

行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

飛刀創成之蝸輪與 ZK 型蝸桿之接觸特性研究(1/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-009-016-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程研究所

計畫主持人：蔡忠杓

計畫參與人員：陳冠宇,張志榮,黃俊諭,蘇政豪

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 6 月 1 日

一、中英文摘要

蝸桿蝸輪組(Worm Gear Set)可以克服一般傳統齒輪組在特定的模數下齒數太少時，齒輪齒面會產生過切(Undercutting)現象之問題，此外，蝸桿蝸輪組可提供傳統正齒輪及螺旋齒輪均無法提供之大減速比功能。也可增加蝸桿蝸輪組之接觸比(Contact Ratio)，除了可以提高其定位精度與穩定度，同時亦可有提高負荷之優點，使之更能廣泛地應用於各種傳動系統之環境。為了提高蝸桿蝸輪組之接觸比，本研究將蝸桿型滾刀以非 90° 之交錯角創成機構來切製蝸輪。此種方法增加了蝸桿蝸輪組之接觸比，使得傳動的結構更為緊湊，提供更高的負載。

本專題研究計畫為三年研究計畫之第一年(93年8月至94年7月)，係利用齒輪創成原理以及電腦輔助設計技術，針對飛刀創成之蝸輪與具直邊磨輪所創成之 ZK 型蝸桿在非 90° 交錯角之嚙合條件下，進行此蝸桿蝸輪組之齒面數學模式的建立。此外，再根據所推導之非 90° 交錯角蝸桿蝸輪組齒面數學模式，探討其齒面過切發生之條件式，計算求出蝸輪齒面上的過切線，並探討蝸桿蝸輪組在不同設計之參數下，其齒面過切的狀況。

關鍵詞：齒輪創成原理，飛刀，磨輪，ZK 型蝸桿，蝸桿蝸輪組，齒面過切，接觸比。

Abstract

Worm gear sets can conquer the tooth undercutting problem, which occurs due to the small number of teeth of conventional gear sets with some special modules. Besides, worm gear sets can provide high gear ratio which spur and helical gear sets can not offer. In the mean time, the worm gear set can increase the contact ratio which not only improves the orientation precision and transmission stability, but also increases the loading capacity of the worm gear set. These characteristics enables the worm gear set to be apply to various transmission systems. In order to increase the contact ratio of a worm gear set, the worm gear is generated by a worm-type hob cutter with a non-ninety-degree crossing angle. This kind of worm gear generation increases the

contact ratio of worm gear sets, and makes the transmission mechanism more compact, and provides a higher loading ability.

This is the first year's research report of a three-year NSC research project. In this research, a mathematical model for the worm gear, which is generated by a fly cutter, meshes with the ZK type worm with a non-ninety-degree crossing angle is developed based on the theory of gear generation and the technique of computer aided design. According to the developed mathematical model of the tooth surface, the conditions of tooth undercutting can be obtained and the undercutting line on the tooth surfaces can be calculated and plotted.

Keyword : Theory of Gear Generation, Fly Cutter, Grinding Wheel, ZK-type worm, Worm Gear Set, Tooth Undercutting, Contact Ratio.

二、前言

蝸桿蝸輪組是工業上常用的空間交錯軸(Crossed Axes)傳動機構，其特性主要在於傳動減速比高、工作平穩和結構緊湊等，因此，被廣泛地應用在各種需要大減速比的機構中。一般的齒輪在設計上是以其節圓面(Axode)為假想面，在節點(Pitch Point)或節線(Pitch Line)處以純滾動來傳遞動力，而節圓(Pitch Circle)半徑是依齒輪齒數和模數而決定。然而，在特定的模數下當齒數太少時，齒輪之齒面會產生過切的現象，因此傳統正齒輪及螺旋齒輪均無法提供單段(One Stage)大減速比的功能。蝸桿之節圓半徑與蝸桿齒數無關，使得蝸桿蝸輪組的單級傳動可以實現較大之傳動減速比，實際應用上可達約 8 至 100 之間。由於蝸桿蝸輪組具有單級大減速比的特性，因此可代替多級之一般齒輪傳動所能達到之減速比，具有可減少齒輪對之數目以及簡化傳動機構之特點。此外，蝸桿蝸輪機構還有自鎖(Self Locking)的特性，當蝸桿導程角小於蝸輪組之摩擦角時，該蝸桿蝸輪組即可具有自鎖之作用。一般齒輪組傳遞動力之齒面接觸多靠近在節點附近並以滾動為主，而蝸輪組在傳遞動力時則以滑動為主，因此，蝸輪組在工作時相當平穩且噪音較小。又由於建築高樓化的趨

勢，電梯中最常使用的蝸桿蝸輪減速機構之需求也日益增加。此外，傳統的汽車轉向機構與連續分度機構也皆以蝸桿蝸輪之傳動機構做為基礎設計。近年來，隨著工業產品對其定位精度之要求越趨升高，例如雷達及大型天文望遠鏡所需的赤道儀及 DVD 碟盤與讀寫頭之定位機構等，因此，定位機構之傳動也多採用蝸桿蝸輪機構。

在 1989 年 Zheng[2][3] 等人，利用一條動線(Generating Line)在空間運動所產生之軌跡面，用來表示蝸桿之齒面，並討論其製造加工程序。Bosch[4]於 1988 年提出利用電腦數值控制(CNC)的磨輪機來製造低成本且具有高精度之蝸桿的方法。本專題研究所探討的蝸桿係以磨輪機構來創成 ZK 型蝸桿。然而，與之配對的蝸輪係利用 ZK 型蝸桿滾刀數學模式所創成之蝸輪，兩者夾以非 90° 交錯角進行嚙合運動。因此將利用 Litvin[5][6]所發展的齒輪原理以及電腦輔助設計之技術，針對此非 90° 交錯角之蝸桿蝸輪組，進行其齒面數學模式的建立與傳動特性的研究。

三、研究方法與結果

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，今年度為本研究計畫之第一年(93年8月至94年7月)。本專題研究計畫第一年預期完成之工作項目如下：(一)完成磨輪及滾刀參數設計及其幾何數學模式之建立。(二)建立由直邊磨輪所創成之單包絡 ZK 型蝸桿及由飛刀所創成之蝸輪齒面之數學模式。(三)完成蝸桿蝸輪組之齒面分析與繪圖之電腦軟體。(四)完成蝸輪齒面過切條件式之探討與電腦分析軟體之設計。

