

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

網路虛擬高中數學學習館—子計畫四： 數學問題的剖析及其在網路上呈現之研究（三）： 三角函數/圓錐曲線/極限

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC89 - 2511 - S - 009 - 012 -

執行期間：88 年 8 月 1 日至 89 年 7 月 31 日

計畫主持人：林朝枝教授

共同主持人：劉晉良副教授

馮潤華副教授

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立交通大學應用數學系

中 華 民 國 八 十 九 年 十 月 十 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

網路虛擬高中數學學習館—子計畫四： 數學問題的剖析及其在網路上呈現之研究（三）

Analysis of mathematical problems and their presentations in networks (III)

計畫編號：NSC 89-2511-S-009-012

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：林朝枝教授 國立交通大學應用數學系

共同主持人：劉晉良副教授 國立交通大學應用數學系

馮潤華副教授 國立交通大學應用數學系

計畫參與人員：聶澎澎老師 國立建中補校

黃國忠老師 台北縣明德中學

莊添丁老師 實驗中學

林嫻芳、廖凡捷 國立交通大學應用數學系

一、中文摘要

本計畫為「網路虛擬高中數學學習館」整合型計畫數學科學科內容三個子計畫之一：數學問題的剖析及其在網路上呈現之研究—三角函數。本計劃過去一年的研究中，已針對高中數學的「三角函數」單元內容提供適當的觀念及解題導向數學問題，並規劃適合本單元學習的數學實驗與教學模型，以提升學生的學習興趣。

關鍵詞：三角函數、題庫、數學辭典、問題求解

Abstract

This project is one of the three mathematical sub-projects on the joint project entitled "Virtual Mathematical High School". In the past year, we have selected "Trigonometry" as the topic to design problems, experiments and teaching models to enrich the web learning environment & to improve the interest of student learning. Specifically, we have edited the related content of "Trigonometry", developed test-item bank, mathematical dictionary, mathematical experiments and teaching models.

Keywords: Trigonometry、test-item bank、mathematical dictionary、problem solving

二、緣由與目的

本計畫為「網路虛擬高中數學學習館」整合型計畫數學科學科內容三個子計畫之一：數學問題的剖析及其在網路上呈現之研究—三角函數。其目的在探討於個人建構式學習之教育原理導引下，以問題求解(solving-problem)之學習模式將高中數學部分題材：三角函數、圓錐曲線、極限，分攤成三年，逐次呈現在網路虛擬學習環境裏。以方便師生們能夠在進行高中數學的教學與學生自我學習評量活動中來採用。希望學生不再害怕數學課程，增強喜歡學習數學。參考文獻[4,8]。今年是計畫之第一年，題材為高中數學一年級中的一個教學單元：三角函數。

由參考文獻[29], Polya 提出以問題求解(solving-problem)方式來解數學問題。問題求解之一般處理原則可歸納出下列四個步驟：

(1) 瞭解問題。

- (2) 構想一個求解計畫。
- (3) 實行這個求解計畫。
- (4) 回顧整個求解計畫實施過程並加以檢討。

雖然數學問題大多只有一個明確答案，但是不同的求解計畫可能出現不同的解題過程。

三、結果與討論

在這一年來，每星期三下午，經過多位高中老師與應數系同仁長期聚會討論下。我們將高中數學一年級中的一個教學單元：三角函數等題材，完整地製作成 Word 檔。再由本整合行計畫的系統與網路工作人員轉換成 HTML 檔。讓這些題材能快速呈現在網路的網頁上，以供給有興趣的師生使用於教學研究與輔助學習等每個教學活動上。

本教學單元共分成十九個小節：

- (1)：為什麼要學三角函數。
- (2)：三角函數的起源。
- (3)：銳角的三角函數。
- (4)：三角恆等式。
- (5)：認識三角函數表。
- (6)：簡易三角測量與查表。
- (7)：廣義角的三角函數、換角關係式。
- (8)：線性內差法。
- (9)：面積公式、正餘弦定理、平行四邊行定理、中線定理、投影定理、計算分角線長。
- (10)：三角測量與正餘弦定理的應用。
- (11)：弧度、弧長公式、扇形面積公式。
- (12)：三角函數的圖形、振幅、週期。
- (13)：和角公式。
- (14)：倍角、半角公式
- (15)：和積互化公式
- (16)：正餘弦函數的疊和與極值。
- (17)：三角函數的應用---隸美弗定理、1 的 n 次方根。
- (18)：反三角函數。
- (19)：三角方程式、三角不等式。

