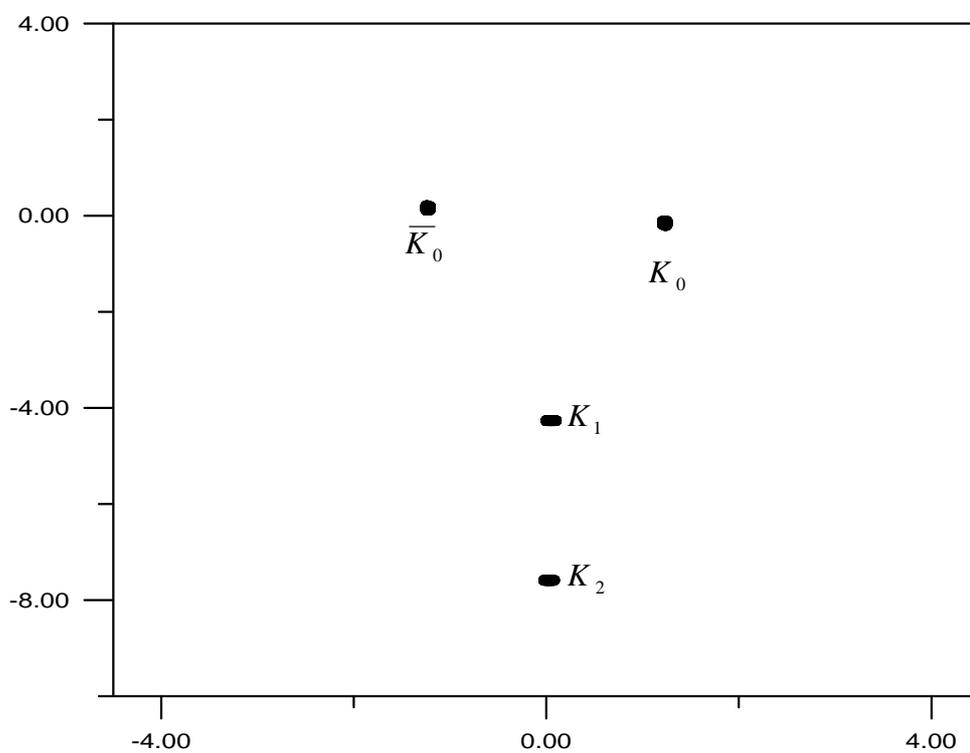
圖十 (a) 為 $\omega=0.4$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



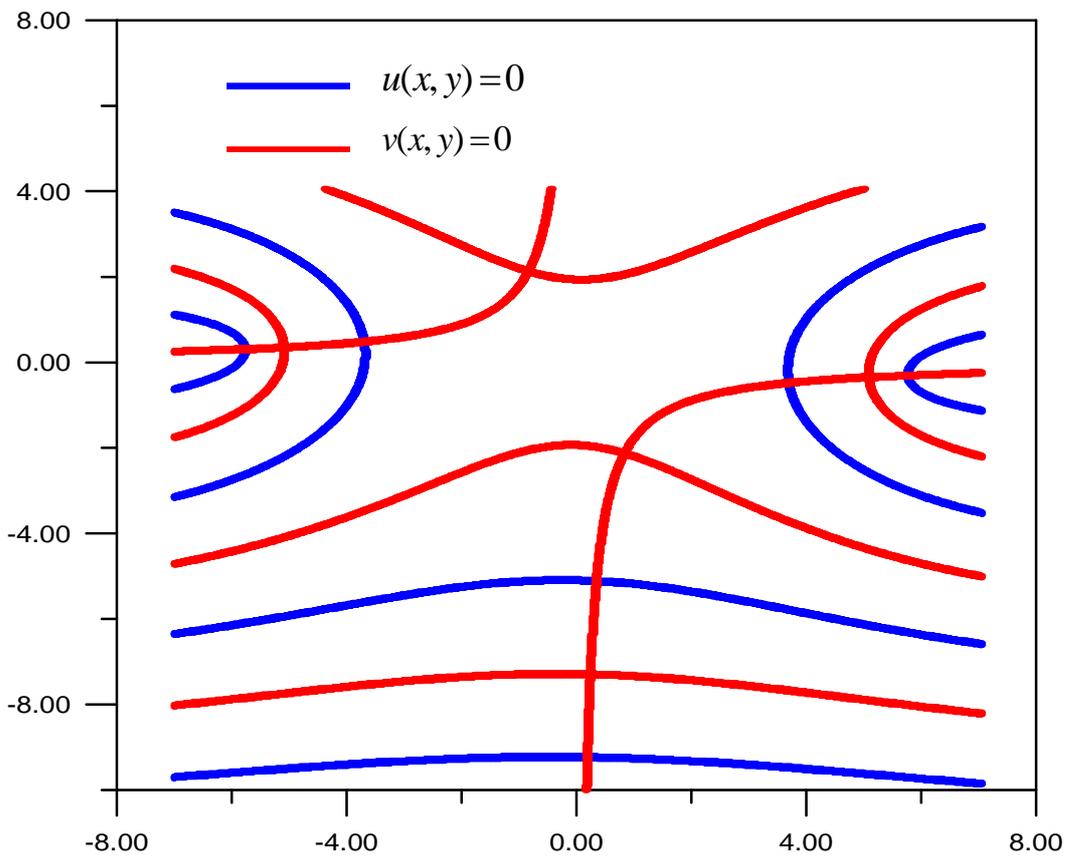
圖十 (b) 為 $\omega=0.4$ 複數平面上線性內插所得的根



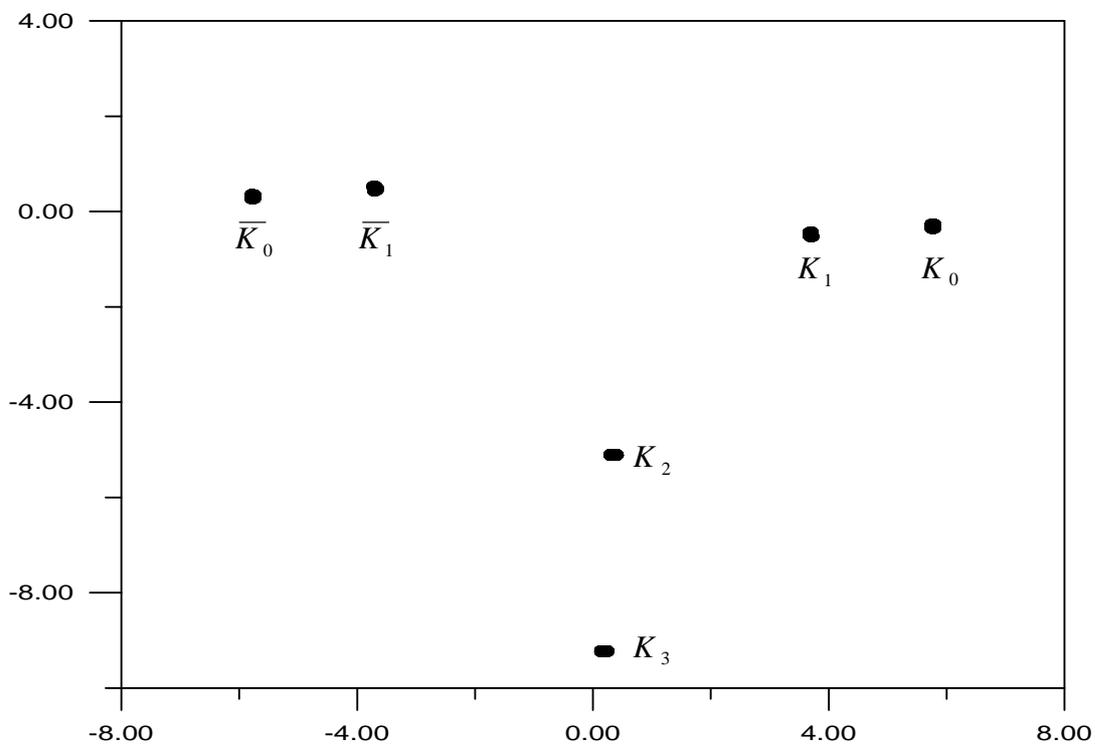
圖十一 (a) 為 $\omega=2$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



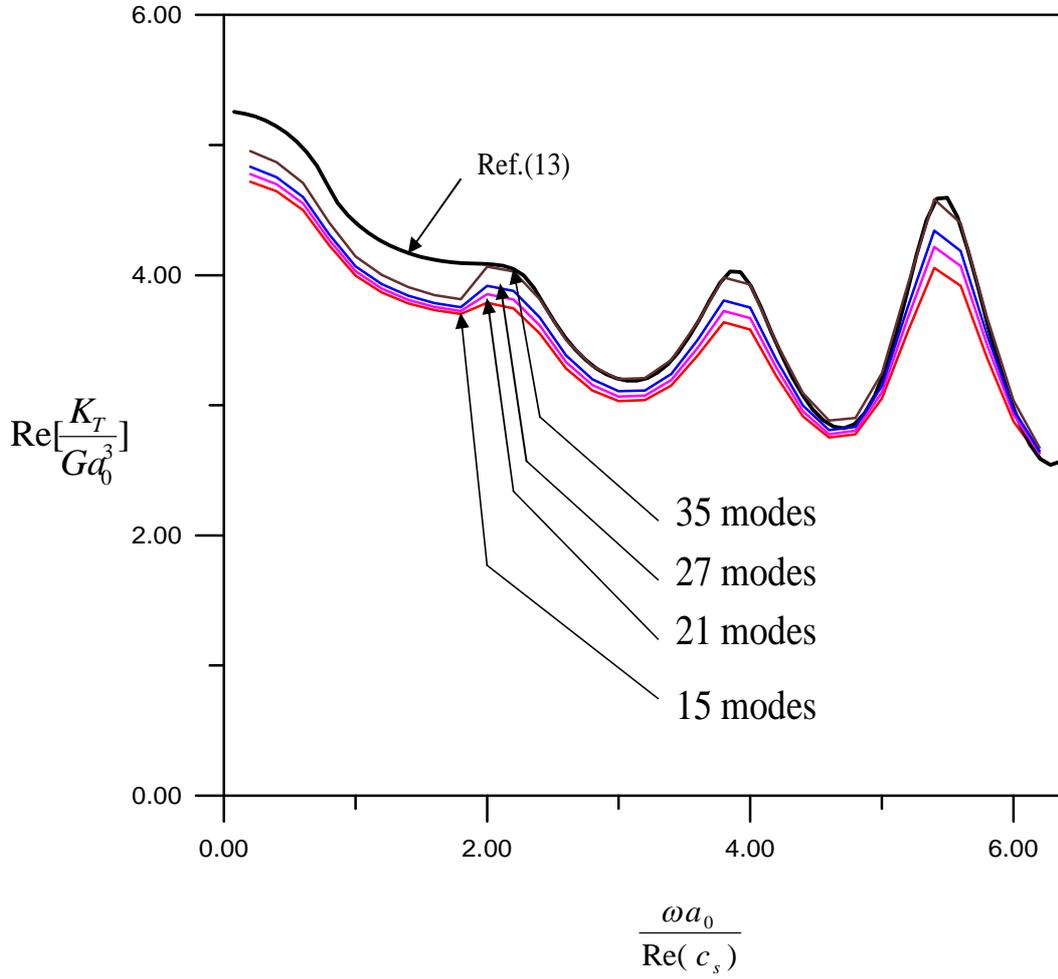
圖十一 (b) 為 $\omega=2$ 複數平面上線性內插所得的根



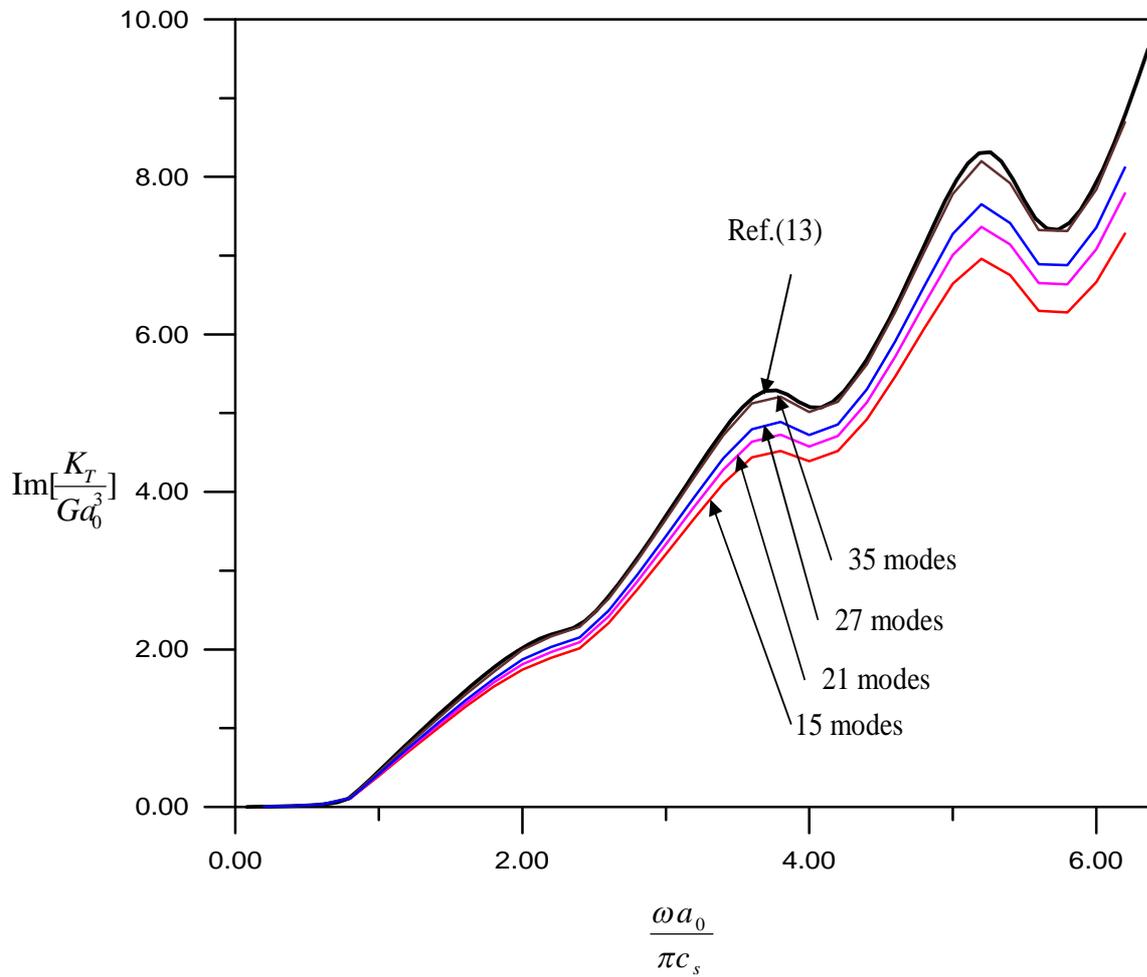
圖十二 (a) 為 $\omega=6$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