至目前為止，本專題研究計畫第一年已經完成。茲簡述本專題研究計畫已完成和獲得之結果如下：

創成原理

一般常見的單包絡 ZK 型蝸桿蝸輪組，其創成方式是先使用錐狀盤形磨輪來磨削蝸桿，再利用蝸桿型滾刀來加工蝸輪。由於蝸桿與滾刀均可利用磨輪研磨的方式來提高精度，因此，可製造出高精度之蝸桿蝸輪組。本研究係採用 ZK 型蝸桿為本研究中非 90° 交錯角蝸桿蝸輪組之主

動件。然而，當齒面是以創成法所加工出來時，由於 ZK 型蝸桿之齒面為磨輪刀具之包絡面，且被創成之齒面與磨輪刀具間之接觸恆保持相切之情況，因此，在推導 ZK 型蝸桿齒面數學方程式時，除需考量磨輪刀具在被切削之蝸桿齒面上的軌跡方程式外，尚需考慮磨輪刀具與蝸桿齒面間之嚙合方程式。由於在 ZK 型蝸桿之創成過程中，是使用錐狀盤形磨輪來磨削蝸桿之齒面，因此，磨輪之左刀具面創成了蝸桿之右齒面，而磨輪之右刀具面則創成了蝸桿之左齒面。圖一即為磨輪機構在切削蝸桿時之示意圖。本研究之蝸桿蝸輪組其蝸輪則由飛刀所創成，其創成機構和原理將於後面再詳予說明之。

磨輪及滾刀參數設計及其幾何數學模式

如圖二所示，錐狀圓盤形磨輪是用來創成 ZK 型蝸桿之刀具，其磨輪截面之兩側則為錐型直邊刀具。其中，錐狀圓盤形磨輪之右刀具面用以磨削創成 ZK 型蝸桿之左齒面，而 $S_{gf}(X_{gf}, Y_{gf}, Z_{gf})$ 座標系係固聯於磨輪直邊刀刃上之參考座標系， $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系則係固聯於磨輪之參考座標。直邊磨輪刀具之位置向量 \mathbf{R}_{gf} 及法向量 \mathbf{n}_{gf} 表示於 S_{gf} 座標系分別為：

$$\mathbf{R}_{gf} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n \\ 0 \\ \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{及 } \mathbf{n}_{gf} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \\ 0 \\ \cos \alpha_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中， u_1 為直邊磨輪刀具之刀面設計參數，其中 $u_{min} \leq u_1 \leq u_{max}$ ， α_n 為直邊磨輪刀具的法向壓力角。在方程式(1)至方程式(4)中，其“ \pm ”符號之上方符號代表直邊磨輪之右側刀具面，下方符號則表示直邊磨輪之左側刀具面。此外，依據圖 2.2 所示之刀具面幾何關係，方程式(1)之刀具面位置向量其中之參數 b_1 可由下式求出：

$$b_1 = \frac{\pi m_a}{4} \cos \lambda + r_c \tan \alpha_n$$

其中， m_a 為直邊磨輪刀具之刀面的軸向模數(Axial Module)， α_n 為直邊磨輪刀具面之法向壓力角， λ 為蝸桿齒面之導程角， r_c 為直邊磨輪刀具面之節圓半徑。直邊磨輪刀具面之位置向量及其法向量可利用齊次座標轉換矩陣(Homogeneous Coordinate Transformation Matrix)方法，由 S_{gf} 座標系轉換至磨輪 S_c 座標系，並分別表示如下：

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \alpha_n \cos \theta \\ u_1 \cos \alpha_n \sin \theta \\ \pm (b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{及 } \mathbf{n}_c = \begin{bmatrix} n_{xc} \\ n_{yc} \\ n_{zc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha_n \cos \theta \\ \pm \sin \alpha_n \sin \theta \\ \cos \alpha_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

由方程式(3)可知，磨輪之外形參數為 u_1 及 θ 。

由於 ZK 型蝸桿的磨削加工，可由蝸桿座標系與磨輪座標系之相對運動關係來模擬，此磨削機構的示意圖如圖三所示，其中 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系為磨輪的座標系， Z_c 軸為磨輪之旋轉軸， $S_{fc}(X_{fc}, Y_{fc}, Z_{fc})$ 座標系則為參考座標系， $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 座標系為蝸桿齒面之座標系，其中 Z_1 軸為蝸桿之旋轉軸。由圖三可知磨輪刀具旋轉軸與蝸桿之旋轉軸相夾一角度 λ ，此角度即為 ZK 型蝸桿齒面之導程角。圖三所示之符號 p_1 代表蝸桿齒面之導程，為蝸桿作螺旋運動時，蝸桿每轉動一弧度(Radian)時蝸桿齒面上之點沿著蝸桿旋轉軸方向所移動的距離， φ_1 則為蝸桿做螺旋運動時之旋轉角。根據圖三之磨輪與蝸桿磨削模擬機構示意圖可瞭解各座標系間之關係，利用下列之齊次座標轉換矩陣方程式，即可推導磨輪右刀具面之軌跡方程式表示於蝸桿之 S_1 座標系如下：

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}_{1,c} \mathbf{R}_c \quad (5)$$

其中 \mathbf{R}_c 表示於方程式(3)，而上式中各座標轉換矩陣則分別為：

$$\mathbf{M}_{1,c} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \cos \lambda & -\sin \varphi_1 \sin \lambda & A_c \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \cos \lambda & -\cos \varphi_1 \sin \lambda & -A_c \sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -p \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式(3)代入方程式(5)，即可求得磨輪刀具面表示於 S_1 座標系之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \cos \varphi_1 + Y_c \sin \varphi_1 \cos \lambda - Z_c \sin \varphi_1 \sin \lambda + A_c \cos \varphi_1 \\ -X_c \sin \varphi_1 + Y_c \cos \varphi_1 \cos \lambda - Z_c \cos \varphi_1 \sin \lambda - A_c \sin \varphi_1 \\ Y_c \sin \lambda + Z_c \cos \lambda - p \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中， X_c 、 Y_c 及 Z_c 分別表示於方程式(3)。同理，利用下列之向量轉換矩陣方程式，即可將方程式(4)由 S_c 座標系轉換至 S_1 座標系，即可求得 ZK 型蝸桿型滾刀刀具面之法向量為：

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{L}_{1,fc} \mathbf{L}_{fc,c} \mathbf{n}_c \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{L}_{fc,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda & -\sin \lambda \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{及 } \mathbf{L}_{1,fc} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程式(7)經運算並化簡後可得滾齒刀右刀具面之法向量為：