另外，在系統製作裏的“玩數學”

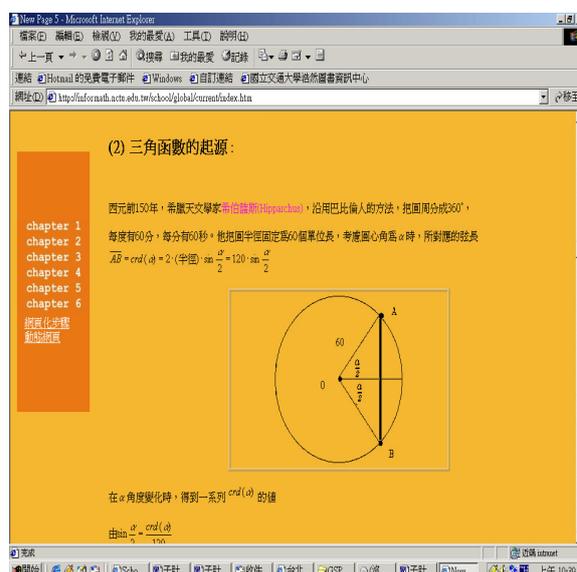
這個資料檔，由多位新竹與台北地區高中老師提供了“以圖為證”(proof without word) 的相關問題中，存放了幾個有關於三角函數之例子。如：倍角公式、半角公式、三倍角公式、和差化積公式等。

本年度本計畫執行之具體成果包括：編修「三角函數」教材內容、測驗題庫、數學字典、數學實驗及虛擬數學教室、數學資訊廣場內容充實，詳細內容說明如下：

1. 教材內容編修

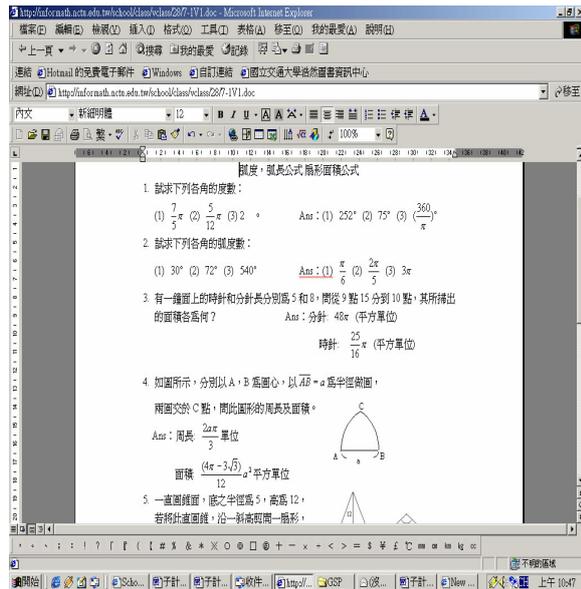
自八十七學年度起高中數學教材開放民間編寫，但平板教科書修正不易，本計畫的研究者想把教材呈現在網路上，充分利用網路的優點。我們希望把教材出版呈現，將來「數學學習館」開放後由全國教師使用，並參與意見上傳，集思廣益，隨時修改，讓這個高中數學館做為全國教師交流分享討論的園地。

本部分計畫之完成包括教材地位分析、教材內容的重新編寫及專家修審，其嚴謹程度，我們戲稱為「三讀定稿」。茲擷取網頁上所呈現教材內容其中的一頁如下以供參考：



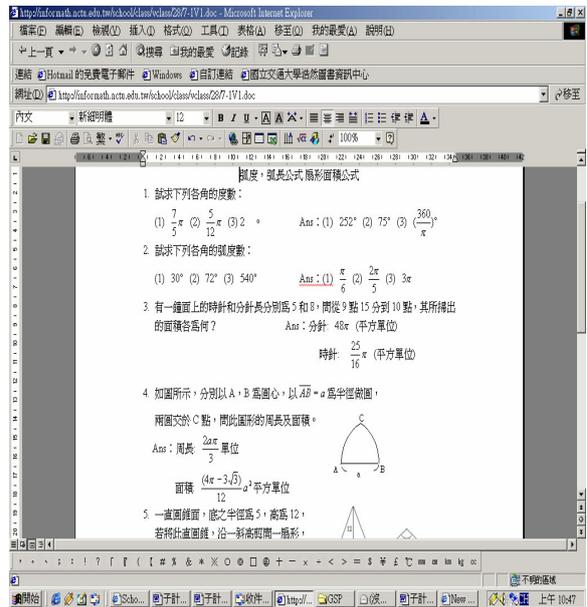
2. 建構測驗題庫系統

本計畫為「三角函數」單元設計前測、中測、及後測之試題，作為形成性評量試題，每一章的最後並提供綜合測驗，以作為該章的總結性評量試題，目前共發展出題庫及題目搜尋。測驗題的設計嘗試兩層式測驗試題的研發，以診斷學生錯誤概念的產生原因，作為導正錯誤概念之依據。茲擷取網頁上所呈現題庫其中的一頁如下以供參考：