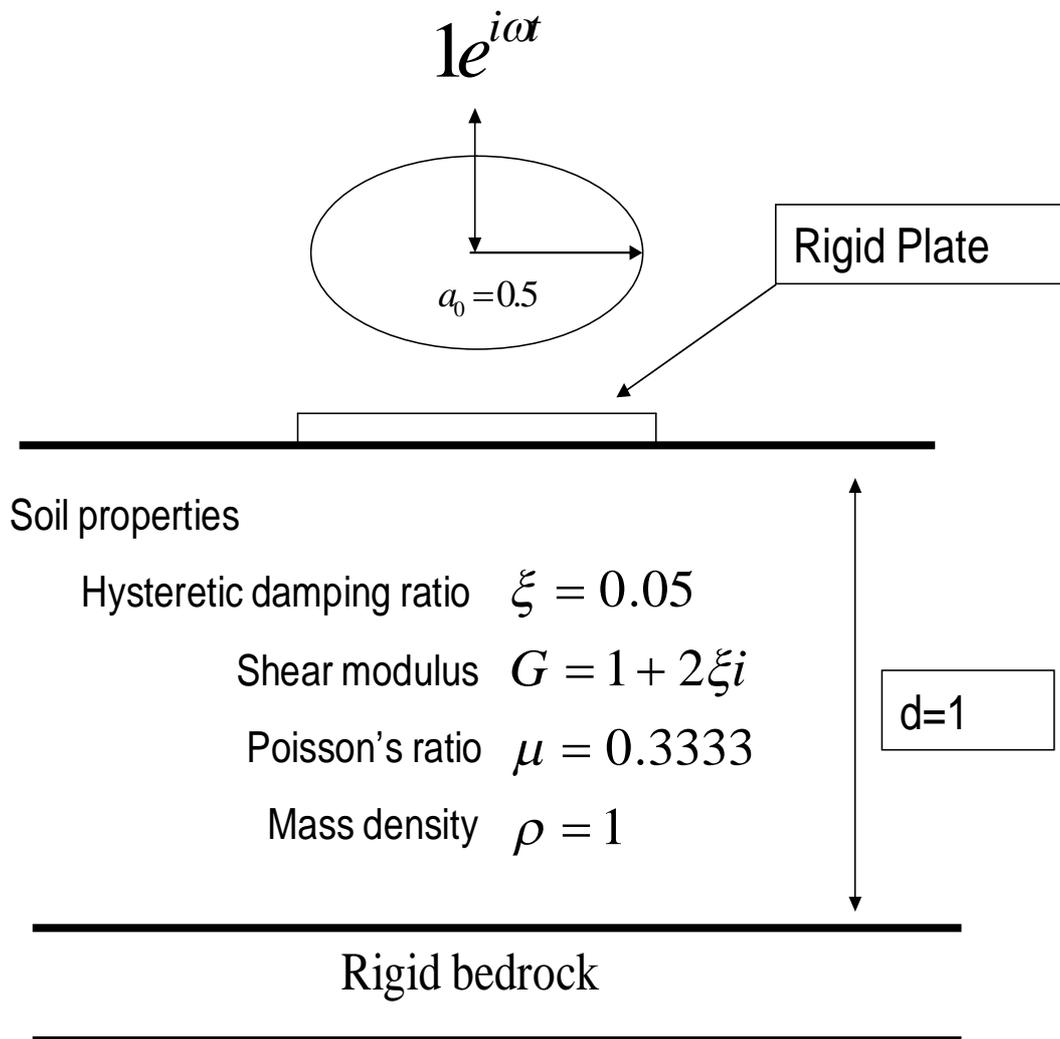
圖十二 (b) 為 $\omega=6$ 複數平面上線性內插所得的根



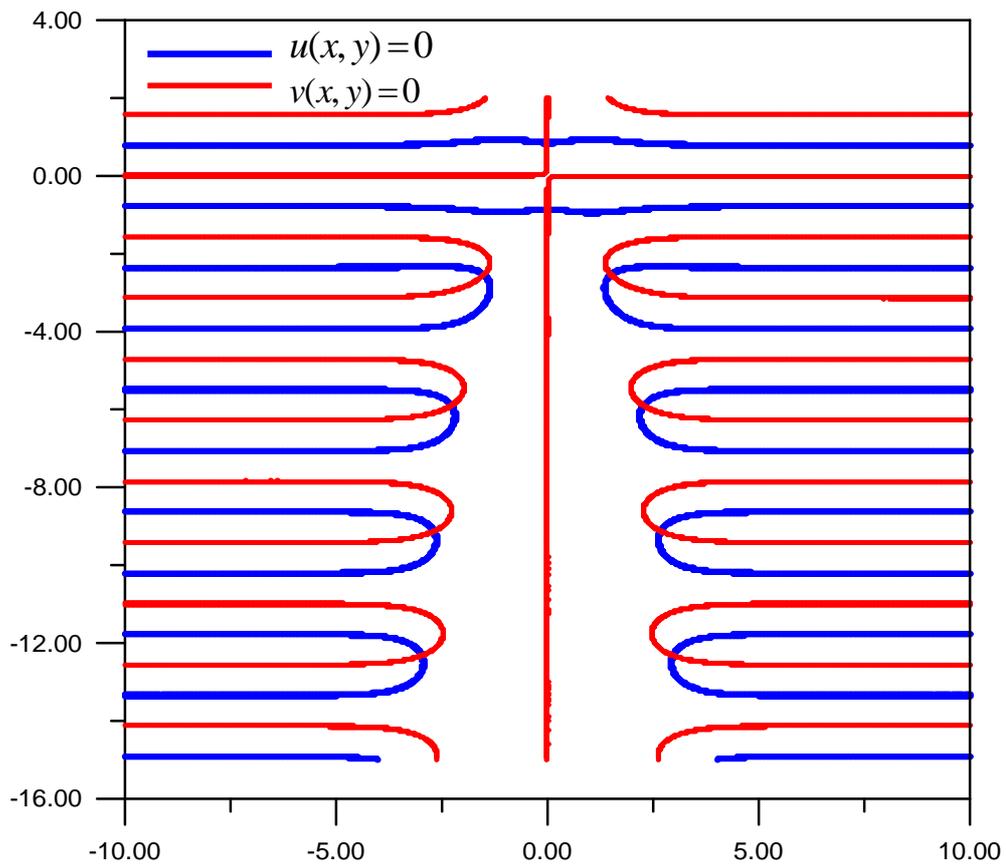
圖十三 土壤扭轉阻抗矩陣的實數部份



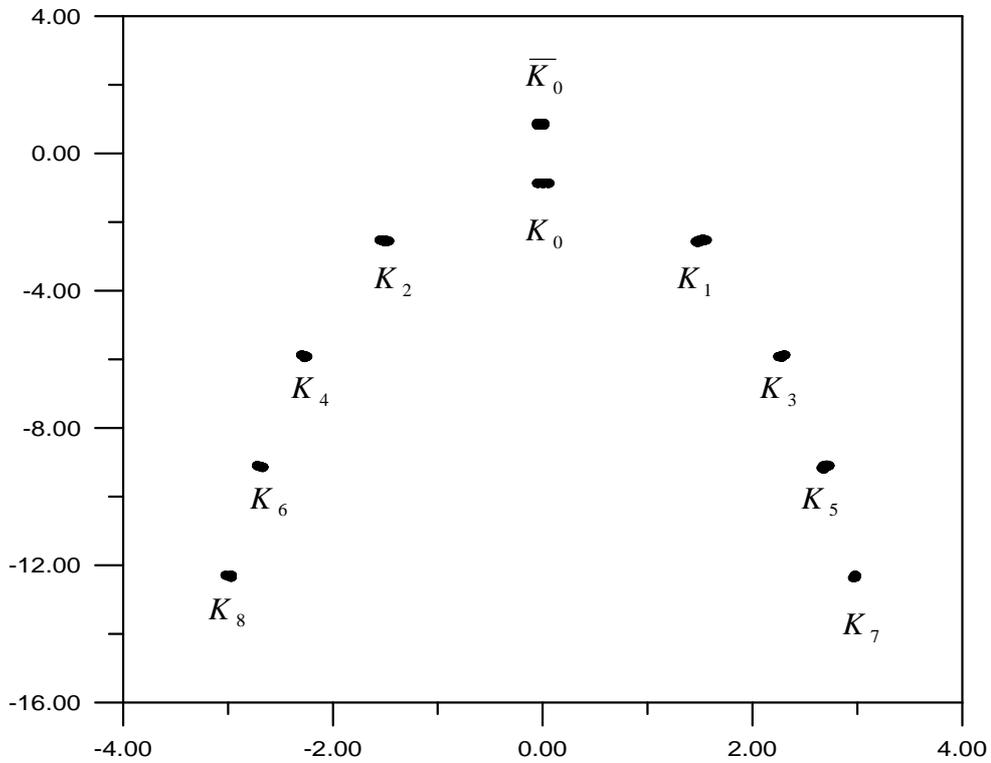
圖十四 土壤扭轉阻抗矩陣的虛數部份



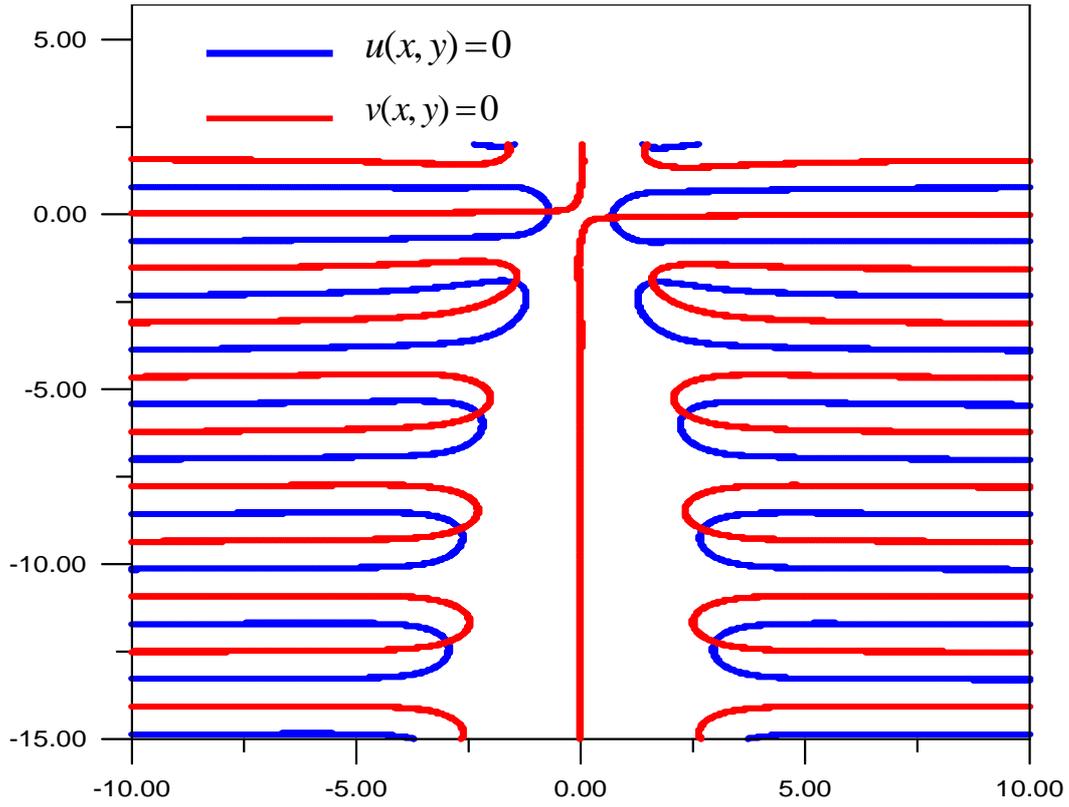
圖十五 剛性圓板之垂直振動



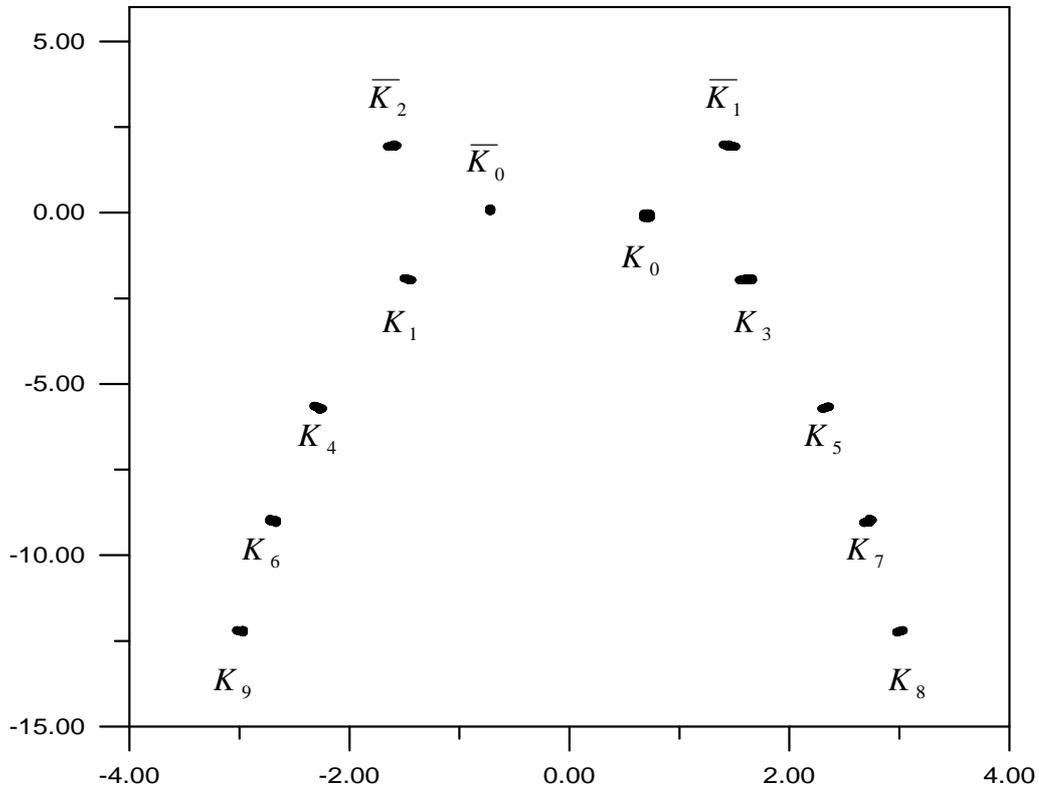
圖十六 (a) 為 $\omega=0.4$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



