

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 曲線齒圓柱型齒輪特性研究(3/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-009-028-

執行期間：94年08月01日至95年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程學系(所)

計畫主持人：蔡忠杓

計畫參與人員：曾瑞堂、陳冠宇、蘇政豪、黃俊諭

報告類型：完整報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 1 日

## 中文摘要

一般正齒輪或平行軸螺旋齒輪之齒面若未經適當修整，則其接觸型態屬於線接觸，因此，齒輪組對於裝配誤差所造成的運動誤差較為敏感；齒輪組若存在軸偏差，則齒輪組將會發生齒緣接觸，因而造成齒面應力集中及較大的振動與噪音。Liu[13]於1988年提出具曲線齒之圓柱型齒輪(Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth)的切削製造方法，並發現曲線齒具有高強度、低噪音、潤滑良好及無軸向推力等優點。

在本專題研究計畫中，依據齒輪原理(Theory of Gearing)並利用具有圓弧曲線之假想齒條刀和創成機構，來推導出曲線齒大小齒輪之齒面數學模式，再配合微分幾何原理(Differential Geometry)及數值方法，探討曲線齒之齒面過切(Tooth Undercutting)及轉位問題，並應用齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis)技術，分析曲線齒圓柱型齒輪組在具有裝配偏差時，其傳動誤差(Transmission Errors)及曲線齒之接觸比(Contact Ratio)，而齒輪組之接觸齒印則係利用齒面外形法(Tooth Surface Topology Method)求得。另外，本專題研究計畫亦將曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式轉換為CNC滾齒機之切削條件，進行CNC滾齒機之切削條件修改與測試。最後，本專題研究計畫亦進行此曲線齒圓柱型齒輪對之曲率分析(Curvature Analysis)，並利用有限單元法進行負載下齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)。

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，計畫之第一年(92年8月至93年7月)，係參照曲線齒圓柱型齒輪實際的切削機構及直邊刀具，首先建立具有圓弧齒線之假想齒條刀的刀面數學模式，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導出曲線齒圓柱型齒輪的齒形幾何數學模式。通常在小齒數或壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生過切現象，造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫利用所建立之齒面數學模式，推導其齒面過切發生之條件式，計算求出曲線齒圓柱型齒輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒面的過切狀況。此外，亦進行曲線齒圓柱型齒輪的轉位分析，探討齒輪之壓力角和齒數與轉位的關係。

本專題研究計畫之第二年(93年8月至94年7月)，將曲線齒圓柱型小齒輪與大齒輪之齒面的數學模式經由座標轉換，建立包含組裝誤差的曲線齒圓柱型齒輪組在實際接觸嚙合時之數學模式，利用此嚙合模型所發展的齒面接觸分析電腦軟體，探討了齒輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差及接觸率。本專題研究計畫也利用齒面接觸外形法來求解並預測接觸齒印，亦即假設齒面為剛體的情況下，以齒面幾何外形為基礎，來預測在不同的設計參數下，兩齒面的接觸齒印大小與位置。最後，根據

所發展之曲線齒圓柱型齒輪數學模式，將其轉換成 CNC 滾齒機之切削條件，本計劃也使用國科會八十六年度專題計畫補助所購入之 CNC 滾齒機，撰寫滾製曲線齒圓柱型齒輪之加工程式碼，配合向齒輪刀具廠商訂製的滾刀，實際加工試製此曲線齒圓柱型齒輪。

本專題研究計畫之第三年(94 年 8 月至 95 年 7 月)，首先進行曲線齒圓柱型齒輪組之曲率分析。利用本研究計畫第一年所得之刀具與齒面之數學模式，依據微分幾何與曲率分析的觀念，分別推導出大小兩齒輪的齒面主軸曲率與方向(Principal Curvatures and Directions)，進而求得曲線齒圓柱型齒輪組在輕負載下之接觸橢圓大小及方向。由於在第二年的研究中，係假設齒面為剛體的條件下進行齒面接觸分析，然而在實際的齒輪組嚙合時，齒輪組的接觸狀況十分複雜，為了得到更真實的結果，已利用有限單元法探討負載下兩齒面的接觸情況。由第一年所推導的齒面數學模式，自行發展三維齒面之網格分割軟體，建立一對接觸齒的實體模型(Solid Model)，再設定適當的負載、齒面摩擦力、材料性質及邊界條件，然後使用國科會補助購入之電腦工作站與有限單元應力分析軟體，模擬齒輪組在負載下的齒面應力分佈與齒面變形，以得到較接近於實際具有負載嚙合狀態下的齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)結果，另外，本研究亦實際在齒印測試機上以實驗的方法來求得齒印。

關鍵詞：曲線齒圓柱型齒輪，齒面過切，齒形轉位，齒輪嚙合原理，齒面接觸分析，傳動誤差，接觸率，曲率分析，接觸橢圓，有限單元法，負載下齒面接觸分析

## Abstract

The contact type of spur gears and helical gears with parallel axes in line contact, and the transmission errors are sensitive to the gear axial misalignments. If the gear set exists axial misalignments, the tooth edge contact will be occurred and this results in stress concentration, vibration and noise. The manufacture of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth has been proposed by Liu in 1988. The major advantages of curvilinear tooth gears are higher bearing and contacting strength, lower noise, better lubrication condition and no axial thrust forces.

In this research project, the mathematical model of curvilinear tooth gears has been developed based on the generation mechanism with an imaginary rack cutter of circular-arc tooth profile. According to the developed gear tooth mathematical model, the tooth undercutting of curvilinear tooth gears can be analyzed. In this project, the gear with profile-shifted generation has been also investigated. The tooth contact analysis technology has been utilized to the investigation on transmission errors and contact ratios of the gear set under ideal and error assembly conditions. The contact pattern of curvilinear tooth gears can be obtained by applying the contact surface topology method.

The proposed research project is a three-year project. In the first year, by considering the imaginary rack cutter of circular-arc tooth profile and the practical generation mechanism, the mathematical model of tooth surface of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth has been derived based on the theory of gearing and differential geometry. Usually, tooth undercutting will occur under conditions such as gears with a smaller pressure angle or smaller teeth number, which will consequently results in stress concentration near the tooth fillets. On the basis of the developed mathematical model of the tooth surface, the condition of tooth undercutting has been investigated and the undercutting line on the tooth surface has also been calculated and plotted. Tooth undercutting and profile-shifted modification under various combinations of design parameters have been studied.

In the second year of the research project, a cylindrical gear pair with curvilinear shaped teeth has been set up firstly. Additionally, the assembly errors are considered in the mathematical model of this cylindrical gear pair with curvilinear shaped teeth. Owing to the right-side and left-side tooth surfaces of curvilinear toothed gears are different, the proposed cylindrical gear pair with curvilinear shaped teeth exhibits point contact instead of line contact. Furthermore, tooth contact analysis (TCA) has been adopted to determine the transmission errors and the contact ratios of the cylindrical gears with curvilinear shaped teeth, respectively. Moreover, the effects of assembly conditions and design parameters on the

transmission errors have been also studied. The influences of design parameters on the dimension of contact patterns have also been investigated. Finally, the mathematical model of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth has been transformed into the cutting conditions of a CNC hobbing machine, thus, the designed cylindrical gears with curvilinear shaped teeth have been produced by the Kashifuji KN150 CNC hobbing machine.

In the third year, curvature analysis of the proposed cylindrical gears with curvilinear shaped teeth has firstly been performed. According to the surface equations of the generating tool surfaces and gear surfaces, the principal directions and curvatures of the pinion and the gear surfaces have been derived in terms of those of the tool surfaces, respectively, based on the differential geometry. Therefore, the directions and dimensions of the contact ellipses of the cylindrical gears with curvilinear shaped teeth have been determined on the basis of curvature theory. In the project of the second year, the tooth surfaces was assumed to be rigid. However, in practical applications, the gear pair is under load during transmissions. To obtain more realistic simulation results, loaded tooth contact analysis (LTCA) has been performed by employing the finite element stress analysis software on the workstation. The auto-meshes generation program for the three-dimensional tooth surface has been developed based on the mathematical model proposed in the first year. Furthermore, the contact stress contours on the tooth surfaces and the tooth deformation have been investigated. The results obtained from LTCA are more realistic and helpful than those obtained from TCA. Tooth contact patterns have also been verified by applying the tooth contact experiments.

Keywords : Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth, Teeth Undercutting, Profile-Shifted , Theory of Gear Meshing, Tooth Contact Analysis, Transmission Error, Contact Ratio, Curvature Analysis, Contact Ellipse, Finite Element Method, Loaded Tooth Contact Analysis.

## 目錄

前言	1
研究目的	3
研究方法	6
結果與討論	7
第一章 曲線齒圓柱型齒輪齒面之數學模式與過切分析	
1.1 創成原理	7
1.2 假想齒條刀之刀面方程式	8
1.3 曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式	11
1.4 曲線齒圓柱型齒輪之電腦輔助繪圖	14
1.5 曲線齒圓柱型齒輪之齒形過切分析	15
1.6 曲線齒圓柱型齒輪之轉位分析	20
第二章 曲線齒圓柱型齒輪組之齒面接觸分析	
2.1 運動誤差分析	24
2.2 齒面外形法	28
2.3 接觸分析範例	29
2.4 曲線齒圓柱型齒輪之接觸比	35
第三章 曲線齒圓柱型齒輪組之曲率分析	
3.1 切削刀具之主軸曲率及主軸方向	37
3.2 被創成齒面之主軸曲率及主軸方向	39
3.3 範例	43
第四章 曲線齒圓柱型齒輪組之有限單元分析	
4.1 前言	45
4.2 有限單元接觸分析模型建立	45
4.3 結果分析	49
第五章 曲線齒圓柱型齒輪之製造與測試	
5.1 曲線齒圓柱型齒輪之切削	55
5.2 齒輪單齒腹測試原理與架構	58
5.3 萬用齒輪嚙合測試機使用步驟	60
5.4 漸開線圓錐齒輪單齒腹測試及嚙合齒印測試	62
參考文獻	73
計劃成果自評	76

## 前言

一般正齒輪或平行軸螺旋齒輪之齒面若未經適當修整，則其接觸型態屬於線接觸，因此，齒輪組對於裝配誤差所造成的運動誤差較為敏感；齒輪組若存在軸偏差，則齒輪組將會發生齒緣接觸，因而造成齒面應力集中及較大的振動與噪音。Liu 於 1988 年提出具曲線齒之圓柱型齒輪(Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth)的切削製造方法，並發現曲線齒具有高強度、低噪音、潤滑良好及無軸向推力等優點。

在本專題研究計畫中，依據齒輪原理(Theory of Gearing)並利用具有圓弧曲線之假想齒條刀來推導出曲線齒大小齒輪之齒面數學模式，再配合微分幾何原理(Differential Geometry)及數值方法，探討曲線齒之齒面過切及轉位問題，並應用齒輪接觸分析(Tooth Contact Analysis)技術，分析曲線齒圓柱型齒輪組在具有裝配偏差時，其傳動誤差(Transmission Errors)及曲線齒之接觸比(Contact Ratio)，而齒輪組之接觸齒印則利用齒面外形法(Tooth Surface Topology Method)求得。另外，在本專題研究計畫中，亦將曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式轉換為 CNC 滾齒機之切削條件，進行 CNC 滾齒機之切削條件修改與測試。最後，本專題研究計畫亦進行此曲線齒圓柱型齒輪對之曲率分析(Curvature Analysis)，並利用有限單元法進行負載下齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)。

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，計畫之第一年(92 年 8 月至 93 年 7 月)，係參照曲線齒圓柱型齒輪實際的切削機構及直邊刀具，首先建立具有圓弧齒線之假想齒條刀的刀面數學模式，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導出曲線齒圓柱型齒輪的齒形幾何數學模式。通常在小齒數或壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生過切現象，造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫亦利用所建立之齒面數學模式，推導其齒面過切發生之條件式，計算求出曲線齒圓柱型齒輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒面的過切狀況。此外，亦進行曲線齒圓柱型齒輪的轉位分析，探討齒輪之壓力角和齒數與轉位的關係。

本專題研究計畫之第二年(93 年 8 月至 94 年 7 月)，將曲線齒圓柱型小齒輪與大齒輪之齒面的數學模式經由座標轉換，建立包含組裝誤差的曲線齒圓柱型齒輪組在實際接觸嚙合時之數學模式，利用此嚙合模型所發展的齒面接觸分析電腦軟體，探討了齒輪組在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差及接觸率。本專題研究計畫亦利用齒面接觸外形法來求解並預測接觸齒印，亦即假設齒面為剛體的情況下，以齒面幾何外形為基礎，來預測齒輪在不同的設計參數下，兩齒面的接觸齒印大小與位置。最後，

根據所發展之曲線齒圓柱型齒輪數學模式，將其轉換成 CNC 滾齒機之切削條件，並使用國科會八十六年度專題計畫補助所購入之 CNC 滾齒機，撰寫滾製曲線齒圓柱型齒輪之加工程式碼，配合向齒輪刀具廠商訂製的滾刀，實際加工試製此曲線齒圓柱型齒輪。

本專題研究計畫之第三年(94 年 8 月至 95 年 7 月)，首先進行曲線齒圓柱型齒輪組之曲率分析。利用本研究計畫第一年研究所得之刀具與齒面之數學模式，依據微分幾何與曲率分析的觀念，分別推導出大小兩齒輪的齒面主軸曲率與方向(Principal Curvatures and Directions)，進而求得曲線齒圓柱型齒輪組在輕負載下之接觸橢圓大小及方向。由於在第二年的研究中，係假設齒面為剛體的條件下進行齒面接觸分析，然而在實際的齒輪組嚙合時，齒輪組的接觸狀況十分複雜，為了得到更真實的結果，也利用有限單元法探討負載下兩齒面的接觸情況。根據第一年所推導的齒面數學模式，自行發展三維齒面之網格自動分割軟體，建立一對接觸齒的實體模型(Solid Model)，再設定適當的負載、齒面摩擦力、材料性質及邊界條件，然後使用八十八年度國科會補助購入之電腦工作站與有限單元應力分析軟體，模擬齒輪組在負載下的齒面應力分佈與齒面變形，以得到較接近於實際具有負載嚙合狀態下的齒面接觸分析(Loaded Tooth Contact Analysis)結果，另外，本研究亦實際在齒印測試機上以實驗的方法來求得齒印與驗證。

## 研究目的

正齒輪之接觸型態屬於線接觸，若齒輪組在裝配時存在有軸偏差，則正齒輪嚙合時將會發生齒緣接觸的現象，造成應力集中、運轉不平順，因而壽命減少，噪音增大等現象。螺旋齒輪接觸線長度以連續變化的方式遞增或遞減，在傳遞運動時較為平順，但是仍然無法避免裝配時因具有軸向偏差而產生齒緣接觸。為了克服齒緣接觸的現象，通常會使用隆齒修整(Crowning Modification)的方法，以改變齒輪接觸型式，由線接觸轉變為點接觸，使得齒輪即使組裝時具有軸向偏差，仍然可使得其接觸點落於齒面中央附近之位置。有關隆齒修整方面之研究，Litvin 等人[1, 2]於 1988 年利用具有五個自由度之切削機構切製具有隆齒之齒形。Tsay 等人[3]於 1990 年提出將漸開線繞固定軸旋轉而推導出隆齒之理論齒面。張信良等人[4]於 1996 年以製造的觀點，應用滾齒機配合靠模板(Curved-Template Guide)，推導出隆齒之螺旋齒輪齒面數學模式。

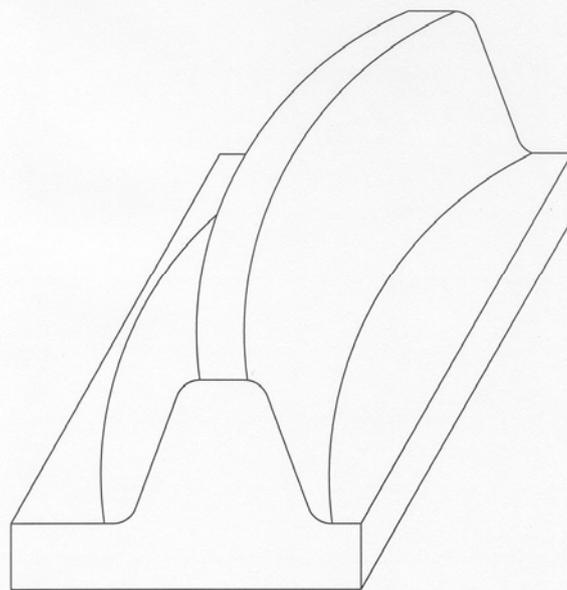
齒輪在製造及組裝時，多少會產生齒形製造誤差及裝配誤差，進而造成齒輪在傳遞運動的過程中的傳動誤差。各種標準齒形及其修整齒形在傳遞運動的過程，對於裝配及齒形製造誤差之敏感度各不相同，因此，所造成的運動誤差亦不同。有關齒輪組之傳動誤差的研究不少，Tsay[5]於 1988 年探討螺旋齒輪之齒面數學模式及其接觸分析與應力分析。Munro[6]於 1990 年探討最佳齒形修整與傳動誤差之關係；Tsay 與 Fong[7]於 1991 年對於圓弧形齒輪及漸開線齒之配對嚙合，探討其接觸特性。Fong 與 Tsay[8]於 1992 年研究蝸線傘齒輪之運動最佳化。Litvin 等人[9, 10]於 1989 及 1994 年提出具有拋物線形傳動誤差之修整型齒面的合成。Lin 等人[11]於 1996 年探討戟齒輪之接觸分析。Chang 等人[12]於 1997 年對於修整型螺旋齒輪組進行傳動誤差之最佳化設計。過去國內外關於曲線齒圓柱型齒輪之研究十分有限，劉[13]於 1988 年提出利用刀盤切削曲線齒圓柱型齒輪的製造方法，並探討曲線齒圓柱型齒輪之優點：(1)與相同齒面寬之正齒輪相比，其具有較高的彎曲強度及抗壓強度，故在傳遞相同的動力時，可使齒輪箱尺寸縮小。(2)齒輪運轉過程中為多齒接觸，故齒輪嚙合平順，噪音較低。(3)曲線齒有利於潤滑油殘留，故齒輪之潤滑良好。(4)沒有軸向推力(Axial Thrust Force)之產生。Dai 等[14]於 1999 年提出在滾齒刀軸上加裝一組飛刀來創成一對線接觸的曲線齒輪，而 Andrei 等[15]則於 2002 年提出與刀盤相似的切削刀具來製造曲線齒輪。

具有高負荷承載能力的齒輪乃是齒輪設計或製造者追求的目標，然而，關於曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式和齒面接觸分析、接觸橢圓及應力分析等並未加以研究，另外，如何設計齒輪之齒形以避免齒緣接觸的問題亦限制了曲線齒圓柱型齒輪之實際應用。基於上述背景及目的，本研究計畫首先利用機構學原理、齒輪嚙合原理及微分幾何的觀念，先建構具有圓弧齒線之假想齒條刀(圖一)，配合曲線齒圓柱型齒輪之切削機構(圖二)，推導其所創成之曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式。接著，利用所推導之齒面數學模式進行曲線齒圓柱型齒輪之齒面過切分析與轉位分析，以提供刀具參數設計之參考。齒面接觸分析、曲率分析及接觸橢圓模擬，則係研究曲線齒圓柱

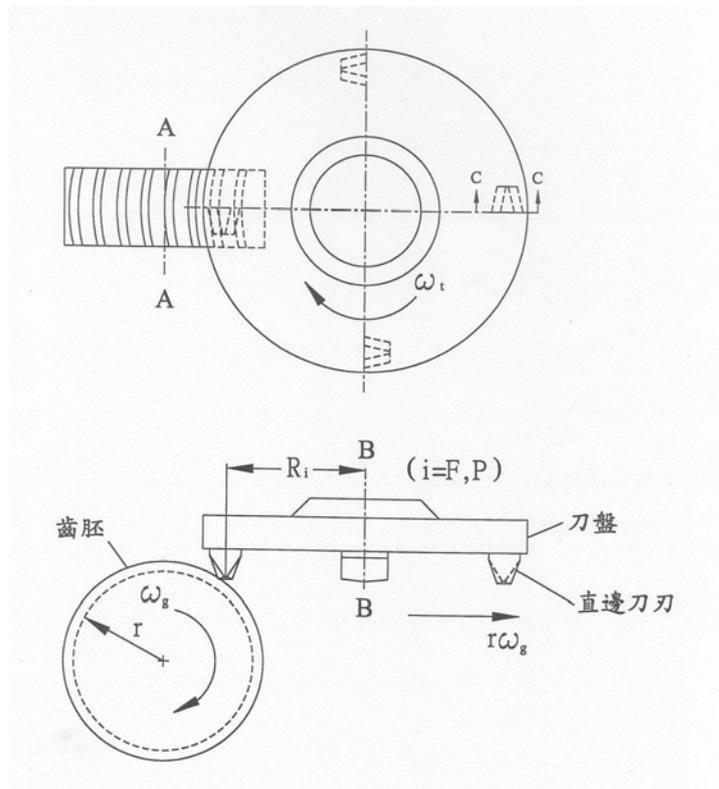
型齒輪組在具有裝配誤差狀況下之嚙合特性，並模擬刀盤半徑改變對曲線齒圓柱型齒輪組接觸橢圓大小之影響，以期獲得最佳之接觸位置及接觸齒印。

由於曲線齒圓柱型齒輪具有高強度，在本研究之曲線齒圓柱型齒輪，其左右齒面將分別由不同的刀盤半徑所創成，因此，其齒形將具有隆齒(Crowning)之特性，故此曲線齒圓柱型齒輪對之接觸狀況是呈現點接觸而非線接觸，這也是本研究的創新處，由於此創新之製造方式，曲線齒圓柱型齒輪組在具有軸向裝配誤差之狀況下，才不會產生齒緣接觸(Edge Contact)現象，這是對曲線齒在應用上之一大改進。因此，所發展之曲線齒圓柱型齒輪組對於裝配誤差不敏感，且不會發生齒緣接觸的現象等優點，非常適合用於精密機械之傳動。除此之外，本計畫將研究嘗試使用一般之 CNC 滾齒機來滾製曲線齒圓柱型齒輪，在製造之彈性及成本上有其優勢。因此，該型齒輪非常值得深入研究，以利產業之實用化並提昇我國之產業技術和產品水準。

因此，本專題研究計畫執行完畢後，將可建立起一套含括曲線齒圓柱型齒輪從設計、分析、模擬製造及測試之完整流程，這對於提昇我國齒輪業者之設計、製造分析與測試能力將大有助益。相信藉由此一研究計畫之推展，將可提高國內業界對曲線齒圓柱型齒輪組之認識並建立其設計與製造能力，有助於精密傳動技術之提昇，藉此達到產業升級的目的。



圖一 具有圓弧齒線之假想齒條刀



圖二 曲線齒圓柱型齒輪之切削機構

## 研究方法

本專題研究計畫第一年（92年8月至93年7月），首先設計具有圓弧齒線之假想齒條刀參數，配合切削曲線齒圓柱型齒輪之加工機構，推導具有圓弧齒線之假想齒條刀的刀面數學模式。在齒輪之實際製造過程中，刀具與齒胚之間的相對運動可利用座標轉換來模擬，再加上齒輪嚙合方程式，即可推導出曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式。曲線齒圓柱型齒輪在齒面寬中央截面的齒形為標準漸開線齒形之截面，故曲線齒圓柱型齒輪之齒面若有過切之發生將從齒面寬中央截面開始；本研究計畫將進一步利用其刀具與齒胚之間的相對速度與對時間微分的嚙合方程式，推導曲線齒圓柱型齒輪產生齒面過切的判別方程式，探討在不同的設計參數下，齒形過切的條件，以供選取適當之刀具參數及加工條件。此外，本計畫亦探討了曲線齒圓柱型齒輪之轉位分析，同時，對齒形壓力角及齒數與轉位之間的問題也加以研究。

本計畫第二年（93年8月至94年7月），進行了曲線齒圓柱型齒輪組之嚙合分析，利用第一年所發展之曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式，經由座標轉換即可模擬具有裝配誤差之齒輪組。利用此嚙合模型發展曲線齒圓柱型齒輪之接觸分析電腦軟體，分析了曲線齒圓柱型齒輪在不同的裝配狀況與設計參數下的傳動誤差。而曲線齒圓柱型齒輪之接觸率則利用齒面接觸分析程式配合不同的設計參數來計算，以探討不同設計參數對接觸率的影響。本計畫係採用接觸齒面外形法來設計和撰寫電腦分析軟體，以計算在不同裝配情況與設計參數下的接觸齒印大小與位置。齒面外形法乃是以理論齒形幾何為基礎，在兩齒面之接觸點的共切平面上，以接觸點為中心向外尋找兩齒面間之等距線，通常當此等距設定為0.00635mm，亦即在齒印實驗時所用的一個紅丹顆粒直徑時，則將此等距線定義為所預測的接觸齒印大小。參照所得數據訂製滾刀，並將曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式轉換為CNC滾齒機之切削條件，進行CNC滾齒機之切削條件修改與測試。最後，利用本實驗室現有之CNC滾齒機切削曲線齒圓柱型齒輪。

本計畫之第三年計畫（94年8月至95年7月），首先利用微分幾何以及曲率分析理論，計算兩齒面在接觸點之主軸曲率與方向，進而求得到曲線齒圓柱型齒輪組在輕負載下的接觸橢圓之大小與方向。然而實際齒輪嚙合時所會面對到的變數十分複雜，所需考量的不僅是兩嚙合齒面間的曲率關係而已，還需考慮齒面嚙合區域受力的大小、嚙合齒面間摩擦力的大小與方向以及齒輪的材料機械性質等等，為研究曲線齒圓柱型齒輪在這些複雜條件下的應力與變形，本計畫擬使用電腦工作站與有限單元分析軟體來協助，以得到較接近於實際狀況的齒面接觸情形，即所謂的負載下的齒面接觸分析。其研究方法係利用第一年得到的齒面方程式，配合自行發展的三維齒面網格分割程式，建立有限單元實體模型，並設定齒輪承受之負荷、摩擦力和材料機械性質及適當之邊界條件，藉由工作站及有限元素分析軟體進行負載下的齒面接觸應力分佈與變形等相關研究。另外，本研究亦將以齒輪嚙合實驗的方法來加以驗證接觸齒印。