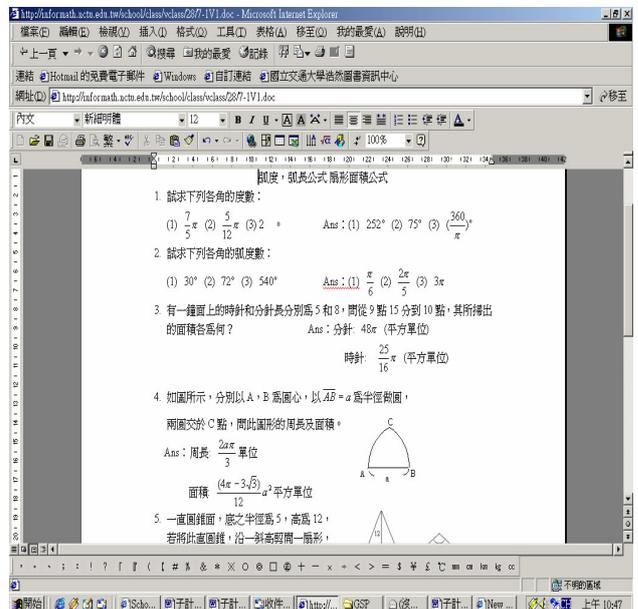


3. 數學字典

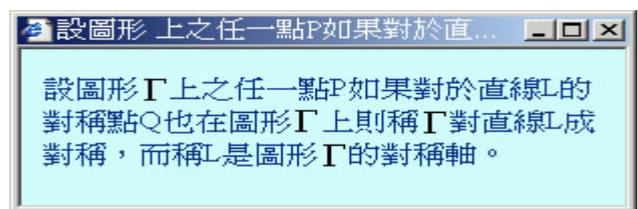
本計畫規劃電子字典功能，使學生能在網頁上以輸入關鍵字的查詢方式，找到重要數學名詞的意義與概念，目前已具有 57 個名詞的查詢功能，本字典力求名詞說明容易了解，包含提供例子說明而非只是生硬的定義說明，使學生能透過此系統達到真正學習的目的。網頁上的數學辭典頁面呈現如下：



