行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

水庫密度流分層模式之發展與應用(1/3)

<u>計畫類別</u>: 個別型計畫 <u>計畫編號</u>: NSC94-2211-E-009-041-<u>執行期間</u>: 94 年 08 月 01 日至 95 年 07 月 31 日 執行單位: 國立交通大學土木工程學系(所)

<u>計畫主持人:</u>楊錦釧

計畫參與人員: 洪夢祺

報告類型:精簡報告

處理方式:本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 5 月 30 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫期中進度報告 水庫密度流分層模式之發展與應用研究(一)

Development and Application of the Layer Averaged Density Current Model in Reservoirs (1)

計畫編號:NSC94-2211-E-009-041-執行期限:94年8月1日至95年7月31日 主持人:楊錦釧教授 國立交通大學土木工程學系 計畫參與人員:洪夢祺 國立交通大學土木工程學系

一、摘要

了解庫區泥砂運動特性對水庫永續利用有 其必要性,密度流為庫區細粒泥砂輸送之重要行 爲,其運動機制受泥砂濃度、溫度、潛入與水庫 回流等因子控制,現象複雜而難以量化並預測; 隨著電腦計算能力的進步,許多三維雷諾平均方 程數值模式已應用河川、海岸等方面之模擬預 測,但仍有許多困難有待克服,諸如底床剪力、 上下游邊界等處理。爲了能更精確模擬水庫流場 與泥砂運動並兼顧可行性, 簡化泥砂運動二相流 本質、本研究擬發展一水庫密度流分層積分模 式,模擬區域將應用交錯格網並將水體分為數 層,控制方程式植入形狀函數並沿各層積分得層 平均方程式,由速度與剪力連續條件得代數方程 組,水深直接由控制方程求解,另,上下游如單 寬入流、溢洪道與排洪隧道等邊界之處理也將一 並探討。本研究希望藉由水庫密度流分層積分模 式之發展,能對水庫複雜流況與泥砂濃度分部有 更進一步之了解,而能對水庫防淤工作有所助 益,以利水庫永續利用。

關鍵詞:分層,水庫、模式

Abstract

Understanding sediment movements in reservoirs is important not only for maintaining acceptable water quality but also for extending reservoir's useful life time. The density current is often the governing process in reservoir sedimentation by transporting fine materials over long distance through the impoundment to the vicinity of the dam site. But phenomena of density currents in reservoirs are complex and dependent on turbidity, temperature, and other physical processes such as plunging, circulation, mixing, etc. With the rapid increase in computer power in recent years, several 3-D numerical models solving the Reynolds averaged equations have been developed to simulate flows in natural rivers. In order to simulate the complex flow field and the distribution of the sediment concentration in the reservoirs more precisely and feasibly, a finite volume layer averaged density current model will be developed in this study. This model is not only capable to simulate the flow field as well as suspended sediment concentration both in horizontal and vertical but also treats with variable boundary conditions such as surface spill, and bottom outlet. It is expected to aid engineers understanding the suspended sediment movement and its distribution of concentration in reservoirs. It may be helpful for determining the outlet location of sediment release, horizontally and vertically, at the dam site, etc.

二、緣由與目的

集水區泥砂一旦進入河道便會往庫區運移,最先入庫的渾水所挾帶的沉滓主要爲細泥, 由於細泥的比重輕,縱使經過沉砂設施仍無法如 同砂一樣沉澱,因此入庫的泥多以懸浮狀態向壩 址運移,在水體濁度隨著降雨持續而增加的情況 下,渾水會順勢潛入水體底層,形成上層比重較 小之清水層與下層比重較大之渾水層的水體分 層現象;根據北區水資源局於93年艾利颱風過 後在阿姆坪附近的量測資料顯示,在水位標高 220公尺處水體的濁度小於200度,但在水位標 高220公尺處水體濁度則介於50,000至200,000 度,水庫若於底層設置排砂設施能在颱洪期間排 渾蓄清,不僅降低水體濁度,並能減少泥砂淤積 而延長水庫使用年限。