## 結果與討論

### 第一章 曲線齒圓柱型齒輪齒面之數學模式與過切分析

#### 1.1 創成原理

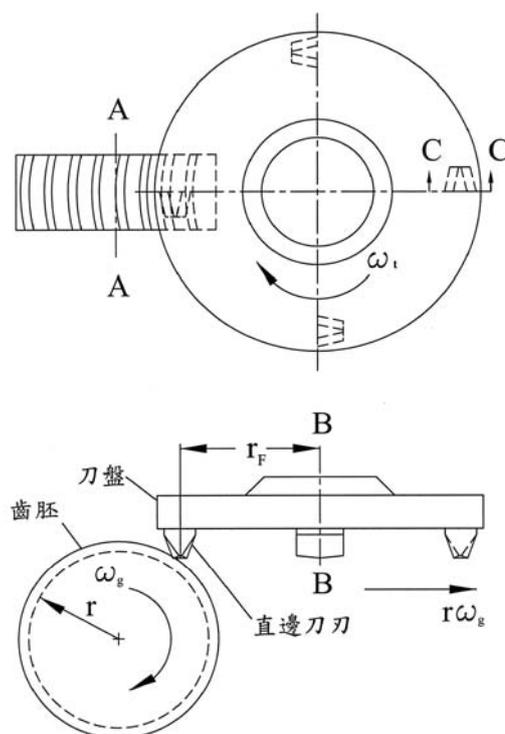


圖 1.1 曲線齒圓柱型齒輪之切削方法

曲線齒圓柱型齒輪之切削機構如圖 1.1 所示，在切削的過程中齒胚係繞著 A-A 軸以  $\omega_g$  之角速度旋轉，刀盤則是繞著 B-B 軸以  $\omega_i$  之角速度旋轉，而  $r_F$  為刀盤半徑，其切削過程如下[13]：

- (1) 齒胚以  $\omega_g$  之角速度順時針旋轉，刀盤以  $\omega_i$  之角速度順時針旋轉，並以  $r\omega_g$  向右平移，此過程將在齒胚上產生一個曲線齒之齒間(Tooth Space)。
- (2) 齒間被創成完後，齒胚停止旋轉，進行分度，並預留齒隙(Backlash)量。
- (3) 刀盤在切削另一齒間時，刀盤以  $\omega_i$  之角速度順時針旋轉，並以  $r\omega_g$  向左平移(與圖 1.1 相反)，齒胚以  $\omega_g$  逆時針旋轉(與圖 1.1 相反)，此過程產生另一個齒間。
- (4) 齒胚停止旋轉，進行分度，以進行下一個齒之切削。

(5) 重覆以上(1)~(4)步驟，直到所有齒形完成切削。

由以上曲線齒圓柱型齒輪之切削機構可發現，其刀盤結構複雜，而且刀盤上之刀刃安裝，調整及研磨修整較為麻煩，故切製曲線齒圓柱型齒輪需使用專用切削工具機，因而曲線齒之製造成本比一般正齒輪或螺旋齒輪高。上述曲線齒圓柱型齒輪之切削亦可利用假想齒條刀與曲線齒圓柱型齒輪之齒胚的相對運動關係加以模擬，如圖 1.2 所示。當齒胚以  $\omega_g$  之角速度順時針旋轉時，假想齒條刀則以  $r\omega_g$  的速度向左平移，其中  $r$  為齒輪之節圓半徑，且假想齒條刀為具有圓弧齒線之齒條刀，而非創成正齒輪或螺旋齒輪所使用之直齒線齒條刀。經由以上之創成關係，即可創成與假想齒條刀共軛之曲線齒圓柱型齒輪。

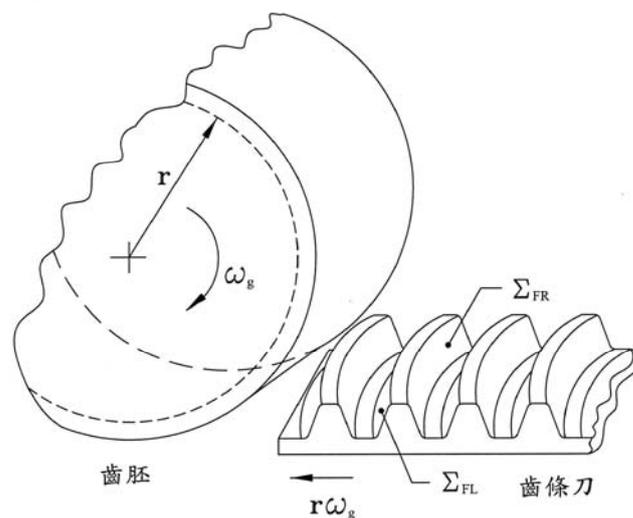


圖 1.2 假想齒條刀創成曲線齒圓柱型齒輪之運動關係

## 1.2 假想齒條刀之刀面方程式

圖 1.2 顯示具圓弧齒線之假想齒條刀  $\Sigma_F$ ，其刀面寬之中央法向截面與創成漸開線齒輪之直邊刀具是一樣的，如圖 1.3 所示。

假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面寬中央法向截面主要由壓力角為  $\psi_n^{(F)}$  之直邊刀刃及中心位於  $C_F$  而半徑為  $\rho_F$  之圓弧所組成。其中直邊刀刃部分係用以創成齒輪之工作區的齒面，而圓弧部分則是用以創成齒根圓角。假想齒條刀  $\Sigma_F$  之主要設計參數有  $a_F$ 、 $b_F$ 、 $M_n$ 、 $p_n$ 、 $l_F$ 、 $\psi_n^{(F)}$ 、 $\alpha_F$  及  $\rho_F$ 。

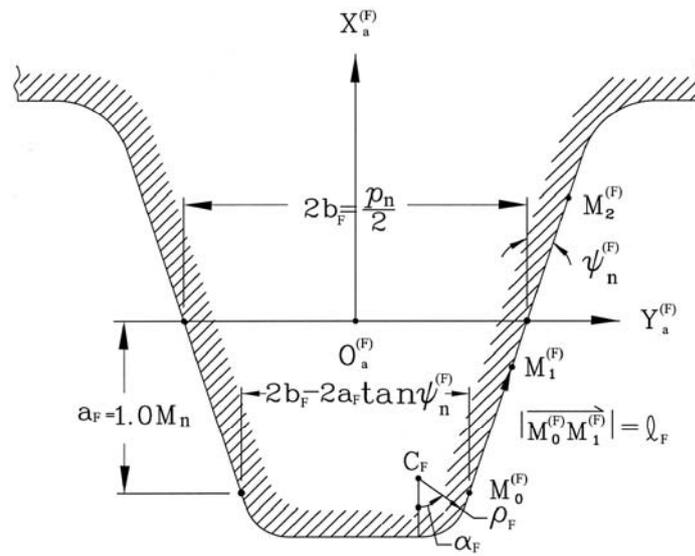


圖 1.3 假想齒條刀  $\Sigma_F$  刀面寬之中央法向截面(圖一截面 C-C)

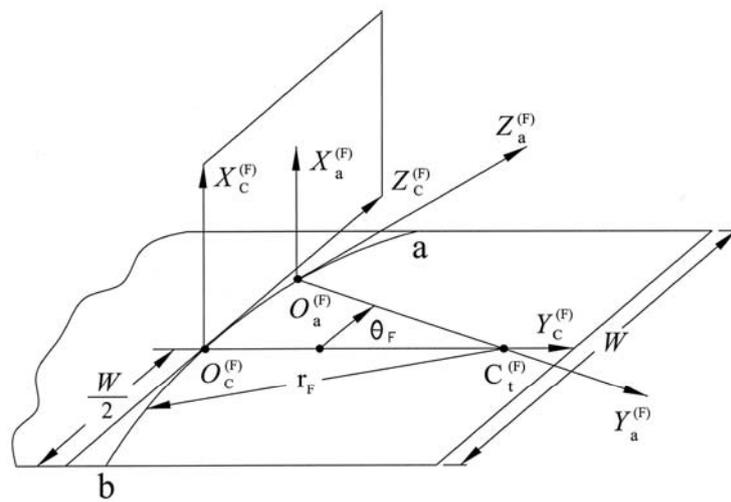


圖 1.4 模擬假想齒條刀刀面之座標系  $S_c$  與  $S_a$  的關係

為了得到曲線齒輪左右齒面之數學模式，可將圓弧齒線假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之左右刀面 $\Sigma_{FL}$ 及 $\Sigma_{FR}$ 分別以數學模式表示之。假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之右刀面 $\Sigma_{FR}$ 將創成曲線齒圓柱型齒輪之左齒面 $\Sigma_{iL}$ ，而假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之左刀面 $\Sigma_{FL}$ 則用以創成曲線齒圓柱型齒輪之右齒面 $\Sigma_{iR}$ 。圖 1.3 顯示左右刀面互為對稱，假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之左右刀面的直邊刀刃 $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$ 可表示在座標系 $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 如下：

$$\mathbf{R}_a^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_F \\ \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

在圖 1.3 中， $M_0^{(F)}$ 點係創成齒面工作區之最低點，其座標可由設計參數 $a_F$ 及 $b_F$ 兩參數決定之， $l_F$ 亦為假想齒條刀之刀面設計參數之一，表示由最低點 $M_0^{(F)}$ 沿著直邊刀面至刀面上任意點 $M_1^{(F)}$ 的距離。(1.1)式之“ $\pm$ ”號中，右刀面 $\Sigma_{FR}$ 為“+”號而左刀面 $\Sigma_{FL}$ 則為“-”號。圖 1.4 顯示假想齒條刀齒面寬之中央截面座標系 $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 與曲線齒之齒條刀座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 之關係，其中圓弧曲線 $\widehat{ab}$ 為直邊刀刃之切削路徑， $C_i^{(F)}$ 表示切削刀盤之旋轉中心位置。當直線 $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$ 繞切削刀盤之旋轉中心 $C_i^{(F)}$ 運動時，即形成假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之左右刀面，將代表刀面之直線區間 $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$ 的位置向量，由座標系 $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$ 轉換至座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ，即可獲得齒條刀左右刀面之數學模式。此座標之轉換可用下列齊次座標轉換矩陣方程式(Homogeneous Coordinate Transformation Matrix Equation)求得：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = [M_{ca}] \mathbf{R}_a^{(F)} \quad (1.2)$$

其中

$$[M_{ca}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_F & \sin \theta_F & r_F(1 - \cos \theta_F) \\ 0 & -\sin \theta_F & \cos \theta_F & r_F \sin \theta_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若將(1.1)式代入(1.2)式，即可求得將假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之刀面數學模式表示於座標系

$S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  如下：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_F \\ \pm (l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \cos \theta_F + r_F (1 - \cos \theta_F) \\ \mp (l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \sin \theta_F + r_F \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

其中

$$\theta_{Fl} \leq \theta_F \leq \theta_{Fu}; \theta_{Fl} = \sin^{-1}\left(\frac{-W}{2r_F}\right); \theta_{Fu} = \sin^{-1}\left(\frac{W}{2r_F}\right) \quad (1.4)$$

上式中  $r_F$  表示圓弧曲線  $\widehat{ab}$  之曲率半徑，亦即切削刀盤之半徑， $W$  表示齒面寬， $\theta_F$  則為刀面之另一座標參數，其限制範圍如方程式(1.4)所示。假想齒條刀  $\Sigma_F$  刀面之法向量  $\mathbf{N}_c^{(F)}$  及單位法向量  $\mathbf{n}_c^{(F)}$  可利用下列方程式求得：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial l_F} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(F)}}{|\mathbf{N}_c^{(F)}|} \quad (1.6)$$

其中位置向量  $\mathbf{R}_c^{(F)}$  表示刀面  $\Sigma_F$  之數學模式，表示在座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ，而  $l_F$  及  $\theta_F$  為刀面之設計參數。根據方程式(1.3)、(1.5)及(1.6)式，假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面單位法向量  $\mathbf{n}_c^{(F)}$  可表示如下：

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} \pm \sin \psi_n^{(F)} \\ -\cos \psi_n^{(F)} \cos \theta_F \\ \cos \psi_n^{(F)} \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

(1.3)式及(1.7)式之“ $\pm$ ”號中，上方符號表示  $\Sigma_F$  之右刀面  $\Sigma_{FR}$  而下方符號則表示  $\Sigma_F$  之左刀面  $\Sigma_{FL}$ 。

### 1.3 曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式

圖 1.5 顯示假想齒條刀  $\Sigma_F$  在創成曲線齒輪  $\Sigma_1$  之齒面與齒間時，座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 、 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  及  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  之相對關係。在齒面創成的過程中，座標系

$S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  固聯於假想齒條刀，座標系  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  為一參考座標系，而座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  則固聯於齒胚上，其中  $Z_1$  軸表示齒胚之旋轉軸。利用下列齊次座標轉換矩陣方程式，即可求得假想齒條刀  $\Sigma_F$  之軌跡方程式表示於座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  如下：

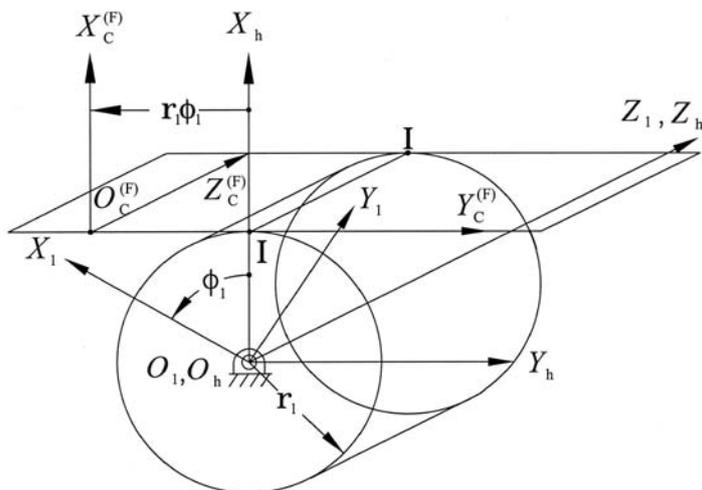


圖 1.5 假想齒條刀  $\Sigma_F$  創成齒輪  $\Sigma_1$  之創成機構示意圖

$$\mathbf{R}_1^{(F)} = [M_{1c}] \mathbf{R}_c^{(F)} \quad (1.8)$$

其中

$$[M_{1c}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & r_1(\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & r_1(\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式中  $r_1$  表示小齒輪之節圓半徑， $\phi_1$  則表示在創成過程中齒胚之旋轉角。

當兩曲面經由直接接觸來傳遞運動時，主動件沿著傳遞線，也就是兩曲面之共同法線(Common Normal)來傳遞運動，在傳遞運動的過程中，兩個嚙合之曲面必須保持接觸，若兩曲面在公法線方向有相對速度，則兩曲面將彼此分離或嵌入對方曲面，因此，兩曲面之相對速度必定存在於兩嚙合曲面之共同切平面上，即兩曲面接觸點之共同法向量  $\mathbf{N}$  與兩曲面之相對速度  $\mathbf{V}^{(12)}$  之點乘積(Dot Product)必為零，亦即表示接觸點之共同法向量

與相對速度互相垂直，故下列方程式必成立：

$$\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{V}_c^{(12)} = 0 \quad (1.9)$$

此關係式即為兩嚙合曲面之嚙合方程式(Equation of Meshing)。對於平行軸之運動傳遞，其相對速度 $\mathbf{V}^{(12)}$ 可利用繞瞬時旋轉軸(Instantaneous Axis of Rotation) I 點之運動求得，且兩曲面在接觸點之法向量必通過此瞬時旋轉軸。故對於平行軸之兩嚙合曲面，其嚙合方程式亦可利用下列關係求得：

$$\frac{X_c^{(F)} - x_c^{(F)}}{n_{cx}^{(F)}} = \frac{Y_c^{(F)} - y_c^{(F)}}{n_{cy}^{(F)}} = \frac{Z_c^{(F)} - z_c^{(F)}}{n_{cz}^{(F)}} \quad (1.10)$$

其中 $X_c^{(F)}$ 、 $Y_c^{(F)}$ 及 $Z_c^{(F)}$ 表示瞬時旋轉軸上任一點的座標值表示在座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ； $x_c^{(F)}$ 、 $y_c^{(F)}$ 及 $z_c^{(F)}$ 表示刀面之瞬時接觸點的座標值表示在座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ； $n_{cx}^{(F)}$ 、 $n_{cy}^{(F)}$ 及 $n_{cz}^{(F)}$ 則表示刀面此瞬時接觸點之單位法向量的三個分量，表示在座標系 $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 。將方程式(1.3)和(1.7)式代入(1.10)式，即可求得假想齒條刀 $\Sigma_F$ 之左右刀面與被創成之曲線齒輪齒面的嚙合方程式如下：

$$\begin{aligned} f(l_F, \theta_F, \phi_1) = \\ \pm \left[ l_F - a_F (\cos \psi_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)} \sin \psi_n^{(F)}) + b_F \sin \psi_n^{(F)} \right] \cos \theta_F \\ + (r_F (1 - \cos \theta_F) - r_1 \phi_1) \sin \psi_n^{(F)} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

方程式(1.11)中之“ $\pm$ ”號，上方符號表示 $\Sigma_F$ 之右刀面 $\Sigma_{FR}$ 與曲線齒輪之左齒面 $\Sigma_{IL}$ 的嚙合方程式，而下方之符號則表示 $\Sigma_F$ 之左刀面 $\Sigma_{FL}$ 與曲線齒輪之右齒面 $\Sigma_{IR}$ 的嚙合方程式。曲線齒輪左右齒面之定義如圖 1.6 所示。根據齒輪創成原理可知，齒輪之齒面數學模式是由假想齒條刀之軌跡方程式與嚙合方程式聯立而成。故將方程式(1.8)及(1.11)聯立即可定義出曲線齒圓柱型齒輪之左右齒面數學模式。

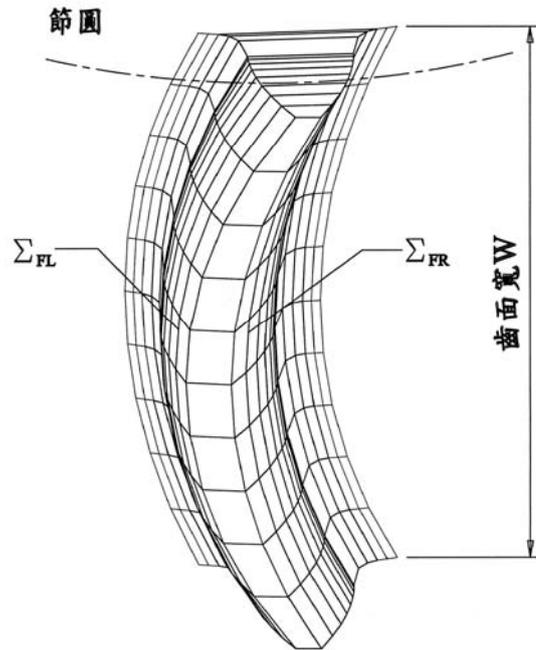


圖 1.6 曲線齒左右齒面示意圖

表 1.1 曲線齒圓柱型齒輪主要設計參數

設計參數	曲線齒輪
齒數	18
模數	3mm/齒
壓力角	$20^{\circ}$
齒面寬	30mm
刀盤半徑	30mm( $w_d = 0.5$ )

#### 1.4 曲線齒圓柱型齒輪之電腦輔助繪圖

依據上一節所推導之曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式及電腦輔助繪圖程式，即可繪出其外形。假設曲線齒圓柱型齒輪主要設計參數如表 1.1 所示，其中  $w_d$  表示曲線齒之齒面寬與刀盤直徑之比值。以三維網格之方式所描繪之曲線齒圓柱型齒輪的齒面形狀如圖 1.7 所示。由以上可知曲線齒圓柱型齒輪之幾何特性：(1)正齒輪為曲線齒圓柱型齒輪之特例，當切削刀盤半徑  $r_f$  趨近於無限大時，曲線齒圓柱型齒輪即變成正齒輪。(2)由於圓弧齒線之幾何特性，使得本研究之齒輪組在傳動時具有人字型齒輪無軸向推力的特性。(3)曲線齒之左右齒面不相同，一個齒面為凹曲面，另一個齒面則為凸曲面，而且齒面寬之中央齒厚較大而兩端之齒厚較小。

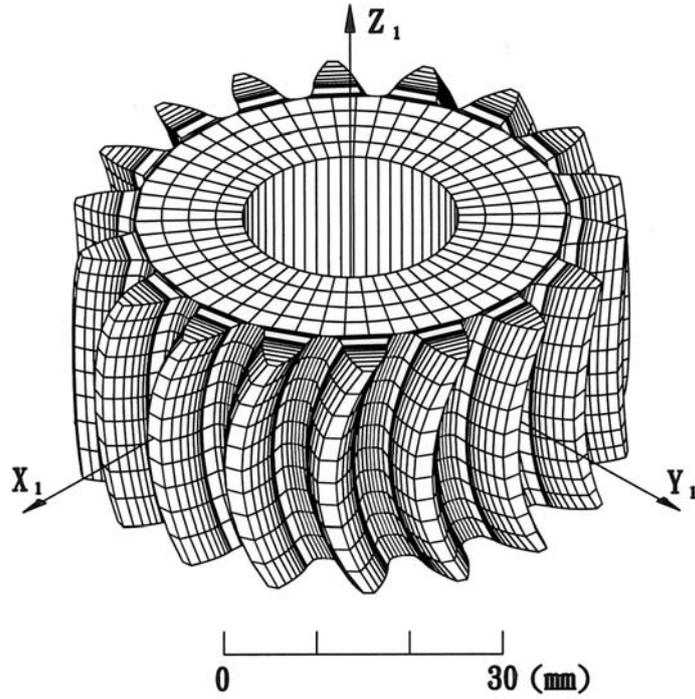


圖 1.7 曲線齒圓柱型齒輪之電腦繪圖

### 1.5 曲線齒圓柱型齒輪之齒形過切分析

以下將應用 Litvin[16]所提出之齒形過切分析方法，分析曲線齒圓柱型齒輪之過切線分佈情形。由微分幾何之定義可知，若曲面上之一點，其切向量不存在或切向量大小等於零，則此點稱為奇異點。一般齒輪之齒面為規則曲面，即齒面上不存在奇異點，若齒面上出現奇異點，即表示齒面發生過切現象。若以齒條刀之刀面 $\Sigma_F$ 創成曲線齒圓柱型齒輪之齒面 $\Sigma_1$ ，在齒面之創成過程中，齒條刀之刀面 $\Sigma_F$ 與被創成之齒面 $\Sigma_1$ 的瞬間接觸點，其位置向量在任意一固定座標系觀察時，兩者之位置向量應相等。將 $\Sigma_F$ 與 $\Sigma_1$ 瞬間接觸點表示於固定座標系 $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ，則下式必成立：

$$\mathbf{R}_f^{(F)} = \mathbf{R}_f^{(1)} \quad (1.12)$$

上式對時間微分可得：

$$\mathbf{V}_{tr}^{(F)} + \mathbf{V}_r^{(F)} = \mathbf{V}_{tr}^{(1)} + \mathbf{V}_r^{(1)} \quad (1.13)$$

經移項整理後可得：

$$\mathbf{V}_r^{(1)} = \mathbf{V}_{tr}^{(F)} + \mathbf{V}_r^{(F)} - \mathbf{V}_{tr}^{(1)} = \mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}^{(F1)} \quad (1.14)$$

方程式(1.13)及(1.14)中之下標  $tr$  表示接觸點隨著刀具或齒面之運動速度，下標  $r$  表示接觸點沿刀具或齒面之切向速度。從奇異點之定義可知，當  $\mathbf{V}_r^{(1)} = 0$  時，齒面上將產生奇異點，即齒面會發生過切現象，故齒面發生過切之必要條件可表示如下：

$$\mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}^{(F1)} = 0 \quad (1.15)$$

茲將嚙合方程式對時間之微分，如下所示：

$$\frac{d}{dt} f(l_F, \theta_F, \phi_1) = 0 \quad (1.16)$$

方程式(1.15)配合上式即可在齒條刀之刀面上定義出一限制曲線，而此限制曲線即為創成齒面產生齒形過切現象之過切線。當刀面上的點位於限制曲線上或超過限制曲線，則這些刀面上之點將在齒面創成時造成齒面之過切。

由(1.15)式及(1.16)式可分別改寫成下列兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial l_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} = -\mathbf{V}_c^{(F1)} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \quad (1.18)$$

方程式(1.17)中之  $\mathbf{R}_c^{(F)}$  表示刀面方程式表示於座標系  $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ ， $\mathbf{V}_c^{(F1)}$  則表示刀面  $\Sigma_F$  上的瞬間接觸點相對於齒面  $\Sigma_1$  上的瞬間接觸點之相對速度。方程式(1.17)及(1.18)可以下列矩陣方程式表示之：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial f}{\partial l_F} & \frac{\partial f}{\partial \theta_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dl_F}{dt} \\ \frac{d\theta_F}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{xc}^{(F1)} \\ -V_{yc}^{(F1)} \\ -V_{zc}^{(F1)} \\ -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

方程式(1.19)存在唯一解之充要條件為方程式(1.19)之擴增矩陣(Augmented Matrix)的秩(Rank)為二，亦即下列方程式必須同時滿足。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.20)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.22)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

上式中之方程式(1.23)即為嚙合方程式，綜合方程式(1.20)至(1.23)式，可求得齒面 $\Sigma_1$ 上奇異點之充分條件為包含三個未知數 $l_F$ ， $\theta_F$ 和 $\phi_1$ 之下列兩式所組成之非線性方程組：

$$F(l_F, \theta_F, \phi_1) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (1.24)$$

$$f(l_F, \theta_F, \phi_1) = 0 \quad (1.25)$$

表 1.2 曲線齒在不同設計參數下奇異點發生之位置

單位：mm

參數 截面	$\psi_n^{(F)}=14.5^\circ, r_F=30\text{mm}$		$\psi_n^{(F)}=20^\circ, r_F=30\text{mm}$	
	$l_{FL}$	$l_{FR}$	$l_{FL}$	$l_{FR}$
$Z_1$				
-15.00	0.933	1.073	-0.856	-0.833
-14.00	1.033	1.148	-0.708	-0.679
-13.00	1.119	1.214	-0.577	-0.546
-12.00	1.194	1.271	-0.462	-0.432
-11.00	1.258	1.320	-0.361	-0.334
-10.00	1.314	1.363	-0.272	-0.248
-9.00	1.362	1.400	-0.195	-0.175
-8.00	1.403	1.433	-0.128	-0.112
-7.00	1.438	1.460	-0.071	-0.058
-6.00	1.467	1.483	-0.023	-0.013
-5.00	1.491	1.502	0.016	0.023
-4.00	1.511	1.517	0.048	0.052
-3.00	1.525	1.529	0.073	0.075
-2.00	1.536	1.537	0.090	0.091
-1.00	1.542	1.542	0.100	0.101
0.00	1.544	1.544	0.104	0.104