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xc} \cos \varphi_1 + n_{yc} \sin \varphi_1 \cos \lambda - n_{zc} \sin \varphi_1 \sin \lambda + A_c \cos \varphi_1 \\ -n_{xc} \sin \varphi_1 + n_{yc} \cos \varphi_1 \cos \lambda - n_{zc} \cos \varphi_1 \sin \lambda - A_c \sin \varphi_1 \\ n_{yc} \sin \lambda + n_{zc} \cos \lambda - p \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 n_{xc} 、 n_{yc} 及 n_{zc} 分別表示於方程式(4)。

由於在利用磨輪刀具來創成蝸桿的過程中，磨輪與蝸桿工件(Work Piece)間每一瞬間皆呈嚙合狀態，亦即磨輪與蝸桿工件兩者之齒面進行嚙合運動時，磨輪齒面與蝸桿齒面既不分離亦不衝撞進入對方之齒面內，因此，兩齒面之相對速度 $\mathbf{V}_c^{(1c)}$ 在其共同法向量之方向分量為零，故其相對速度必落於共同切平面(Common Tangent Plane)上，而共同法向量又與共切面互相垂直。因此，上述之嚙合條件用數學式來表示時，即為齒輪原理中所謂的嚙合方程式(Equation of Meshing)。假若磨輪與蝸桿工件表示於 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ 座標系之相對速度為 $\mathbf{V}_c^{(1c)}$ ，而其相切點之共同法向量為

$\mathbf{n}_c^{(c)}$ ，由於磨輪在創成蝸桿時，兩者之相切點其相對速度 $\mathbf{V}_c^{(1c)}$ 與共同法向量 $\mathbf{n}_c^{(c)}$ 互相垂直，因此，蝸桿與磨輪之嚙合方程式可以下式求得：

$$\mathbf{n}_c^{(1c)} \cdot \mathbf{V}_c^{(1c)} = 0 \quad (9)$$

其中磨輪與蝸桿之相對速度可以用下式表示：

$$\mathbf{V}_c^{(1c)} = \mathbf{V}_c^{(1)} - \mathbf{V}_c^{(c)} \quad (10)$$

上式中 $\mathbf{V}_c^{(1)}$ 及 $\mathbf{V}_c^{(c)}$ 分別為蝸桿齒面及磨輪刀具面之速度表示於 S_c 座標系。在蝸桿之創成過程中，其磨輪與蝸桿座標系之關係如圖三所示。若假設磨輪固定在 S_c 座標系上不動，亦即磨輪之速度表示在 S_c 座標系 $\mathbf{V}_c^{(c)}=0$ 。由磨輪與蝸桿間之相對運動關係得知，蝸桿相對於 $S_{fc}(X_{fc}, Y_{fc}, Z_{fc})$ 座標系做螺旋運動，亦即相對於 S_{fc} 座標系之 Z_{fc} 軸，以角速度 $\boldsymbol{\omega}_{fc}^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_{fc}$ 做旋轉運動，並同時做線速度 $\mathbf{V}_{fc}^{(1)} = p\omega_1 \mathbf{k}_{fc}$ 的平移運動。因此，將蝸桿齒面速度表示在 S_c 座標系上可以下式表示之：

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{R}_c^{(c)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(1)} \times \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_c^{(c)} + \mathbf{V}_c^{(1)} \quad (11)$$

將方程式整理後可得：

$$\mathbf{V}_c^{(1)} = \omega_1 \begin{bmatrix} \pm(b_1 - u_1 \sin \alpha_n) \sin \lambda - u_1 \cos \alpha_n \sin \theta \cos \lambda \\ u \cos \alpha_1 \cos \theta \cos \lambda + p \sin \lambda + A_c \cos \lambda \\ -u \cos \alpha_1 \cos \theta \sin \lambda + p \cos \lambda - A_c \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (12)$$

由 $\mathbf{V}_c^{(c)}=0$ 及方程式(4)、(10)和(12)代入方程式(9)，經過化簡整理以後可得到磨輪刀具面與蝸桿齒面的嚙合方程式如下：

$$u_1 = b_1 \sin \alpha_n - (A_c - p \cot \lambda) \frac{\cos \alpha_n}{\cos \theta} \pm (A_c \cot \lambda + p) \sin \alpha_n \tan \theta \quad (13)$$

由於ZK型蝸桿之左齒面數學模式可由磨輪之右刀具面軌跡方程式及磨輪右刀具面和蝸桿左齒面之嚙合方程式聯立而得，亦即方程式(6)及(13)聯立即為ZK型蝸桿之齒面數學模式。其中“±”符號之上方符號代表直邊磨輪之右側刀具面所創成ZK型蝸桿左齒面之嚙合方程式，下方符號則表示直邊磨輪之左側刀具面所創成ZK型蝸桿右齒面之嚙合方程式。

藉由上述所推導之 ZK 型蝸桿之齒面

軌跡方程式(6)和齒面嚙合方程式(13)，即可利用數值解方法求得其齒面之解析解，然後再應用電腦繪圖的方法繪出其相對之齒形。表一列出本研究所採用之 ZK 型蝸桿蝸輪組設計參數，並依據本章所推導之 ZK 型蝸桿齒面數學模式，利用電腦繪圖方法可將 ZK 型蝸桿三維外形繪圖表示於圖四。

ZK型蝸桿與飛刀創成蝸輪之數學模式

蝸輪之齒面一般是由蝸桿型滾刀來創成滾製而成，但是小量產製蝸輪時則多是以單齒之飛刀來代替蝸桿型滾刀。由於蝸桿型滾刀之法向剖面與飛刀之法向剖面之外形相同，如圖五所示。因此，飛刀法向外形之直邊刀面方程式可表示於 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 座標系中如下：

$$\mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \cos \alpha \\ 0 \\ \pm(b_2 - u_2 \sin \alpha) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$b_2 = \frac{S_n}{2} + r_l \tan \alpha \quad ; \quad S_n = S_a \cos \lambda$$