影響水庫泥砂運移與淤積的條件可分為兩 種,一是影響泥砂進入水庫的質與量的因子,影 響質的因子包含泥砂粒徑、沉降速度、比重、形 狀、黏性與擴散係數等,影響量的因子包含集水 區地質與地形、降雨量與降雨強度及其季節分 布、十壤特性與植被、表十冲蝕與十地開發等; 一是影響水庫泥砂運移能力的因子,包含水庫幾 何如寬度、深度、形狀等,以及水理因子如坡降、 粗糙度、水力半徑、流量及其時間分布、流速及 其空間分布等;這些因子並非完全獨立,有些因 子對淤砂的影響也不完全明朗。後者是控制河道 河床質載(bed material load)輸送能力的主要因 素,但河床質載於水庫上游端即因流速銳減而沉 降,僅剩沖洗載(wash load)進入庫區,由此可知 水庫泥砂淤積多由前者控制;至於河床質載與沖 洗載如何區分並不明確,理論上,沖洗載為河道 中無法淤積的部分,可以 D10 作為區分,然實務 上常以 200 號篩(0.0625mm)區分,也是土壤分類 法中,砂(sand)與沉泥(silt)的界限。

目前發展中之三維模式如 Neary(1995)發展 完全三維分流模式,假設水面變化不大採固定水 面網格,考慮紊流流場特性,探討取水工流場分 布特性。Gessler et al(1999)發展三維動床模式探 討彎道流場特性與底床變動現象,考慮紊流效應 與懸浮載分布,並探討底床變動與河床沖蝕、懸 浮載沉降、河床載傳輸等機制。Ahsan and Blumberg(1999)發展三維水理模式探討湖泊內水 質問題與溫度分布,假設水庫內靜水壓分布,由 水平方向動量方程式求解水平方向流場,代入連 續方程式得到垂直方向速度,並考慮紊流擴散之 效應。Gross et al(1999)以三維水理模式 TRIM3D (Casulli and Cattani, 1994) 為基礎,加入污染質傳 輸與狀態方程式發展一半隱式(semi-implicit)有 限差分鹽度模式,模擬南舊金山灣鹽度之長期變 化。Cesare et al(2001)以二相流(two-phase flow) 之商業計算流體力學(CFD)模式 CFX-4 植入輸砂 連續方程式,藉以模擬異重流(density current)在 水庫內的運動行為與底床淤積狀況。另外,以積 分平均概念發展之擬似三維分層水理模式有 Choi(1998)採消散 Galerkin 有限元素法發展分層 平均泥石流模式,採用移動與固定格網並行方式 探討泥石流進入水庫之前進速度與淤積現象。

本計畫之主要目的擬藉由一水庫密度流擬 似三維分層模式之建立,探討深水庫之流場特性 與密度流體於水體中之運動特性,期對水庫中泥 砂運動特性有更進一步之了解,盼能對國內水庫 之永續利用有所貢獻。本計畫為三年之連續計 畫,第一年重點為水庫水理分層模式之建立,藉 由垂直內外部邊界條件之處理,解決現今三維模 式水深(自由液面)與底床糙度關聯性之瓶頸,並 由針對上游單寬流量、下游固定水位與率定曲線 等慣用邊界條件之處理,改進三維模式之實用 性;第二年重點為建立密度流體與懸浮沉滓濃度 之連動並垂直二維模式之比較,檢討密度流模式 由定性轉爲定量分析之可行性;第三年則爲實際 案例模擬及其各種邊界如上游浮動水面入流條 件,下游溢洪道、排洪隧道等出流條件之處理, 藉由密度流與非密流懸浮質泥砂運移模擬分 析,探討排砂口平面位置與高度對排砂成效之影 響,並檢討分層模式之實用性。

三、結果與討論

(一)理論基礎

1.控制方程式

水理方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{split} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (vu)}{\partial y} + \frac{\partial (wu)}{\partial z} = \\ &- \frac{1}{\rho_{w}} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{w}} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (2) \\ &- \frac{g}{\rho_{w}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z}^{z_{s}} \rho' dz \right) \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y} + \frac{\partial (wv)}{\partial z} = \\ &- \frac{1}{\rho_{w}} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{w}} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (3) \\ &- \frac{g}{\rho_{w}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{z}^{z_{s}} \rho' dz \right) \end{split}$$

$$P = \rho g(H + z_{b} - z) \tag{4}$$

傳輸方程

$$\frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{j}} (\rho \Psi U_{j}) = \frac{\partial}{\partial x_{j}} (-\rho \overline{\varphi' u'_{j}} + \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial x_{j}}) + S_{\Psi} (5)$$