聯立方程組(1.24)式及(1.25)式中具有三個未知數，其求解方法為將 $\theta_F$ 視為已知而給定一數值以求解一組對應之 $l_F$ 和 $\phi_1$ ，然後再將 $\theta_F$ 給以一增量，再求解另一組對應之 $l_F$ 和 $\phi_1$ ，如此即可解得刀具上創成齒面奇異點之限制曲線。

茲舉表 1.1 所列之曲線齒圓柱型齒輪設計參數為例，根據方程式(1.24)及(1.25)所組成之方程式以探討齒輪組之過切情形。表 1.2 與表 1.3 顯示曲線齒左右齒面在不同的設計參數下，當齒面出現奇異點時，齒輪 $Z_1$ 截面位置與齒面參數 $l_F$ 之關係。其中 $l_{FL}$ 表示曲線齒左齒面 $\Sigma_{1L}$ 之齒面參數， $l_{FR}$ 表示曲線齒右齒面 $\Sigma_{1R}$ 之齒面參數。由於曲線齒之齒面寬兩側是對稱的，所以在齒面寬之兩側其奇異點發生處之 $l_F$ 值亦是對稱的，故表 1.2 與表 1.3 只列出齒面寬其中一側之奇異點發生處。如表 1.2 第二欄所示，改變齒輪之壓力角為 14.5 度時，在此設計條件下，曲線齒左齒面 $\Sigma_{1L}$ 在齒面寬中央法向截面(即 $Z_1=0.0\text{mm}$ 處)所對應奇異點發生處之 $l_F$ 值為 1.544mm。若設計用以創成齒面之刀面工作區範圍等於

表 1.3 曲線齒在不同設計參數下奇異點發生之位置

單位：mm

參數 截面	$\psi_n^{(F)}=25^\circ, r_F=30\text{ mm}$		$\psi_n^{(F)}=20^\circ, r_F=30\text{ m}$	
	$l_{FL}$	$l_{FR}$	$l_{FL}$	$l_{FR}$
$Z_1$				
-15.0	-2.844	-3.294	0.104	0.104
-14.0	-2.672	-3.009	0.104	0.104
-13.0	-2.516	-2.770	0.104	0.104
-12.0	-2.378	-2.568	0.104	0.104
-11.0	-2.254	-2.397	0.104	0.104
-10.0	-2.144	-2.251	0.104	0.104
-9.0	-2.047	-2.126	0.104	0.104
-8.0	-1.963	-2.020	0.104	0.104
-7.0	-1.889	-1.930	0.104	0.104
-6.0	-1.827	-1.856	0.104	0.104
-5.0	-1.775	-1.794	0.104	0.104
-4.0	-1.734	-1.745	0.104	0.104
-3.0	-1.701	-1.708	0.104	0.104
-2.0	-1.679	-1.681	0.104	0.104
-1.0	-1.665	-1.666	0.104	0.104
0.0	-1.661	-1.661	0.104	0.104

$0.0\text{mm} \leq l_f \leq 5.93\text{mm}$ ，其中  $l_f=0.0\text{mm}$  為創成齒面上漸開線之起點，而  $l_f=5.93\text{mm}$  則為創成漸開線之終點(亦即齒頂)；若奇異點發生處之  $l_f$  值落在刀面工作區範圍內，即表示齒面發生過切現象。由表 1.2 之第二欄中可知，當  $Z_1=0.0\text{mm}$  時，齒輪在設計參數  $l_f=1.544\text{mm}$  處會發生過切。

由表 1.2 與表 1.3 之分析結果可發現，越接近齒面寬中央截面處，齒面越容易發生過切現象，亦即表示中央截面之齒面過切較嚴重。由於曲線齒之左右齒面不相同，其左右齒面發生奇異點之  $l_f$  值亦不相同，但越靠近齒面中央之截面處，則左右齒面發生奇異點之  $l_f$  值越相近，如表 1.2 及表 1.3 所示。

另外，由表 1.2 及表 1.3 可知，齒面在不同的壓力角設計條件下，其齒面過切情形亦不同，齒面壓力角越大時，曲線齒之齒面越不容易發生過切現象。表 1.3 最後兩欄表

示刀盤半徑等於 30 公尺之下的分析結果，當刀盤半徑很大時，曲線齒趨近於正齒輪。由表 1.3 最後兩欄所顯示之過切特性與正齒輪是一致的，即左右齒面呈現對稱形態而其左右齒面之過切狀態也相同，而且整個齒面在任何一截面的過切現象也相同，由此亦可驗證本研究所推導之曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式及分析模式之正確性。

### 1.6 曲線齒圓柱型齒輪之轉位分析

曲線齒圓柱型齒輪在較小齒數或具有較小壓力角時，齒面寬中央附近容易發生較嚴重的過切現象，因而減弱其齒根強度。為了避免小齒數或較小壓力角之曲線齒圓柱型齒輪發生過切，曲線齒可利用齒刀轉位切削的方式，以避免被創成之曲線齒的齒面過切發生，本節將探討過切與轉位係數之關係。

如圖 1.8 所示，在切削標準曲線齒時，齒條刀之基準節線即  $Y_a^{(F)}$  軸與齒輪節圓相切於 I 點，亦即  $Y_a^{(F)}$  軸與  $Y_c^{(F)}$  軸是重合的。若齒條刀之基準節線  $Y_a^{(F)}$  軸往遠離齒輪旋轉中心之方向平移  $xM_n$  量，則稱為正轉位量，其中  $x$  為轉位係數， $M_n$  為齒輪模數，而以這種方式所切削之齒輪即為正轉位齒輪。利用以上推導曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式之方法，亦可推導出包含轉位係數  $x$  之刀面方程式及其齒面方程式。

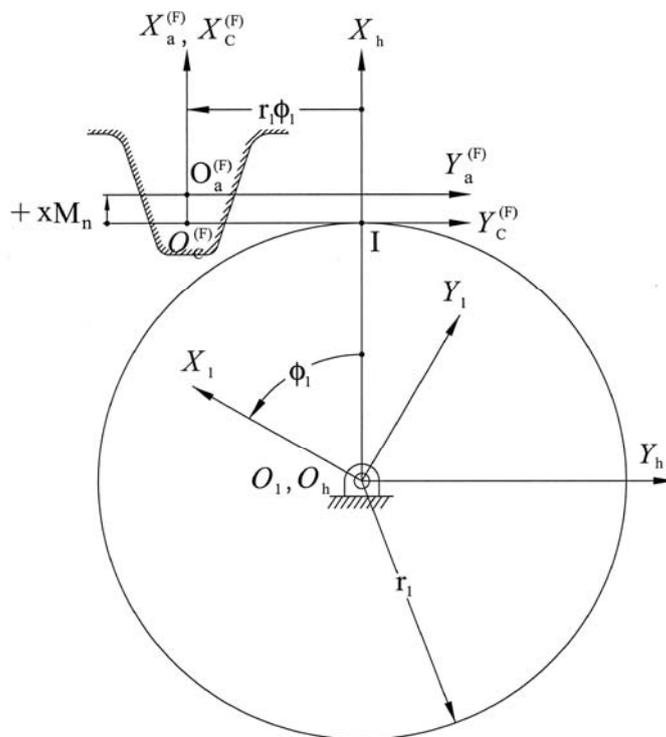


圖 1.8 齒輪轉位切削示意圖

齒面上發生奇異點之充分條件式(1.24)及(1.25)式若包含轉位係數  $x$ ，則(1.24)式及(1.25)式將含有四個未知數： $l_f$ ， $\theta_f$ ， $\phi_1$ 和  $x$ 。由齒面過切分析可知道，齒面寬中央截面之齒面是最容易發生過切的地方，若能避免齒面寬中央截面之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切現象。在求解過程若選定齒面參數 $\theta_f=0.0$ 度，即表示在探討齒面中央截面位置之過切情形；若設定 $l_f=0.0\text{mm}$ ，則表示探討奇異點恰發生於齒面上漸開線起點位置。經過以上參數之設定，根據方程式(1.24)及(1.25)即可解出齒數或壓力角與轉位係數  $x$  之關係。在探討曲線齒之齒面轉位特性時，以上之參數設定(即 $\theta_f=0.0$ 度和 $l_f=0.0\text{mm}$ )所造成的齒數與轉位係數之關係將與正齒輪之情形相似。

為了避免過切，在不同的齒面壓力角之下，齒數與轉位係數必須適當選取，經分析結果其關係如圖 1.9 所示，其縱軸表示轉位係數，橫軸表示齒數。圖中三條過切界線與橫軸之交點大約分別為 12.3 齒，18.5 齒及 34 齒，亦即表示曲線齒之齒面壓力角分別為 25 度，20 度及 14.5 度時，曲線齒之齒面其中央截面不發生過切的最小齒數分別為 13 齒，19 齒及 34 齒。為了避免曲線齒之齒面產生過切，曲線齒之轉位係數的選擇，應在過切界線之右側範圍中適當地選取之。

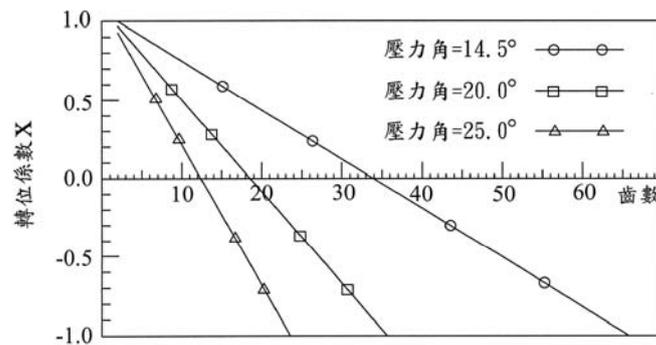


圖 1.9 齒面無過切現象下齒輪轉位係數與壓力角及齒數之關係

## 範例

有一曲線齒圓柱型齒輪其創成刀具之壓力角為 20 度，模數  $M_n=3.0$  mm，刀具齒根等於  $1M_n$ ，刀具齒頂等於  $1.25M_n$ ，刀具齒頂圓弧半徑等於  $0.25M_n$ ，曲線齒之齒數為 10 齒。依據本文所推導之曲線齒面數學模式和電腦圖學繪圖法，則所創成之曲線齒圓柱型齒輪，如圖 1.10 所示，由此圖可看出齒輪在齒根部份已有明顯的過切現象。根據圖 1.9 可知在齒數為 10 齒，壓力角為 20 度下，齒面若要避免過切則所需要選取之轉位係數為 0.5。

圖 1.11 即表示齒數為 10 齒，壓力角為 20 度，轉位係數取 0.5 時之轉位曲線齒圓柱型齒輪之電腦繪圖；由該圖顯示可知利用轉位切削方式確實可避免齒面之過切現象發生，但需注意的是正轉位將使得齒頂變尖，此現象在曲線齒之齒面寬兩側之齒頂更加嚴重。

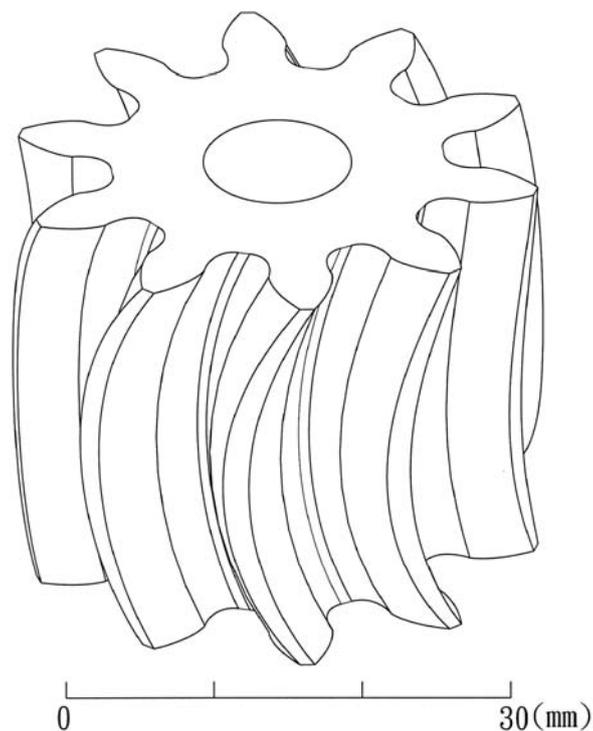


圖 1.10 發生過切之曲線齒圓柱型齒輪

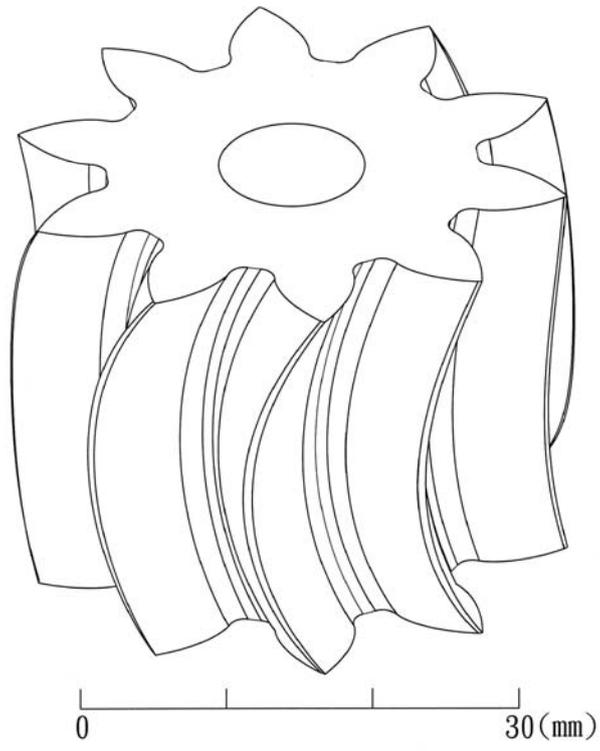


圖 1.11 具有正轉位之曲線齒圓柱型齒輪

## 第二章 曲線齒圓柱型齒輪組之齒面接觸分析

目前對於齒輪組的運動誤差，可以使用電腦數值分析方法或實際利用測試機加以檢測。理論數值分析方法在使用上彈性較大，只要齒面數學模式推導完成後，即可分析齒輪組在各種設計參數及組裝誤差下對於齒輪組運動誤差的影響。若再配合齒輪之齒面敏感度分析，則更可進一步分析各種齒輪設計參數及其刀具設定對齒輪運動誤差或齒輪齒面變化量的影響程度。

使用測試機量測齒輪之運動誤差，即可掌握實際運動誤差的大小，主要用於量測齒輪的精度等級與探討齒輪之振動及噪音，但是測試機台成本甚高，而且所量測的結果比較難應用於齒輪之齒面修整判別。兩齒面在傳遞運動或動力時，由於齒面承受負荷，將使得齒面在接觸點附近發生彈性變形，此彈性變形區域之形狀為橢圓形，故稱之為接觸橢圓(Contact Ellipse)。齒輪之接觸齒印(Contact Pattern)可利用齒印測試機量測，其原理是在齒面上塗抹一層紅丹，而紅丹之微粒(particle)直徑為  $6.32 \mu\text{m}$ [16]，然後再將兩齒輪置於測試機上實際嚙合運轉，兩齒面接觸後齒面彈性變形區域內的紅丹將被刮除，而形成齒面接觸彈性變形之齒印，稱為接觸齒印。利用數值方法亦可求得近似的接觸橢圓，其分析方法依照假設條件而分為剛體齒印分析及彈性變形齒印分析，前者則可利用兩齒面曲率的變化求得接觸齒印，後者考慮齒輪材料機械性質，齒面摩擦係數，溫度及負載等條件，可利用有限單元法(Finite Element Method)分析負載下的接觸齒印。剛體齒印分析常用之方法有齒面曲率分析法及齒面外形法(Contact Surface Topology Method)。曲率分析法由 Litvin[17]教授於 1989 年提出，係應用微分幾何的觀念，分析兩齒面的主軸方向(Principal Directions)與曲率(Curvatures)，若經實驗測得齒面彈性變形量，即可求得接觸橢圓長短軸之長度及接觸橢圓之分佈情形。在本研究中則採用齒面外形法[18]來求取齒輪之接觸橢圓，此法較為簡單而不需推導繁雜的齒輪曲面與曲率之關係式，可利用數值計算方式求得。

### 2.1 運動誤差分析

兩齒面  $\Sigma_1$  及  $\Sigma_2$  在傳遞運動的過程中，兩齒面上之瞬間接觸點表示在固定的參考座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  應具有相同的位置向量，而且兩齒面在接觸點的共同法向量亦為共線，因此，兩嚙合齒面在嚙合點處之關係式可表示如下：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} - \mathbf{R}_f^{(2)} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} \times \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (2.2)$$

其中  $\mathbf{R}_f^{(1)}$  及  $\mathbf{R}_f^{(2)}$  分別表示齒面  $\Sigma_1$  及  $\Sigma_2$  其接觸點的齒面位置向量； $\mathbf{n}_f^{(1)}$  和  $\mathbf{n}_f^{(2)}$  表示兩齒面在接觸點的齒面單位法向量。(2.1)式顯示兩齒面之接觸點表示在  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$  座標系具有相同的位置向量，而(2.2)式則表示兩齒面瞬間接觸點的單位法向量共線，以上兩式稱為兩嚙合齒面之嚙合條件式。在三維(Three-Dimensional)卡式(Cartesian)座標系中，兩嚙合齒面之單位向量只要確定其中兩個分量，即可完全描述該單位向量，因為  $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$ ，故(2.2)式只包含兩個獨立方程式，再配合(2.1)式可知，在三維空間中，齒面接觸嚙合之條件式係由五個獨立方程式所組成[17]：

$$x_f^{(1)} - x_f^{(2)} = 0 \quad (2.3)$$

$$y_f^{(1)} - y_f^{(2)} = 0 \quad (2.4)$$

$$z_f^{(1)} - z_f^{(2)} = 0 \quad (2.5)$$

$$n_{fy}^{(1)} n_{fz}^{(2)} - n_{fz}^{(1)} n_{fy}^{(2)} = 0 \quad (2.6)$$

$$n_{fz}^{(1)} n_{fx}^{(2)} - n_{fx}^{(1)} n_{fz}^{(2)} = 0 \quad (2.7)$$

為模擬齒輪對具有裝配誤差之嚙合狀況，各齒輪之組裝關係如圖 2.1 所示，其中座標系  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  固聯於大齒輪，而  $Z_2$  軸為大齒輪之旋轉軸，座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  則固聯於小齒輪，而  $Z_1$  軸為其旋轉軸。另外，座標系  $S_v(X_v, Y_v, Z_v)$  和  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  則為輔助座標系， $Z_h$  軸與  $Z_f$  軸之間有一夾角  $\Delta\gamma_h$ ，係用以模擬齒輪組在水平軸方向之組裝偏差，而  $\Delta\gamma_v$  為  $X_h$  軸與  $X_v$  軸之夾角，則用以模擬齒輪組在垂直軸方向之偏差； $C'$  表示齒輪裝配之中心距， $\Delta C$  則表示裝配時之中心距誤差； $\phi_2$  及  $\phi_1$  則分別表示大小齒輪之旋轉角。

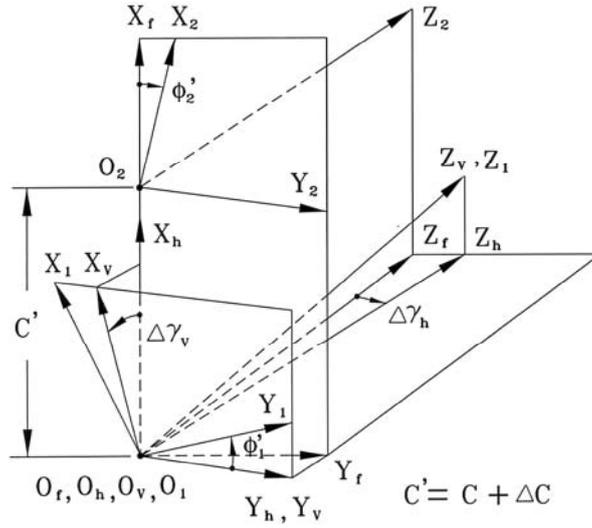


圖 2.1 齒輪對嚙合模擬其座標系間之關係

為了求得兩齒面之嚙合條件式，必須先將大、小齒輪之齒面數學模式及齒面單位法向量，分別由座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  及  $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$  轉換至相同之固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ 。此座標轉換可利用下列齊次座標轉換(Homogeneous Coordinate Transformation)矩陣方程式求得：

$$\mathbf{R}_f^{(1)} = [M_{fh}] [M_{hv}] [M_{v1}] \mathbf{R}_1 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{R}_f^{(2)} = [M_{f2}] \mathbf{R}_2 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)} = [L_{fh}] [L_{hv}] [L_{v1}] \mathbf{n}_1 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)} = [L_{f2}] \mathbf{n}_2 \quad (2.11)$$

其中

$$[M_{v1}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1' & \sin \phi_1' & 0 & 0 \\ -\sin \phi_1' & \cos \phi_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[M_{hv}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & \sin \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[M_{fh}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[L_{v1}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_1 & \sin \phi'_1 & 0 \\ -\sin \phi'_1 & \cos \phi'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[L_{hv}] = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_v & 0 & \sin \Delta\gamma_v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Delta\gamma_v & 0 & \cos \Delta\gamma_v \end{bmatrix},$$

$$[L_{fh}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_h & \sin \Delta\gamma_h \\ 0 & -\sin \Delta\gamma_h & \cos \Delta\gamma_h \end{bmatrix},$$

$$[M_{f2}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_2 & -\sin \phi'_2 & 0 & C' \\ \sin \phi'_2 & \cos \phi'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta Z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

及

$$[L_{f2}] = \begin{bmatrix} \cos \phi'_2 & -\sin \phi'_2 & 0 \\ \sin \phi'_2 & \cos \phi'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

將曲線齒圓柱型大齒輪之齒面 $\Sigma_{2R}$ 及小齒輪之齒面 $\Sigma_{1L}$ 代入方程式(2.8)、(2.9)、(2.10)及(2.11)，並且利用嚙合條件式(2.1)和(2.2)式，便可獲得五個獨立非線性方程式，包含 $l_f$ 、 $\theta_f$ 、 $l_p$ 、 $\theta_p$ 、 $\phi'_1$ 及 $\phi'_2$ 等6個未知數，其中 $l_f$ 和 $\theta_f$ 為小齒輪之齒面參數座標； $l_p$ 和 $\theta_p$ 為大

齒輪之齒面參數座標； $\phi'_2$ 及 $\phi'_1$ 則為大小齒輪在嚙合時之旋轉角。若設定小齒輪之旋轉角 $\phi'_1$ 為已知，則由五個獨立非線性方程式組成的齒面接觸嚙合方程式可解五個知數。

利用齒輪接觸分析技術並配合電腦數值分析方法，即可模擬兩齒面在具有裝配誤差之下的運動關係，可分析出兩齒面嚙合之瞬間接觸點及其大、小齒輪嚙合時旋轉角 $\phi'_1$ 及 $\phi'_2$ 之關係。兩齒面在嚙合時，其大齒輪輸出之旋轉角 $\phi'_2$ 為小齒輪輸入旋轉角 $\phi'_1$ 之函數，可表示為 $\phi'_2(\phi'_1)$ 。大齒輪實際輸出旋轉角與理論輸出旋轉角之差，即稱為齒輪組之運動誤差[16,17]，其計算式如下所示：

$$\Delta\phi'_2(\phi'_1) = \phi'_2(\phi'_1) - \frac{N_1}{N_2}\phi'_1 \quad (2.12)$$

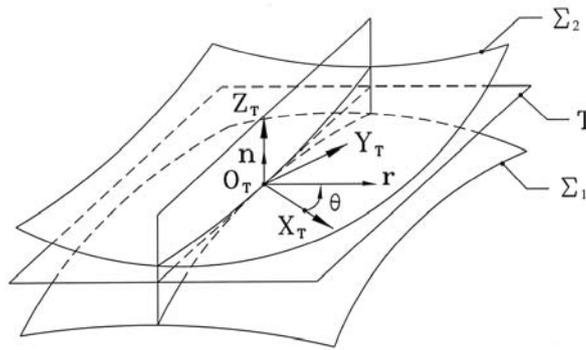
其中 $N_2$ 及 $N_1$ 分別為大、小齒輪之齒數， $\phi'_2(\phi'_1)$ 是由數值方法所求得之大齒輪實際輸出旋轉角度。

## 2.2 齒面外形法

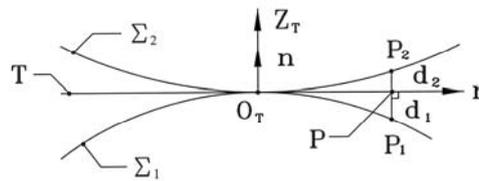
齒面外形法其原理如圖 2.2(a)所示，其中 $O_T$ 為兩齒面 $\Sigma_1$ 及 $\Sigma_2$ 之瞬間接觸點， $\mathbf{n}$ 為兩齒面在接觸點 $O_T$ 之共同法向量， $T$ 為兩齒面之共同切平面(Tangent Plane)；座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 稱為接觸點座標系，其座標原點與嚙合齒面之瞬間接觸點 $O_T$ 重合， $Z_T$ 軸選定為與兩齒面接觸點共同法向量 $\mathbf{n}$ 同方向，並且座標系 $S_T(X_T, Y_T, Z_T)$ 為正交座標系，故 $X_T - Y_T$ 平面必為兩齒面之切平面。齒面外形法主要是模擬兩齒面接觸齒印測試過程時，位於兩齒面接觸點附近齒面因接觸受力而造成彈性變形區，此彈性變形區內的紅丹微粒將因兩齒面在接觸點附近之齒面彈性變形，使得其齒面間距變小而被刮除，故使用數值模擬計算接觸點附近齒面間距時，可假設兩齒面在瞬間接觸時，兩齒面距離在紅丹微粒之直徑 $6.32 \mu\text{m}$ 以內者將被刮除而形成接觸橢圓。

圖 2.2(b)所示之 $d_1$ 和 $d_2$ 為兩嚙合齒面與其共同切平面上某一選定計算測試點的距離，而兩齒面在 $Z_T$ 軸之座標值的差，即是兩齒面的距離。為了求得兩齒面上所有間距為 $6.32 \mu\text{m}$ 之點集合，可使用自動搜尋的方法，亦即在接觸點座標系上再定義一個 $r-\theta$ 極座標系，搜尋的過程中，可先設定一 $\theta$ 值，而 $r$ 值則由零逐漸遞增，直至檢測到兩齒面的間距為紅丹直徑大小後才停止，並記錄此點之位置(即 $r$ 及 $\theta$ 值)，然後再改變一個 $\theta$ 值，繼續相同的搜尋步驟，直到搜尋之 $\theta$ 值已包括整個 $2\pi$ 範圍(即整個共同切平面)後，