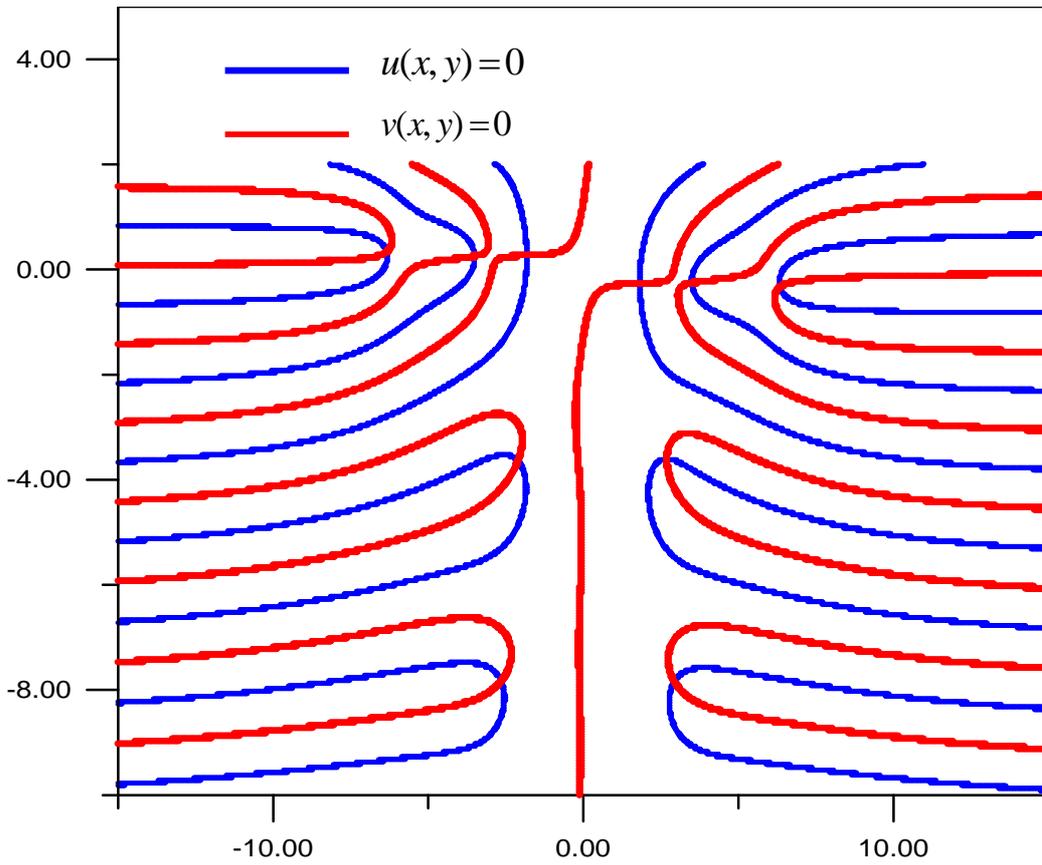
圖十六 (b) 為 $\omega=0.4$ 複數平面上線性內插所得的根



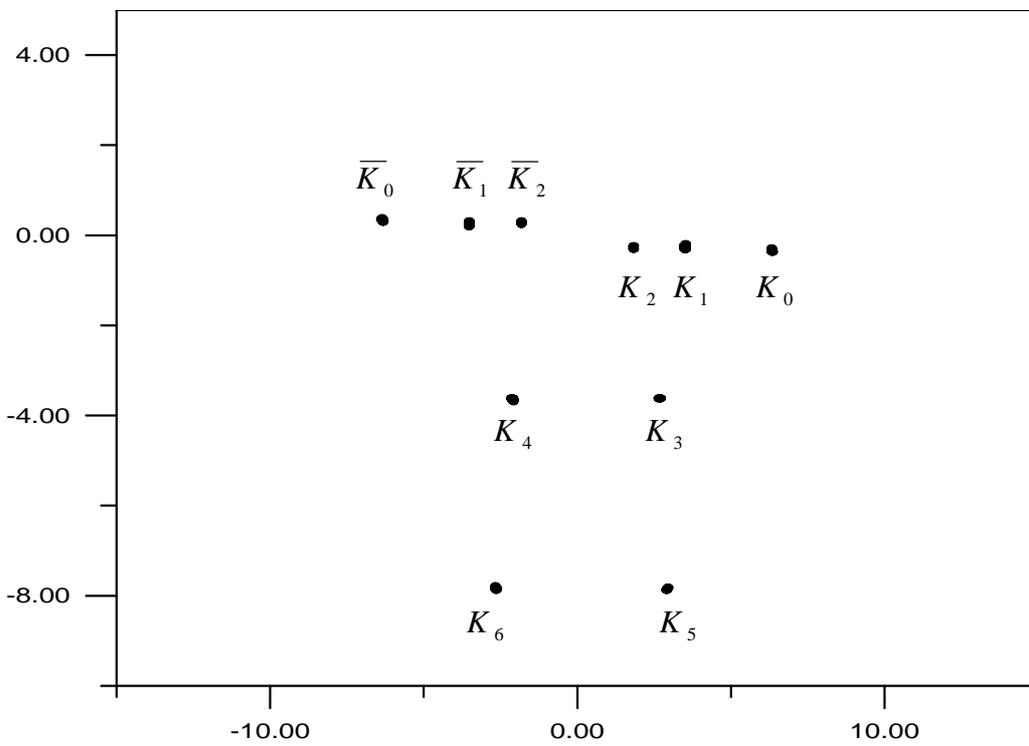
圖十七 (a) 爲 $\omega=2$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



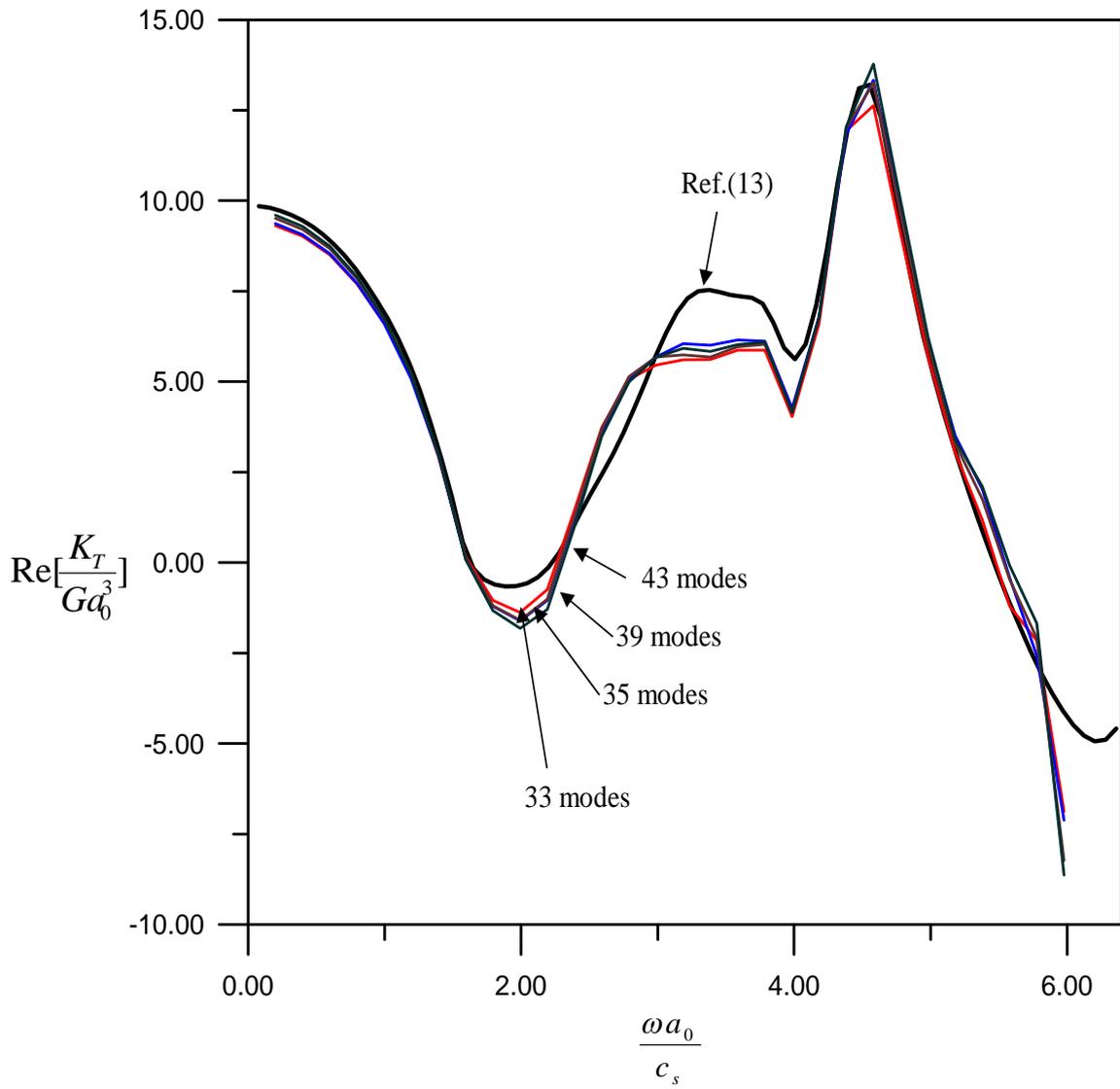
圖十七 (b) 爲 $\omega=2$ 複數平面上線性內插所得的根



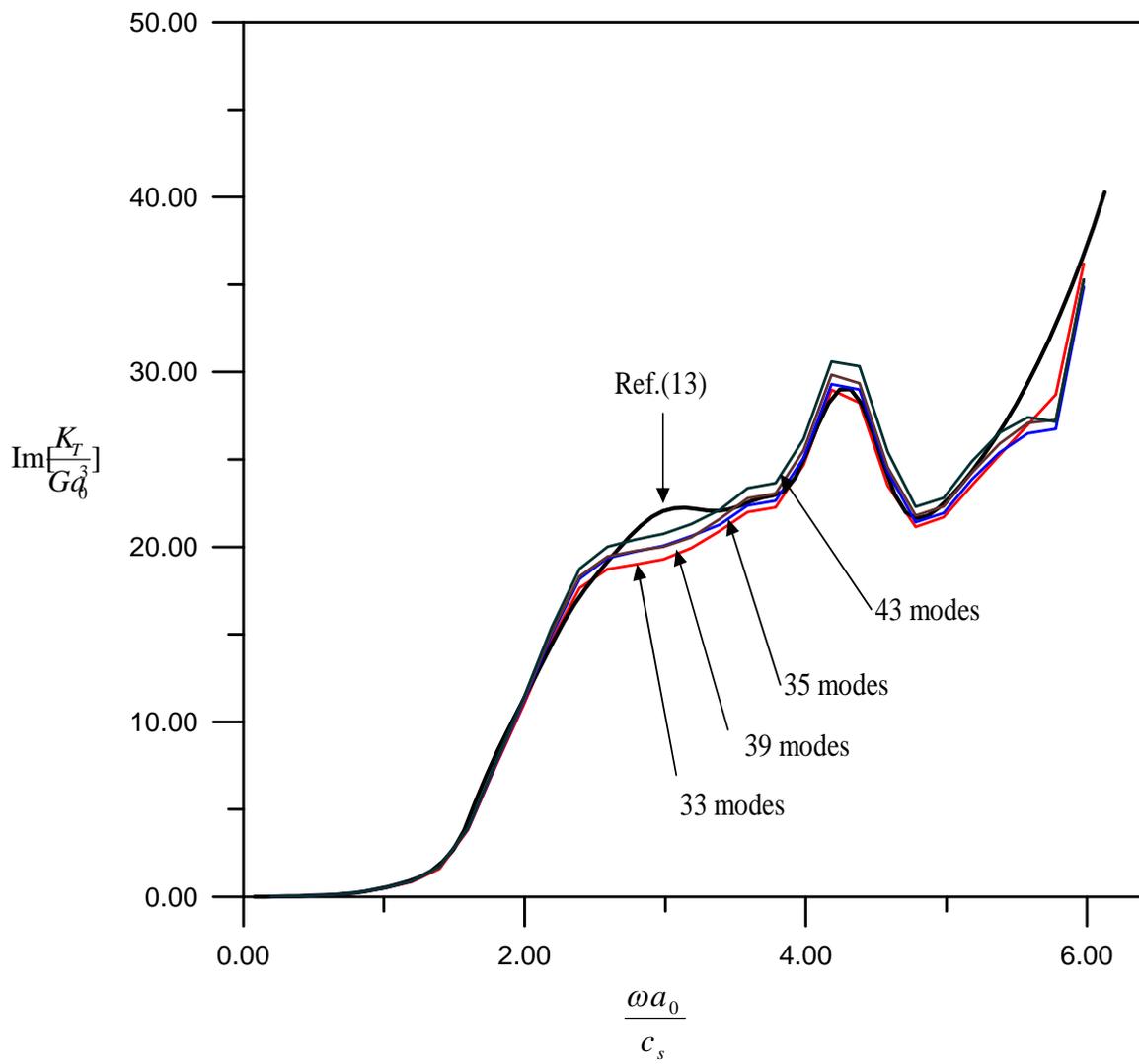
圖十八 (a) 為 $\omega=6$ 複數平面的 $u(x,y)=0$ 和 $v(x,y)=0$