2.分層模式

變數o之層積分平均可定義爲

$$\frac{1}{h}\int_{z_k(x,y)}^{z_{k+1}(x,y)}\phi(x,y,z,t)dz=\phi_{k+1/2}$$

並利用萊布尼茲積分法則(Leibnitz's rule)

$$\int_{z_b}^{z_t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_t} \varphi dz - \frac{\partial z}{\partial x} \varphi \bigg|_{z=z_t} + \frac{\partial z}{\partial x} \varphi \bigg|_{z=z_b}$$

將控制方程式對層厚度積分平均,可得層平均連 續、動量與傳輸方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(hU)_{L} + \frac{\partial}{\partial x}(hUU)_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(hVU)_{L} + (FU)_{t-b} \quad (6) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(hv\frac{\partial U}{\partial x})_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(hv\frac{\partial U}{\partial y})_{L} + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{t-b} \\ &- [gh\frac{\partial(H+z_{B}-z)}{\partial x}]_{L} - [gh\frac{\partial(\int_{z}^{z_{x}}\rho'dz)}{\partial x}]_{L} \\ &\frac{\partial}{\partial t}(hV)_{L} + \frac{\partial}{\partial x}(hUV)_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(hVV)_{L} + (FV)_{t-b} \quad (7) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(hv\frac{\partial V}{\partial x})_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(hv\frac{\partial V}{\partial y})_{L} + (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_{t-b} \\ &- [gh\frac{\partial(H+z_{B}-z)}{\partial y}]_{L} - [gh\frac{\partial(\int_{z}^{z_{x}}\rho'dz)}{\partial y}]_{L} \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho h\overline{\Psi})_{L} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h\overline{U\Psi})_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h\overline{V\Psi})_{L} + (\rho F\Psi)_{t-b} \quad (8) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(hD_{xx})_{L} + \frac{\partial}{\partial y}(hD_{yy})_{L} + (f)_{t-b} + \overline{S_{\Psi}} \end{aligned}$$

3.形狀函數

對水平方向之每一水柱,變數在垂直方向 分佈可以上、下邊界與層平均三點作二次函數 (quadratic function)近似,即

$$\phi(z) = a + bz + cz^2 \tag{9}$$

將(9)式積分並分次將上、下層邊界條件與層平均 值代入,則可將層邊界上之一次導數表示為

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z_{k+1}} = \frac{1}{\Delta z} (4\phi_{k+1} + 2\phi_k - 6\phi_{k+1/2})$$
(10)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z_{k}} = \frac{1}{\Delta z} (-2\phi_{k+1} - 4\phi_{k} + 6\phi_{k+1/2}) \qquad (11)$$

將(10)式與(11)式代入(6)~(8)式層平均方程式,則 方程式可改寫為

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(hu_{k+1/2}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_{k+1/2}u_{k+1/2}) + (Fu)_{k+1} - (Fu)_{k}$$
(12)
$$= -[gh\frac{\partial(H+z_{B}-z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(hv_{h}\frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_{h}\frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y}) + v_{v}(6u_{k+1} - 12u_{k+1/2} + 6u_{k}) - [gh\frac{\partial(\int_{z}^{z_{k}}\rho'dz)}{\partial x}]_{k+1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hv_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(hu_{k+1/2}v_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_{k+1/2}v_{k+1/2}) + (Fv)_{k+1} - (Fv)_{k}$$
(13)
$$= -[gh\frac{\partial(H+z_{B}-z)}{\partial y}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(hv_{h}\frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_{h}\frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial y}) + v_{v}(6v_{k+1} - 12v_{k+1/2} + 6v_{k}) - [gh\frac{\partial(\int_{z}^{z_{s}}\rho'dz)}{\partial y}]_{k+1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\Psi_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(hu_{k+1/2}\Psi_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_{k+1/2}\Psi_{k+1/2}) + (F\Psi)_{k+1} - (F\Psi)_{k}(14)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(h\Gamma_{h}\frac{\partial\Psi_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\Gamma_{h}\frac{\partial\Psi_{k+1/2}}{\partial y}) + \Gamma_{v}(6\Psi_{k+1} - 12\Psi_{k+1/2} + 6\Psi_{k})$$

並應用形狀函數,使層介面間保持濃度連續與擴

散通量連續,

層介面邊界條件包含剪力或通量連續

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{n-1}^{t} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{n}^{b}$$
(15)