即可連接所有被記錄兩齒面間距等於紅丹直徑大小的點，即形成接觸橢圓。



(a)



(b)

圖 2.2 嚙合齒面與切平面示意圖

表 2.1 曲線齒圓柱型齒輪主要設計參數

設計參數	小齒輪	大齒輪
齒數	18	36
模數 M	3 mm	3 mm
壓力角	20 度	20 度
齒面寬 W	30 mm	30 mm
刀盤半徑 $R_i$	30 mm	30 mm

### 2.3 接觸分析範例

以下將分析嚙合齒輪組在不同的裝配條件時，齒輪組之運動誤差，齒輪組主要設計參數如表 2.1 所示；由以上資料可計算出小齒輪工作齒面範圍為  $l_F=0.0\sim 5.93$  mm， $\theta_F=-30$

度~30 度，其中  $l_F=0.0$  mm 對應工作區之最低點， $l_F=5.93$  mm 對應工作區之最高點，亦即齒頂；大齒輪工作齒面範圍為  $l_p=0.0\sim 6.186$  mm， $\theta_p=-30$  度~30 度，其中  $l_p=0.0$  mm 對應工作區之最低點， $l_p=6.186$  mm 對應大齒輪之齒頂。

**例一：** 曲線齒圓柱型齒輪組之主要設計參數所示。本例將探討齒輪組在理想裝配條件下，亦即  $\Delta\gamma_h=0.0$  度， $\Delta\gamma_v=0.0$  度， $\Delta C=0.0$  mm 時，欲探討其接觸狀況。依據(2.3)至(2.12)式及本計畫所發展之電腦輔助齒面接觸分析程式，即可分析齒輪組的接觸情形，如表 2.2 所示，本文中之表格內，參數  $l_F$  及  $l_p$  之單位為 mm，參數  $\theta_F$ 、 $\theta_p$ 、 $\phi'_1$  及  $\phi'_2$  之單位為度，而運動誤差 KE 之單位則為弧度-秒(arc-sec.)。由表 2.2 之分析結果顯示，曲線齒圓柱型齒輪組之接觸點分佈於齒面寬中央截面( $\theta_F=\theta_p=0$  度)，而齒輪組之運動誤差為零。由於曲線齒圓柱型齒輪之齒面寬中央截面為標準漸開線齒形，故在理想的裝配條件之下，齒輪組不會有運動誤差發生。

表 2.2 理想裝配條件之下齒輪組的接觸情形

$\phi'_1$	$\phi'_2$	$\theta_F$	$\theta_p$	$l_F$	$l_p$	KE
-10.00	-5.00	0.000	0.000	0.774	5.610	0.000
-8.00	-4.00	0.000	0.000	1.097	5.287	0.000
-6.00	-3.00	0.000	0.000	1.419	4.965	0.000
-4.00	-2.00	0.000	0.000	1.741	4.643	0.000
-2.00	-1.00	0.000	0.000	2.064	4.320	0.000
0.00	0.00	0.000	0.000	2.386	3.998	0.000
2.00	1.00	0.000	0.000	2.709	3.676	0.000
4.00	2.00	0.000	0.000	3.031	3.353	0.000
6.00	3.00	0.000	0.000	3.353	3.031	0.000
8.00	4.00	0.000	0.000	3.676	2.709	0.000
10.00	5.00	0.000	0.000	3.998	2.386	0.000

所有表格中， $l_F$  及  $l_p$  之單位為 mm。 $\theta_F$ 、 $\theta_p$ 、 $\phi'_1$  及  $\phi'_2$  之單位為度，而運動誤差 KE 之單位則為弧度-秒(arc-sec.)。

在齒面寬不變之下，改變表 2.1 之中的刀盤半徑，亦即刀盤半徑分別為 30 mm，50 mm 及 100 mm 時，且曲線齒在無裝配偏差之條件下，探討兩齒面之接觸齒印。利用上節所述之齒印分析方式，可求得接觸齒印並繪於小齒輪之齒面上，如圖 2.3 所示。圖中

所繪製之接觸齒印是從小齒輪轉角-6 度至 18 度，每 2 度繪一接觸齒印之結果。曲線齒圓柱型齒輪在理想的裝配條件下，接觸橢圓之中心點位於齒面寬中央截面，而且接觸橢圓之長軸隨著切削齒輪之刀盤半徑增加而有明顯的增加，短軸則變化較少。圖 2.4 顯示接觸橢圓長短軸之比值  $a/b$  與刀盤半徑  $R_f$  之關係，由圖 2.4 可發現長短軸之比值  $a/b$  與刀盤半徑  $R_f$  成正比。

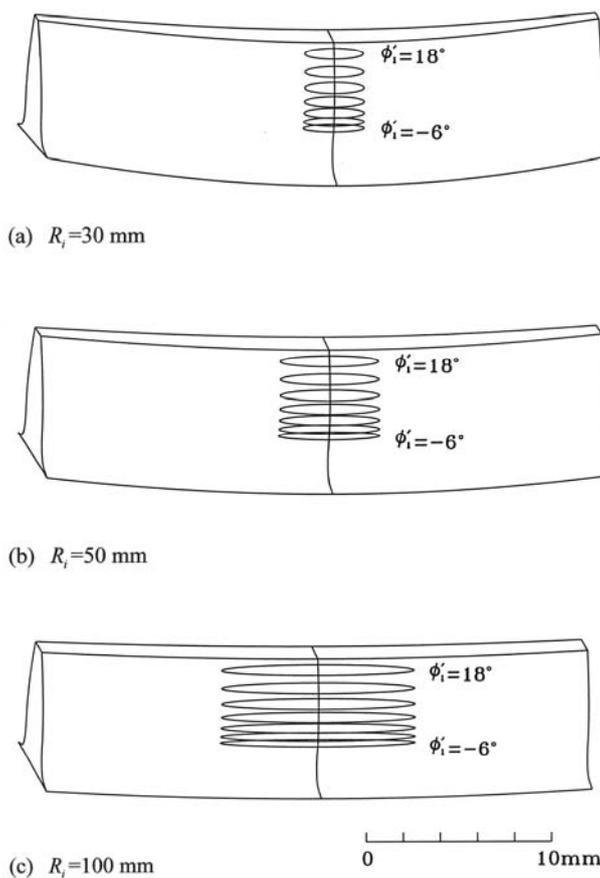


圖 2.3 刀盤半徑對曲線齒接觸橢圓之影響

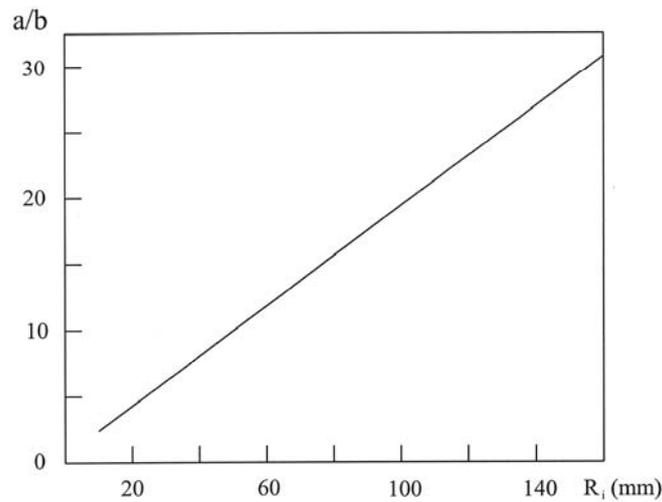


圖 2.4 齒印長短軸比值與刀盤半徑之關係

表 2.3 中心距誤差  $\Delta C = 0.5\text{mm}$  時齒輪組的接觸情形

$\phi'_1$	$\phi'_2$	$\theta_F$	$\theta_p$	$l_F$	$l_p$	KE
-10.00	-5.00	0.000	0.000	0.927	5.978	0.000
-8.00	-4.00	0.000	0.000	1.249	5.655	0.000
-6.00	-3.00	0.000	0.000	1.571	5.333	0.000
-4.00	-2.00	0.000	0.000	1.894	5.011	0.000
-2.00	-1.00	0.000	0.000	2.216	4.688	0.000
0.00	0.00	0.000	0.000	2.538	4.366	0.000
2.00	1.00	0.000	0.000	2.861	4.044	0.000
4.00	2.00	0.000	0.000	3.183	3.721	0.000
6.00	3.00	0.000	0.000	3.505	3.399	0.000
8.00	4.00	0.000	0.000	3.828	3.077	0.000
10.00	5.00	0.000	0.000	4.150	2.754	0.000

例二：曲線齒圓柱型齒輪組之主要設計參數與例一相同。本例將探討齒輪組具有中心距裝配誤差  $\Delta C = 0.5\text{mm}$  之條件下的接觸情形，分析結果如表 2.3 所示。由分析結果顯示，接觸點依然落在齒面寬之中央截面，與例一相比較，接觸點只在齒面參數  $l_F$  及  $l_p$  之上平移，而且齒輪組沒有運動誤差產生，此特性與漸開線正齒輪在具有中心距裝配誤差之下無運動誤差的特性相同。

例三：曲線齒圓柱型齒輪組之主要設計參數與例一相同。本例將分別探討齒輪組在具有水平軸裝配偏差  $\Delta\gamma_h = 0.1$  度及垂直軸裝配偏差  $\Delta\gamma_v = 0.1$  度的接觸情形，其分析結果如表 2.4 及表 2.5 所示。曲線齒圓柱型齒輪在具有軸裝配偏差的條件下，其接觸點將偏離齒面寬中央截面，但是在此範例之裝配條件下，若觀察接觸分析結果之參數  $\theta_F$  及  $\theta_p$  得知，其接觸點位置偏離齒面寬中央截面甚少。由於此齒輪組為點接觸，對於軸偏差所造成的運動誤差並不敏感，觀察表 2.4 及表 2.5 之運動誤差可知，曲線齒圓柱型齒輪對於水平軸裝配偏差所造成的運動誤差大於垂直軸裝配偏差所造成的運動誤差。

表 2.4 水平軸偏差  $\Delta\gamma_h = 0.1^\circ$  時齒輪組的接觸情形

$\phi'_1$	$\phi'_2$	$\theta_F$	$\theta_p$	$l_F$	$l_p$	KE
-10.00	-4.999	-0.836	-0.736	0.773	5.611	0.403
-8.00	-3.999	-0.816	-0.716	1.096	5.288	0.318
-6.00	-2.999	-0.796	-0.696	1.418	4.966	0.235
-4.00	-1.999	-0.776	-0.676	1.741	4.644	0.154
-2.00	-0.999	-0.756	-0.656	2.063	4.321	0.076
0.00	0.000	-0.736	-0.636	2.385	3.999	0.000
2.00	0.999	-0.716	-0.616	2.708	3.676	-0.074
4.00	1.999	-0.696	-0.596	3.030	3.354	-0.146
6.00	2.999	-0.676	-0.576	3.353	3.031	-0.216
8.00	3.999	-0.656	-0.556	3.675	2.709	-0.283
10.00	4.999	-0.636	-0.536	3.997	2.387	-0.349

當小齒輪在具有水平軸裝配偏差為正 0.1 度及負 0.1 度時，齒輪組之接觸橢圓如圖 2.5 所示。齒印分析結果顯示當小齒輪水平軸具有正 0.1 度之偏差時，接觸橢圓將偏向齒面右側。相反的，小齒輪水平軸具有負 0.1 度之偏差時，接觸橢圓將偏向齒面左側。當小齒輪具有垂直軸裝配偏差為正 0.1 度及負 0.1 度時，齒輪組之接觸橢圓如圖 2.6 所示。小齒輪在具有垂直軸偏差正 0.1 度時，接觸橢圓將偏向右側，由於曲線齒左右兩側是對稱的，故若小齒輪具有一負 0.1 度之垂直軸偏差，則接觸橢圓將偏向圖 2.6 齒面之左側。

表 2.5 垂直軸偏差  $\Delta\gamma_v = 0.1^\circ$  時齒輪組的接觸情形

$\phi'_1$	$\phi'_2$	$\theta_F$	$\theta_p$	$l_F$	$l_p$	KE
-10.00	-5.000	-0.268	-0.304	0.774	5.610	-0.060
-8.00	-4.000	-0.275	-0.312	1.097	5.288	-0.049
-6.00	-3.000	-0.282	-0.319	1.419	4.965	-0.037
-4.00	-2.000	-0.290	-0.326	1.741	4.643	-0.025
-2.00	-1.000	-0.297	-0.333	2.064	4.321	-0.012
0.00	0.000	-0.304	-0.341	2.386	3.998	0.000
2.00	1.000	-0.312	-0.348	2.709	3.676	0.013
4.00	2.000	-0.319	-0.355	3.031	3.354	0.026
6.00	3.000	-0.326	-0.363	3.353	3.031	0.039
8.00	4.000	-0.333	-0.370	3.676	2.709	0.053
10.00	5.000	-0.341	-0.377	3.998	2.386	0.068

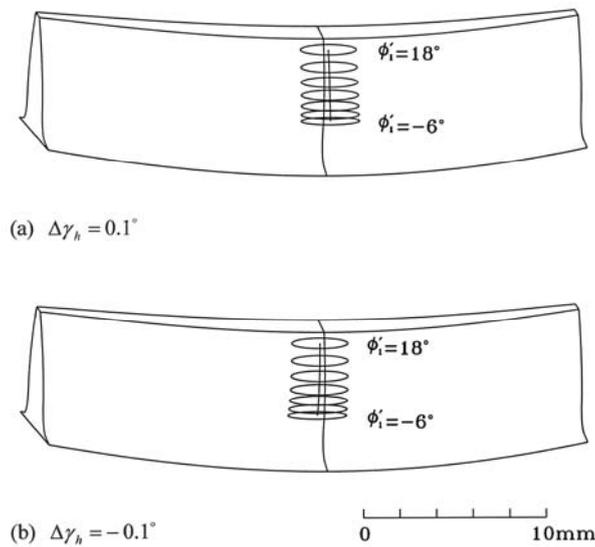


圖 2.5 水平軸偏差對接觸橢圓之影響

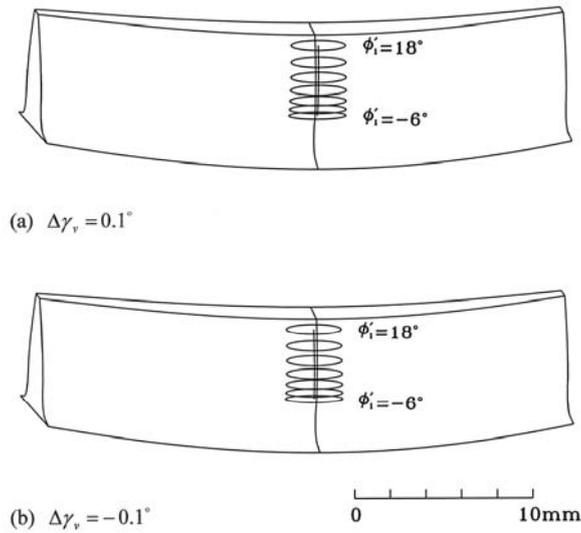


圖 2.6 垂直軸偏差對接觸橢圓之影響

## 2.4 曲線齒圓柱型齒輪之接觸比

本計畫所分析之曲線齒圓柱型齒輪組在配對嚙合時，其大小齒輪嚙合齒面之曲率不相同，故齒輪組之接觸型式為點接觸，由前一節之接觸分析可知，齒輪組在沒有裝配誤差的情形下，其接觸點的路徑分佈在齒面寬中央截面，亦即曲線齒在理想裝配之下可視為兩個極薄之正齒輪相互嚙合，其接觸比之大小應與正齒輪之接觸比相近。對於接觸型式為點接觸之曲線齒，其理論上的接觸比可定義為『接觸起點與接觸終點相對於齒輪中心所包含的作用角除以齒輪兩個齒相對應點間之夾角』，亦即理論接觸比可以下式計算求得。

$$\frac{\phi_{1E} - \phi_{1S}}{360^\circ} N_1 \quad (2.13)$$

上式中  $\phi_{1S}$  表示小齒輪接觸起點所對應之小齒輪轉角， $\phi_{1E}$  表示小齒輪接觸終點所對應之小齒輪轉角。 $\phi_{1E} - \phi_{1S}$  即為作用角， $N_1$  為小齒輪之齒數。本計畫所建立之齒面接觸嚙合條件式，是由五條獨立非線性方程式所組成，其中包含六個未知數，故只要給定其中一未知數(視為已知)，其餘未知數即可解出；利用此齒面接觸嚙合條件式，設定小齒輪接觸起點，即大齒輪之齒頂所對應之  $l_p$  值，即可解出齒輪接觸起點所對應之小齒輪轉角  $\phi_{1S}$ ；

同理，設定小齒輪的接觸終點，即小齒輪之齒頂所對應之 $l_F$ 值，配合齒面接觸嚙合條件式，即可求得齒輪接觸終點所對應之小齒輪轉角 $\phi_{1E}$ 。

曲線齒圓柱型齒輪之主要設計參數仍如表 2.1 所示，本例在於計算齒輪組之接觸比。依據方程式(2.13)所求得之曲線齒圓柱型齒輪組理論接觸比為 1.61；而齒輪組在不同設計參數及齒形壓力角下，其接觸比如表 2.6 所示，其中 a, b 及 M 分別表示齒輪之齒頂，齒根及模數， $N_1$  及  $N_2$  分別表示小齒輪及大齒輪之齒數。由表 2.6 之分析結果顯示，齒數增加或壓力角減小或全齒深增加，將使得齒輪組之接觸比增加。

表 2.6 曲線齒在不同設計參數時之接觸比

設計參數 \ 壓力角	壓力角		
	14.5 度	20 度	25 度
$N_1=18$ $N_2=36$ $a=1M$ $b=1.25M$	*	1.611	1.445
$N_1=36$ $N_2=36$ $a=1M$ $b=1.25M$	2.014	1.692	1.498
$N_1=54$ $N_2=36$ $a=1M$ $b=1.25M$	2.083	1.730	1.521
$N_1=18$ $N_2=36$ $a=0.8M$ $b=1M$	*	1.328	1.181

(\* 表示小齒輪已發生過切)

### 第三章 曲線齒圓柱型齒輪組之曲率分析

#### 3.1 切削刀具之主軸曲率及主軸方向

由於本計畫所發展的曲線齒輪之接觸情形為點接觸，曲線齒輪組在嚙合時，齒面由於受到外加負載，在其接觸點附近會產生齒面變形，齒面接觸變形後兩齒面接觸的區域稱為接觸齒印，其將形成一橢圓形之接觸區域，故稱之為接觸橢圓。根據 Litvin 所提出之觀念，可針對兩嚙合齒面進行其曲率分析並求出接觸點上兩曲面之主軸曲率以及主軸方向 (Principal Curvatures and Directions)，並進一步利用嚙合齒面之間的曲率關係，可求得嚙合齒面在接觸點附近，因接觸負荷而造成齒面彈性變形時其接觸橢圓的大小與方向。

以  $\Sigma_F$  及  $\Sigma_P$  分別代表用以創成小齒輪  $\Sigma_1$  及大齒輪  $\Sigma_2$  之刀具，刀具之主軸曲率以及主軸方向可由 Rodrigues 方程式求得：

$$\kappa_{I,II} \mathbf{V}_r = -\dot{\mathbf{n}}_r, \quad (3.1)$$

其中  $\kappa_{I,II}$  為刀具之主軸曲率， $\mathbf{V}_r$  為接觸點沿齒面移動之相對速度，而  $\dot{\mathbf{n}}_r$  則為上述運動中接觸點上之單位法向量尖端之速度。以下的式子中  $i=F, P$  和  $j=1, 2$ ，分別用以表示假想齒條刀  $\Sigma_F$  和  $\Sigma_P$  以及其所對應創成之小齒輪  $\Sigma_1$  和大齒輪  $\Sigma_2$  間之曲率關係。茲以刀具  $\Sigma_i$  創成齒輪  $\Sigma_j$  為例，利用刀具  $\Sigma_i$  之參數對時間微分為零之條件，可由 Rodrigues 方程式求得切削刀具之第一和第二主軸曲率  $\kappa_I^{(i)}$  和  $\kappa_{II}^{(i)}$  及其對應之主軸方向  $\mathbf{i}_I^{(i)}$  和  $\mathbf{i}_{II}^{(i)}$ 。

假想齒條刀  $\Sigma_F$  將創成曲線齒圓柱型齒輪之齒面  $\Sigma_{1L}$ ，其過程如第一章所述。假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面數學模式及其單位法向量  $\mathbf{n}_c^{(F)}$  表示於座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  如下：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_F \\ (l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \cos \theta_F + r_F (1 - \cos \theta_F) \\ -(l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \sin \theta_F + r_F \sin \theta_F \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} \sin \psi_n^{(F)} \\ -\cos \psi_n^{(F)} \cos \theta_F \\ \cos \psi_n^{(F)} \sin \theta_F \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

接觸點沿齒面移動之相對速度  $\mathbf{V}_r$  可以(3.4)式表示，而接觸點上之單位法向量尖端之速度  $\dot{\mathbf{n}}_r$  則以(3.5)式表示。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_r &= \frac{d\mathbf{R}_c^{(F)}}{dl_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{d\mathbf{R}_c^{(F)}}{d\theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi_n^{(F)} \\ \sin\psi_n^{(F)} \cos\theta_F \\ \sin\psi_n^{(F)} \sin\theta_F \end{bmatrix} \frac{dl_F}{dt} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_F \sin\psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan\psi_n^{(F)}) \sin\theta_F + r_F \sin\theta_F \\ -(l_F \sin\psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan\psi_n^{(F)}) \cos\theta_F + r_F \cos\theta_F \end{bmatrix} \frac{d\theta_F}{dt}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_r &= \frac{d\mathbf{n}_c^{(F)}}{dl_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{d\mathbf{n}_c^{(F)}}{d\theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\psi_n^{(F)} \sin\theta_F \\ \cos\psi_n^{(F)} \cos\theta_F \end{bmatrix} \frac{d\theta_F}{dt}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 Rodrigues 方程式(3.1)可知單位法向量尖端之速度  $\dot{\mathbf{n}}_r$  與相對速度  $\mathbf{V}_r$  同方向，且其分量之比值即為主曲率，故其分量之間有下列關係存在：

$$\kappa_{I,II}^{(F)} = -\frac{\dot{n}_{xr}}{V_{xr}} = -\frac{\dot{n}_{yr}}{V_{yr}} = -\frac{\dot{n}_{zr}}{V_{zr}}. \quad (3.6)$$

將相對速度  $\mathbf{V}_r$  與單位法向量尖端之速度  $\dot{\mathbf{n}}_r$  之分量代入(3.6)式，可得(3.7)式。

$$\begin{aligned} \frac{0}{\cos\psi_n^{(F)} dl_F / dt} &= \frac{\cos\psi_n^{(F)} \sin\theta_F d\theta_F / dt}{\sin\psi_n^{(F)} \cos\theta_F dl_F / dt + (r_F \sin\theta_F - (l_F \sin\psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan\psi_n^{(F)}) \sin\theta_F) d\theta_F / dt} \\ &= \frac{\cos\psi_n^{(F)} \cos\theta_F d\theta_F / dt}{-\sin\psi_n^{(F)} \sin\theta_F dl_F / dt + (r_F \cos\theta_F - (l_F \sin\psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan\psi_n^{(F)}) \cos\theta_F) d\theta_F / dt} \end{aligned} \quad (3.7)$$

觀察(3.7)式，為了使等號成立， $\frac{dl_F}{dt} \frac{d\theta_F}{dt}$  必須為零。當  $\frac{dl_F}{dt} = 0$ ，可得一主曲率及主方向，

而當  $\frac{d\theta_F}{dt} = 0$ ，可得另一主曲率及主方向，分別表示如下：

$$k_I^{(F)} = \frac{-\cos\psi_n^{(F)}}{r_F - (l_F \sin\psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan\psi_n^{(F)})}, \quad \mathbf{i}_I^{(F)} = \frac{\mathbf{V}_r}{|\mathbf{V}_r|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_F \\ \cos\theta_F \end{bmatrix}, \quad \text{if } \frac{dl_F}{dt} = 0, \quad (3.8)$$

$$k_{II}^{(F)} = 0, \quad \mathbf{i}_{II}^{(F)} = \begin{bmatrix} \cos\psi_n^{(F)} \\ \sin\psi_n^{(F)} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d\theta_F}{dt} = 0, \quad \text{if } \frac{d\theta_F}{dt} = 0. \quad (3.9)$$

同樣地，利用相同的步驟，即可求得假想齒條刀 $\Sigma_P$ 之主軸曲率與主方向，表示如下：

$$k_I^{(P)} = \frac{\cos\psi_n^{(P)}}{r_P + (l_P \sin\psi_n^{(P)} + b_P - a_P \tan\psi_n^{(P)})}, \quad \mathbf{i}_I^{(P)} = \frac{\mathbf{V}_r}{|\mathbf{V}_r|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_P \\ \cos\theta_P \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$k_{II}^{(P)} = 0, \quad \mathbf{i}_{II}^{(P)} = \begin{bmatrix} -\cos\psi_n^{(P)} \\ -\sin\psi_n^{(P)} \cos\theta_P \\ \sin\psi_n^{(P)} \sin\theta_P \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.2 被創成齒面之主軸曲率及主軸方向

在求得齒條刀 $\Sigma_i$ 之主軸曲率與主軸方向之後，即可經由下列關係式求出被創成齒面 $\Sigma_j$ 之主軸曲率與主軸方向：

$$\tan 2\sigma^{(ij)} = \frac{2F^{(j)}}{\kappa_I^{(i)} - \kappa_{II}^{(i)} + G^{(j)}}, \quad (3.12)$$

$$\kappa_I^{(j)} + \kappa_{II}^{(j)} = \kappa_I^{(i)} + \kappa_{II}^{(i)} + S^{(j)}, \quad (3.13)$$

$$\kappa_I^{(j)} - \kappa_{II}^{(j)} = \frac{\kappa_I^{(i)} - \kappa_{II}^{(i)} + G^{(j)}}{\cos 2\sigma^{(ij)}}, \quad (3.14)$$

$$F^{(j)} = \frac{a_{31}^{(j)} a_{32}^{(j)}}{b_3^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_I^{(i)}) a_{31}^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_{II}^{(i)}) a_{32}^{(j)}}, \quad (3.15)$$

$$G^{(j)} = \frac{(a_{31}^{(j)})^2 - (a_{32}^{(j)})^2}{b_3^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_I^{(i)})a_{31}^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_{II}^{(i)})a_{32}^{(j)}}, \quad (3.16)$$

$$S^{(j)} = \frac{(a_{31}^{(j)})^2 + (a_{32}^{(j)})^2}{b_3^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_I^{(i)})a_{31}^{(j)} + (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_{II}^{(i)})a_{32}^{(j)}}, \quad (3.17)$$

$$a_{31}^{(j)} = [\mathbf{n}_c^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(ij)} \mathbf{i}_I^{(i)}] - \kappa_I^{(i)} (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_I^{(i)}), \quad (3.18)$$

$$a_{32}^{(j)} = [\mathbf{n}_c^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(ij)} \mathbf{i}_{II}^{(i)}] - \kappa_{II}^{(i)} (\mathbf{V}^{(ij)} \cdot \mathbf{i}_{II}^{(i)}), \quad (3.19)$$

$$\text{以及 } b_3^{(j)} = [\mathbf{n}_c^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(j)} \mathbf{V}_{tr}^{(i)}] - [\mathbf{n}_c^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)} \mathbf{V}_{tr}^{(j)}]. \quad (3.20)$$