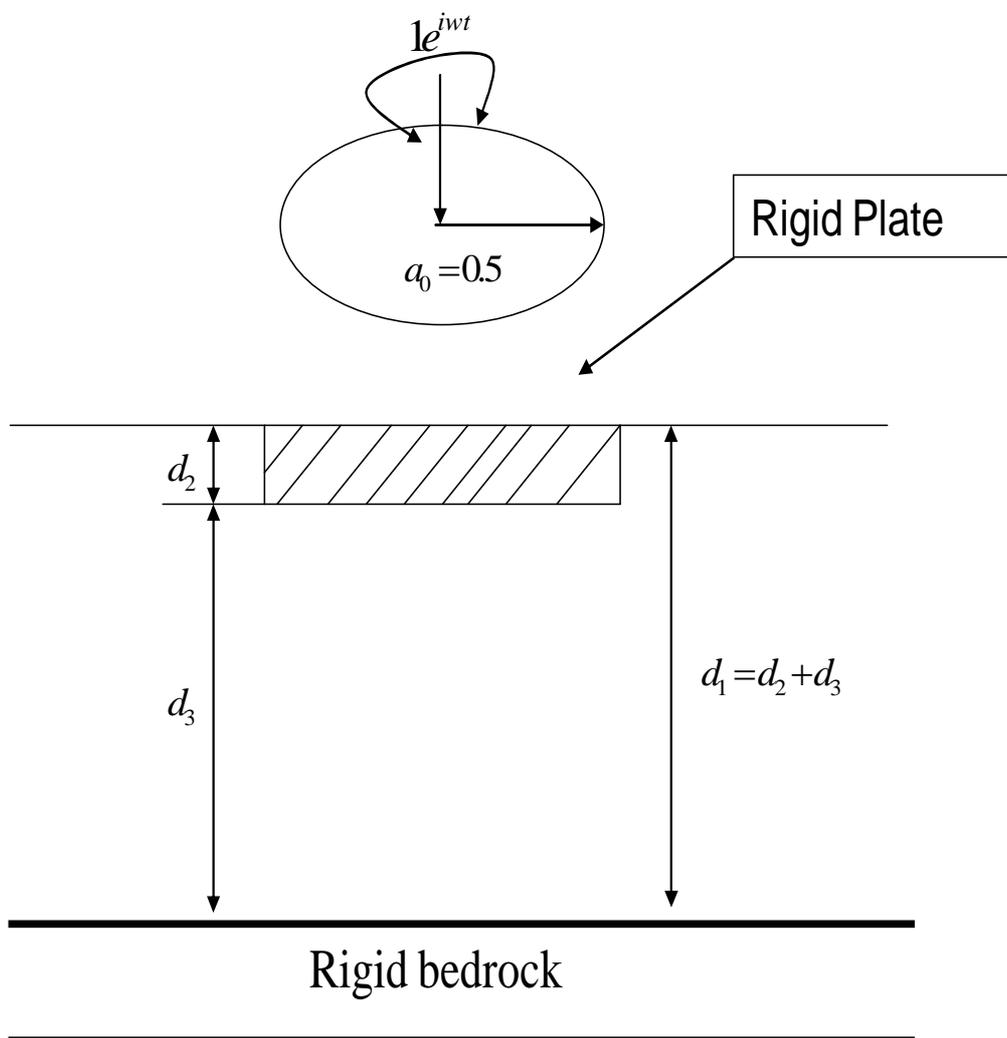
圖十八 (b) 為 $\omega=6$ 複數平面上線性內插所得的根



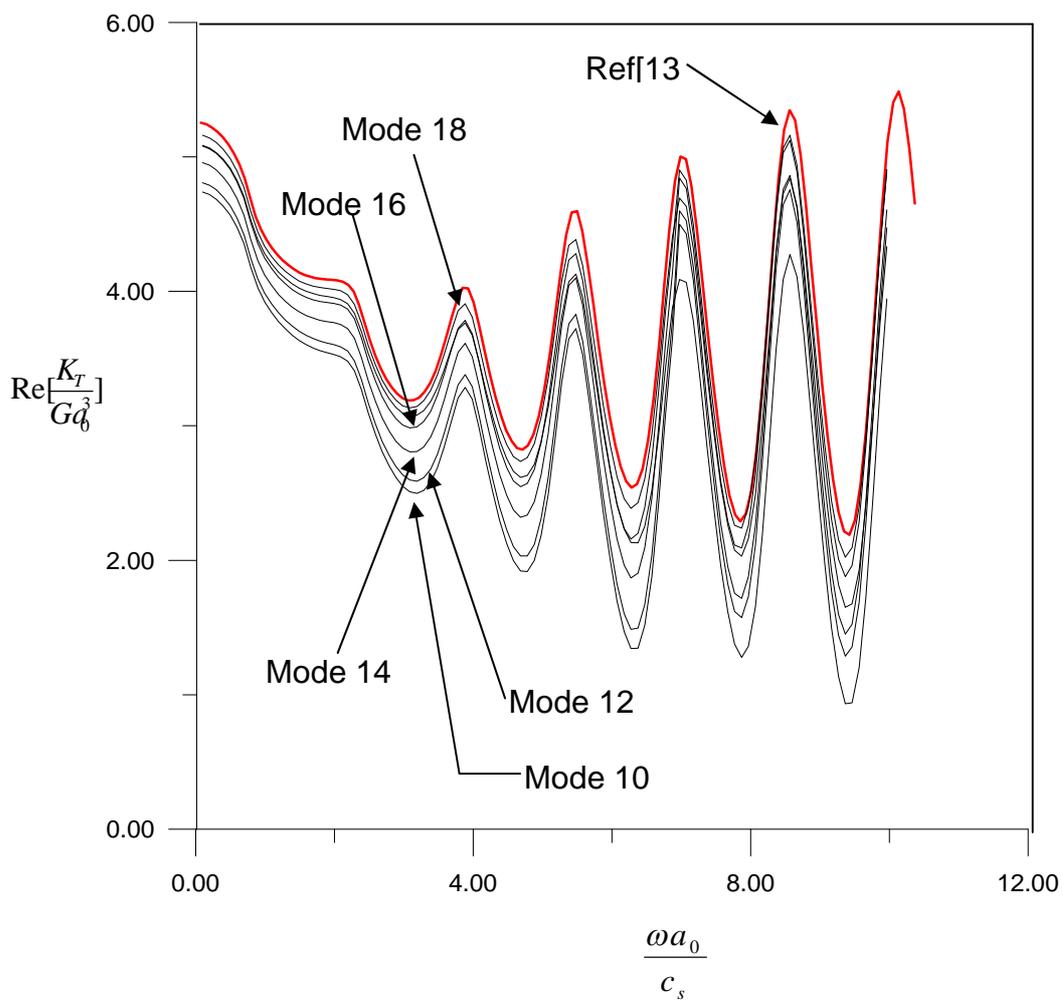
圖十九 土壤垂直振動阻抗矩陣的實數部份



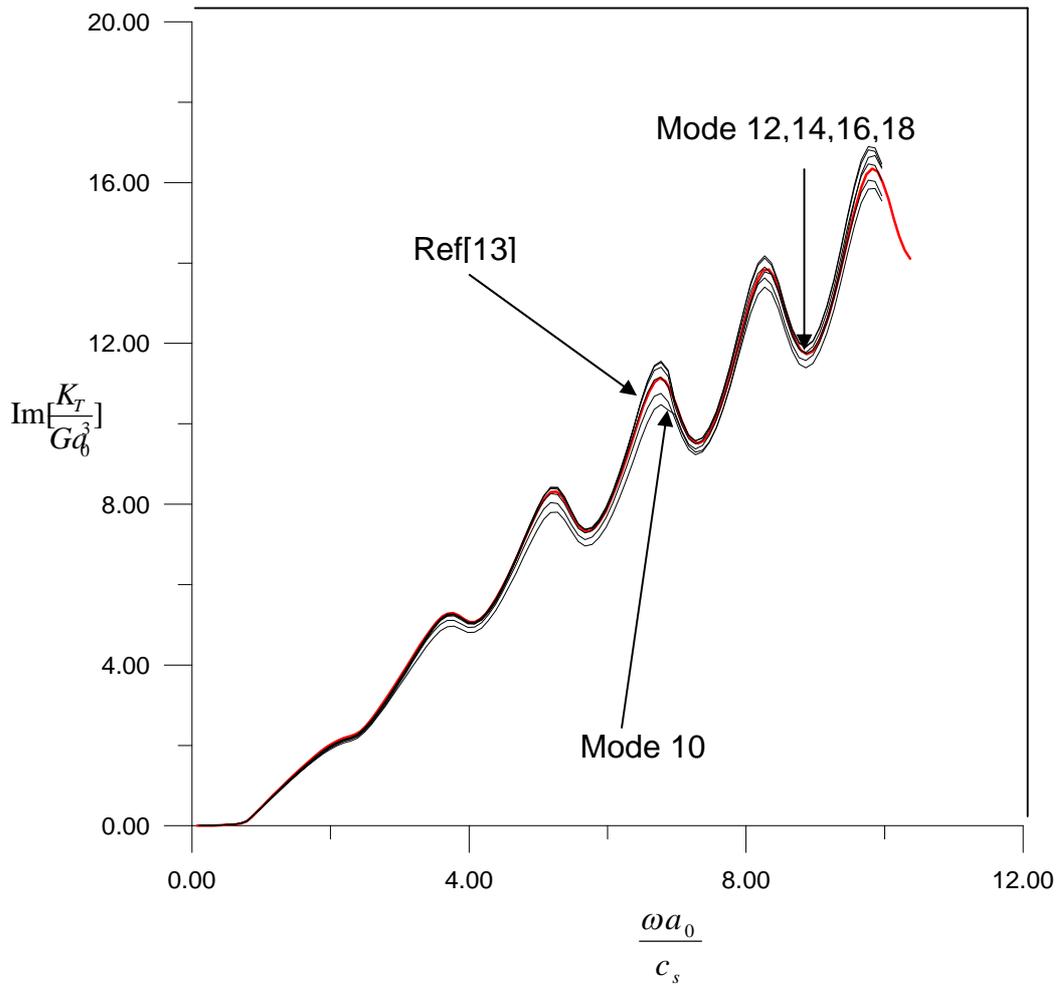
圖二十 土壤垂直振動阻抗矩陣的虛數部份



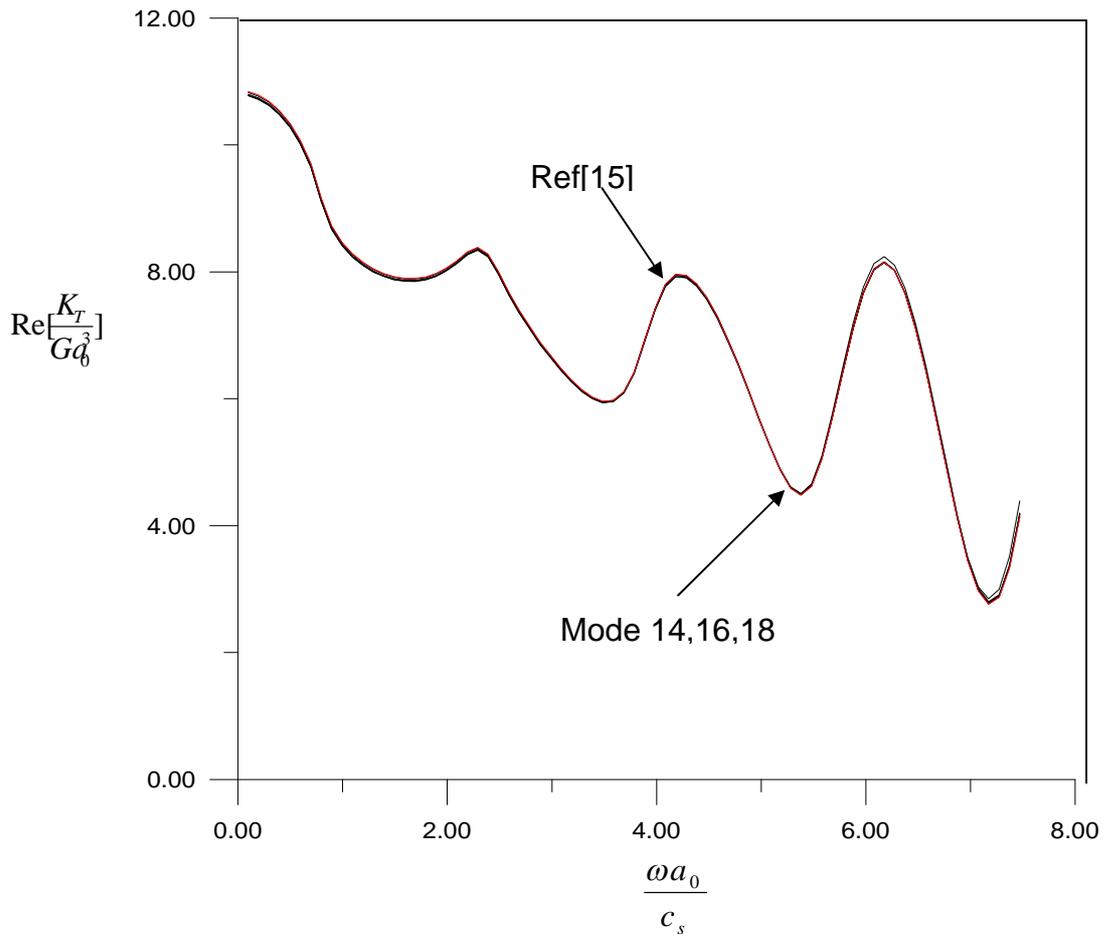
圖二十一 沉埋基礎剛性圓板之扭轉振動



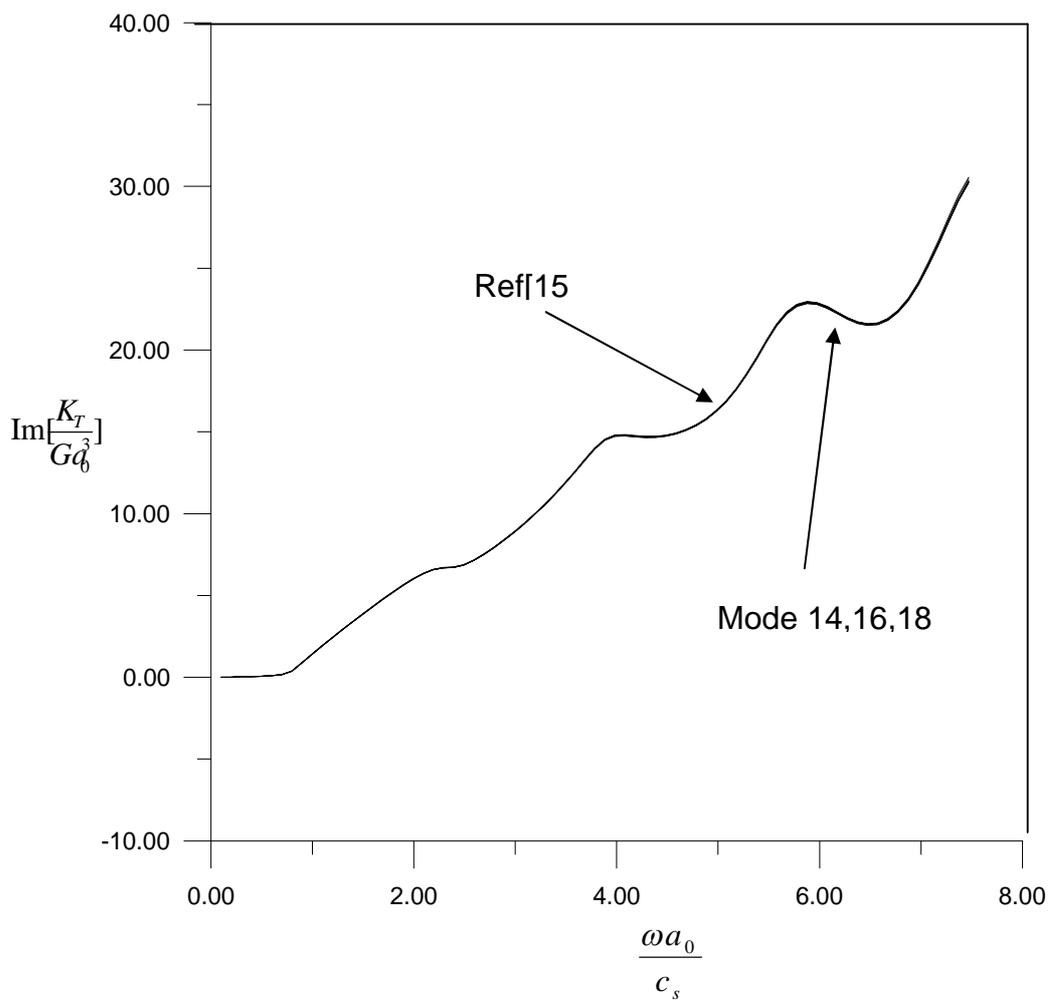