方程式(14)中之 u_2 為飛刀之刀面設計參數，其中 $u_{min} \leq u_2 \leq u_{max}$ ， α 為飛刀直邊部分之法向壓力角。又方程式(14)中，其“±”符號之上方符號代表飛刀之右邊刀具面，下方符號則表示飛刀之左邊刀具面。在以下有關蝸輪之齒面方程式的推導過程中，上方之符號皆代表由飛刀之右邊刀具面所創成之蝸輪左齒面，而下方之符號則表示由飛刀之左邊刀具面所創成之蝸輪右齒面。其中 S_a 為蝸桿型滾刀之軸向齒厚， S_n 為蝸桿型滾刀之法向齒厚。如圖六所示，蝸桿型滾刀座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 是由固聯在 $S_l(X_l, Y_l, Z_l)$ 座標系之飛刀法向外形，與其滾刀旋轉軸 Z_h 軸或其參考座標系 $S_{hf}(X_{hf}, Y_{hf}, Z_{hf})$ 之 Z_{hf} 軸夾一導程角 λ ，並相對於參考座標系 $S_{hf}(X_{hf}, Y_{hf}, Z_{hf})$ 之 Z_{hf} 軸做螺旋運動，如此則可得到蝸桿型滾刀之軌跡方程式。由於蝸桿型滾刀是利用軌跡法所形成之，因此，蝸桿型滾刀之軌跡方程式，亦即為其齒面數學方程式。茲將飛刀法向外形方程式藉由下列座標轉換，即可

得到蝸桿型滾刀之軌跡方程式如下：

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{M}_{h,l} \mathbf{R}_l \quad (15)$$

其中 \mathbf{R}_l 表示於方程式(14)，而上式中座標轉換矩陣則為：

$$\mathbf{M}_{h,l} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \cos \lambda & -\sin \varphi_2 \sin \lambda & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \cos \lambda & -\cos \varphi_2 \sin \lambda & 0 \\ 0 & \sin \lambda & \cos \lambda & -p\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將方程式(14)代入方程式(15)，即可求得蝸桿型滾刀表示於 S_h 座標系之軌跡方程式，亦即為蝸桿型滾刀之齒面方程式如下：

$$\mathbf{R}_h = \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_l \cos \varphi_2 + Y_l \sin \varphi_2 \cos \lambda - Z_l \sin \varphi_2 \sin \lambda \\ -X_l \sin \varphi_2 + Y_l \cos \varphi_2 \cos \lambda - Z_l \cos \varphi_2 \sin \lambda \\ Y_l \sin \lambda + Z_l \cos \lambda - p\varphi_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 X_l 、 Y_l 和 Z_l 分別表示於方程式(14)中。

由於蝸桿型滾刀之齒面為一規則曲面，因此，可藉由對蝸桿之兩個齒面參數之偏微分的乘積(Cross Product)，求出其齒面之法向量如下：

$$\mathbf{N}_h = \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{R}_h}{\partial \varphi_2} \quad (17)$$

蝸桿型滾刀表示在蝸輪座標系之軌跡方程式，如圖七和圖八所示，座標系 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 與 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 分別為固聯在蝸輪與蝸桿型滾刀之座標系，而座標系 $S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ 和 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 則分別為蝸桿型滾刀與蝸輪之參考座標系， Z_o 軸為蝸桿型滾刀之旋轉軸， Z_g 軸為蝸輪之旋轉軸， γ 為蝸桿型滾刀之旋轉軸與蝸輪旋轉軸所夾之交錯角(Crossed Angle)， $S = \overline{O_g M}$ 為此兩旋轉軸之最短距離。如圖七(a)表示，固聯於 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系之蝸輪相對於其參考座標系 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ ，是沿著 Z_2 旋轉軸方向以 ϕ_2 之角度作左旋方向旋轉；如圖七(b)所示，固聯於 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系之蝸桿型滾刀相對於其參考座標系 $S_o(X_o, Y_o, Z_o)$ ，是沿著 Z_o 軸方向以 ϕ_1 之角度作右旋方向旋轉。茲將蝸桿型滾刀之軌跡方程式表示於 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系中並以 \mathbf{R}_2 表示之，而且已知 \mathbf{R}_h 為蝸桿型滾刀固

聯在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系之位置向量，則 \mathbf{R}_2 和 \mathbf{R}_h 兩個位置向量之間的座標轉換關係，可由下列之齊次座標轉換矩陣方程式求得：

$$\mathbf{R}_2(u_2, \varphi_2, \phi_1) = \mathbf{M}_{2,h} \mathbf{R}_h(u_2, \varphi_2) \quad (18)$$

其中，則

$$\mathbf{M}_{2,h} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \sin \phi_2 \sin \gamma & -S \cos \phi_2 \\ a_{21} & a_{22} & -\cos \phi_2 \sin \gamma & -S \sin \phi_2 \\ \sin \gamma \sin \phi_1 & \sin \gamma \cos \phi_1 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中

$$a_{11} = -\sin \phi_2 \cos \gamma \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1$$

$$a_{12} = -\sin \phi_2 \cos \gamma \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1$$

$$a_{21} = \cos \phi_2 \cos \gamma \sin \phi_1 + \sin \phi_2 \sin \phi_1$$

$$a_{22} = \cos \phi_2 \cos \gamma \cos \phi_1 - \sin \phi_2 \sin \phi_1$$

由於在小量或試驗切削蝸輪之過程中，蝸輪為飛刀之共軛運動對，但在蝸輪之量產時，則多是以蝸桿型滾刀來滾製。因此，蝸桿與蝸輪之旋轉角 ϕ_1 和 ϕ_2 必滿足下列之關係式：

$$\phi_2 = m_{2h} = \frac{|\omega_2|}{|\omega_h|} = \frac{T_h}{T_2} \phi_1 \quad (20)$$

其中 T_h 和 T_2 分別為蝸桿型滾刀之齒數與蝸輪之齒數，而 ω_h 和 ω_2 則分別為切削蝸輪時蝸桿型滾刀與蝸輪之轉速。因此，將方程式(16)與(19)代入方程式(18)，即可得蝸桿型滾刀表示於蝸輪座標系 S_2 之軌跡方程式，亦即為蝸輪之軌跡方程式表示如下：

$$\mathbf{R}_2(u_2, \varphi_2, \phi_1) = \mathbf{M}_{2,h} \mathbf{R}_h(u_2, \varphi_2) = \begin{bmatrix} a_{11}X_h + a_{12}Y_h + \sin \gamma \sin \phi_2 Z_h - S \cos \phi_2 \\ a_{21}X_h + a_{22}Y_h - \sin \gamma \cos \phi_2 Z_h - S \sin \phi_2 \\ \sin \gamma \sin \phi_1 X_h + \sin \gamma \cos \phi_1 Y_h + \cos \gamma Z_h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 X_h 、 Y_h 和 Z_h 分別表示於方程式(16)中。

為求蝸輪與蝸桿型滾刀的嚙合方程式如公式(9)，必須將蝸桿型滾刀刀具面與蝸輪齒面的相對速度以及滾刀之刀具面法向量表示在同一座標系。由圖七和圖八所示之蝸桿型滾刀與蝸輪工件之座標系關係，若要表示在 S_h 座標系，則必須先求得由座