其中  $\kappa_I^{(j)}$  和  $\kappa_{II}^{(j)}$  以及  $\mathbf{i}_I^{(j)}$  和  $\mathbf{i}_{II}^{(j)}$  為被創成齒面  $\Sigma_j$  之兩個主軸曲率與主軸方向； $\sigma^{(ij)}$  角為刀具第一主軸方向  $\mathbf{i}_I^{(i)}$  和被創成齒面第一主軸方向  $\mathbf{i}_I^{(j)}$  間之夾角。由上述之方法，即可分別經由刀具  $\Sigma_F$  和  $\Sigma_P$  上之兩個主軸方向單位向量  $\mathbf{i}_I^{(F)}$ 、 $\mathbf{i}_{II}^{(F)}$  以及  $\mathbf{i}_I^{(P)}$ 、 $\mathbf{i}_{II}^{(P)}$ ，來求得小齒輪齒面  $\Sigma_1$  和大齒輪齒面  $\Sigma_2$  上之主軸方向單位向量  $\mathbf{i}_I^{(1)}$   $\mathbf{i}_{II}^{(1)}$  和  $\mathbf{i}_I^{(2)}$   $\mathbf{i}_{II}^{(2)}$ 。

齒條刀  $\Sigma_F$  創成齒面  $\Sigma_1$  的過程中，其中的運動關係式如式(3.21)-(3.26)所示，相同地，

齒條刀  $\Sigma_P$  創成齒面  $\Sigma_2$  的過程中，其運動關係式如式(3.27)-(3.32)所示。

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(F)} = 0, \quad (3.21)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{bmatrix}_c, \quad (3.22)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(F1)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(F)} - \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}_c, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{V}_{tr}^{(F)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_1 r_1 \\ 0 \end{bmatrix}_c, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{V}_{tr}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_1(y_c - r_1\phi_1) \\ -\omega_1(x_c + r_1) \\ 0 \end{bmatrix}_c, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{V}^{(F1)} = \mathbf{V}_{tr}^{(F)} - \mathbf{V}_{tr}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\omega_1(y_c - r_1\phi_1) \\ \omega_1 x_c \\ 0 \end{bmatrix}_c, \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(P)} = 0, \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}_c, \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c^{(P2)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(P)} - \boldsymbol{\omega}_c^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_2 \end{bmatrix}_c, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{V}_{tr}^{(P)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_2 r_2 \\ 0 \end{bmatrix}_c, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{V}_{tr}^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\omega_2(y_c - r_2\phi_2) \\ \omega_2(x_c - r_2) \\ 0 \end{bmatrix}_c, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{V}^{(P2)} = \mathbf{V}_{tr}^{(P)} - \mathbf{V}_{tr}^{(2)} = \begin{bmatrix} \omega_2(y_c - r_2\phi_2) \\ -\omega_2 x_c \\ 0 \end{bmatrix}_c. \quad (3.32)$$

假想齒條刀  $\Sigma_i$  之主軸曲率與主軸配合以上的運動關係式，代入式(3.12)-(3.20)之後，即可求出被創成齒面  $\Sigma_j$  之主軸曲率與主軸方向。將所求得之大小齒輪齒面主軸方向經由座標轉換分別表示於固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ，即可求得如圖 3.1 之關係圖。其中角度  $\sigma^{(F1)}$  和  $\sigma^{(P2)}$  分別為  $\mathbf{i}_1^{(1)}$  和  $\mathbf{i}_1^{(2)}$  以及  $\mathbf{i}_1^{(F)}$  和  $\mathbf{i}_1^{(P)}$  間之夾角。又由於齒面  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  之主軸曲率  $\kappa_1^{(1)}$  和  $\kappa_1^{(2)}$  以及  $\kappa_2^{(1)}$  和  $\kappa_2^{(2)}$  可由前述方程式分別求得，再利用下列方程式即可計算出齒面因接觸負荷而造成齒面彈性變形時，在其齒面接觸點切平面上之接觸橢圓的大小與方向

[16,17] :

$$a = \left| \frac{\delta}{A} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

$$b = \left| \frac{\delta}{B} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.34)$$

其中

$$A = \frac{1}{4} \left[ \kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2} \right], \quad (3.35)$$

$$B = \frac{1}{4} \left[ \kappa_{\Sigma}^{(1)} - \kappa_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1 g_2 \cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2} \right], \quad (3.36)$$

$$\kappa_{\Sigma}^{(1)} = \kappa_I^{(1)} + \kappa_{II}^{(1)}, \quad (3.37)$$

$$\kappa_{\Sigma}^{(2)} = \kappa_I^{(2)} + \kappa_{II}^{(2)}, \quad (3.38)$$

$$g_1 = \kappa_I^{(1)} - \kappa_{II}^{(2)}, \quad (3.39)$$

$$g_2 = \kappa_I^{(2)} - \kappa_{II}^{(1)}, \quad (3.40)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{g_2 \sin 2\sigma}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma}, \quad (3.41)$$

$$\sigma = \sigma^{(P2)} - \sigma^{(F1)}. \quad (3.42)$$

上式中， $\delta$  為齒面彈性變形時在齒面法向之接近量(Approach of Deformation)，在下列例題中，將以齒印測試齒面塗層所使用之紅丹顆粒之直徑 0.00632 mm 為  $\delta$  值。a 與 b 為接觸橢圓的長短軸長度， $\alpha$  則用來決定橢圓短軸之方向。接觸橢圓之長短軸方向以及與大小齒輪齒面之第一主軸方向之夾角關係，如圖 3.2 所示。

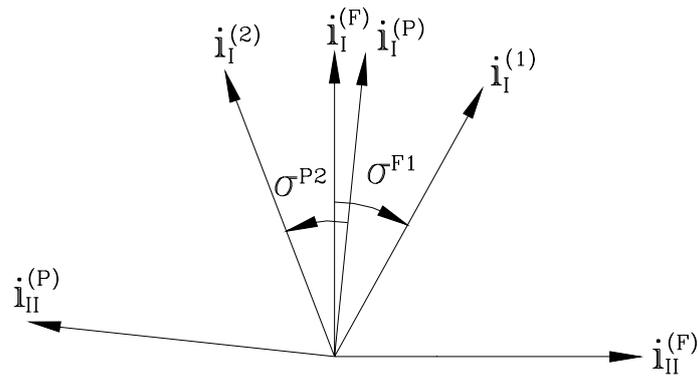


圖3.1 刀具主軸方向與齒面主軸方向之關係

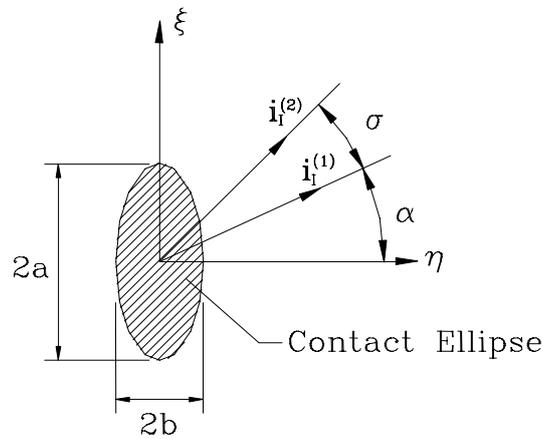


圖 3.2 接觸橢圓與主軸方向之關係

### 3.3 範例

曲線齒輪組的設計參數如表 2.1 所示，利用 3.1 及 3.2 節之計算流程可分別求得大小齒輪在齒面寬中央截面之主曲率與主方向，如表 3.1 與 3.2 所示。曲線齒輪在齒面寬中央截面，其中一主方向始終沿著 Z 軸，而另一主方向則隨不同的  $l_p$  或  $l_f$  而變化。由表 3.1 與表 3.2 可發現曲線齒輪沿著齒形方向之主曲率(即  $\kappa_{II}^{(i)}$ )，隨著不同的  $l_p$  或  $l_f$  變化較大，而且由主曲率之乘積可知大齒輪之齒面為雙曲面，小齒輪之齒面為拋物面。曲線齒輪組之接觸點在齒面寬中央截面時，接觸齒印之長短軸大小與其比值如表 3.3 所示，曲線齒輪組在嚙合的過程中，由於接觸點之主曲率不斷地變化，所以其接觸齒印之長短軸大小亦隨之而變，表 3.3 顯示當接觸點靠近小齒輪之齒根時長短軸之比值為最大值，而當接觸點靠近小齒輪之齒頂時，齒印長短軸之比值為最小值。

表 3.1 大齒輪在齒面寬中央截面之主曲率與主方向

$l_p$	$\kappa_I^{(2)}$	$i_I^{(2)}$	$\kappa_{II}^{(2)}$	$i_{II}^{(2)}$
1.097282	0.029700	1.0k	-0.078663	0.961262i+0.275637j
1.741975	0.029494	1.0k	-0.069043	0.951057i+0.309017j
2.386667	0.029292	1.0k	-0.061520	0.939693i+0.342020j
3.031360	0.029092	1.0k	-0.055475	0.927184i+0.374607j
3.676053	0.028894	1.0k	-0.050511	0.913545i+0.406737j
4.320746	0.028700	1.0k	-0.046363	0.898794i+0.438371j
4.965438	0.028508	1.0k	-0.042845	0.882948i+0.469472j

表 3.2 小齒輪在齒面寬中央截面之主曲率與主方向

$l_F$	$\kappa_I^{(1)}$	$i_I^{(1)}$	$\kappa_{II}^{(1)}$	$i_{II}^{(1)}$
1.419628	0.033263	1.0k	0.229172	0.970296i+0.241922j
2.064321	0.033525	1.0k	0.163004	0.951057i+0.309017j
2.709014	0.033791	1.0k	0.126485	0.927184i+0.374607j
3.353707	0.034061	1.0k	0.103334	0.898794i+0.438371j
3.998399	0.034335	1.0k	0.087347	0.866025i+0.500000j
4.643092	0.034614	1.0k	0.075643	0.829038i+0.559193j
5.287785	0.034898	1.0k	0.066706	0.788011i+0.615661j

表 3.3 接觸點在齒面寬中央截面時，接觸齒印之長短軸與其比值

$l_F$	$l_p$	a	b	a/b
1.419628	4.965438	1.630351	0.215564	7.563202
2.064321	4.320746	1.618535	0.245708	6.587237
2.709014	3.676053	1.606719	0.267234	6.012406
3.353707	3.031360	1.594902	0.282122	5.653239
3.998399	2.386667	1.583085	0.291391	5.432861
4.643092	1.741975	1.571267	0.295569	5.316066
5.287785	1.097282	1.559448	0.294875	5.288508

## 第四章 曲線齒圓柱型齒輪組之有限單元分析

### 4.1 前言

在本論文第二章中，係以剛體模型來分析曲線齒輪的接觸齒印分布情形，然而剛體模型分析，並沒有考量到負載、摩擦和材料性質等因素，而這些因素都與實際齒印的大小和分布情況有著密切的影響，為了模擬更接近實際的齒輪嚙合狀況，本章利用有限單元法(Finite Element Method)建立三齒接觸分析模型，探討齒輪組負載下的接觸情形，包括齒面接觸應力與齒根彎曲應力，以了解齒輪組在實際的負載下的接觸齒印。

有限單元法是一強而有效的計算方法，可以計算複雜的齒面變形與應力。眾多的學者利用有限單元法分析各種不同型式之齒輪，探討齒輪齒面的變形與應力[19-22]。學者 Tsay 與 Fong[23]及 Litvin 等人[24]利用齒輪接觸分析求得接觸齒印或接觸線，並在接觸齒印或接觸線上直接施加負載，用以研究齒面上的應力分佈。有些學者[25-27]利用間隙單元(Gap Element)模擬接觸邊界條件，分析三維齒面的應力分佈。學者 Celik[28]利用有限單元法比較三齒接觸模型與整組接觸模型，由上述之分析結果顯示應力分析結果十分相近。有些學者[29-31]則利用有限單元法分析齒面的接觸應力與齒根彎曲應力，另一部分學者則利用應變規量測齒根變形並與有限單元法比較[32,33]。

### 4.2 有限單元接觸分析模型建立

一個完整的有限單元接觸分析模型包含有限單元網格建立、接觸面幾何定義、接觸物理特性定義、邊界條件及負載定義。本章則利用有限單元法來分析齒輪在負載下的接觸齒印，其假設條件如下：(1)以三對齒來模擬齒輪組之接觸。(2)齒輪組的材料為等向均質材料。(3)齒輪組為小變形及小滑動。(4)不考慮熱應力。

#### 4.2.1 有限單元網格

曲線齒輪之齒面為複雜三維曲面，無法利用一般 CAD 軟體如 I-DEAS 或 ProEngineer 來建立，本計畫利用曲線齒輪之齒面方程式如本章第一節所示，自行發展三維齒面的有限單元網格建立軟體，可精確地計算齒面上任一節點的座標值，包括漸開線作用齒面及齒根圓角部分，並可控制局部區域的網格密度，因而有效地降低有限單元法中的幾何誤差。此外，使用自行研發的齒輪接觸分析軟體可計算出齒輪組的理論接觸點，可加速齒輪組有限單元分析的計算速率。

在有限單元分析中，元素的選擇是一項關鍵因素，不同類型的元素將產生不同的準確度，本計畫使用具有 8 個節點之六面體元素(C3D8I)來建立齒輪組的接觸有限單元模型，此種元素屬於一階元素，同時具有非協調模式，以改善元素的彎曲特性。具有三對齒的齒輪組有限單元網格如圖所示，在其齒面寬中央齒面區域，其網格有局部加密，可提高幾何精度並加速有限單元計算之收斂情形。

#### 4.2.2 接觸面與表面特性定義

有限單元分析軟體 ABAQUS/Standard 的接觸分析定義包含兩部分：接觸面之定義及接觸特性之定義。接觸面可分為兩種，一為 Master，一為 Slave。齒輪材料較硬或齒面之網格較粗者為 Master，相反地，材料較軟或網格較細者為 Slave。分析軟體規定在 Master 上的節點可穿透 Slave，而 Slave 上的節點不可穿透 Master。在分析模型中，假設小齒輪之齒面較軟，故小齒輪之齒面為 Slave，而大齒輪之齒面為 Master。此外，在分析時選擇小滑動(Small sliding)及有充分地潤滑，故摩擦力可忽略。

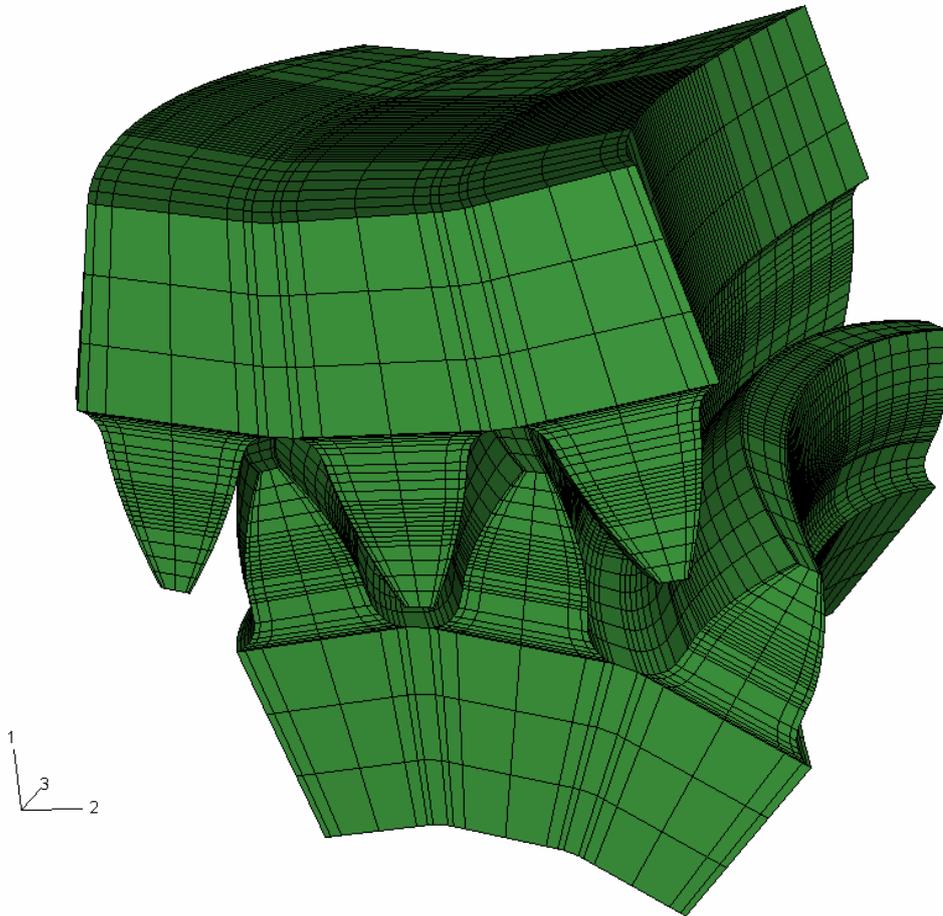


圖 4.1 三對齒之有限單元網格

#### 4.2.3 邊界條件之施加(Boundary Condition)

元素 C3D8I 具有 8 個節點，每個節有三個平移自由度，在分析模型中，大齒輪的側邊及底邊上的每一節點皆固定，即大齒輪的側邊及底邊上的節點平移量設為零。小齒輪底邊上的每一節點利用剛體樑元素與傳動軸上的節點相聯，而傳動軸上的節點只可繞傳動軸旋轉，其他自由度，如三個平移與二個旋轉皆固定不動。扭力施加於小齒輪的旋轉軸上，使小齒輪與大齒輪之齒面相互嚙合。具有三對齒的齒輪組有限單元接觸分析模型

如圖 4.2 所示。

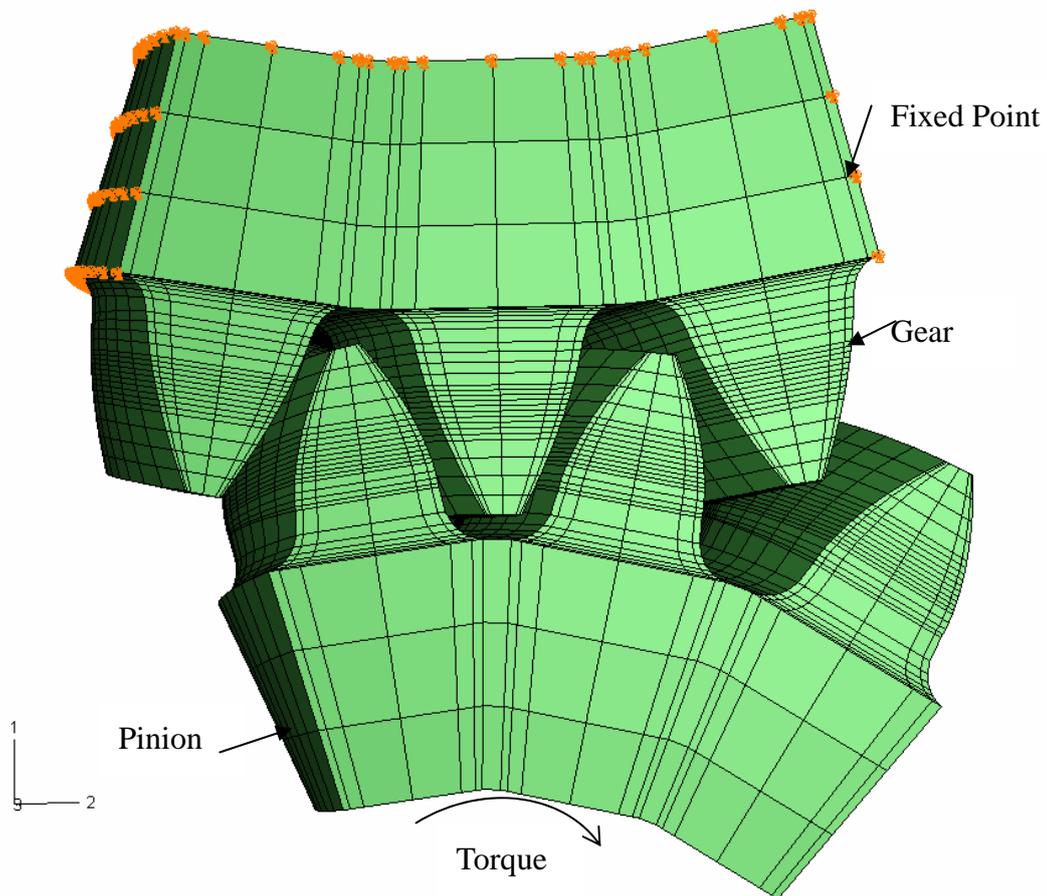


圖 4.2 三對齒之有限單元模型

表 4.1 曲線齒輪組的設計參數

	Gear	Pinion
齒數	36	18
法向模數	3	3
法向壓力角	20°	20°
齒面寬	30 mm	30 mm
刀盤半徑	42.85 mm	42.85 mm
節圓半徑	54 mm	27 mm
外徑	114 mm	60 mm

表 4.2 齒輪材料特性

中碳鋼	AISI 1045
彈性模數 (MPa)	205.0E3
包松比(Poisson's Ratio)	0.29
密度 (Kg/mm <sup>3</sup> )	78.5E-7
硬度 (H <sub>B</sub> )	350
允許的接觸應力 (Mpa, Source: AGMA 2001-C95)	980
允許的彎曲應力 (MPa, Source: AGMA 2001-C95)	275

表 4.3 有限單元分析模型

	Gear	Pinion
元素總數量	75,168	
節點總數量	96,362	
元素種類	C3D8I	
接觸對	Master surface	Slave surface
表面特性	Small sliding, no friction	
邊界條件	Fixed	Torque applied 50 N-m

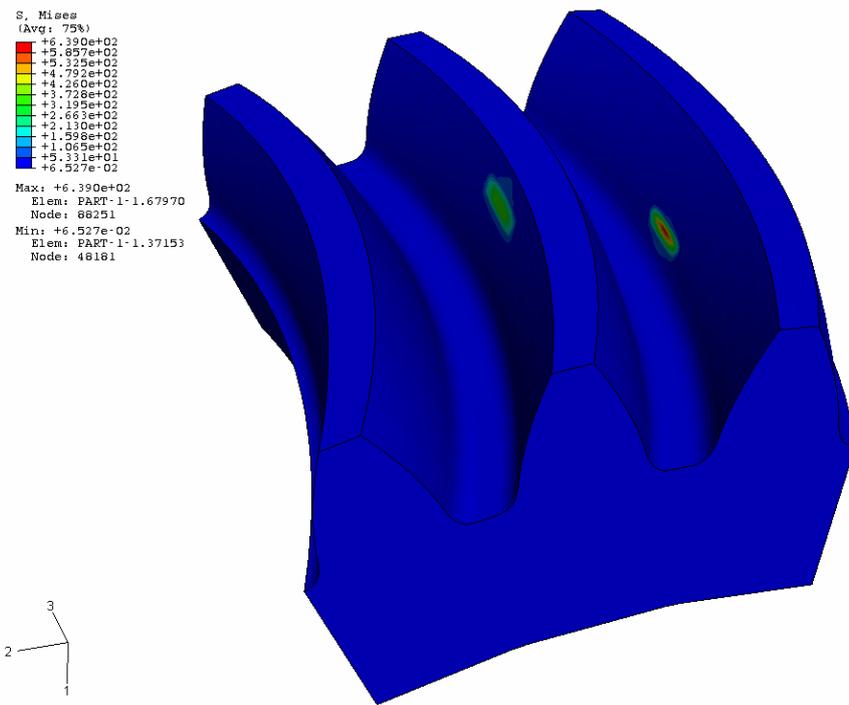
### 4.3 結果分析

曲線齒輪組之設計參數及材料特性如表 4.1 與表 4.2 所示，齒輪組有限單元接觸分析模組資料如表 4.3 所示，元素總數量為 75,168 個，節點總數量共 96,362 點，小齒輪傳遞 50Nm 之扭力給固定的大齒輪。齒輪應力分佈圖中，符號“S, Mises”表示 von Mises 應力，應力單位為  $N/mm^2$ 。

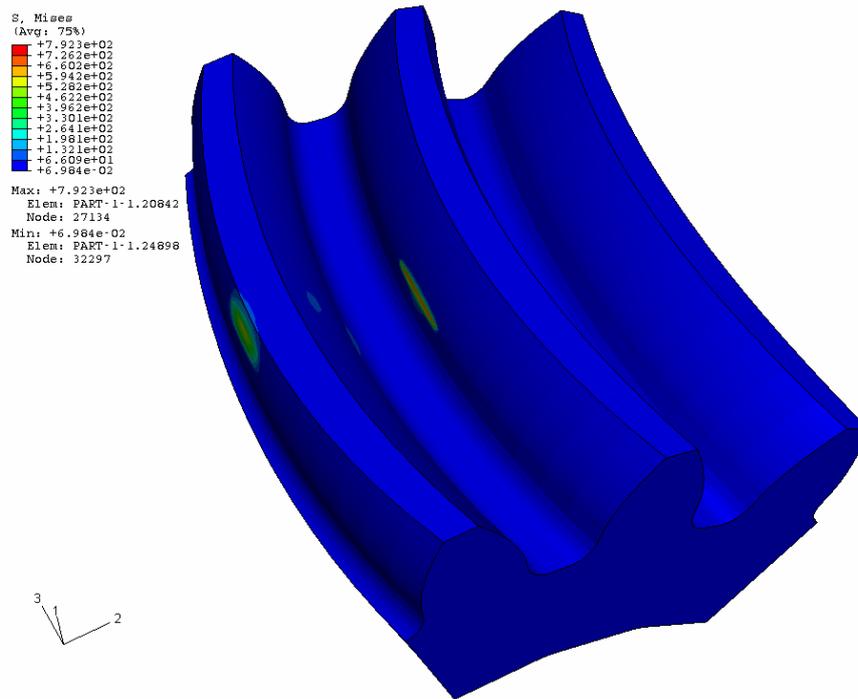
圖 4.3 至圖 4.5 為負載下的接觸分析結果。曲線齒輪之齒面俱有隆齒的效應，由有限單元分析，其結果顯示接觸齒印皆位於齒面寬中央截面，此效應可有效地避免組裝偏差時所產生的齒緣接觸。齒輪在嚙合過程中應力的變化如圖 4.6 與 4.7 所示，其中圖 4.6 表示接觸應力，而圖 4.7 表示彎曲應力分佈。大齒輪與小齒輪齒面上的最大接觸應力分