首先輸入要查詢的關鍵字(如:對稱軸)，按查詢後即出現查詢的結果如下頁：

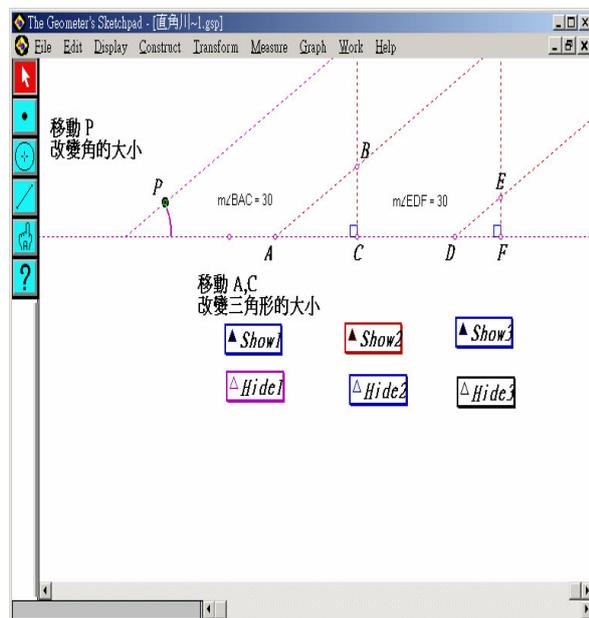


再進一步點選想知道項目的簡短說明等，即可查的所需資料：



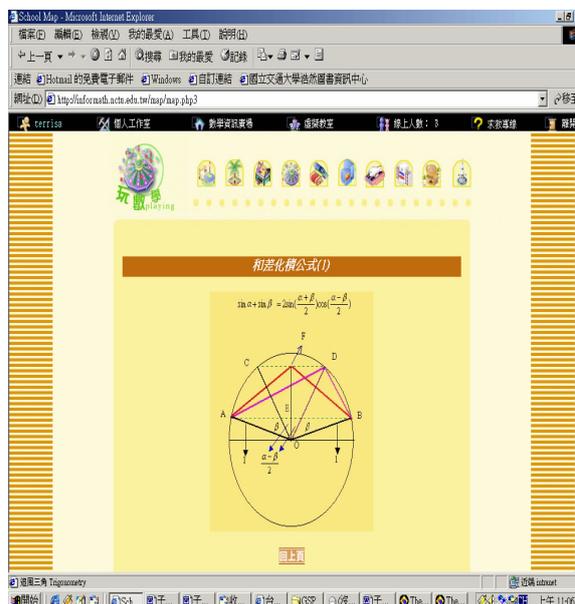
4. 數學實驗

在相關的教材內容中,我們加入一些簡單的數學實驗,讓使用者於操作中培養數學理念,本計畫目前已完成的數學實驗包括輾轉相除法原理、河內塔的實驗、斜率的概念、求 $X^3+X-5=0$ 的十根近似值、二次函數圖形的了解以動畫依序出現,綜合除法的流程以軟體顯示。以下是一個三角函數的數學實驗頁面呈現：



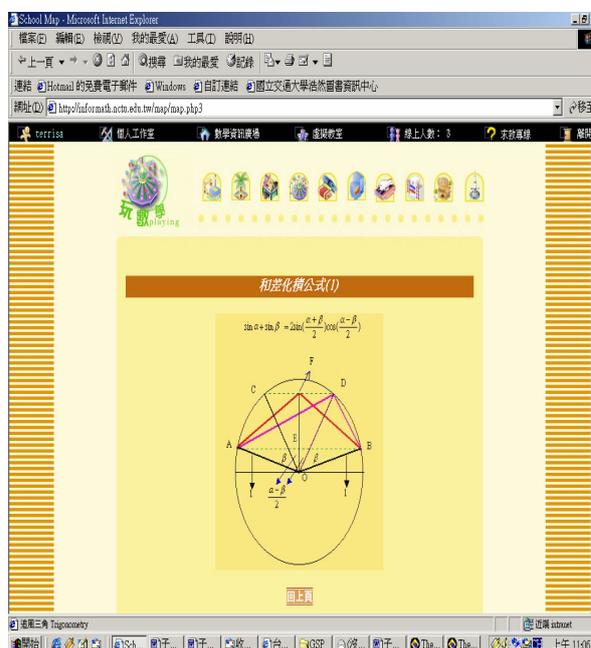
5. 虛擬數學教室

網際網路雖然提供眾多學習及使用資源,但正如一個生手擁有一堆工具而不知如何去使用這些工具,使網路資源無法發揮其極致的功能,因此本計畫亦根據研發的教材教具,發展教學模型(Teaching models)以供教師實際利用。目前規劃完成之虛擬教室包括追風三角、以圖為證玩數學。以下是三角函數以圖為證其中一個頁面：



6. 數學資訊廣場

本計畫也規劃提供相關數學資訊,以利師生利用,這些重要資訊包括生活中的數學、大自然的數學、數學音樂&圖形、玩數學、數學辭典、數學軟體、數學網站搜集、數學史、數學欣賞、數學解題競賽。未來各資訊將加入教學使用時機及新增入虛擬學習教室之功能,以使本部分資訊達到充分而有效的利用。



四、計畫成果自評

以下是目前使用過『網路虛擬高中數學學習館』的師生們對我們所的一些建議，綜合整理後也收錄在此份報告中以做為我們日後改進的目標。

『網路虛擬高中數學學習館』的建立，除了網頁系統建構要求有完整功能與容易使用介面是最急需外，也要後續的服務工作。如：教材、測驗題庫之更新、問題的回答與討論。這都要熱心人士投入長時間來耕耘。同時，參與問題討論者應注意一點。提出或解答問題時，要盡可能先經過細心思考後，才把問題或解答上傳放在網頁上。這樣比較容易進入參與討論圈內，以快速達到討論問題之目的。終究討論問題要有別於網路的聊天室。