圖二十二 沉埋基礎 $d_2/R=0$ 扭轉阻抗矩陣的實數部份



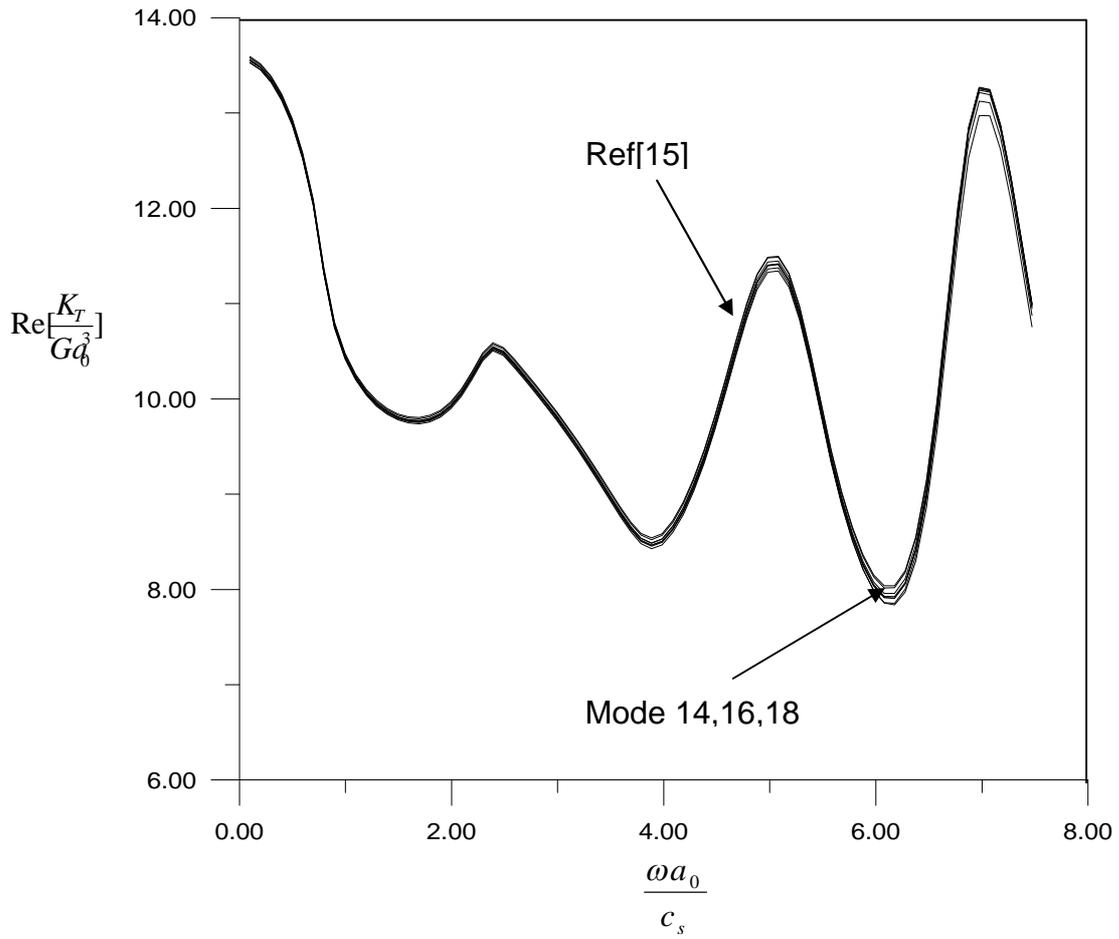
圖二十三 沉埋基礎 $d_2/R=0$ 扭轉阻抗矩陣的虛數部份



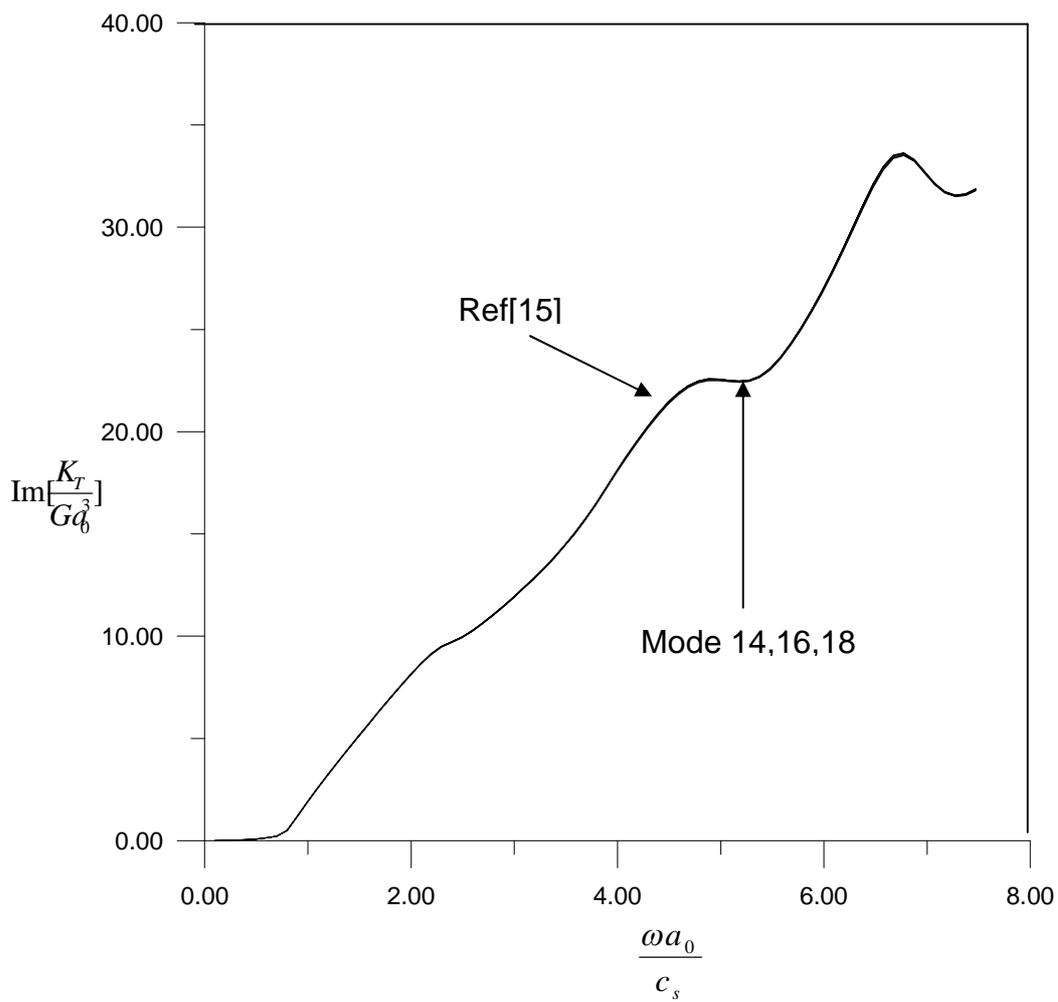
圖二十四 沉埋基礎 $d_2/R=0.25$ 扭轉阻抗矩陣的實數部份



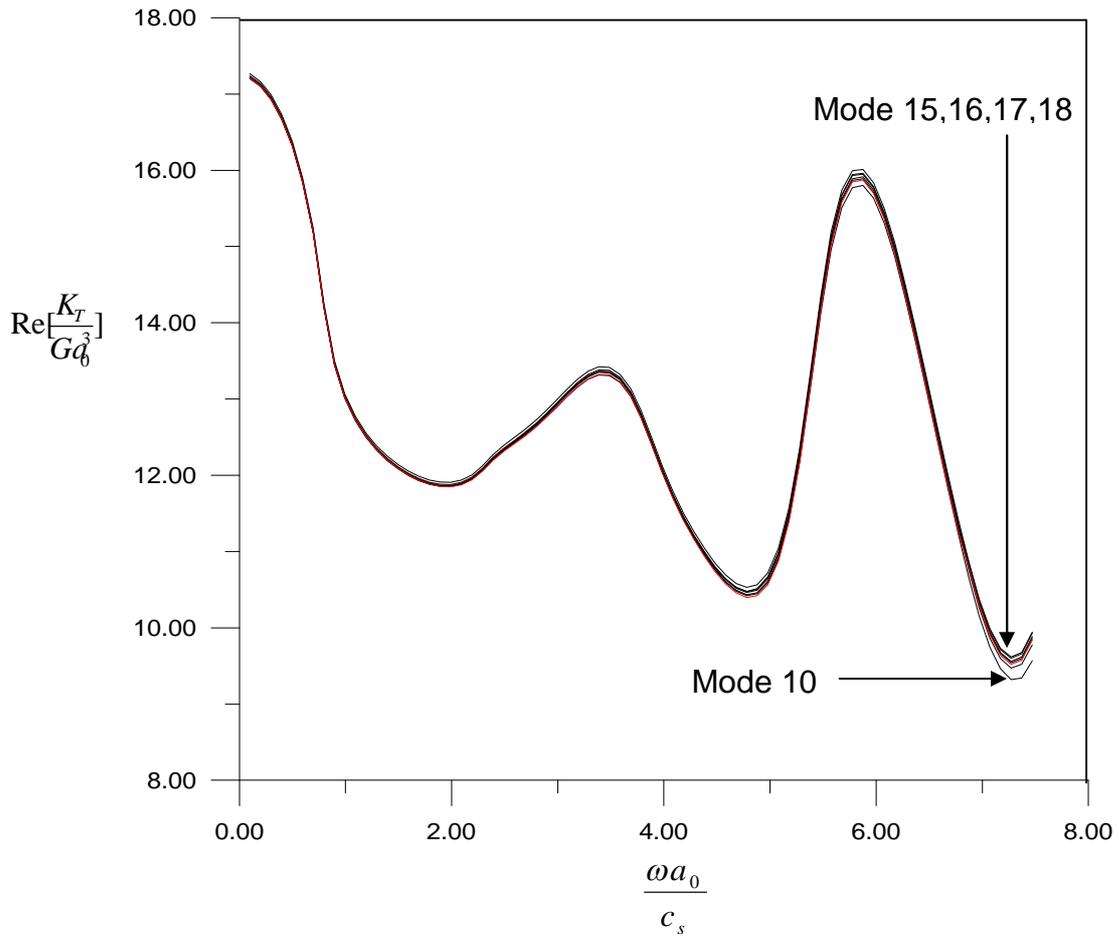
圖二十五 沉埋基礎 $d_2/R=0.25$ 扭轉阻抗矩陣的虛數部份



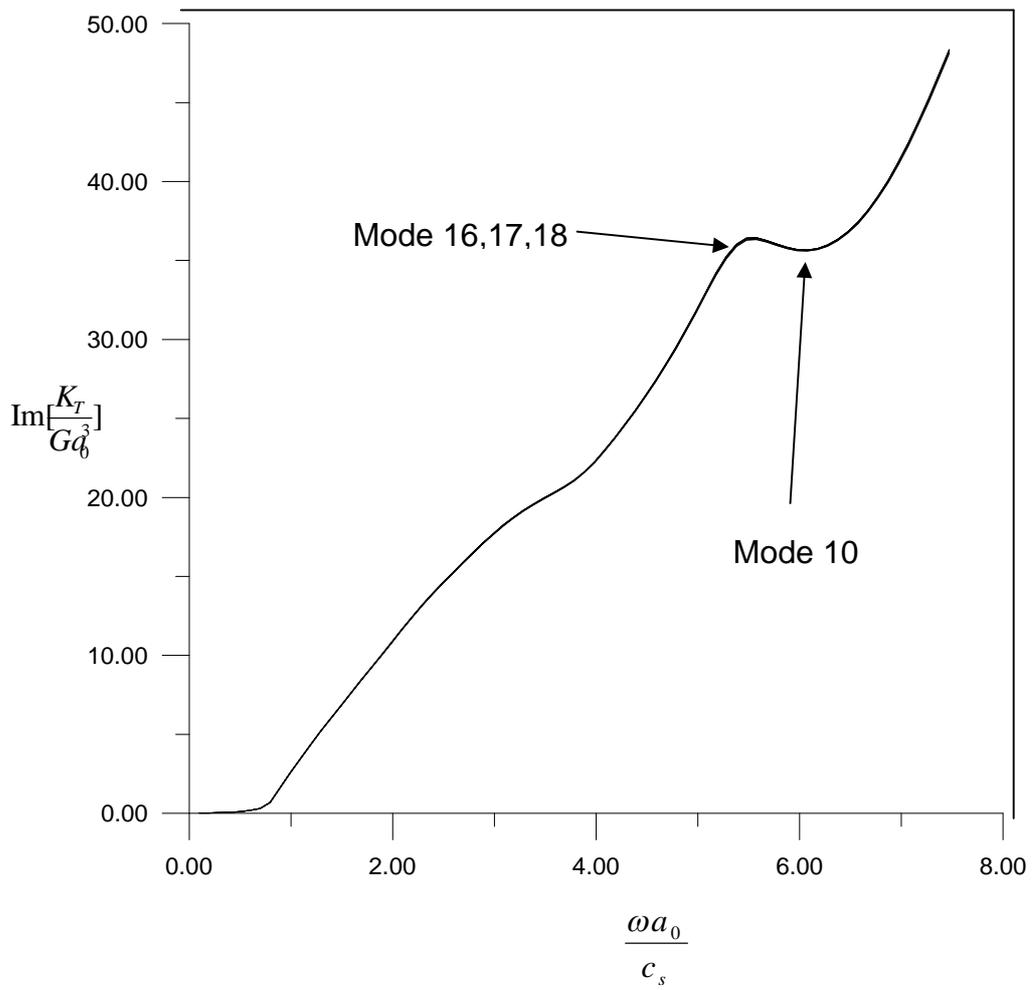
圖二十六 沉埋基礎 $d/2/R=0.5$ 扭轉阻抗矩陣的實數部份