別為 859 Mpa 及 950 Mpa., 而齒根彎曲應力分別為 100.3 Mpa 與 113.3 Mpa。

本節發展一有限單元網格建立軟體，此軟體可快速建立齒輪接觸分析有限單元模型，從建立節點座標、定義接觸面、設定邊界條件及負載，皆可自動完成，其主要優點為：(1)齒輪組的接觸點可由 TCA 程式求得，可使非線性的接觸問題快速收斂至解答。(2)齒面上的網格節點是由齒面方程式計算求得，而且其網格密度可自由調整，所以可避免齒面幾何誤差，同時亦可節省以其他 CAD 建立模型時，所花費的時間與成本。

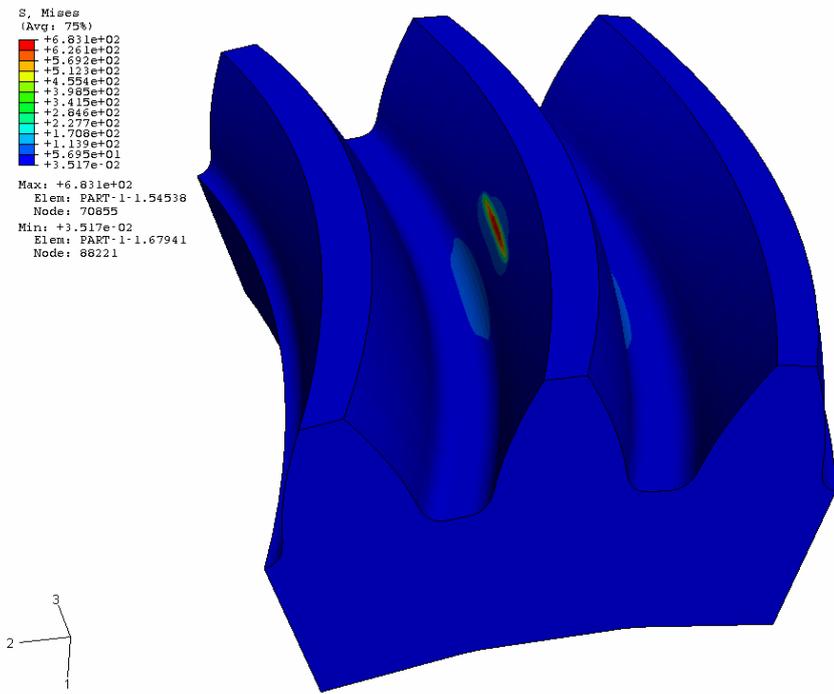


(a) 大齒輪

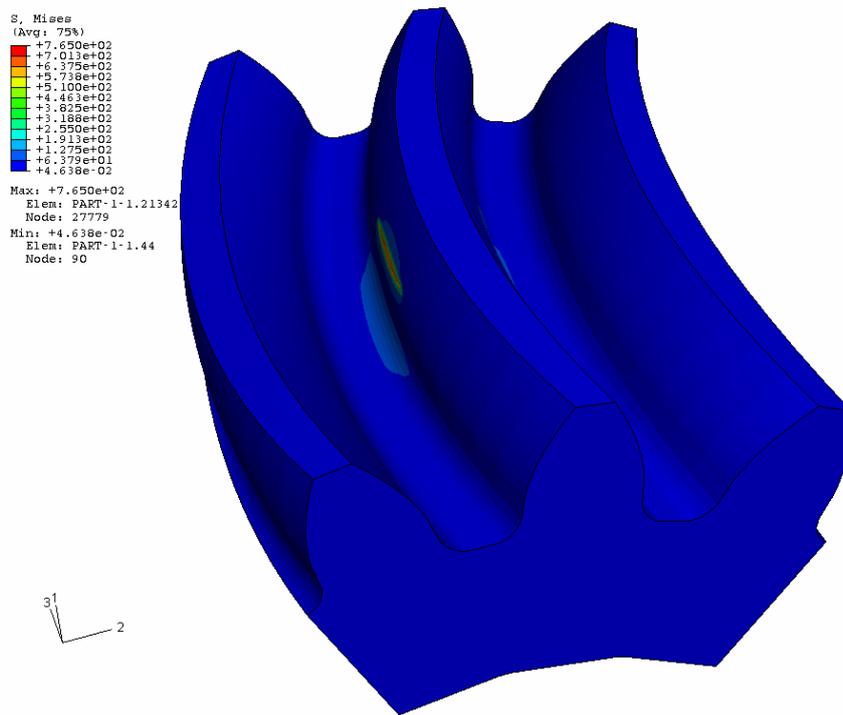


(b) 小齒輪

圖 4.3 接觸點位於齒根附近時，齒輪組的應力分佈

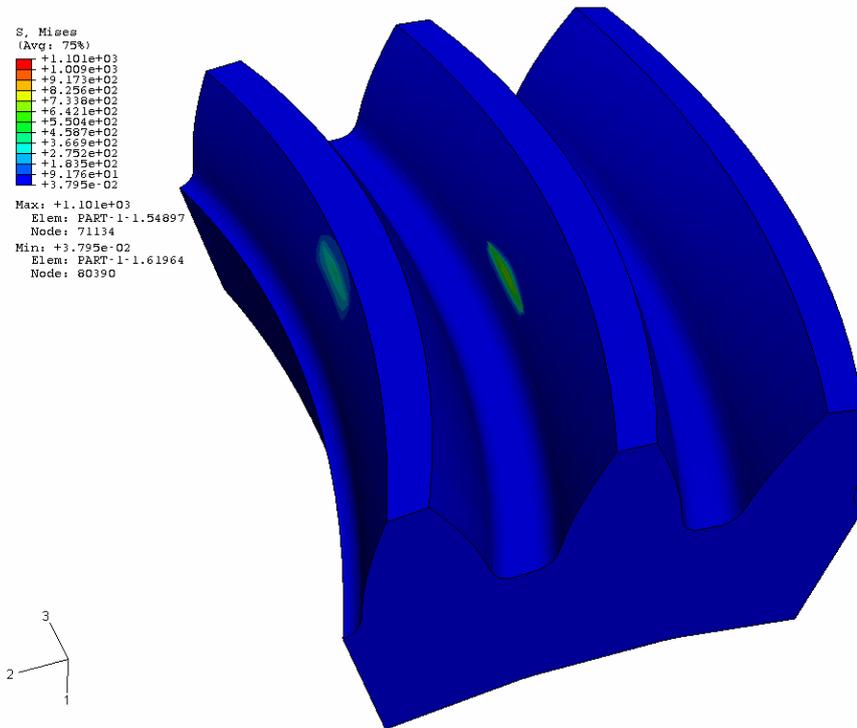


(a) 大齒輪

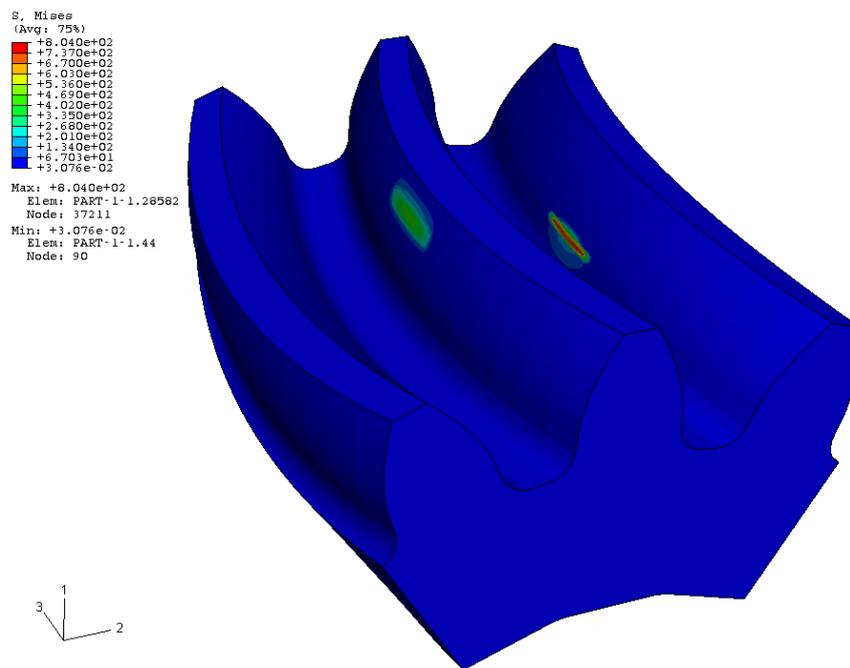


(b) 小齒輪

圖 4.4 接觸點位於節點附近時，齒輪組的應力分佈。



(a) 大齒輪



(b) 小齒輪

圖 4.5 接觸點位於齒頂附近時，齒輪組的應力分佈

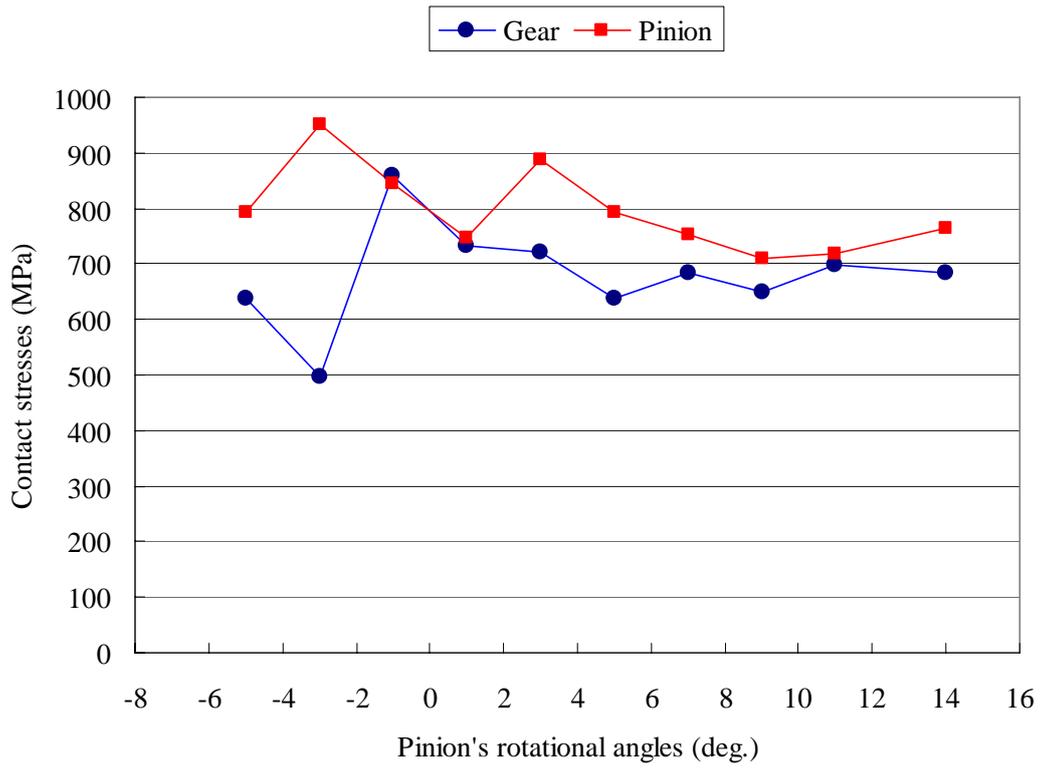


圖 4.6 齒面接觸應力在嚙合過程中的分佈情形

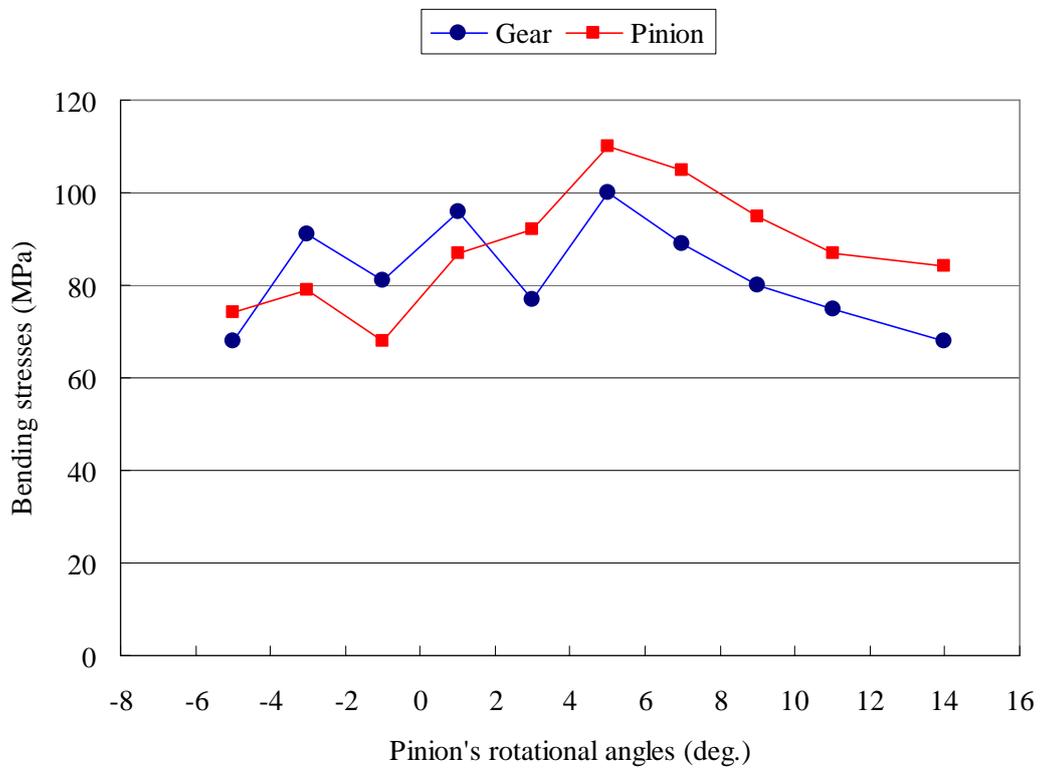


圖 4.7 齒根彎曲應力在嚙合過程中的分佈情形

## 第五章 曲線齒圓柱型齒輪之製造與測試

本計畫除了利用電腦模擬曲線齒輪之嚙合情形外，亦進行了曲線齒輪之切削與各種嚙合測試。首先將曲線齒輪之齒面數學模式轉換為 CAD 模型，並將齒輪 CAD 模型轉換成切削條件，再利用 5 軸加工機加以切削。曲線齒輪組之嚙合測試則利用本實驗室之萬用齒輪嚙合測試機，實際進行嚙合測試，以驗證理論推導之正確性。齒輪嚙合測試之內容包括齒印測試及單齒腹傳動誤差測試。

### 5.1 曲線齒圓柱型齒輪之切削

利用第一章所建立的曲線齒輪齒面數學模式可精確地計算出完整的齒面，包含齒面工作區、齒根圓角及齒底部分。曲線齒輪之設計參數如表 5.1 所示，使用 AUTOCAD 所建立的三維實體模型如圖 5.1 及圖 5.2 所示，其中藍色部分表示曲線齒輪之齒頂部分，而紅色部分表示曲線齒輪之齒底部分。齒輪組的 CAD 實體模型可經由五軸 CNC 加工機之轉換程式，轉換成五軸 CNC 加工機之機械碼，即可利用五軸 CNC 加工機製造出曲線齒輪，其實際切削完成的曲線齒輪組如圖 5.3 及圖 5.4 所示。

表 5.1 漸開線錐形齒輪設計參數

	齒輪 A	齒輪 B
齒數	28	31
法向模數	4 mm	4 mm
法向壓力角	20 度	20 度
刀盤半徑 Ra	25 mm	25 mm
齒面寬	25 mm	25 mm

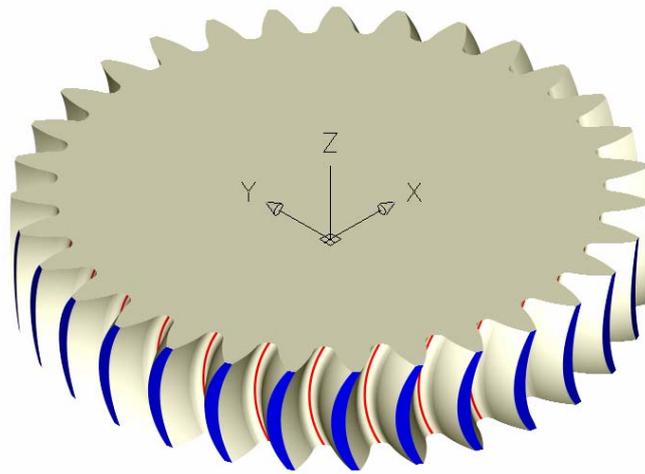


圖 5.1 齒數為 28 齒之三維齒面

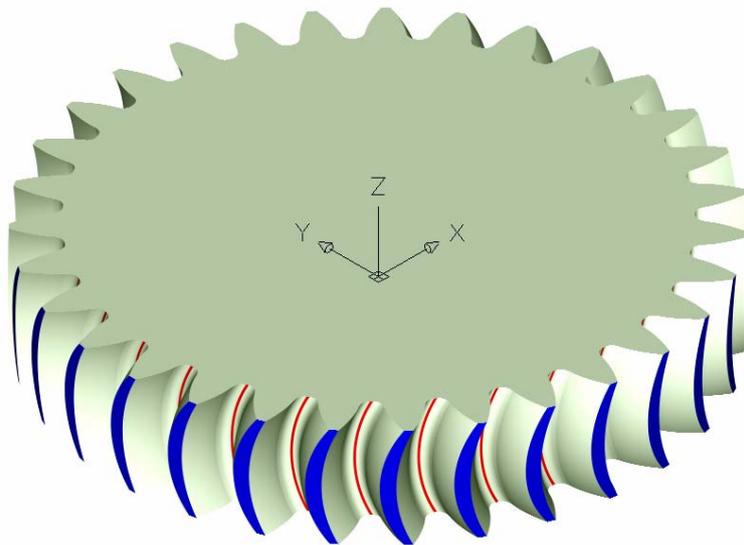


圖 5.2 齒數為 31 齒之三維齒面



圖 5.3 齒數為 28 齒之曲線齒輪



圖 5.4 齒數為 31 齒之曲線齒輪

## 5.2 齒輪單齒腹測試原理與架構

因齒面製造誤差及齒輪安裝不良而使得齒輪組在傳遞運動時產生傳動誤差(Transmission Error)。齒輪各種單項誤差之量測數據，無法完整地提供齒輪傳動品質之判斷依據，而傳動誤差為齒輪組各種單項誤差之累積結果，因此單齒腹測試法(Single Flank Gear Testing)已成為齒輪傳動誤差量測之主要方法。傳動誤差的量測可以選擇在加入負載或不加負載之狀況下進行，可以靜態量測或動態量測。若在轉速較高且負載較大的狀況下量測，則影響傳動誤差之因素較多，除了齒面幾何誤差及傳動軸安裝不良外，尚需考慮彈性變形、溫度及振動等因素。從齒輪單齒腹測試所獲得之傳動誤差數據，可以分析出齒輪偏擺(Runout)、齒形誤差(Profile Error)、單一節距誤差(Individual Pitch Error)及累積節距誤差(Cumulative Pitch Error)等量測資訊，但無法分析導程誤差(Lead Error)。

單齒腹測試系統係利用一組配對嚙合之齒輪，可為一組待測試之齒輪，或一為標準齒輪(Master gear)，一為待測齒輪，並將其安裝於原設計之齒輪嚙合中心距離，其中一標準齒輪或配對齒輪由馬達驅動，並在輕負荷之下與被測齒輪保持單齒接觸，亦即在傳動的過程中，齒輪組有適當的背隙存在。在輸入及輸出傳動軸上各安裝一高解析度之編碼器(Encoder)，編碼器輸出之訊號經由差分器之比較分析可得到更高解析度之角位移訊號，再透過數位類比轉換，即可由個人電腦讀取並儲存於資料庫之中，以利爾後傳動誤差之計算分析。

個人電腦由輸入端之編碼器所讀取之角位移資料，再經過齒輪組轉速比之換算即可得到齒輪組輸出端之理論旋轉角，而由輸出端之編碼器所傳回之旋轉角則為被動軸之實際旋轉角，將量測所得之實際輸出旋轉角與理論輸出旋轉角比較，即可獲得齒輪組在齒形誤差、鄰接節距誤差、累積節距誤差、偏擺及裝配誤差之下的傳動誤差曲線變化圖。

齒輪傳動誤差之量測精度完全由編碼器之解析度所控制，而編碼器之輸出訊號需透過類比數位卡(A/D Card)轉換成數位訊號，以供電腦分析計算。編碼器及類比數位轉換器有不同規格，其容許轉速亦不相同，故在選用時應多加注意。其容許轉速之計算式如下：

$$n_{\max} = \frac{f_{\max}(\text{KHz})}{z} \times 1000 \times 60 \quad (\text{rpm}) \quad (5.1)$$

$$A = \frac{1296000}{z \times IP} \quad (\text{Arc-Section}) \quad (5.2)$$

其中：

$n_{\max}$  編碼器之最高容許轉速

$f_{\max}$  計數器之最大輸入頻率

$z$  編碼器之分割數

$A$  編碼器之解析度

$IP$  計數器之差分數

以本測試機為例，編碼器之分割數為 18000，計數器之最大輸入頻率為 33KHz，計數器之差分數為 4096。因此可求得編碼器之解析度為：

$$A = \frac{1296000}{18000 \times 4096} = 0.01758 \text{ (Arc-Section)} \quad (5.3)$$

編碼器之最高容許轉速則為：

$$n_{\max} = \frac{33}{18000} \times 1000 \times 60 = 110 \text{ (RPM)} \quad (5.4)$$

一般主動軸以馬達驅動，於線上量測時，由於各種因素限制，亦可以手動方式驅動主動輪，來量測齒輪傳動系統之傳動誤差。齒輪傳動誤差除了可以角度誤差(Arc-Section)來表示外，亦可依被測齒輪之實際尺寸，轉換成長度單位( $\mu\text{m}$ )，其互相轉換公式如下：

$$\mu\text{m} = \frac{(\text{arc} - \text{sec})}{1296} \times \pi \times d \quad (5.5)$$

其中  $d$  為被測齒輪之節圓直徑，單位為 mm。

本嚙合測試機可供平行軸齒輪組、相交軸齒輪組與交錯軸齒輪組傳動誤差測試之用。其主要架構是由 XYZ 工作台、A 軸平移工作台、R 軸旋轉工作台、兩個盤式編碼器、兩個旋轉式角度編碼器、兩個扭力計、伺服馬達、磁粉煞車、四個聯軸器、支座及電控系統所組成。其主要規格如下：

1. 被測齒輪組速比之範圍為 1~1/5;最大中心距 150mm;被測齒輪最大重量 15kg。

2. 齒輪嚙合測試機工作平台的架構共有 X, Y, Z, R 和 A 等 5 軸，其各軸行程如下：

X 軸(輸出端底座行程)： 0 ~ 211.93mm

Y 軸(輸入端前後行程)： -9.25 ~ 209.39 mm

Z 軸(輸入端上下行程)： -78.64 ~ 94.04mm

R 軸(輸出端旋轉行程)： -10° ~ 120°

A 軸(輸出端前後行程)： 59.65 ~ 226.95mm

3. 輸入端馬達：馬力 2kW，最高轉速 2000rpm，可正反轉與調變速度。

4. 輸出、入端扭力感測器(含放大器)：

- 扭力 0~30 N-m,
- 最高轉速：2000 rpm,
- 誤差千分之五

5. 輸出、入端角度編碼器(中空型)HEIDENHAIN RON255：

- 18,000 pulse/rev.,
- 解析度：0.02°,
- 最高轉速：3000 rpm

6. 輸出端負載：煞車裝置，煞車力最大 3kg-m，煞車力可控制。

7. 轉速計：可量測最高 2000rpm 的轉速。

8. 訊號處理介面卡：讀取上述元件訊號和控制用。

- A/D Card 與 Terminal,
- I/O Card 與 Terminal,
- Counter Card: HEIDENHAIN/IK220

### 5.3 萬用齒輪嚙合測試機使用步驟

萬用齒輪嚙合測試機可進行單齒腹嚙合測試、齒印測試及齒輪效率測試。在測試之前需安裝心軸、校正偏擺、調整各軸相關位置與角度，以正確安裝齒輪，並設定負載及轉速。其詳細之過程如下：

1. 安裝心軸並用千分表校正偏擺，如圖 5.5 所示。
2. 開啟測試機。測試機每次完成開機程序之後，各軸必須進行歸零動作。此時各軸必

須有前次原點校正的校正值供歸零用。平行軸齒輪測試時，X 軸和 A 軸可以不用歸零。

3. 安裝齒輪，如圖 5.6 所示。齒輪裝設完畢之後，依齒輪測試的相對位置(中心距、裝置距離)，設定各軸的座標，並將 X、Y、A 及 R 軸固定。
4. 齒輪的相對位置調整好之後，關上操作護網，即可進行單齒腹嚙合測試操作。

進行單齒腹嚙合測試之前，必須檢查以下事項：

- 1). 齒輪與夾治具均以裝設固定完畢。
- 2). 工作平台的相對位置設定正確。
- 3). 機台上面未放置其他物品。
- 4). 操作護網擺設定位。

扭力與轉速的輸入及輸出數值會即時顯示於控制箱的控制面板上，可以即時了解輸入、輸出的扭力和轉速值。手動/自動切換鈕用於選擇由手動控制馬達轉速與磁粉煞車扭力，或由電腦直接控制測試條件。齒輪安裝完畢後，先切換到手動模式，由手動設定轉速與扭力，觀察測試系統與齒輪運轉是否正常，有無異常的聲音。試運轉完之後，審視齒輪與夾治具是否有鬆脫現象。一切正常之後，即可切換到自動模式，並在電腦中輸入測試條件，進行單齒腹自動嚙合測試。