一些希望以後能達成的建議事項：

- (1) 教材編撰能簡化、縮小篇幅、減少網頁傳輸時間。
- (2) 測驗題庫分級：容易、適中、較難、難題。
- (3) 參考答案與回覆問題，盡量詳細。
- (4) 要求作習題、應有思考解題與計算過程（只要求答案會有反效果，目前已存在之數學教學網站大多只給答案）。
- (5) 系統維護人員應深入研討使用相關軟體，以增強網頁功能，達到自我學習目標。（如 windows media player, mathematica, mathcad, matlab, maple, GSP . .）
- (6) 設計出可由使用者擷取各自所需文件之網頁，使用者不想要的就不傳過來。
（如 XML 之使用於 Flash。 ）

最後，我們期望『網路虛擬高中數學

學習館』，在大家共同努力不懈下，兩年後會會出現著輝煌的成果。

五、參考文獻

- [1] 黃武雄 *老師，我們去哪裡？* 人本教育基金會發行
- [2] 舒湘芹等譯 *高觀點下的初等數學* F. Klein 原著第一、二、三卷 九章出版社
- [3] 丘成桐(1980), *數學與數學教育*, 崇基學院。
- [4] 余宜芳, *念不好數學, 不是他們的錯*, 遠見, 77, 1992, 134-137。
- [5] 郭重吉(民 81), *從建構主義的觀點探討中小學數理教學的改進*, 科學發展月刊, 第 20 卷, 第 5 期, 548-570。
- [6] 甯自強(民 82), *「建構式教學法的教學觀」由根本建構主義的觀點來看*, 國教學報, 5 期, 頁 33-41。
- [7] 陳德懷(民 84), *智慧型電腦輔助學習系統的研究與發展*, 科學發展月刊, 第 23 卷, 第 5 期, P456-468。
- [8] 葉偉文/譯, *幹嘛學數學?* S. K. Stein, *Strength in numbers*, 離銘圖書有限公司。
- [9] *“數學教育”學門資源整合規畫資料* 國科會科教處 民 85 年
- [10] *行政院國科會數學教育學門資源整合規畫資料*, 民 85。
- [11] *行政院國科會科學教育學門資源整合規畫資料*, 民 85。
- [12] 郭重吉(民 85), *科學哲學的省思*, 教育研究雙月刊, 49 期, 頁 16-24。
- [13] 曾志朗、林福來、邱貴發、陳德懷、陳瓊森、陳一平、郭允文(民 85), *美曰「電腦輔助學習」訪問重點報告*, 科學發展月刊, 第 24 卷, 第 7 期,

- 563-578。
- [14] 曾志朗 (民 86) , *網路上的科學教育, 建構與教學* 中部地區科學教育簡訊 , 第 10 期 , (見 <http://sewww.ncue.edu.tw/c&t/issue9-10/v10-2.htm>) 。
- [15] 丘成桐(1998), *數學的內容, 方法和意義*, 北京大學百年校慶
- [16] *高級中學數學課程標準*, 教育部編印, 民 87。
- [17] 李虎雄、陳冒海、朱亮儒 (民 87) *高級中學科學課程研究計畫 - 數學科研究報告*, 台師大科教中心。
- [18] 林松山(民 87), *軟體工業與數學教育研討會論文集*, 交通大學應數系
- [19] 吳美滿 (民 87) , *波利亞的解題步驟對國中比例單元教學效果之研究*, 台師大科教所碩士論文。
- [20] 鄭毓信(1998), *數學教育哲學*, 九章出版社(台灣的數學教育 396-404)
- [21] Black, J.B., & McClintock, R.O. (1996). *An interpretation construction approach to constructivist design*. In B. Wilson.(ed.) *Constructivist learning environments*, Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.
- [22] Charles, R. & Silver, E. (1989). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- [23] Duffy, T.M., & Jonassen, D.H., (1992) *Constructivism and the technology of instruction*. Hillsdale, NJ: LEA.
- [24] Elk, S.B., (1995) *The cross product of two vectors is not just another vector-a major misconception being perpetuated in calculus and vector analysis textbooks*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 28, 531-543.
- [25] Macgregor, M., & Stacey, K., (1997) *Students' understanding of algebraic notation: 11-15*. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19.
- [26] McAllister, H.C.(1995) *Problem Solving and Learning, Common Sense problem solving and Cognition Research*, available from the website <http://www2.hawaii.edu/suremath/cognitive.html>
- [27] Margolis, H. (1987) *Patterns, Thinking and Cognition*, The University of Chicago Press.
- [28] Newell, A. (1990) *Unified Theories of Cognition*, Harvard University Press.
- [29] Owston, R.D., (1997) *The world wide web: A technology to enhance teaching and learning?* Educational Researcher, 26, 2, 27-33.
- [30] Polya, G. (1945) *How to Solve it - A new aspect of mathematical method*, Princeton University press.
- [31] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- [32] Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Assoc.
- [33] Sternberg, R. J. (1984) *Beyond IQ*, Cambridge University Press.
- [34] Sun, C. T. & Chou, C. (1996). *Experiencing CORAL: design and implementation of distant cooperative learning*. IEEE Transactions on Education, 39(3), 357-366.
- [35] Treagust, D.F., Duit, R., & Fraser, B.J. (1996). *Improving teaching and learning in science and mathematics*. New York: Teachers College columbia University.