標系 $S_g(X_g, Y_g, Z_g)$ 轉換至 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ，故將蝸桿型滾刀與蝸輪工件之相對速度表示在 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ 座標系，可由下式求得：

$$\mathbf{V}_{h2}^{(h)} = (\boldsymbol{\omega}_h^{(h)} - \boldsymbol{\omega}_2^{(h)}) \times \mathbf{R}_h - \mathbf{O}_h \mathbf{O}_2^{(h)} \times \boldsymbol{\omega}_2^{(h)}$$

$$= \begin{bmatrix} (m_{2h} \cos \phi_1 \sin \gamma) Z_h - (1 + m_{2h} \cos \gamma) Y_h - S m_{2h} \sin \phi_1 \cos \gamma \\ (1 + m_{2h} \cos \gamma) X_h - (m_{2h} \sin \phi_1 \sin \gamma) Z_h - S m_{2h} \cos \phi_1 \cos \gamma \\ (m_{2h} \sin \phi_1 \sin \gamma) Y_h - (m_{2h} \cos \phi_1 \sin \gamma) X_h + S m_{2h} \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中 X_h 、 Y_h 和 Z_h 分別表示於方程式(16)中。

根據方程式(9)之嚙合條件式，將方程式(17)和(22)做內積，即可求得蝸桿型滾刀刀面與蝸輪工件齒面的嚙合方程式，其表示如下：

$$\mathbf{N}_h^{(h)} \cdot \mathbf{V}_h^{(h2)} = 0 \quad (23)$$

因為蝸輪之齒面是由蝸桿型滾刀所創成，因此，蝸輪之齒面的數學模式可由蝸桿型滾刀在 $S_2(X_2, Y_2, Z_2)$ 座標系之軌跡方程式(21)，與上述之嚙合方程式(23)聯立組成。

藉由前面所推導蝸輪之齒面軌跡方程式(21)和蝸輪齒面嚙合方程式(23)，即可利用數值解之方法求得其齒面之解析解，然後再應用電腦繪圖的方法即可繪出其相對之齒形。表二為本專題計畫所採用之蝸桿型滾刀與所創成之蝸輪的主要設計參數，並依據所推導之蝸輪齒面數學模式，配合電腦繪圖方法，即可將以蝸桿型滾刀所創成之蝸輪的三維外形繪圖表示於圖九。

蝸輪齒面之齒形過切分析

以下將應用 Litvin[5]所提出之齒形過切分析方法，分析蝸輪齒面之過切線分佈情形。由微分幾何之定義可知，若曲面上之一點，其切向量不存在或切向量大小等於零，則此點稱為奇異點。一般齒輪之齒面為規則曲面，即齒面上不會有奇異點存在，若齒面上出現奇異點，就表示齒面必然發生過切現象。若以蝸桿型滾刀刀面 Σ_h 創成蝸輪之齒面 Σ_2 ，在齒面之創成過程中，蝸桿型滾刀之刀面 Σ_h 與被創成之齒面 Σ_2 的瞬間接觸點，其兩者的位置向量在任意一固定座標系觀察時，其位置向量應該要一致。將 Σ_h 與 Σ_2 於齒面上的瞬間接觸點表示在任意固定座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ，故下式必成立：

$$\mathbf{R}_h^{(h)} = \mathbf{R}_h^{(2)} \quad (24)$$

再將上式對時間微分可得

$$\mathbf{V}_{tr}^{(h)} + \mathbf{V}_r^{(h)} = \mathbf{V}_{tr}^{(2)} + \mathbf{V}_r^{(2)} \quad (25)$$

經移項整理後可得

$$\mathbf{V}_r^{(2)} = \mathbf{V}_{tr}^{(h)} + \mathbf{V}_r^{(h)} - \mathbf{V}_{tr}^{(2)} = \mathbf{V}_r^{(h)} + \mathbf{V}^{(h2)} \quad (26)$$

方程式(25)及(26)中之下標符號 tr 是表示接觸點隨著蝸桿型滾刀或蝸輪齒面之運動速度，下標 r 則表示接觸點沿蝸桿型滾刀或齒面之切平面方向的速度。從奇異點之定義可知，當 $\mathbf{V}_r^{(2)} = 0$ 時，齒面上將會產生奇異點，故蝸輪齒面就會發生過切現象，則齒面發生過切之必要條件可表示如下：

$$\mathbf{V}_r^{(h)} + \mathbf{V}^{(h2)} = 0 \quad (27)$$

茲將嚙合方程式對時間之微分，如下所示：

$$\frac{d}{dt} f(u_2, \phi_2, \phi_1) = 0 \quad (28)$$

方程式(27)配合上式即可在蝸桿型滾刀之刀面上定義出一限制曲線，而此限制曲線將是創成蝸輪齒面所形成齒形過切現象之過切線。當蝸桿型滾刀刀面上的點位於限制曲線上或超過限制曲線，則這些刀面上之點將在齒面創成時造成齒面之過切。

由(27)式及(28)式可分別改寫成下列兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_h^{(h)}}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} = -\mathbf{V}_{h2}^{(h)} \quad (29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \quad (30)$$

方程式(29)中之 $\mathbf{R}_h^{(h)}$ 表示刀面方程式表示於座標系 $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$ ， $\mathbf{V}_{h2}^{(h)}$ 則表示刀面 Σ_h 上的瞬間接觸點相對於齒面 Σ_2 上的瞬間接觸點之相對速度。方程式(29)及(30)可以下列矩陣方程式表示之：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} & \frac{\partial f}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_2}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \\ -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{bmatrix} \quad (31)$$

方程式(31)存在的唯一解之必要充分

條件為此(31)式之擴增矩陣(Augmented Matrix)的秩(Rank)必須為二，而且也要同時滿足下列方程式。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\varphi_2} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\varphi_2} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \\ f_{u_2} & f_{\varphi_2} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial x_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{xh}^{(h2)} \\ \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial y_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{yh}^{(h2)} \\ \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial u_2} & \frac{\partial z_h^{(h)}}{\partial \varphi_2} & -\mathbf{V}_{zh}^{(h2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

方程式(35)為嚙合方程式，綜合上述方程式(32)至(35)式，可求得齒面 Σ_2 上奇異點之充分條件其包含三個未知數 u_2 ， φ_2 和 ϕ_1 之下列兩式所組成之非線性方程組：

$$f(u_2, \varphi_2, \phi_1) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (36)$$

$$f(u_2, \varphi_2, \phi_1) = 0 \quad (37)$$

將方程式(36)及(37)兩式聯立，其中每式皆具有三個未知數，因此，求解方法可將 φ_2 當作已知給定一數值來求解一組對應之 u_2 和 ϕ_1 ，然後逐次給予 φ_2 一增量值，再解另一組對應之 u_2 和 ϕ_1 ，如此便可解出蝸桿滾刀刀具上創成蝸輪齒面奇異點的限制曲線。