圖 5.5 安裝心軸並校正偏擺

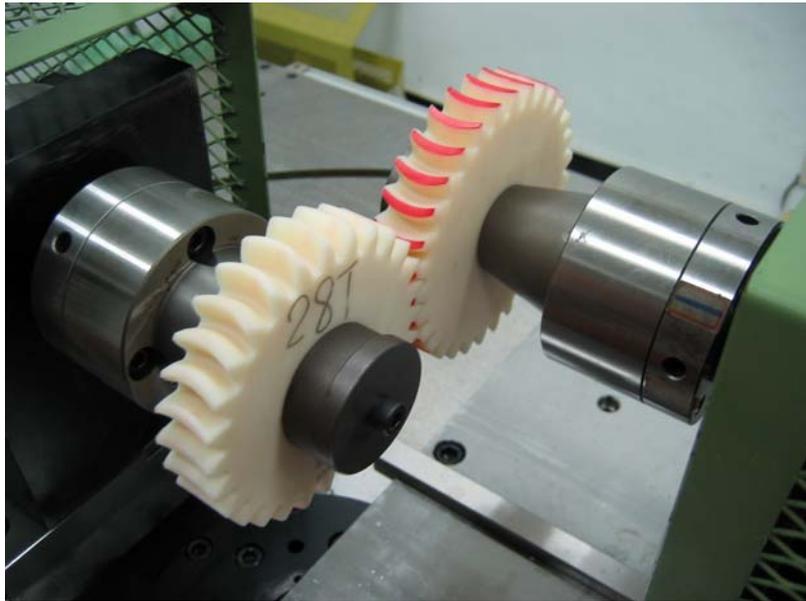


圖 5.6 安裝齒輪

表 5.2 測試條件 1

輸入軸齒輪	齒輪 A			
輸出軸齒輪	齒輪 B			
光學尺數據(mm)	X	Y	Z	A
	276.109	118	0.001	65.012
標準中心距離(mm)	118			

#### 5.4 漸開線圓錐齒輪單齒腹測試及嚙合齒印測試

以下範例將研究曲線齒輪單齒腹測試與嚙合齒印測試之結果。

例一：

曲線齒輪安裝於平行軸之配置如圖 5.7 所示，其中一齒輪之齒面上塗有紅色顏料，以觀察齒輪之嚙合齒印。當兩齒面在傳遞動力，其齒面上的紅色顏料將因齒面之接觸而轉印至原本沒有紅色顏料之齒面上，此即為嚙合齒印。曲線齒輪組在平行軸傳遞動力時，其嚙合齒印測試如圖 5.8 所示，由於曲線齒輪組為點接觸，故紅色齒印只分佈於齒面寬中央載面上，圖 5.9 則顯示齒面上有部分紅色顏料被刮除，即是齒面接觸區。

單齒腹測試之條件如表 5.2 所示，大齒輪為 31 齒，而小齒輪為 28 齒。在負載為 1N-m

之下且測試轉速為 2rpm，單齒腹測試傳動誤差之結果如圖 5.10 至圖 5.12 所示。其中圖 5.10 表示齒輪組之綜合傳動誤差，圖 5.11 表示傳動誤差分佈曲線之短波(Short Wave)分佈圖，而圖 5.12 則表示傳動誤差分佈曲線之長波(Long Wave)分佈圖。

在綜合傳動誤差圖(圖 5.10)中，大齒輪旋轉一周時，曲線之最高點與最低點之差稱為總傳動誤差，在本例中，右齒面(CW)之總傳動誤差為  $362.8 \mu\text{m}$ ，左齒面(CCW)之總傳動誤差為  $252 \mu\text{m}$ 。而影響總傳動誤差之因素包括累積節距誤差及齒形誤差。齒輪組嚙合時在任一節距中最高點與最低點之差值稱為齒對齒的綜合誤差，其誤差量主要受到齒形誤差與單一節距誤差所影響。

總傳動誤差曲線經由高通濾波後所得到的短波分佈圖，如圖 5.11 所示，齒形誤差是其主要影響因素，而且短波之分佈情形對於齒輪噪音是一項相當大的影響因素。本例中右齒面短波(CW)之最大值為  $22.1 \mu\text{m}$ ，而左齒面短波之最大值為  $19.9 \mu\text{m}$ 。主動齒輪之每一節距內將有一小短波，主動齒輪為 31 齒，故圖 5.11 中共有 31 個小短波。

總傳動誤差曲線經由低通濾波後所得到的長波分佈圖，如圖 5.12 所示，其可能的影響因素有三部份，一為齒輪本身每一齒之節距距誤差所累積而成，即累積節距誤差，二為齒輪本身之偏擺，三為齒輪組安裝不準確之裝配偏差(Mounting Error)所產生的。本例中右齒面(CW)長波之最大值為  $354.9 \mu\text{m}$ ，而左齒面(CCW)長波之最大值為  $242.1 \mu\text{m}$ 。

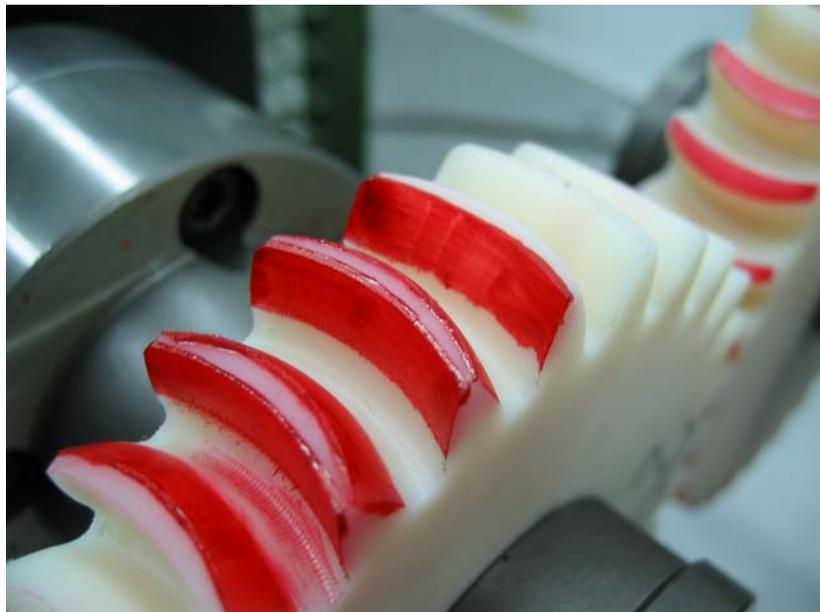


圖 5.7 平行軸單齒腹測試



圖 5.8 平行軸漸開線圓錐齒輪之嚙合齒印



圖 5.9 平行軸漸開線圓錐齒輪之嚙合齒印

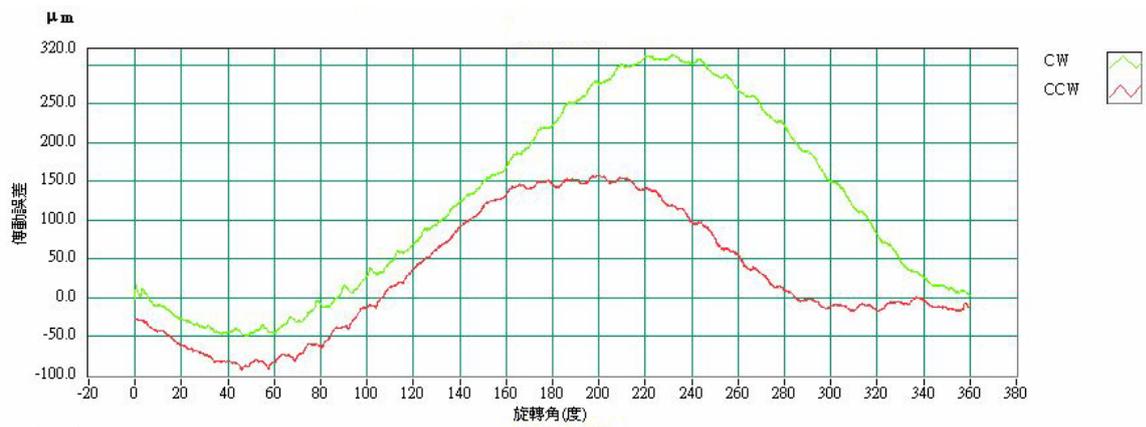


圖 5.10 總綜合傳動誤差分佈圖

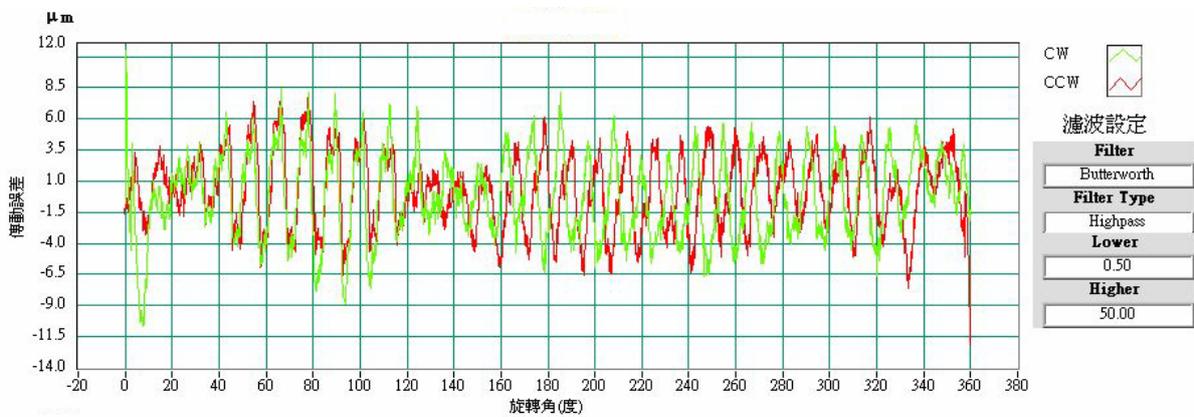


圖 5.11 傳動誤差之短波分佈圖

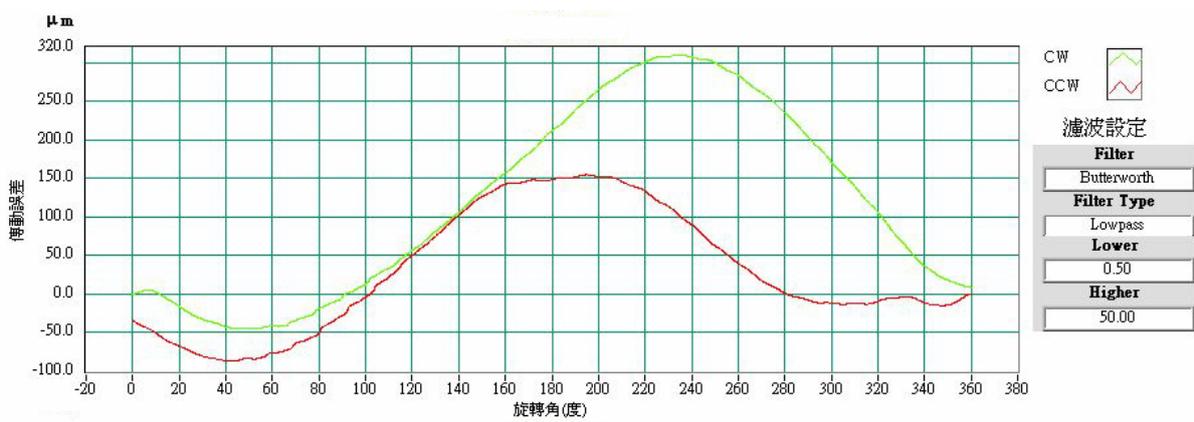


圖 5.12 傳動誤差之長波分佈圖

表 5.3 測試條件 2

輸入軸齒輪	齒輪 A			
輸出軸齒輪	齒輪 B			
光學尺數據(mm)	X	Y	Z	A
	276.109	118.251	0.003	65.012
標準中心距離(mm)	118			

例二：

單齒腹測試之條件如表 5.3 所示，輸入齒輪為 31 齒，而輸出齒輪為 28 齒。測試轉速為 2rpm，齒輪組分別在負載為 0N-m、1N-m 及 2N-m 之下，單齒腹測試傳動誤差之結果如圖 5.13 至圖 5.21 所示。結果顯示齒輪組在較大的負載下，其短波之振幅稍微變小。

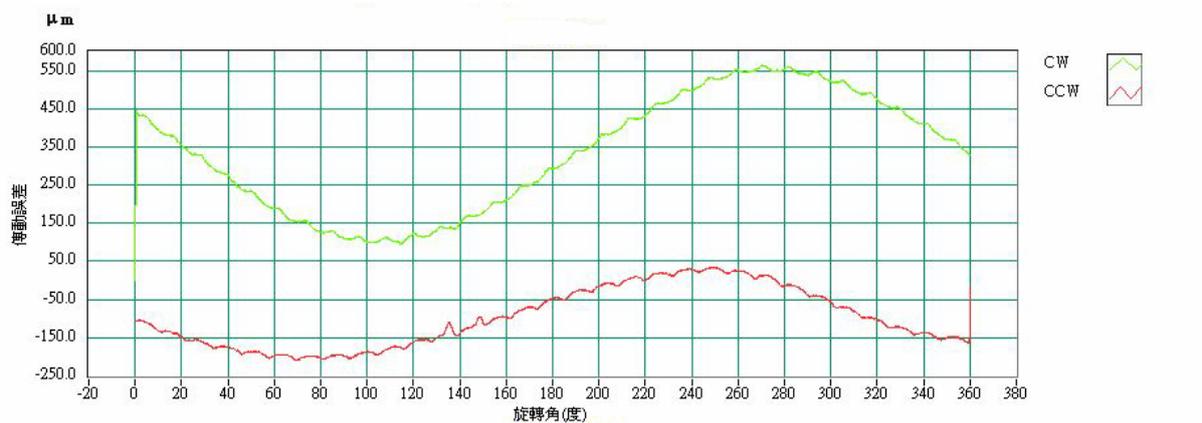


圖 5.13 總綜合傳動誤差分佈圖

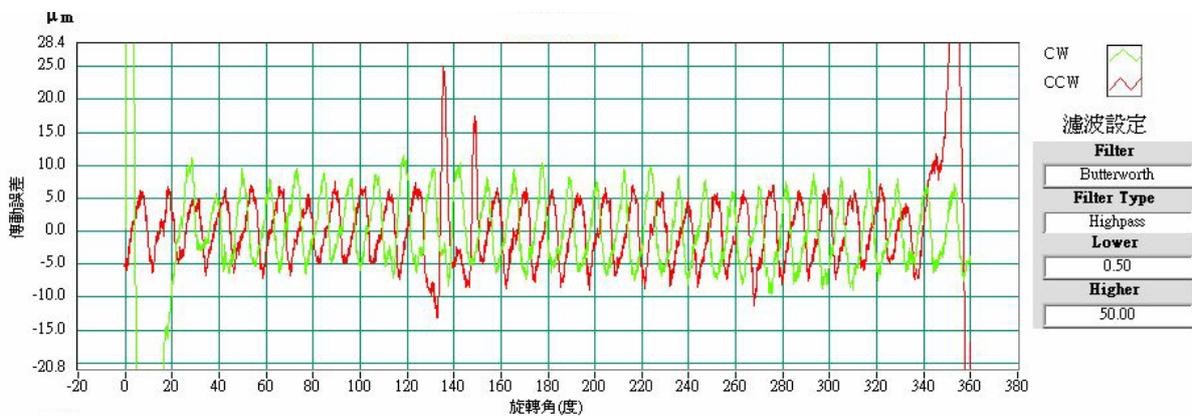


圖 5.14 傳動誤差之短波分佈圖

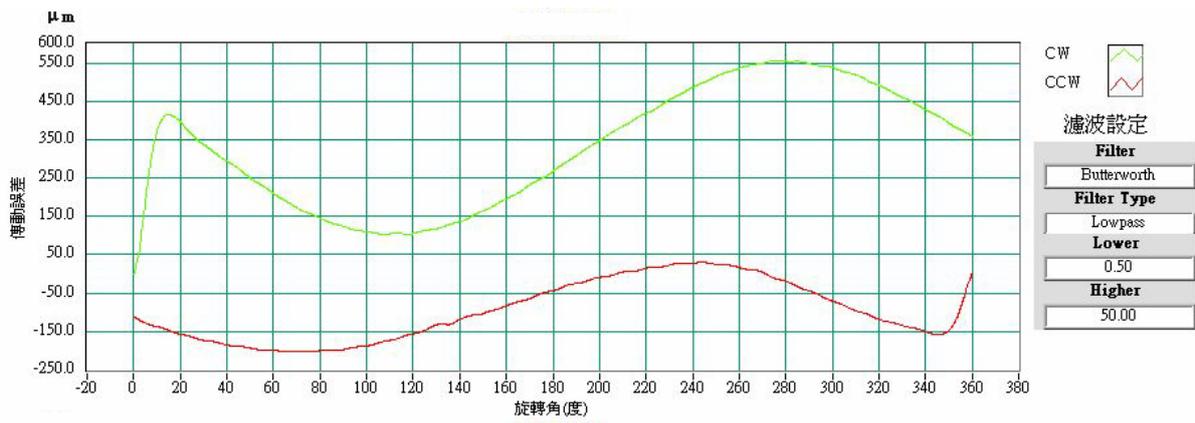


圖 5.15 傳動誤差之長波分佈圖

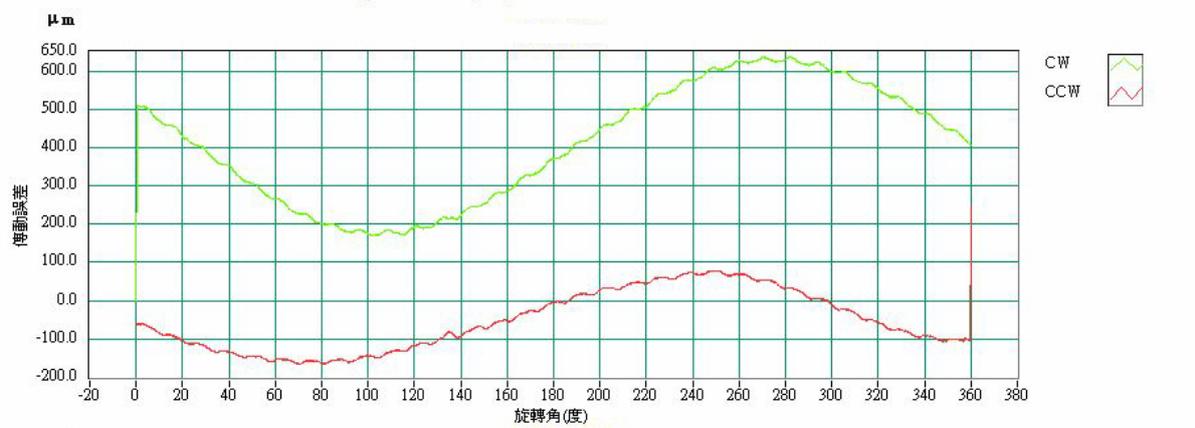


圖 5.16 總綜合傳動誤差分佈圖

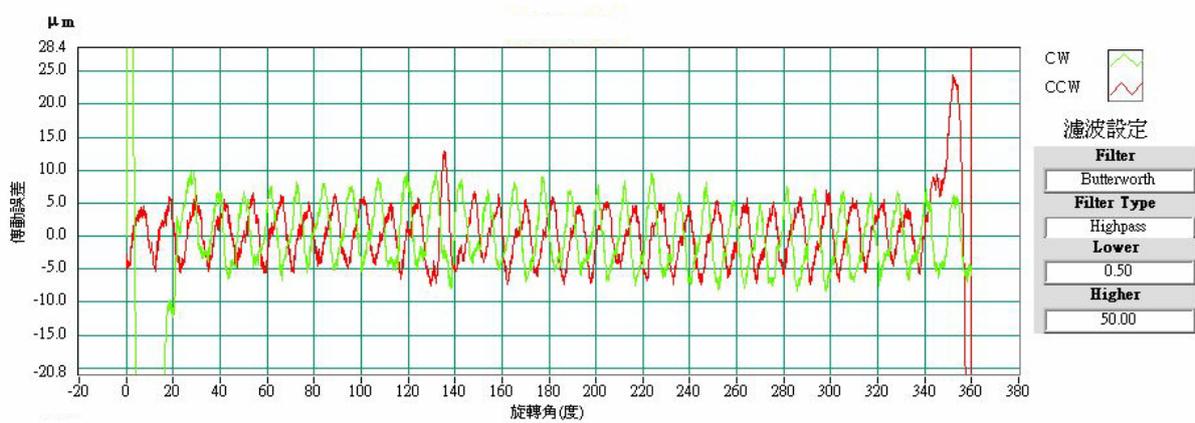


圖 5.17 傳動誤差之短波分佈圖

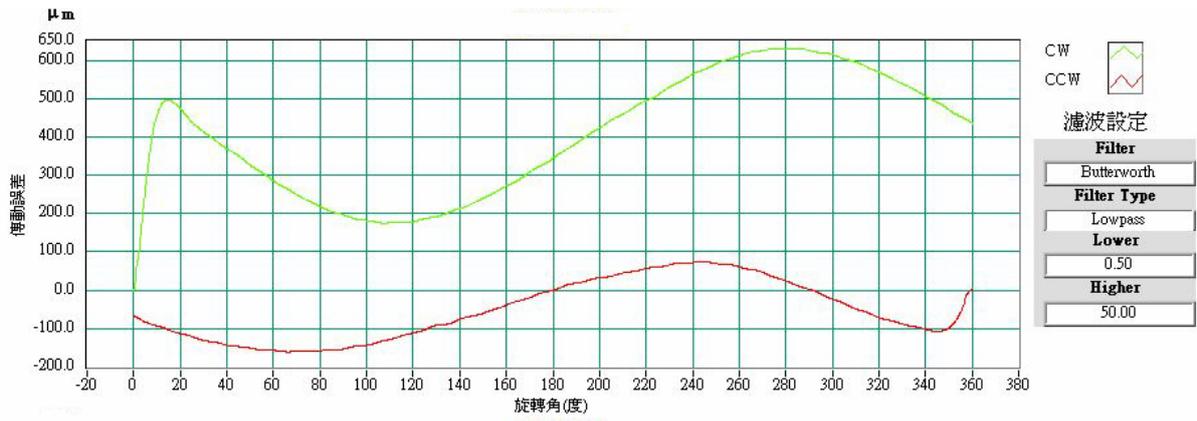


圖 5.18 傳動誤差之長波分佈圖

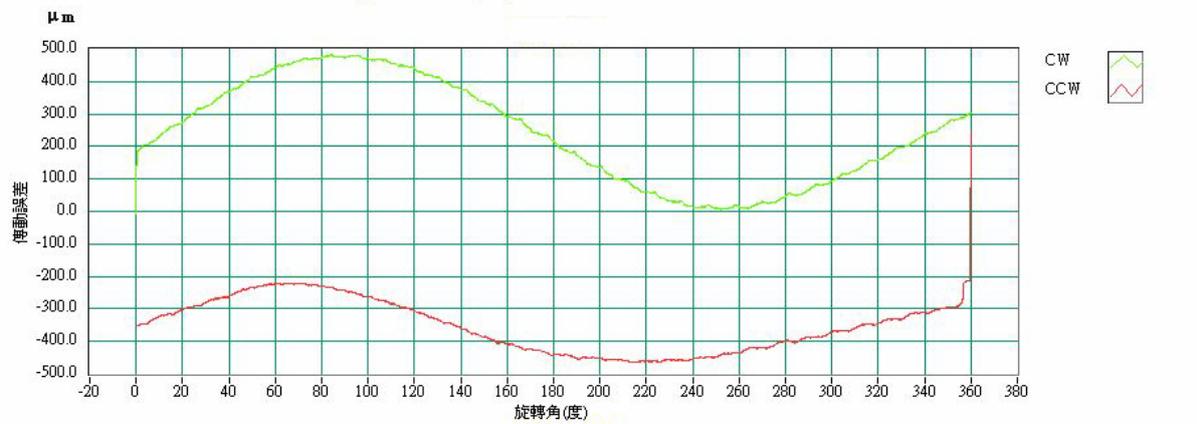


圖 5.19 總綜合傳動誤差分佈圖

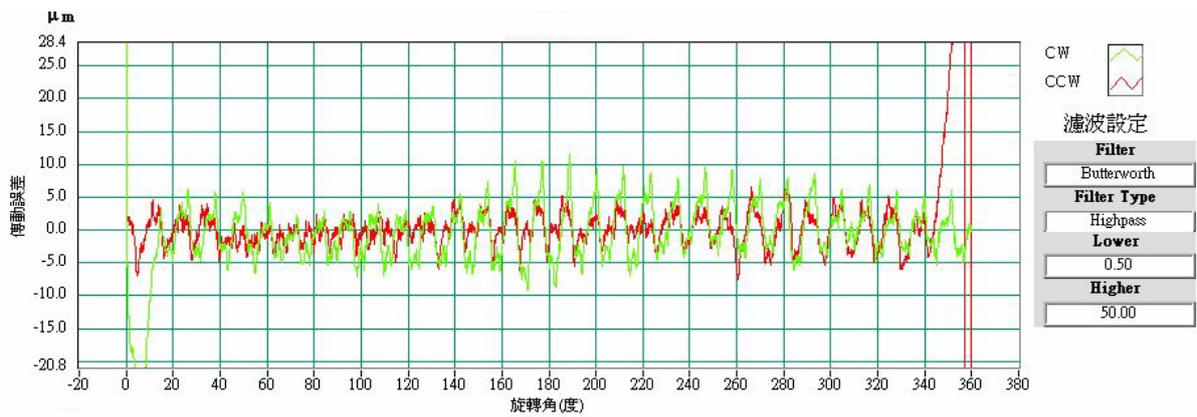


圖 5.20 傳動誤差之短波分佈圖

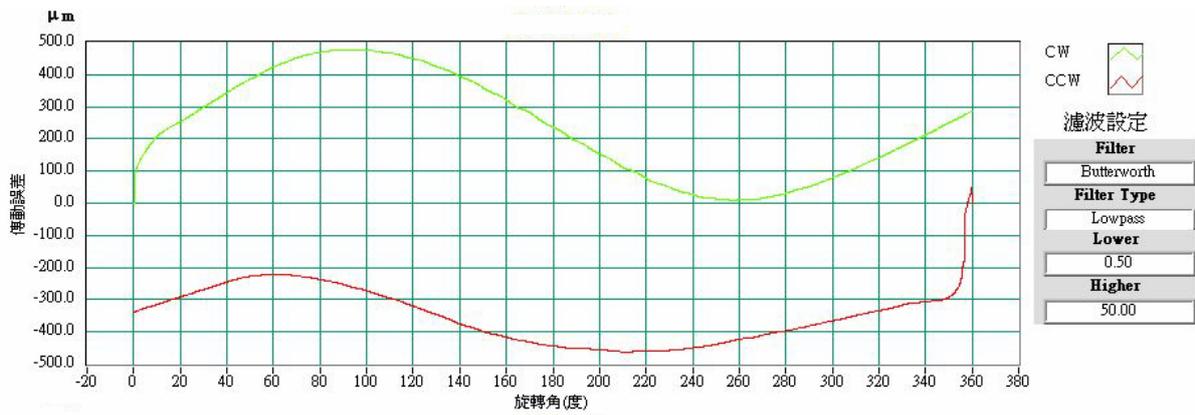


圖 5.21 傳動誤差之長波分佈圖

表 5.4 測試條件 3

輸入軸齒輪	齒輪 A			
輸出軸齒輪	齒輪 B			
光學尺數據(mm)	X	Y	Z	A
	276.109	118.5	0.003	65.069
標準中心距離(mm)	118			