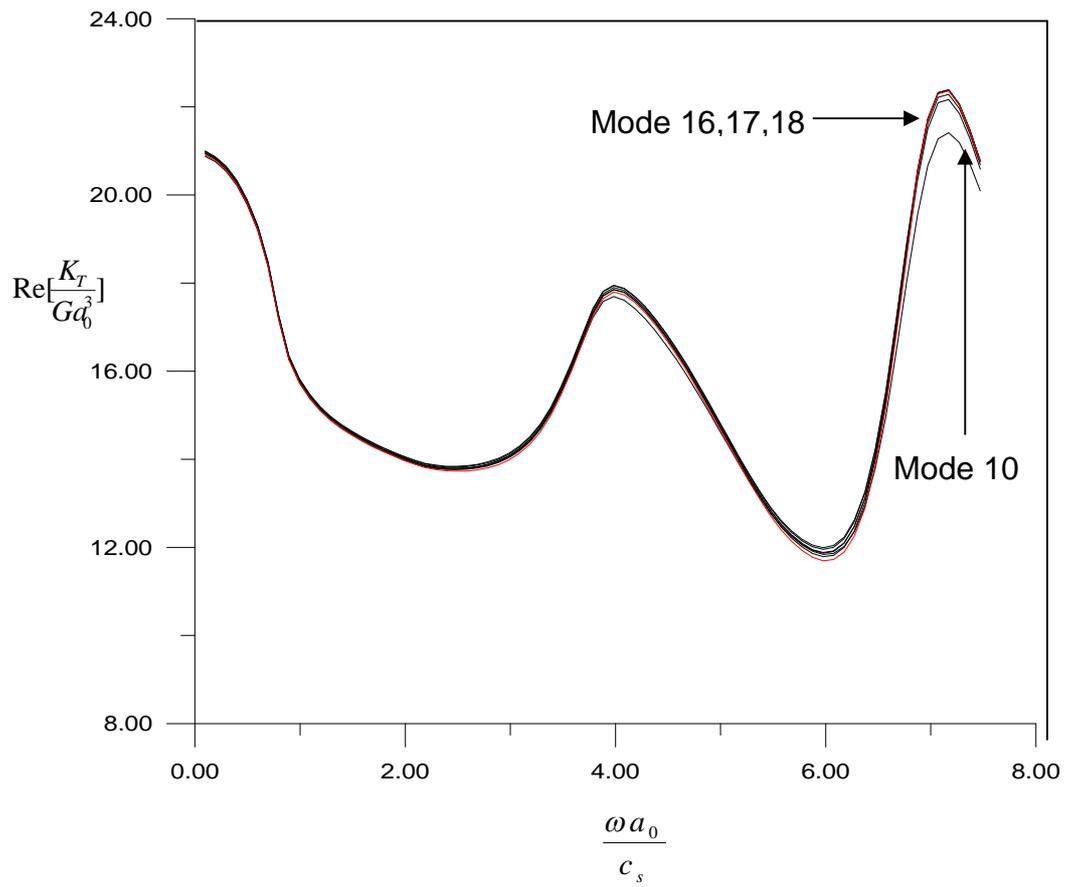
圖二十七 沉埋基礎 $d_2/R=0.5$ 扭轉阻抗矩陣的虛數部份



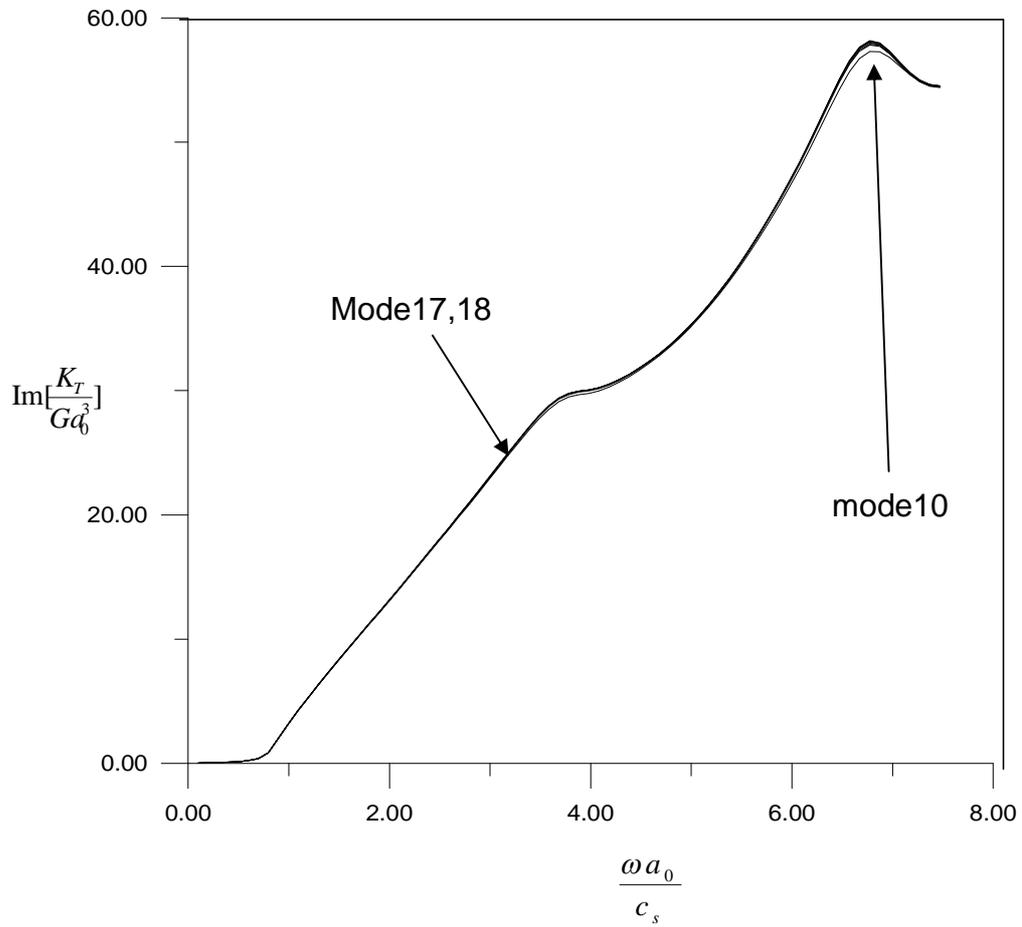
圖二十八 沉埋基礎 $d/2/R=0.75$ 扭轉阻抗矩陣的實數部份



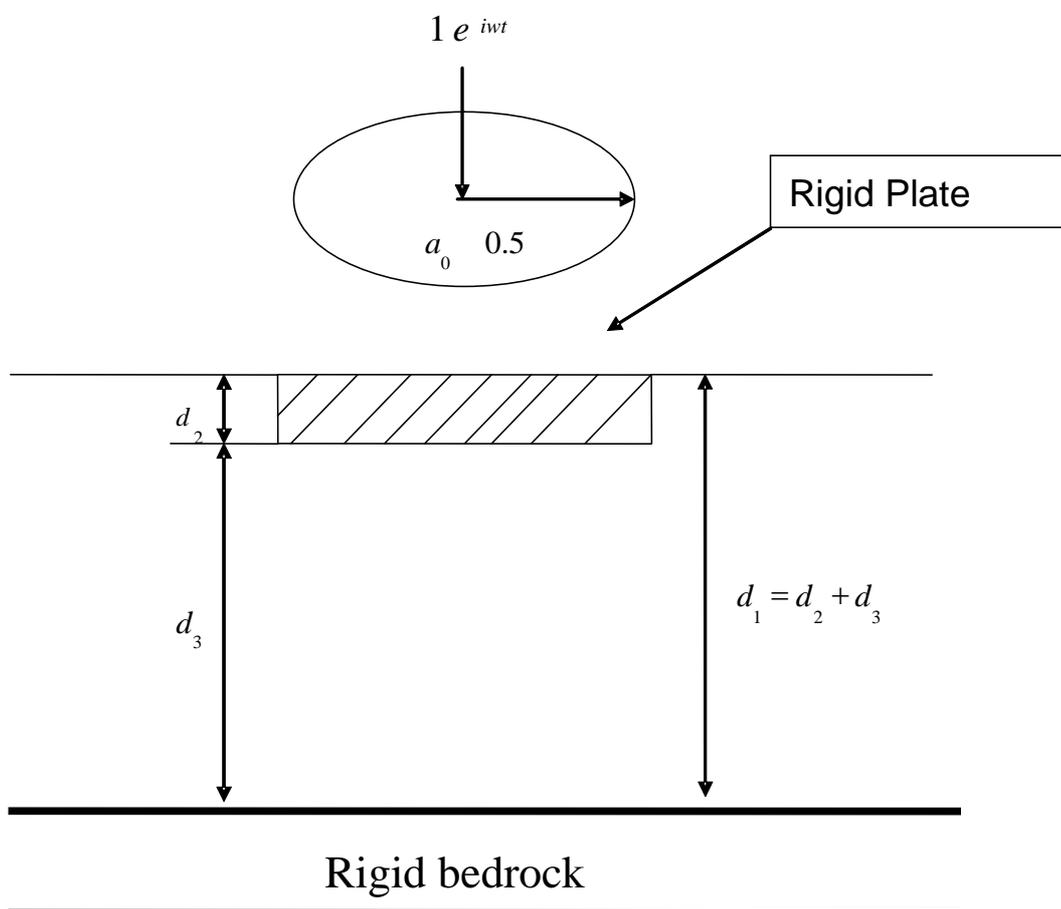
圖二十九 沉埋基礎 $d_2/R=0.75$ 扭轉阻抗矩陣的虛數部份



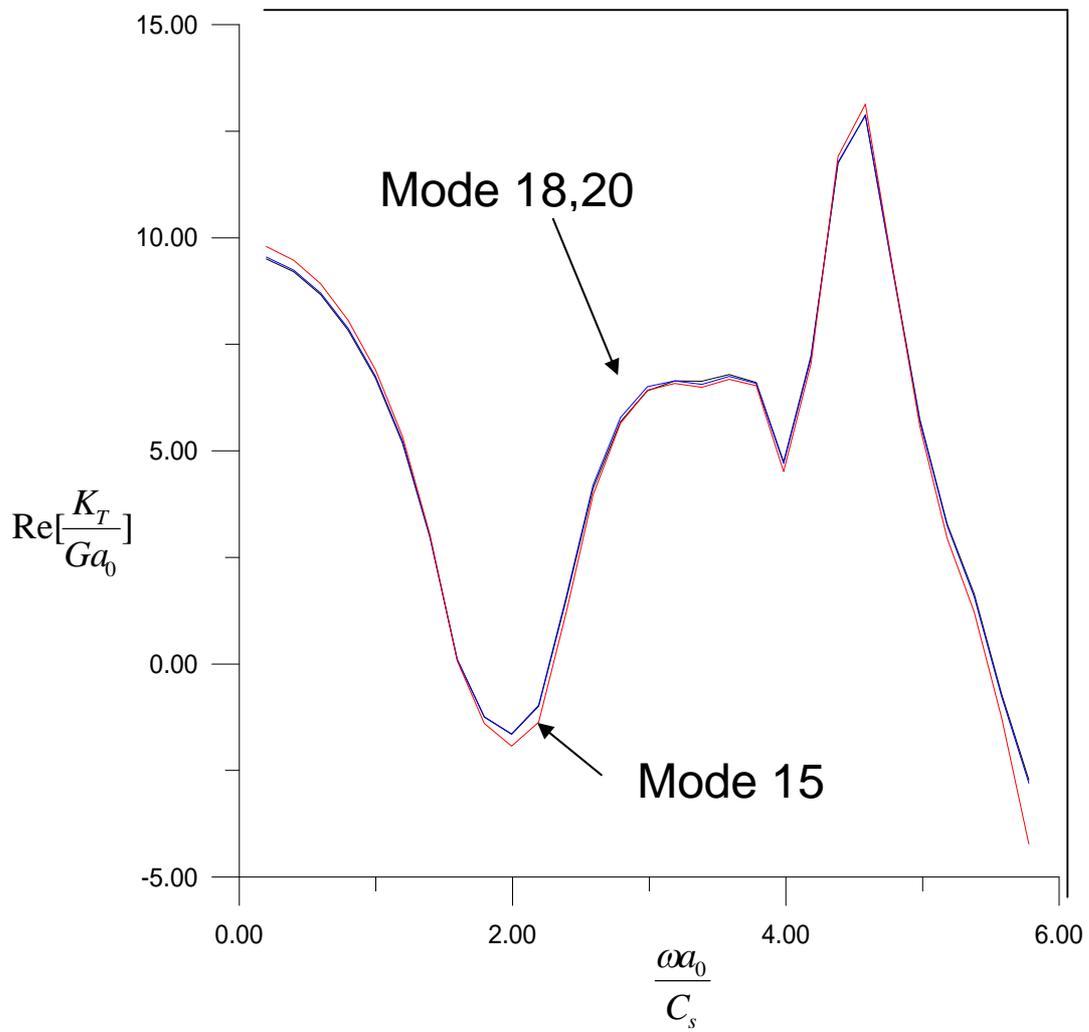
圖三十 沉埋基礎 $d_2/R=1.0$ 扭轉阻抗矩陣的實數部份