範例

茲舉表二所列之蝸輪設計參數為例，依據上述方程式(36)及(37)兩式聯立，來求解探討蝸桿蝸輪組齒面過切之情形，在此

例中將依據不同壓力角以及軸交角分別探討蝸輪齒面過切的現象，在蝸輪左右兩齒面於不同的設計參數下，當齒面中出現奇異點時，齒輪 Z 截面與齒面參數 u_2 之關係。其中 u_{2L} 表示蝸桿左齒面參數， u_{2R} 表示右齒面參數，其左右齒面定義可參考圖十，又蝸輪左右兩側齒面是相反對稱的，所以在齒面寬中間 $Z=0$ mm 截面，其齒面左右兩側奇異點發生點 u_2 是對稱的，如表三至表五所示。接著討論設計參數於不同軸交角時，各種不同壓力角對齒面過切的變化。若蝸輪之齒面設計參數值 u_2 落於創成齒面之工作範圍內，則必將產生齒面過切現象，當壓力角為 14.5° 、 20.0° 、 22.5° 及 25.0° ，齒面之工作範圍分別為 $8.0\text{mm} \leq u_2 \leq 17.593\text{mm}$ 、 $8.0 \text{ mm} \leq u_2 \leq 18.09 \text{ mm}$ 、 $8.0 \text{ mm} \leq u_2 \leq 18.887 \text{ mm}$ 以及 $8.0 \text{ mm} \leq u_2 \leq 19.253 \text{ mm}$ 。首先以表三(a)及(b)之分析結果為例，當蝸桿蝸輪組之軸交角為 $\gamma=45.0^\circ$ 時且在壓力角 $\alpha=14.5^\circ$ 下，可發現奇異點分佈皆在創成之蝸輪齒面參數 u_2 範圍內，從 $13.858 \sim 15.466 \text{ mm}$ ，故整個齒面必然發生過切，並且相較於其他壓力角來觀察，其差距範圍是最短的。在 Z 截面 $=0\text{mm}$ 的位置 $u_2=13.858 \text{ mm}$ 時奇異點就出現；在壓力角 $\alpha=20.0^\circ$ 時，最大奇異點產生於 17.575mm ，其過切現象相較於 $\alpha=14.5^\circ$ 時有較好的情形；在 $\alpha=22.5^\circ$ 下，最大奇異點為 18.865mm ，已經與直邊最大工作範圍 18.887mm 極為接近，故在齒面的兩側外緣(Z 截面 $=25\text{mm}$ 或 -25mm 時)，其過切的狀況已漸漸不明顯；最後當壓力角改為 $\alpha=25.0^\circ$ ，從表三(b)中可知，在 Z 截面等於 20mm 或 -20mm 時，其奇異點已落於直邊刀具最大之工作範圍外側，故已完全無過切現象的發生。因此，由上述探討結果可了解，若壓力角愈大時，齒面過切的現象愈不明顯。

如表四(a)及(b)所示，軸交角 $\gamma=30.0^\circ$ 相較於表三(a)及(b)之 $\gamma=45.0^\circ$ 時的奇異點，以 Z 截面 $=0 \text{ mm}$ 及 $\alpha=20.0^\circ$ 來看，在 $\gamma=30.0^\circ$ 是 $u_2=13.252\text{mm}$ 而 $\gamma=45.0^\circ$ 是 $u_2=15.512\text{mm}$ ，很明顯的過切現象都提早發生，又於不同之 Z 截面其過切點的值都

非常相近，其 u_2 全部落於15.0~16.0mm之間，再觀察表四(a)及(b)，在其他不同的壓力角， u_2 的範圍差異性皆不大。若將軸交角 $\gamma=60.0^\circ$ 與 $\gamma=45.0^\circ$ 且壓力角 $\alpha=20.0^\circ$ 下來比較，如表五(a)及(b)所示，則創成齒面參數 u_2 之範圍從16.654~22.592 mm，不同截面之奇異點位置其差異範圍變得很大，在Z截面為15mm或-15mm時，蝸輪之齒面已經開始不發生過切的現象，而Z=0mm之中央截面，不論在任何軸交角及齒形壓力角之下，蝸輪之齒面仍然有過切產生。依據上述之分析結果以及表三至表五觀察可知，軸交角與齒形壓力角愈大，則可以減少創成蝸輪齒面時過切的發生，因此，蝸輪齒面呈現左右相對稱形態，故過切狀況亦是相似，由此亦可驗證本研究推導之蝸桿蝸輪齒輪組之齒面數學模式及分析模式之正確性。

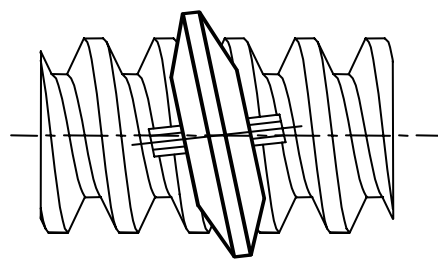
四、結論及計畫結果自評

藉由齒輪啮合原理，並使用磨輪配合磨床機構來模擬創成ZK型蝸桿，可以推導獲得ZK型蝸桿齒面之數學模式。由於ZK型蝸桿齒面數學模式，是在不考慮加工誤差及熱變形等理想狀況下所推導之齒面模式，因此，此蝸桿齒面數學模式可做為三次元量測儀做為比較實際切製之齒面變異的標準齒面。ZK型蝸桿在不改變其切削刀具，而透過改變磨輪刀具之壓力角，即可根據不同之需求狀況，來調整ZK型蝸桿在其軸向截面上的齒厚。