速度或濃度連續

$$\Phi\Big|_{n-1}^{t} = \Phi\Big|_{n}^{b} \tag{16}$$

流場與傳輸方程之求解採非耦合演算法,經 由上述步驟解得流場後,在將已知流場代入傳輸 方程求解污染質濃度。最後,利用隱式(Implicit) 法於z方向分別求解u、v方程組,可得水平方向 速度於垂直方向之分布,代入非自由液面層平均 連續方程式可得垂直方向速度w

$$W_{k} = U_{2k-1} \frac{\partial z_{2k-1}}{\partial x} + V_{2k-1} \frac{\partial z_{2k-1}}{\partial y} - \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h_{m}U_{m}) + \frac{\partial}{\partial y} (h_{m}V_{m})\right]$$

$$k=2, \dots, N_{k}$$
(17)

自由液面層水位變化可表示爲

$$\frac{\mathbf{H}^{n+1} - \mathbf{H}^{n}}{\Delta t} + \sum_{m=1}^{N_{k}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}_{m} \mathbf{U}_{m}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}_{m} \mathbf{V}_{m})\right] = 0 \quad (18)$$

4.渦動滯性(eddy viscosity)與邊界條件

由於水深、流速、流量與底床糙度係數乃 相互作用影響,渦動滯性係流場函數而非流體性 質,Elder(1959)提出垂直延散係數涵式

$$v = \alpha H u_* \tag{19}$$

本研究基於此涵式,並引入曼寧公式得下列渦動 滯性概算式

$$\alpha = \frac{u_*}{3U} = \frac{\sqrt{gn}}{3H^{1/6}}$$
(20)

另,自由液面與底床之邊界濃度假設為零,且不 考慮底床與水體間之泥砂交換(淤積與再懸浮), 上游入流濃度邊界可採用觀測流量-濃度率定曲 線,下游邊界可假設濃度梯度為零。

5.數值方法

(12)~(14)式中對流(convective)項採用上風 (upwind)法

$$\phi_{e} = \begin{cases} \phi_{P} & \text{if } (\vec{v} \cdot \vec{n})_{e} > 0\\ \phi_{E} & \text{if } (\vec{v} \cdot \vec{n})_{e} < 0 \end{cases}$$
(21)

擴散(diffusive)項採用中央(central)差分法

$$(h\nu_{h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta y)_{e} \cong (h\nu_{h} \Delta y)_{e} \frac{1}{\Delta x} (\phi_{E} - \phi_{P}) \quad (22)$$

將(21)與(22)式代入(12)~(14)式,以交錯格點有限 體積法,變數配置如圖 1,對層平均控制方程式 (12)~(14)式對控制體積進行積分 $[(\rho h \overline{\Phi} \Delta x \Delta y)^{n} - (\rho h \overline{\Phi} \Delta x \Delta y)^{0}] / \Delta t + (\rho h \overline{G_{1}} \overline{\Phi} \Delta y)_{e-w} + (\rho h \overline{G_{2}} \overline{\Phi} \Delta x)_{n-s} + (\rho F_{R} \Delta x \Delta y)^{(19)}$ = $(h \overline{\Gamma_{\Phi}} \overline{\Phi_{x}} \Delta y)_{e-w} + (h \overline{\Gamma_{\Phi}} \overline{\Phi_{y}} \Delta x)_{n-s} + (\rho F_{R} \Delta x \Delta y)^{(19)}$

$$(\Gamma_{\Phi}\Phi_{z}\Delta x\Delta y)_{t-b} + \int_{V}S_{\overline{\Phi}}dxdy$$

可得有限體積差分通式

$$\begin{split} A_{P} \phi_{P} &= A_{E} \phi_{E} + A_{W} \phi_{W} + A_{N} \phi_{N} + A_{S} \phi_{S} \\ &+ A_{t} \phi_{t} + A_{b} \phi_{b} + S^{\phi} \end{split} \tag{20}$$

其中, ϕ 對應x、y動量方程式與傳輸方程式分別 爲u、v與 ψ ,而A_P、A_N、A_E、A_S、A_W、A_t、A_b、 等係數可由(12)~(14)式、(21)與(22)式計算而得。

(二)模式測試

水庫密度流分層模式之發展有其實際上之貢 獻與困難度,目前模式仍處與建構與測試階段, 僅就簡單河道測試案例展現如後:假設一矩形渠 道長5km、寬100m、糙度係數0.035、底床坡降 1/2000,通過流量39.87cms,正常水深3.0 m,α 値經(20)式概算為0.0304。上游邊界速度採用使用 邊界入流量平均分配於該迭代之通水斷面,下游 邊界則採用率定曲線,亦即速度之流向梯度為 零,底床採不滑移邊界,側壁則採滑移邊界。