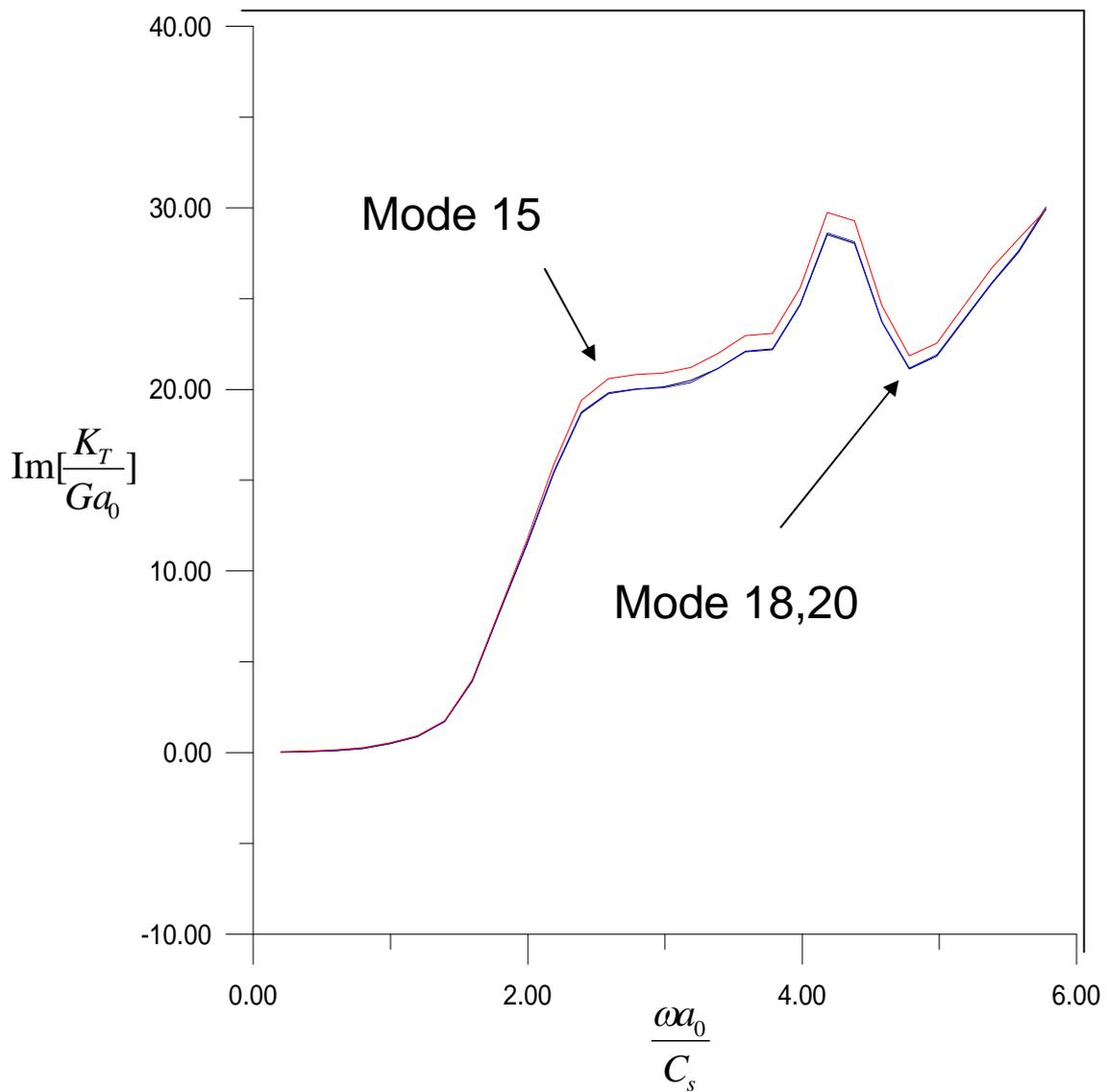
圖三十一 沉埋基礎 $d_2/R=1.0$ 扭轉阻抗矩陣的虛數部份



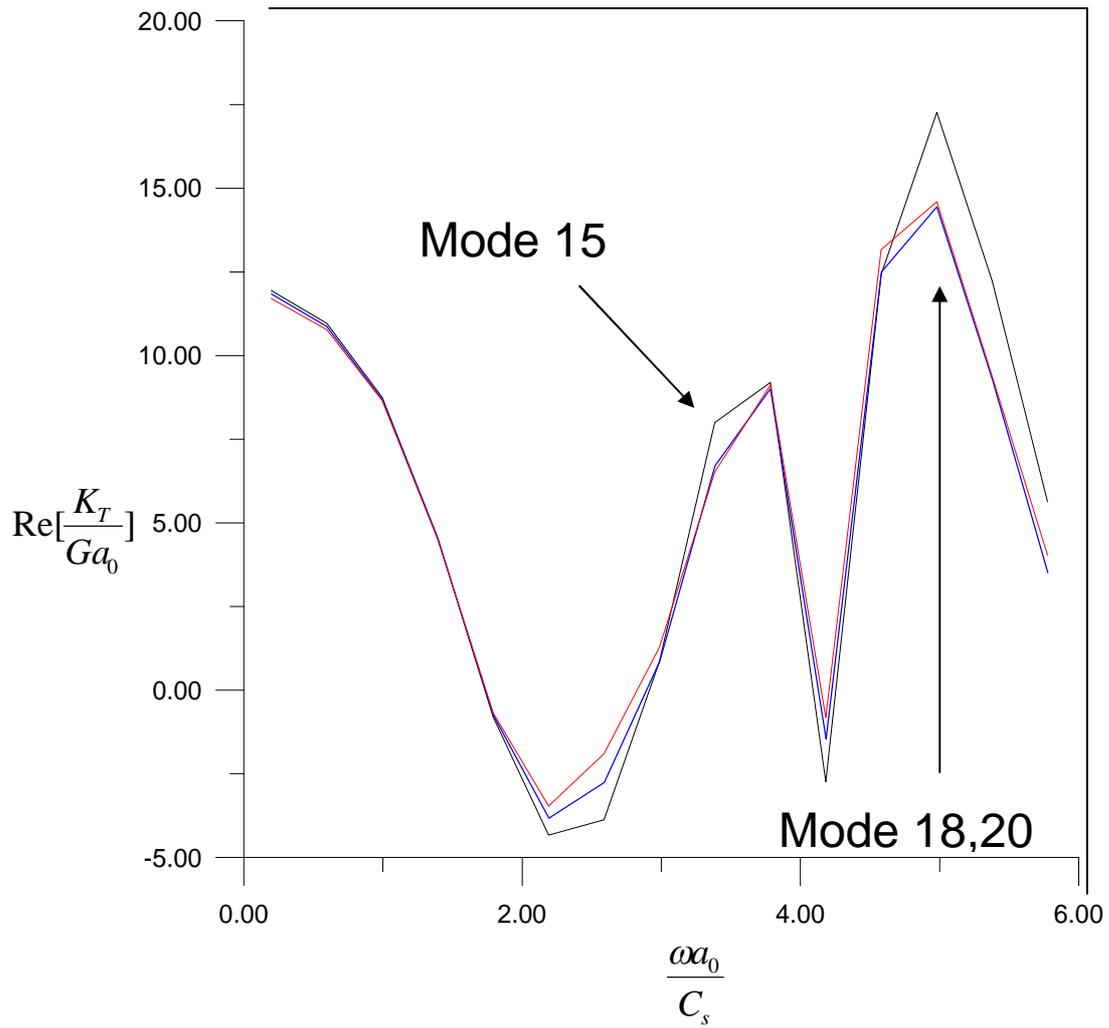
圖三十二 沉埋基礎刚性圓板之垂直振動



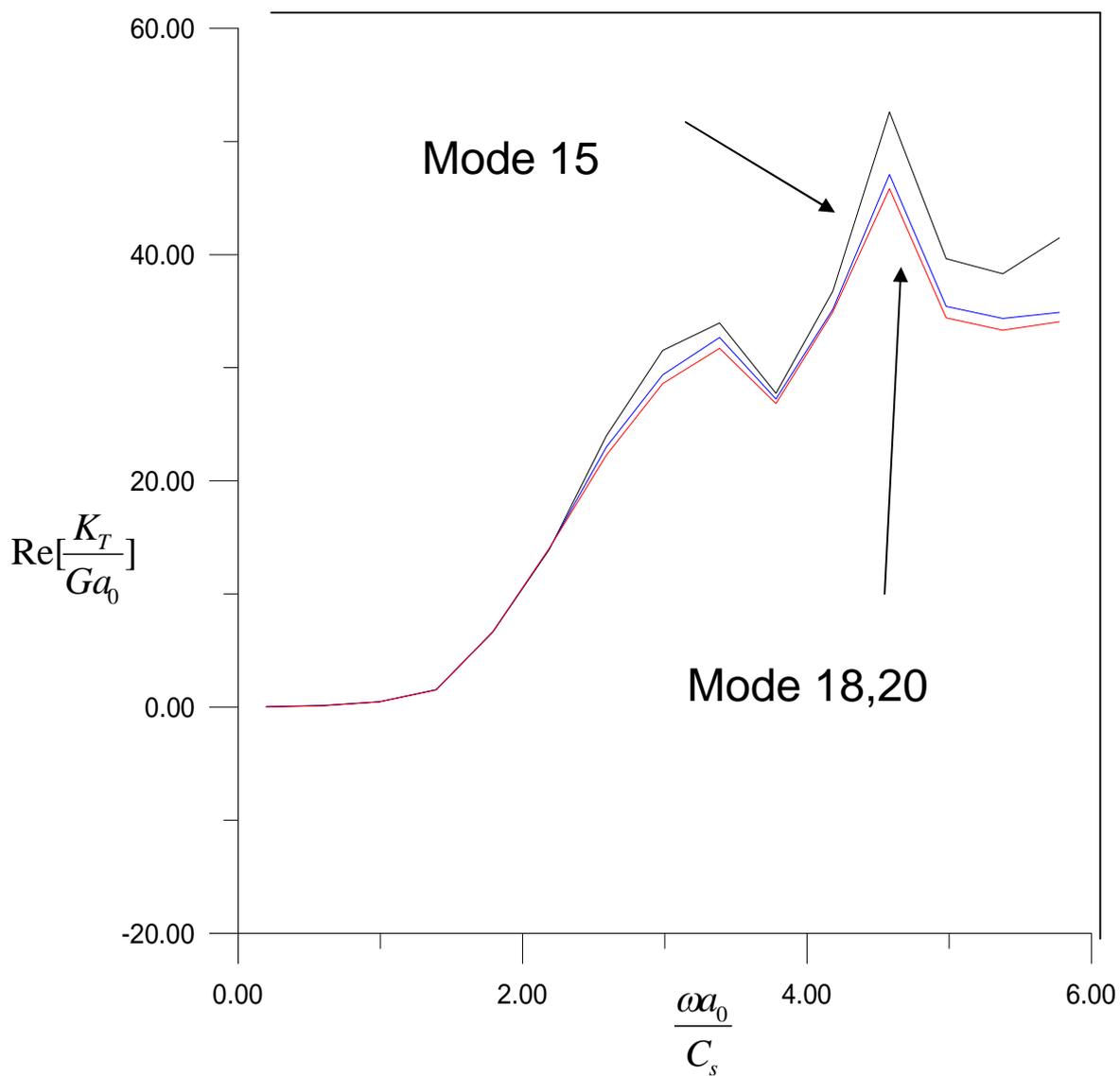
圖三十三 沉埋基礎 $d_2/R=0.0$ 垂直振動阻抗矩陣實數部份



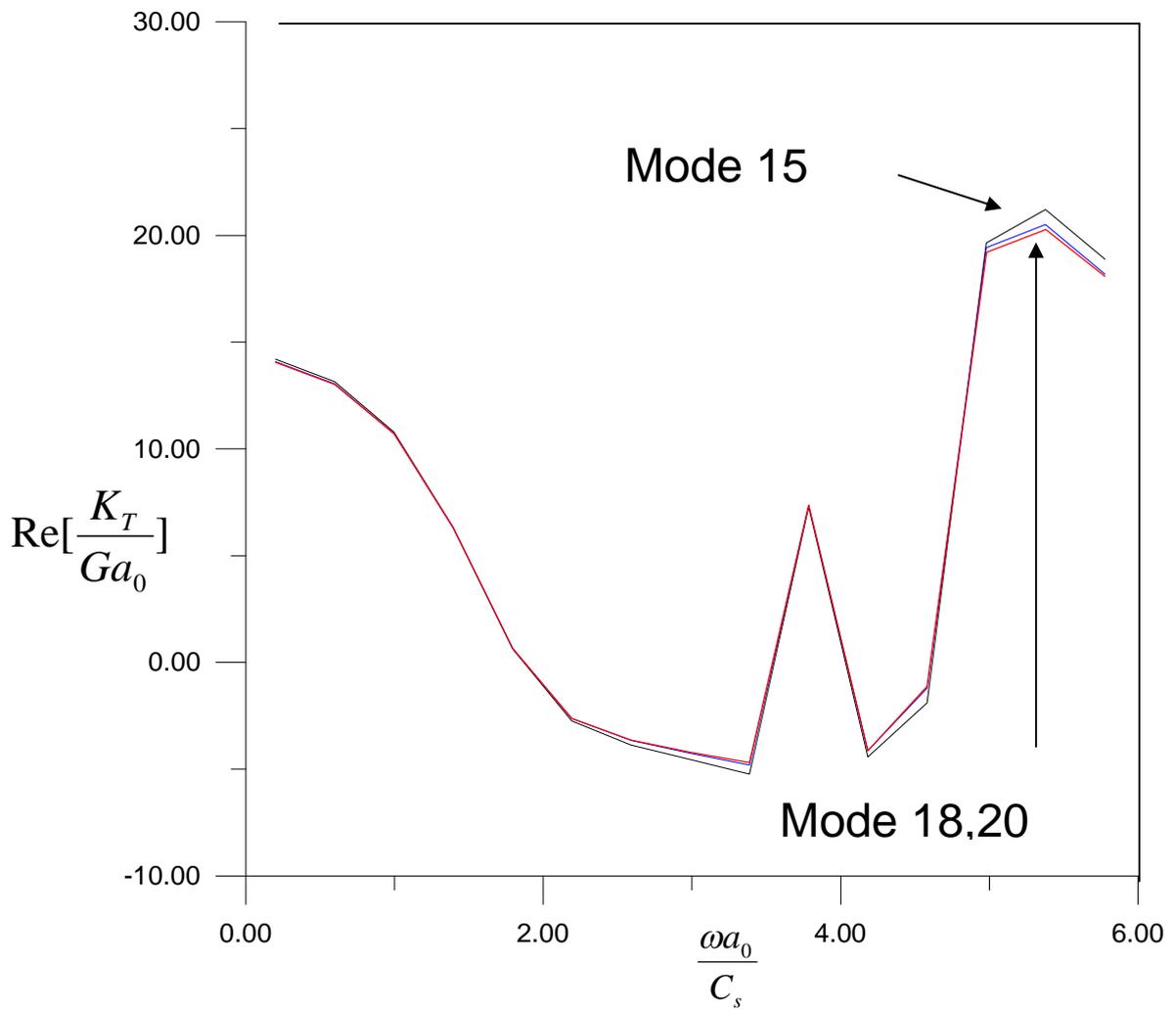
圖三十四 沉埋基礎 $d_2/R=0.0$ 垂直振動阻抗矩陣虛數部份