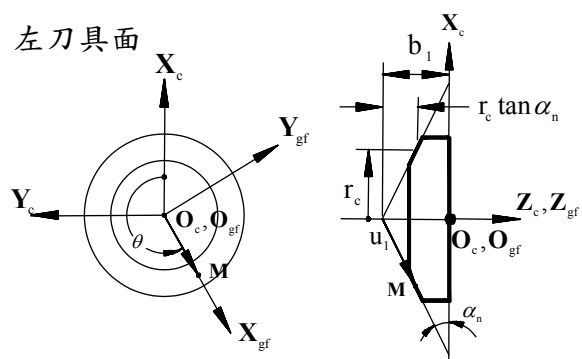
本研究係將飛刀創成蝸輪之運動機構，先以蝸桿型滾刀來模擬此飛刀之創成動作，然後再以蝸桿型滾刀配合滾削機構來創成蝸輪，故已完成蝸輪齒面數學模式之推導，並應用電腦輔助繪圖程式，將可描繪出蝸桿及蝸輪之實體模型。由蝸輪之左右齒面為相對稱，而在蝸輪之齒面上，越接近齒面寬中央截面處，齒面越容易發生過切現象，若能避免齒面寬中央截面之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切。為了避免蝸輪齒面的過切，本研究亦探討蝸桿蝸輪組在不同壓力角和不同軸交角的關係。

五、參考文獻

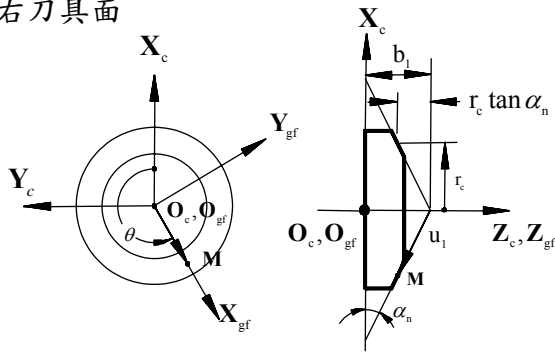
- [1]蔡忠杓，「K型蝸桿與蝸輪之切削模擬與磨輪設計」，國立交通大學機械製造與熱流研究中心，工業技術研究院委託學術機構研究總報告，八十二年六月。
- [2]Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., "A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 1 – the Generating Surface," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 143-147, March 1989.
- [3]Zheng, C., Lei, J., and Savage, M., "A General Method for Computing Worm Gear Conjugate Mesh Property: Part 2 – the Mathematical Model of Worm Gear Manufacturing and Working Process," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 111, pp. 148-152, March 1989.
- [4]Bosch M., Economical Production of High Precision Gear Worms and Other Thread Shaped Profile by Means of CNC-Controlled Worm and Tread Grinding Machine, Klingelberg Publication, Germany, 1988, pp. 3-19.
- [5]Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [6]Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C., 1989.



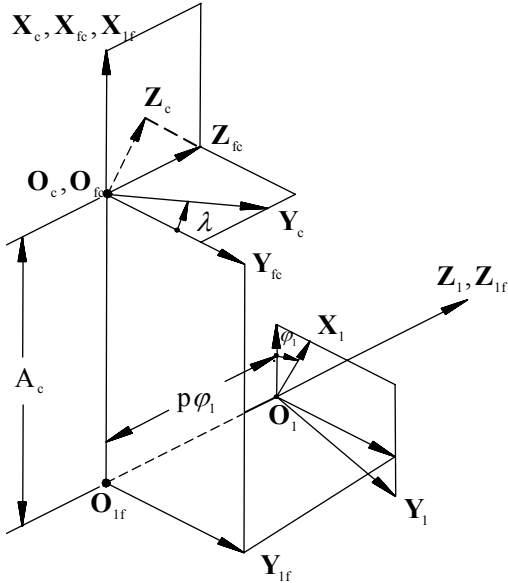
圖一 磨輪磨削ZK型蝸桿示意圖



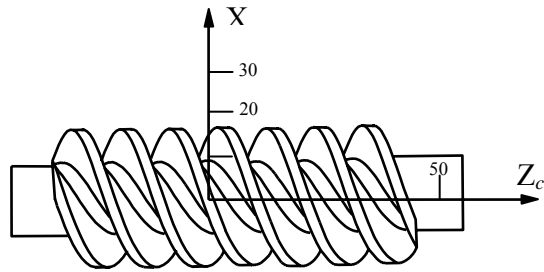
右刀具面



圖二 磨輪刀具面設計及參數示意圖

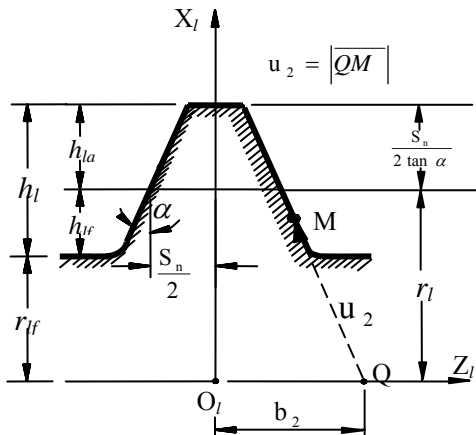


圖三 磨輪刀具面磨削蝸桿齒面創成機構示意圖

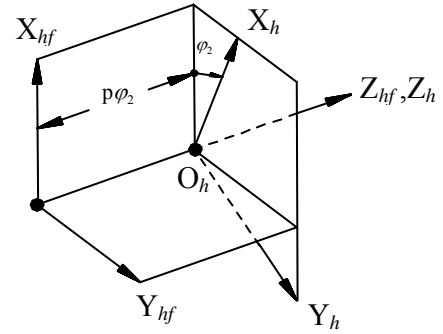
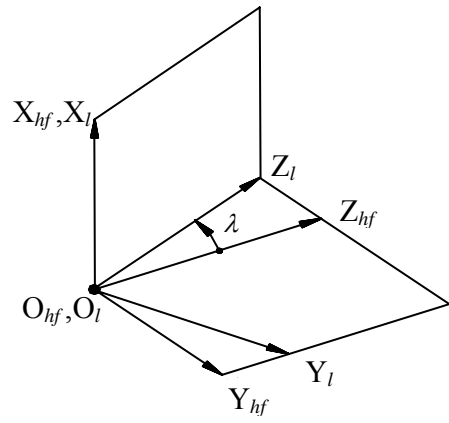