例三：

單齒腹測試之條件如表 5.4 所示，輸入齒輪為 31 齒，而輸出齒輪為 28 齒。測試負載為 0N-m，齒輪組分別在轉速為 1rpm、2rpm 及 4rpm 之下，單齒腹測試傳動誤差之結果如圖 5.22 至圖 5.30 所示。在不同的轉速下進行單齒腹測試，其傳動誤差之分佈並無明顯的變化。

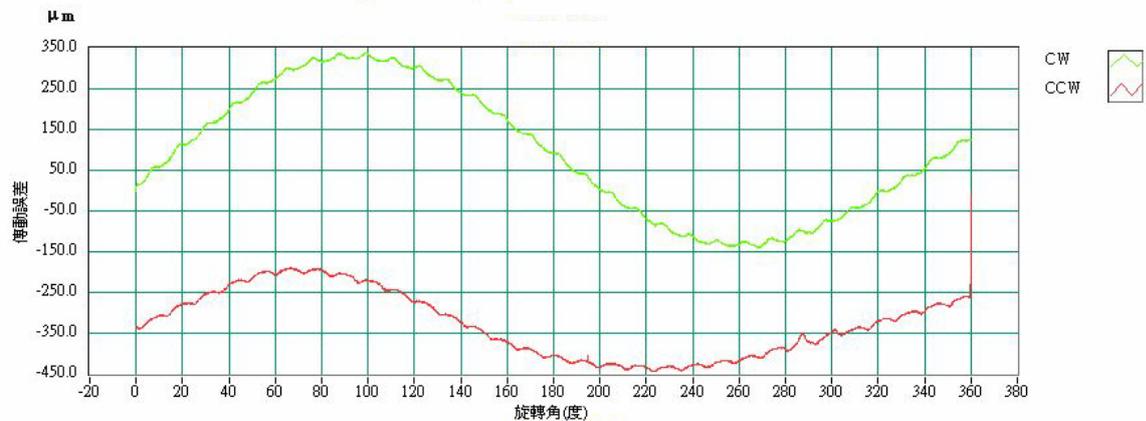


圖 5.22 總綜合傳動誤差分佈圖

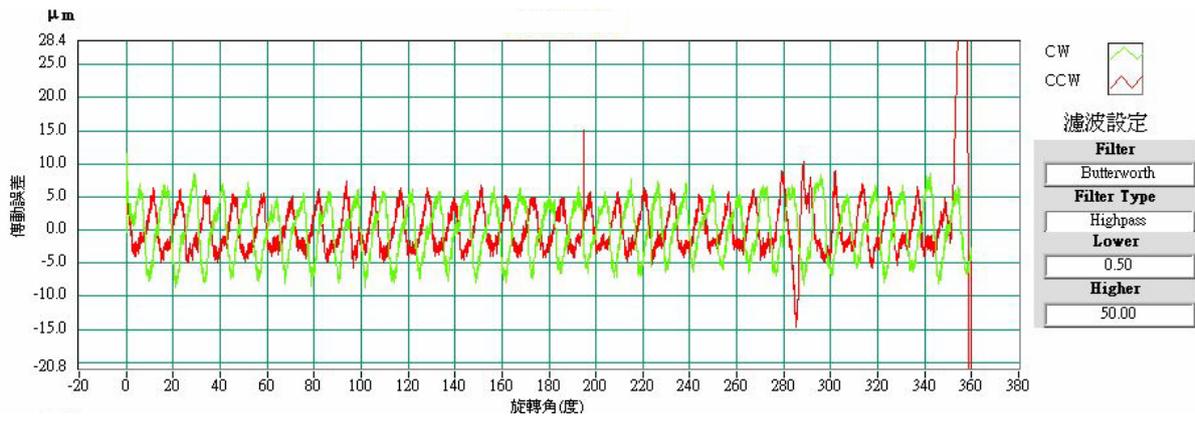


圖 5.23 傳動誤差之短波分佈圖

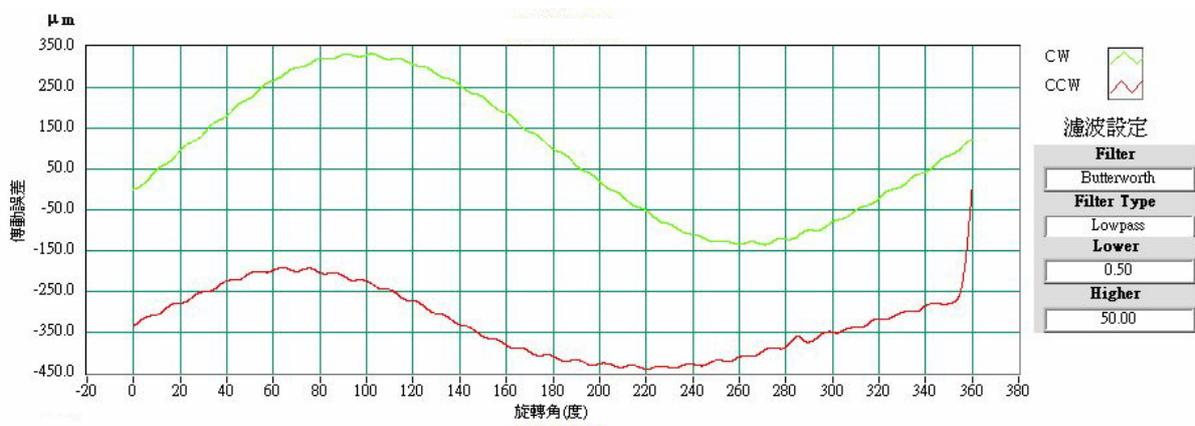


圖 5.24 傳動誤差之長波分佈圖

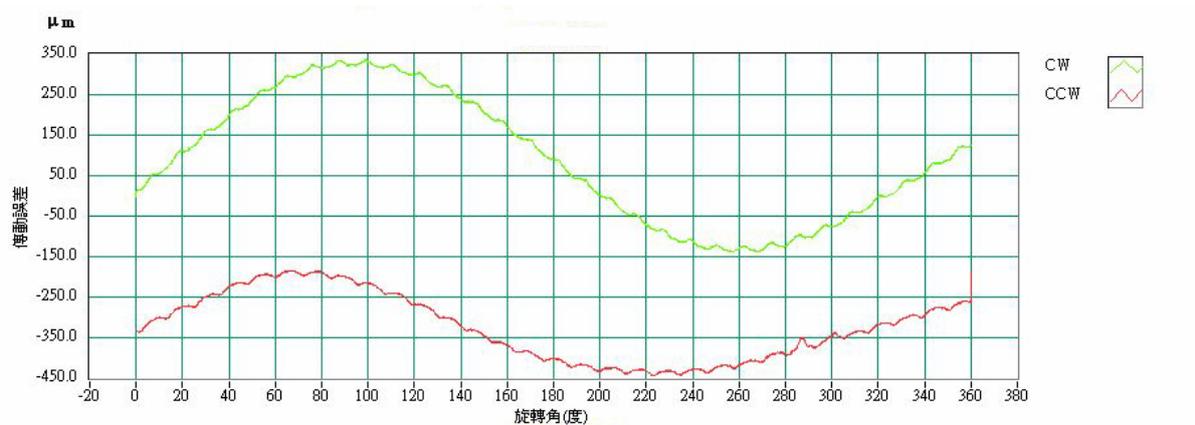


圖 5.25 總綜合傳動誤差分佈圖

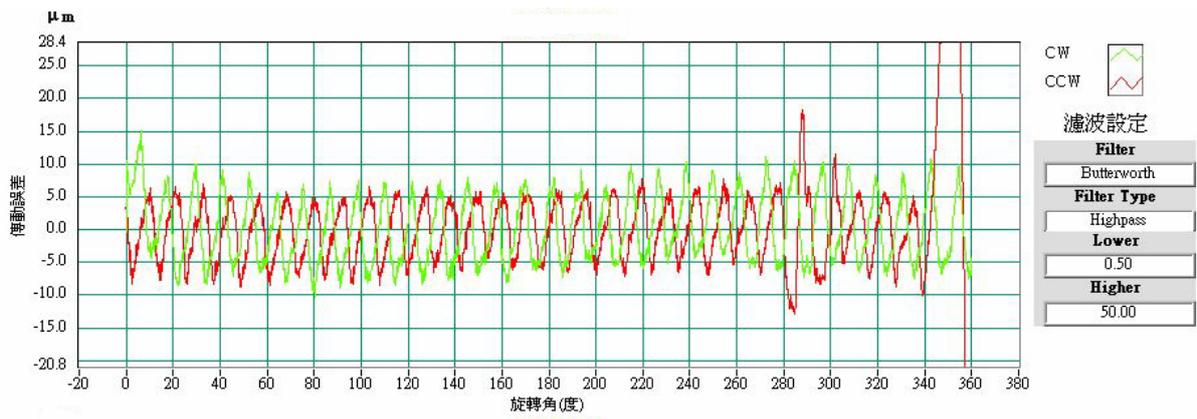


圖 5.26 傳動誤差之短波分佈圖

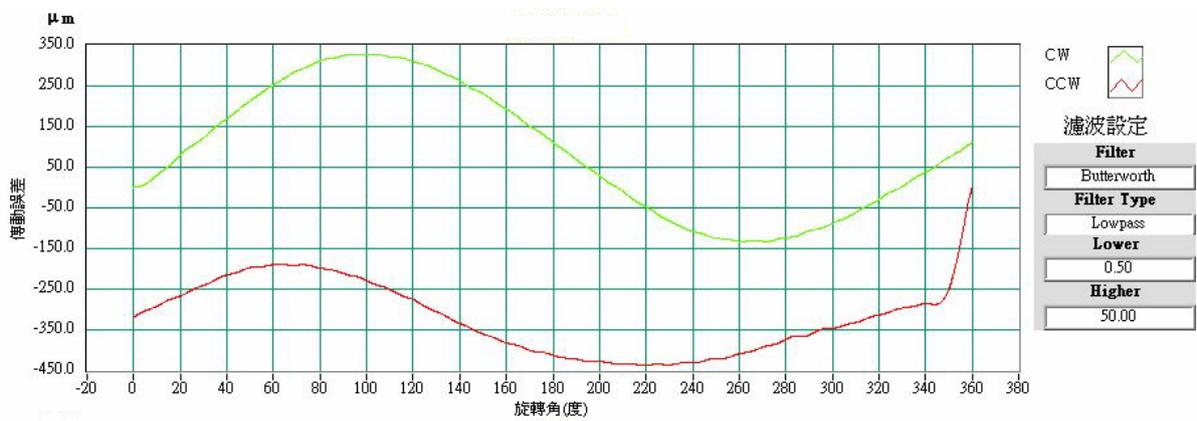


圖 5.27 傳動誤差之長波分佈圖

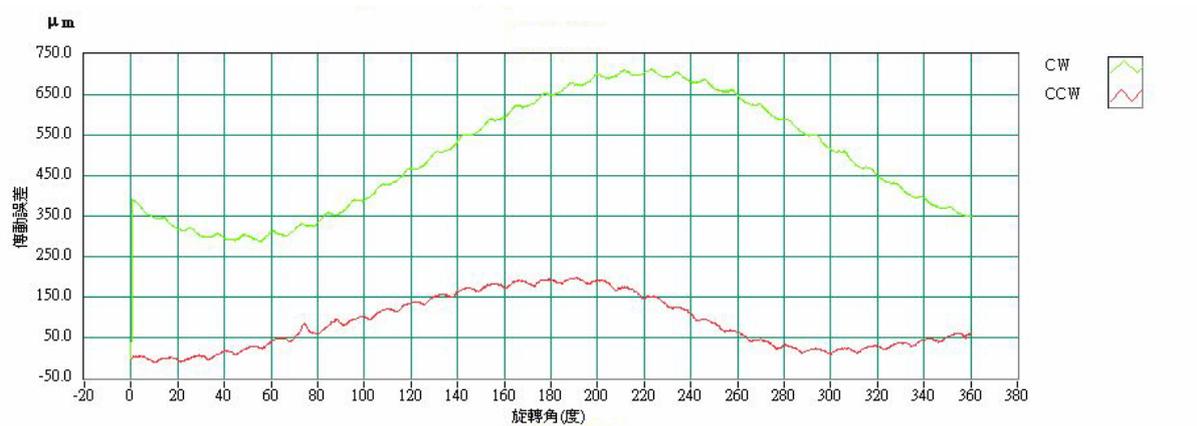


圖 5.28 總綜合傳動誤差分佈圖

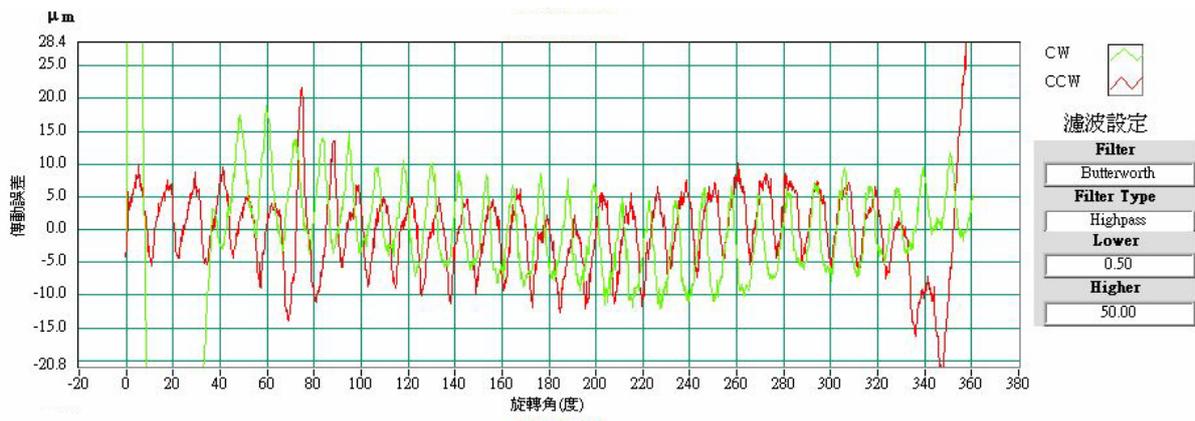


圖 5.29 傳動誤差之短波分佈圖

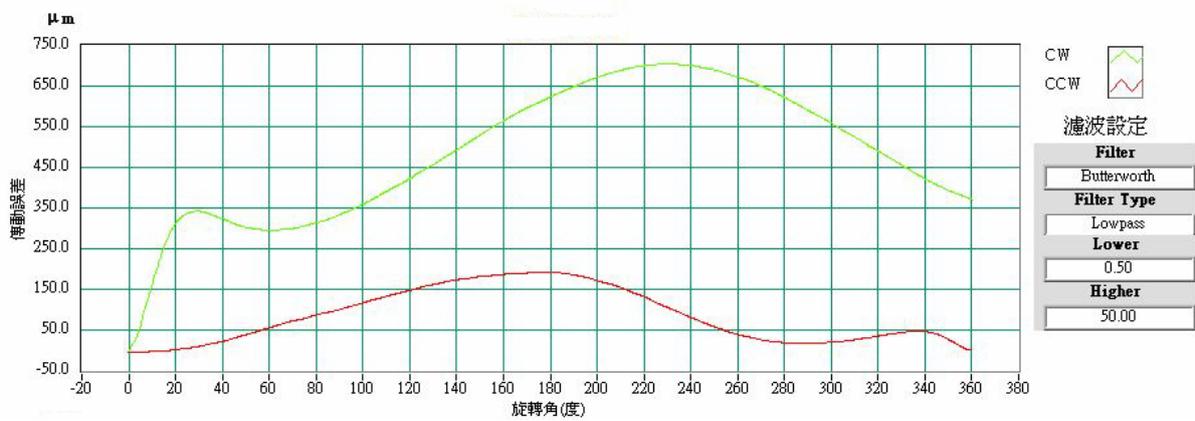


圖 5.30 傳動誤差之長波分佈圖

## 參考文獻

1. Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., “Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis- Part 1: Basic Concepts, Generation of the Pinion Tooth Surface by a Plane,” ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, pp. 337-342, 1988.
2. Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., “Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis- Part 2: Generation of the Pinion Tooth Surface by a Surface of Revolution,” ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, pp. 343-347, 1988.
3. Tsay, C. B., Sheu, W. L., and Wu, C. H., “Spur Gears with Crowned Teeth,” Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 11, No. 2, pp. 121-133, 1990.
4. 張信良，「電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬」，國立交通大學，博士論文，新竹，台灣，1996年6月。
5. Tsay, C. B., “Helical Gears with Involute Shaped Teeth: Geometry, Computer Simulation, Tooth Contact Analysis, and Stress Analysis,” ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, pp. 482-491, 1988.
6. Munro, R. G., “Optimum Profile Relief and Transmission Error in Spur Gears,” ProcIMEchE, pp. 35-42, C404/013, 1990.
7. Tsay, C. B., and Fong, Z. H., “Computer simulation and stress analysis of helical gears with pinion circular arc teeth and gear involute teeth,” Mechanism & Machine Theory Vol. 26, No. 2, pp. 145-154, 1991.
8. Fong, Z. H. and Tsay, C. B., “Kinematical Optimization of the Spiral Bevel Gears,” Trans. ASME, J. Eng. Ind., Vol. 114, No. 3, pp. 498-506, 1992.
9. Litvin, F. L., Zhang, J., Handschuh, R. F. and Coy, J. J., “Topology of Modified Helical Gears,” Surface Topography, pp. 41-58, March 1989.
10. Litvin, F. L., Chen, N. X., Hsiao, C. L. and Handschuh, R. F., “Generation of Helical Gears with New Surfaces Topology by Application of CNC Machines,” Gear Technology, pp. 30-33, January/ February 1994.
11. Lin, C. Y., Tsay, C. B., and Fong, Z. H., “Tooth Contact Analysis of Hypoid Gears,” J. of CSME, Vol. 17, No.3, pp. 241-249, 1996.

12. Chang, S. L., Tsay, C. B., and Tseng, C. H., "Kinematic Optimization of a Modified Helical Gear Train," Trans. ASME, J. of Mechanical Design, Vol. 119, No. 2, pp. 307-314, 1997.
13. Liu, S. T., "Curvilinear Cylindrical Gears," Gear Technology, pp. 8-12, May/ June 1988.
14. Dai, Y., Ariga, Y. and Nagata, S., "Study on A Cylindrical Gear with Curved Tooth Traces," Tenth World Congress on The Theory of Machine and Mechanisms, 6, pp.2337-2342, 1999.
15. Andrei, L., Andrei, G., Epureanu, A., Oancea, N., and Walton, D., "Numerical Simulation and Generation of Curved Face Width Gears," International Journal of Machine Tools & Manufacture, 42, pp. 1-6, 2002.
16. Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
17. Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C. 1989.
18. Janninck, W. K., "Contact Surface Topology of Worm Gear Teeth," Gear Technology, pp. 31-47, March/April 1988.
19. Chen, W. H. and Tsai, P., "Finite Element Analysis of an Involute Gear Drive Considering Friction Effects," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 111, pp. 94-111, 1989.
20. Ganesan, N. and Vijayarangan, S., "Static Contact Stress Analysis of a Spur Gear Tooth Using the Finite Element Method, Including Frictional Effects," Computers and Structures, Vol. 51, pp. 765-770, 1994.
21. Simon, V., "FEM Stress Analysis in Hypoid Gears," Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp. 1197-1220, 2000.
22. Simon, V., "Stress Analysis in Double Enveloping Worm Gears by Finite Element Method," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 179-185, 1993.
23. Tsay, C. B. and Fong, Z. H., "Computer Simulation and Stress Analysis of Helical Gears with Pinion Circular Arc and Gear Involute Teeth," Mechanism and Machine Theory, Vol. 26, pp. 145-154, 1991.
24. Litvin, F. L., Chen, J. S., Lu, J. and Handschuh, R. F., "Application of Finite Element Analysis for Determination of Load Share, Real Contact Ratio, Precision of Motion, and Stress Analysis," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 118, pp. 561-567, 1996.
25. Filiz, I. H. and Eyercioglu, O., "Evaluation of Gear Tooth Stresses by a Finite Element Meshing Simulation," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 117, pp. 232-239, 1995.

26. Bibel, G. D., Kumar, A., Reddy, S. and Handschuh, R., "Contact Stress Analysis of Spiral Bevel Gears Using Finite Element Analysis," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 117, pp. 235-240, 1995.
27. Bibel, G. D. and Handschuh, R., "Meshing of a Spiral Bevel Gear Set With 3-D Finite Element Analysis," Gear Technology, March/April, pp. 44-47, 1997.
28. Celik, M., "Comparison of Three Teeth and Whole Body Models in Spur Gear Analysis," Mechanism and Machine Theory, Vol. 34, pp. 1227-1235, 1999.
29. Litvin, F. L., Fuentes, A., Fan, Q. and Handschuh, R. F., "Computerized Design, Simulation of Meshing, and Contact Stress Analysis of Face-Milled Formate Generated Spiral Bevel Gears," Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 441-459, 2002.
30. Chen, Y. C. and Tsay, C. B., " Stress Analysis of a Helical Gear Set with Localized Bearing Contact," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 38, No. 8 pp. 707-723, 2002.
31. Barone, S., Borgianni, L. and Forte, P., "Evaluation of the Effect of Misalignment and Profile Modification in Face Gear Drive by a Finite Element Meshing Simulation," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 916-924, 2004.
32. Handschuh, R. F. and Bibel, G. D., "Experimental and Analytical Study of Aerospace Spiral Bevel Gear Tooth Fillet Stresses," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 121, pp. 565-572, 1999.
33. Li, S., "Gear Contact Model and Loaded Tooth Contact Analysis of a Three-Dimensional, Thin-Rimmed Gear," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 124, pp. 511-517, 2002.
34. Townsend, D. P., Dudley's Gear Handbook, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York, 1992.
35. Nutbourne, A. W., and Martin, R. R., Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design, Vol. 1, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1988.
36. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, ABAQUS/Standard 6.2, User's Manual, U.S.A., 2001.
37. R. T. Tseng and C. B. Tsay, "Contact Characteristics of Cylindrical Gears with Curvilinear shaped teeth," Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol.39, pp. 905-919, 2004.
38. J. T. Tseng and C. B. Tsay, "Mathematical Model and Surface Deviation of Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth Cut by a Hob Cutter," ASME Journal of Mechanical Design, Vol.127, pp. 982-987, 2005.

## 計劃成果自評

本研究已完成曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式之推導，並應用電腦輔助繪圖程式，描繪出曲線齒圓柱型齒輪之實體模型。曲線齒之左右齒面不相同，而且齒面寬之中央齒厚較大而兩端之齒厚較小。曲線齒圓柱型齒輪齒面上，越接近齒面寬中央區域處，其齒面越容易發生過切現象，若能避免齒面寬中央區域之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切。為了避免曲線齒圓柱型齒輪的過切，本研究亦探討曲線齒輪之壓力角和齒數與轉位的關係。由於曲線齒圓柱型齒輪具有高強度，本研究之曲線齒圓柱型齒輪，其左右齒面分別由不同的刀盤半徑所創成，因此，其齒形將具有隆齒之特性，故此曲線齒圓柱型齒輪組之接觸狀況是呈現點接觸而非線接觸，這也是本研究的創新處，由於此創新之製造方式，曲線齒圓柱型齒輪組在具有軸向裝配誤差之狀況下，才不會產生齒緣接觸現象，這是對曲線齒在應用上之一大改進。因此，所發展之曲線齒圓柱型齒輪組對於裝配誤差不敏感，且不會發生齒緣接觸的現象等優點，非常適合用於精密機械之傳動。

本研究已建立曲線齒圓柱型大小齒輪組嚙合之數學模式，並完成曲線齒圓柱型齒輪對之齒面接觸分析數學模式與電腦軟體，也利用此軟體進行分析曲線齒圓柱型齒輪對之運動誤差、接觸比及接觸齒印。曲線齒圓柱型齒輪之齒面寬中央截面為標準漸開線齒形，故在理想的裝配條件或具有中心距組裝偏差之下，齒輪組不會有運動誤差發生。本研究之曲線齒圓柱型齒輪組為點接觸，對於軸向組裝偏差所造成的運動誤差並不敏感，而且即使齒輪組具有軸向組裝偏差，其接觸點亦分佈在齒面寬中央附近，並不會產生齒緣接觸現象。齒輪組接觸橢圓長短軸之比值與刀盤半徑成正比，可依不同的設計需求，選用不同的刀盤半徑。

本計畫已發展出一套齒輪之有限單元網格建立軟體，此軟體可快速建立齒輪接觸分析有限單元模型，從建立節點座標、定義接觸面、設定邊界條件及負載，皆可自動完成，其可避免齒面幾何誤差，同時亦可節省以其他商用之 CAD 軟體建立模型時，所花費的時間與人力。此外，也利用萬用齒輪嚙合測試機所獲得之傳動誤差數據，進行齒輪組之總綜合傳動誤差分析、傳動誤差之短波及傳動誤差之長波等量測資訊，並進行檢測齒輪組之嚙合齒印，實驗和分析結果顯示，其接觸齒印只分佈於齒面寬中央附近，經由單齒腹測試之結果，驗證了曲線齒圓柱型齒輪組對裝配誤差不敏感。

本研究計畫在各年度之研究項目均依原計畫書規畫之研究項目內容、進度和目標，完成各項研究工作，所獲成果相當優良，已有兩篇論文投稿國際著名之學術期刊 ASME Journal of Mechanical Design 及 Journal of Mechanism and Machine Theory，並已刊載

[37,38]，另外亦陸續整理相關論文投稿中，未來也尋求產業界之應用與推廣。