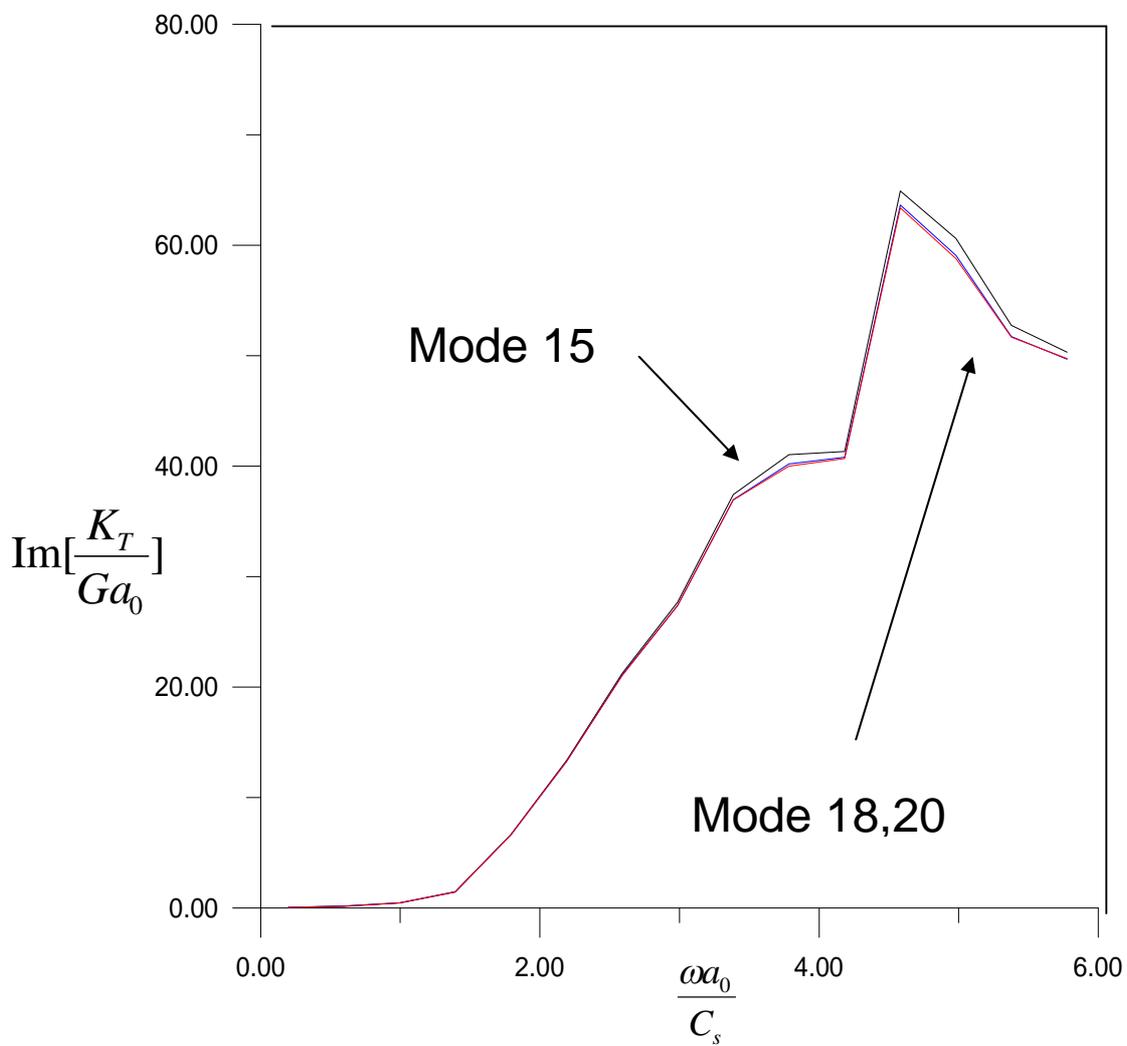
圖三十五 沉埋基礎 $d_2/R=0.25$ 垂直振動阻抗矩陣實數部份



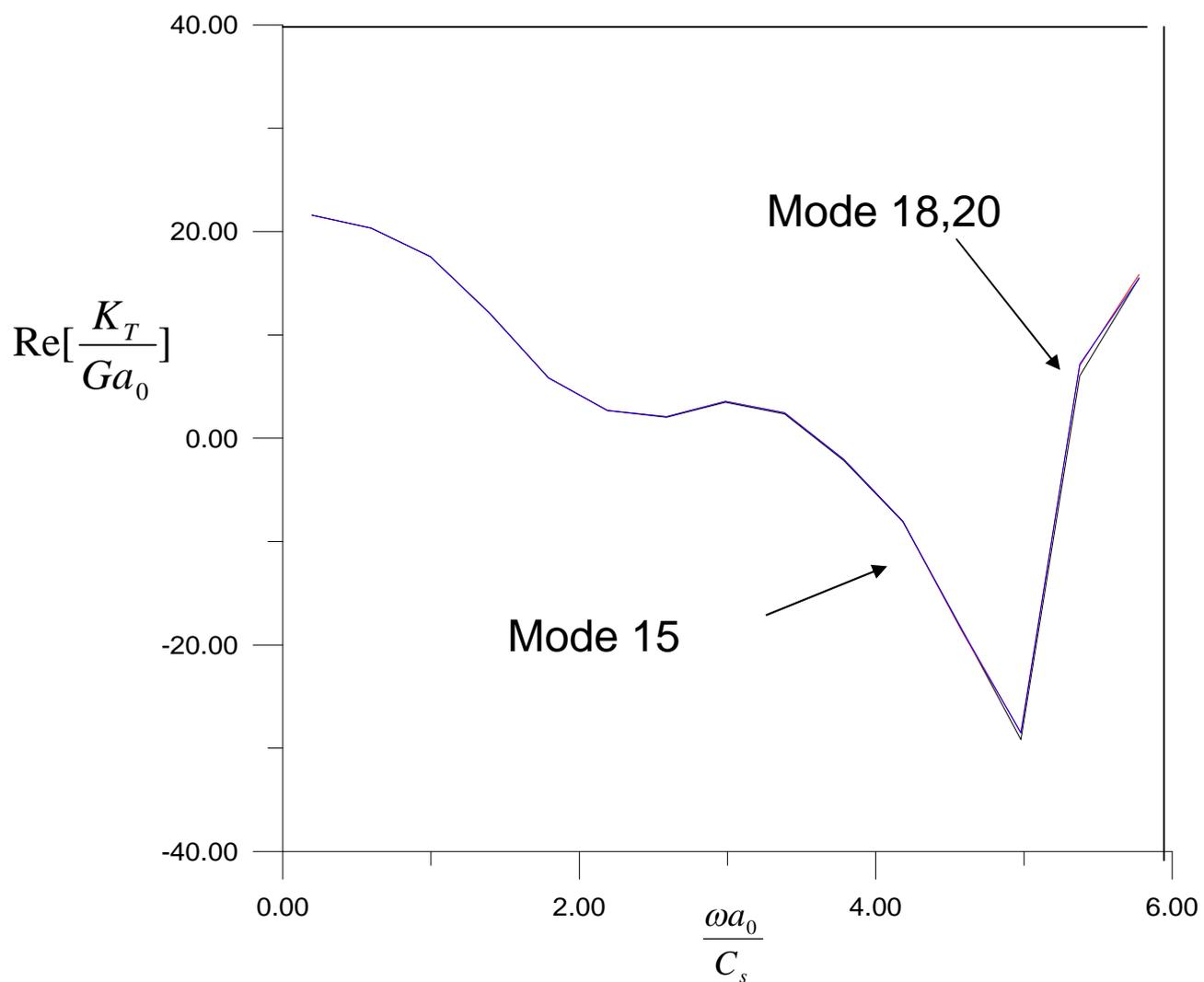
圖三十六 沉埋基礎 $d_2/R=0.25$ 垂直振動阻抗矩陣虛數部份



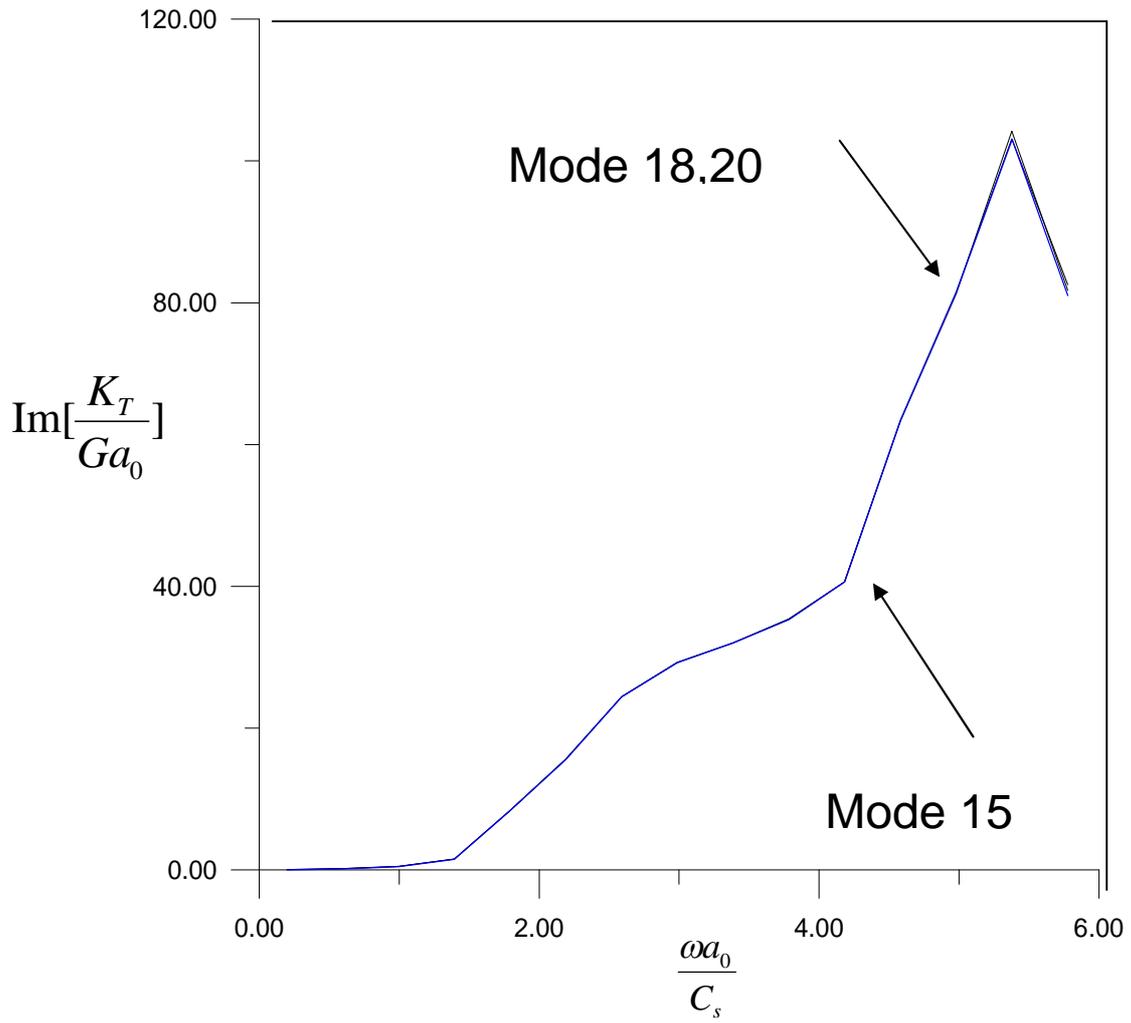
圖三十七 沉埋基礎 $d_2/R=0.5$ 垂直振動阻抗矩陣實數部份



圖三十八 沉埋基礎 $d_2/R=0.5$ 垂直振動阻抗矩陣虛數部份



圖三十九 沉埋基礎 $d/R=1$ 垂直振動阻抗矩陣實數部份



圖四十 沉埋基礎 $d_2/R=1$ 垂直振動阻抗矩陣虛數部份