- [36] Taylor, P.C., & Fraser, B.J. (1991, April). *CLES: An instrument for assessing constructivist learning environments*. Paper presented at the annual meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Lake Geneva, WI.
- [37] Tsai, C.-C. (1998). Science learning and constructivism. *Curriculum and Teaching, 13*, 31-52.
- [38] Tsai, C.-C. (2000). *Relationships between student scientific epistemological beliefs and perceptions of constructivist learning environments*. *Educational Research, 42*(2).
- [39] Whimbey, A. (1987) *Think Aloud Pair Solving - TAPS. The key to higher Order Thinking in Precise Processing*, *Educational Leadership, 42*(1), 66-70.
- [40] *21st Century of problem solving, The Next generation of problem solving* (<http://www2.hawaii.edu/suremath/>)
Illinois Mathematics and Science Academy (<http://www.imsa.edu/>)

六、附件

1. 建構學習與問題求解的實例

在積分技巧與積分公式章節中,常出現過下面這一個習題。它是與三角函數有關的證明題。

求證： $\int_0^{\delta/2} \cos^n x \, dx = \int_0^{\delta/2} \sin^n x \, dx$ ，對所有正整數 n 。

題意相當清楚。解題計畫就隨著個人的數學背景會有所差異，在共同討論的學習情境中，自然地將會有所不同的解題計畫。當然，也就會出現不同解題過程。以

下提出幾個可能的解題計畫。

- (1) 此題一般出現在有關三角函數積分公式應用章節裏。大都以習題方式出現。先要求使用積分公式，把整數 n 遞減，算出其中一個積分。同理，算出另外一個積分。兩者相等，得證。

所使用積分公式為：

$$\int \sin^n x \, dx = -(\sin^{n-1} x \cos x)/n + (n-1)/n \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = (\cos^{n-1} x \sin x)/n + (n-1)/n \int \cos^{n-2} x \, dx$$

- (2) 利用三角函數性質， $\cos x = \sin(\delta/2 - x)$ 。兩邊取 n 次方，在兩邊做積分。右邊以 $y = \delta/2 - x$ 做變數變換後，整理會得到左邊。得證。
- (3) 使用數學歸納法。先檢查 $n=1, n=2$ 。再使用積分公式，把整數 n 每次遞減 2。
- (4) 由積分定義，適當取正規分割，可讓兩個三角函數的上、下和各自相等。或取兩邊黎曼和相等。

不同思考路徑將有不同解法。此為問題求解再建構主義下的學習模式常遇到的情形？

再舉一個可做為教學實驗的例子。曾經在網路上瀏覽，想找一找已經由熱心人士存放在其網站上的教學軟體與遊戲軟體，是否可以用來做為「問題求解」學習環境的例子？這裡選出一個益智遊戲軟體---推箱子為例。

題意很清楚，規則很簡單。

解題計畫就不是一目了然。一般需要不斷嘗試錯誤後，才能達到目的。此類遊戲（或已出版的相關數學教學軟體）似乎可在建構學習模式下，做為一個實驗性學習課程活動之實例。從學習活動中浮現出簡單邏輯思考模式。如：

- (1) 歸納出哪種箱子型態 (pattern) 不能出現，否則無解。
- (2) 比較彼此解法之優缺點。
- (3) 哪條路徑步驟最少。
- (4) 如何設計較難關卡？（反方向設計方式是否可行？）。

當然，實驗性自我學習活動，主持者可給以參考答案，幫助學習者的思考解題過程或做為檢討學習成果之依據。

舉出兩個益智遊戲軟體---推箱子範例。

同樣地，河內塔(hanoi)遊戲軟體也是一個教學活動例子。