起始條件採用正常水深3.0m與均勻流速分佈 1.329m/s,計算至收斂之流速剖面沿河道流量發 展比較如圖2。藉助於層邊界速度與剪力連續條 件之幫助,速度剖面於x=500m處即已接近二次曲 線,再往下游處前進則有少許修正,此案例雖然 為顯現河道入口端該有之發展段,究其原因在於 本模式雖考慮渦動係數爲流量、水深、糙度之涵 式,但仍未考慮垂直速度梯度對渦動係數之貢 獻,因此,速度剖面雖未展現發展段特性,但仍 符合模式之假設。

其次測試模式水深收斂之功能,所有設定如 同前述案例,包含起始條件,僅邊介入流量由 39.87cms降至30.0cms,相對應正常水深由3.0m降 至2.53m,模擬成果如圖3。從圖中可以看出,水 面由起始水深逐漸收斂至t=5000s時,水面剖線由 下游處之2.42m逐漸增至上游端之2.65m,與正常 水深2.53m接近;模擬結果並未出現閘門啓閉之 正負湧浪現象,其原因在於邊界處理方式,本研 究係將邊界入流量平均分配於任意時刻任意迭 代之通水斷面積,其處理方式僅會出現水面逐漸 下降之連續現象,未出現湧浪係合理之反應。

四、成果自評

本研究目前已進行水理模式於河道之測試,

- 接下來將著手進行密度流子模式之建立與測
- 試,截至目前為止,進度尙稱符合預期目標。

五、參考文獻

- 俞維昇(1991),水庫沉滓運動特性之研究,國 立台灣大學土木工程學研究所博士論文。
- 經濟部水利處水力規劃試驗所(1999),阿公店 水庫防淤操作模型試驗及檢討計畫報告。
- 國立交通大學防災工程研究中心(2003),水庫 沉滓運移模式研究與應用(2/2)-以石門水庫 為例,經濟部水利署委託研究報告。
- 謝德勇(2003),二維水理、污染質傳輸及沉滓 運移模式之研發與應用,國立交通大學土木 工程學系博士論文。
- Ashan, A.K.M.Q., Blumberg, A.F., (1999), "Three-dimensional hydrothermal model of Onondaga lake, New York", J. Hydraulic Eng., ASCE, 125(6), 912-923.
- Bournet, P.E., Dartus, D., Tassin, B. and Vincon-Leite(1999), "Numerical investigation of plunging density current", J. Hydraulic Eng., ASCE, 125(6), 584-594.
- Casulli, V., Cattani, E. (1994), "Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three dimensional shallow water flow", Comp. & Math. with App., 27(4), 99-112.
- Cesare, G.D., Schleiss, A. (2001), and Hermann, F., "Impact of Turbidity Currents on Reservoir Sedimentation", J. Hydraulic Eng., 127(1), 6-16.
- Choi, S.U. (1998), "Layer-averaged modeling of two dimensional turbidity currents with a dissipative Galerkin finite element method, Part I: Formulation and application example", J. Hydraulic Res., 36(3), 339-362.
- Choi, S.U. (1999), "Layer-averaged modeling of two dimensional turbidity currents with a dissipative Galerkin finite element method, Part II: Sensitivity analysis and experimental verification", J. Hydraulic Res., 37(2), 257-271.
- Gessler, D., Hall, B., Spasojevic, M., Holly, F., Pourtaheri, H. and Raphelt, N. (1999), "Application of 3D mobile bed, Hydrodynamic model", J. Hydraulic Eng., ASCE, 125(7), 737-749.
- Gross, E.S., Koseff, J.R., Monismith, S.G. (1999), "Three-dimensional salinity simulations of south San Francisco Bay", J. Hydraulic Eng., ASCE, 125(11), 1199-1209.
- 13. Neary, V.S. (1995), "Numerical modeling of diversion flows", Ph.D. Thesis, Univ. of Iowa.

- Neary, V.S., Sotiropoulos, F. and Odgaard, A.J. (1999), "Three-dimensional numerical model of lateral intake inflows", J. Hydraulic Eng., ASCE, 125(2), 126-140.
- Tsai, T.L., Yang, J.C. and Huang, L.H. (2001), "An accurate integral-based scheme for advection diffusion equation", Comm. in Num. Meth. in Eng., 17, 701-713.





圖 2 速度剖面沿河道流向之發展