單位：mm

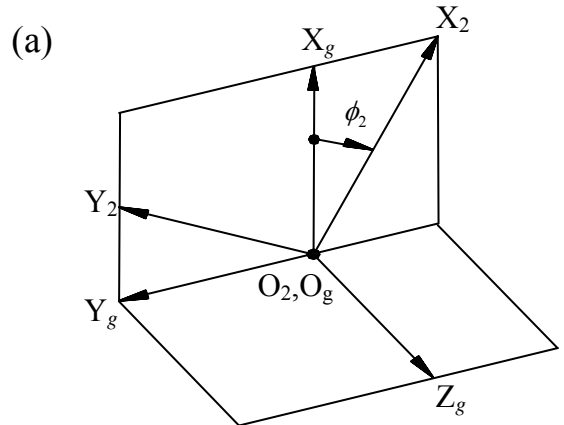
圖四 ZK 型蝸桿之電腦輔助繪圖



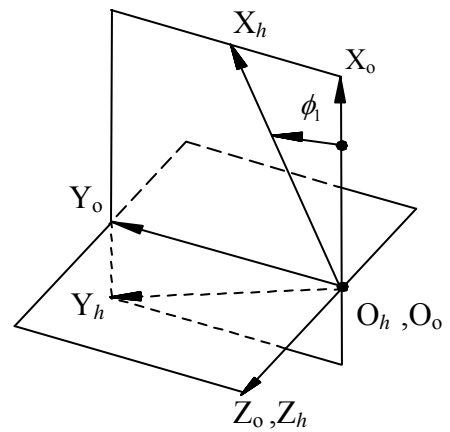
圖五 飛刀之法向剖面示意圖



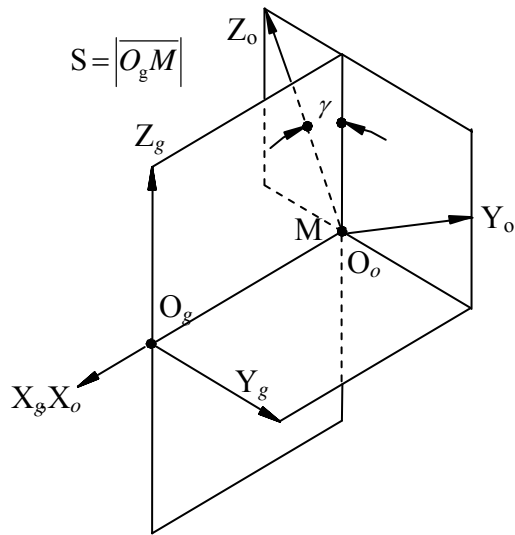
圖六 蝸桿型滾刀之成形機構示意圖



(b)



圖七 蝸桿滾削機構示意圖



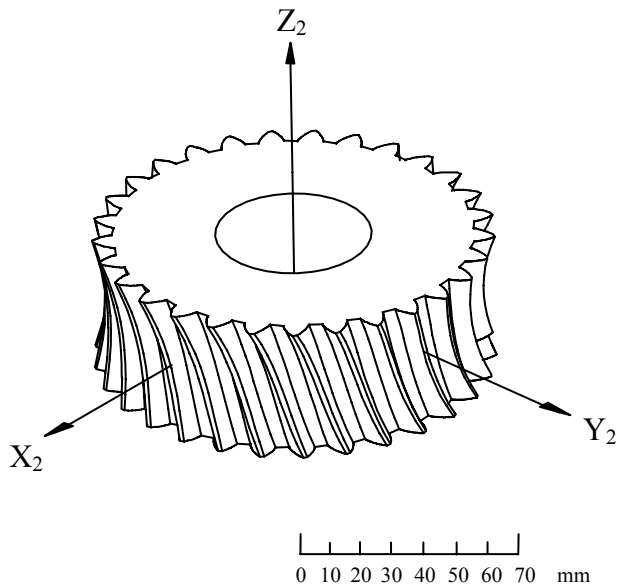
圖八 蝸輪之滾削機構示意圖

表一 蝸桿與直邊磨輪之尺寸參數

設計參數名稱	設計參數值
蝸桿旋向	右旋
蝸桿齒數(T_1)	3
磨輪法向壓力角(α_n)	20°
磨輪導程角(λ)	30°
磨輪軸向模數(m_a)	4.619 mm
磨輪節圓半徑(r_c)	20.0 mm
蝸桿節圓半徑(r_1)	12.0 mm
蝸桿單位角度之導程(p)	6.928mm/rad
蝸桿與磨輪之中心距(A_c)	32.0 mm

表二 蝸桿型滾刀與蝸輪之尺寸參數

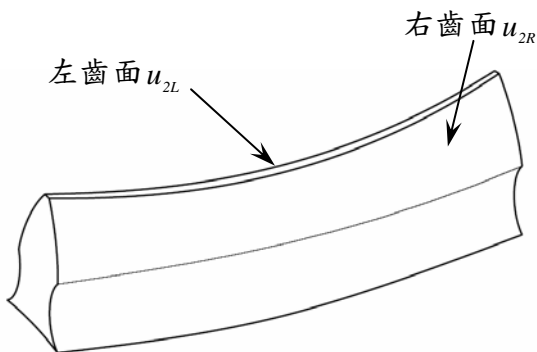
設計參數名稱	設計參數值
滾刀旋轉方向	右旋
蝸輪旋轉方向	左旋
蝸桿蝸輪組之交錯角(γ)	45°
蝸輪之螺旋角(β)	15°
蝸輪之節圓半徑(r_2)	60.045 mm
中心距(S)	72.045 mm
蝸輪齒數(T_2)	29
滾刀齒數(T_h)	3
滾刀法向壓力角(α)	20°
滾刀導程角(λ)	30°
滾刀法向模數(m)	4.0 mm
滾刀節圓半徑(r_l)	12.0 mm
滾刀單位角度之導程(p)	7.255mm/rad



圖九 蝸輪之電腦輔助繪圖

表三(a)軸交角 45.0° 時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 14.5^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$		$\alpha = 20.0^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25.0	14.792	15.466	16.492	17.575
-20.0	14.433	14.920	16.099	16.872
-15.0	14.154	14.488	15.797	16.323
-10.0	13.961	14.169	15.592	15.919
-5.0	13.860	13.960	15.495	15.651
0.0	13.858	13.858	15.512	15.512
5.0	13.960	13.860	15.651	15.495
10.0	14.169	13.961	15.919	15.592
15.0	14.488	14.154	16.323	15.797
20.0	14.920	14.433	16.872	16.099
25.0	15.466	14.792	17.575	16.492



圖十 齒面過切線之示意圖

表三(b)軸交角 45.0°時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 45.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25	17.520	18.865	18.744	20.420
-20	17.104	18.059	18.301	19.485
-15	16.786	17.435	17.965	18.766
-10	16.575	16.976	17.744	18.238
-5	16.479	16.670	17.650	17.886
0	16.507	16.507	17.694	17.694
5	16.670	16.479	17.886	17.650
10	16.976	16.575	18.238	17.744
15	17.435	16.786	18.766	17.965
20	18.059	17.104	19.485	18.301
25	18.865	17.520	20.420	18.744

表五(a)軸交角 60.0°時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 14.5^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$		$\alpha = 20.0^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25.0	18.220	19.952	20.142	22.592
-20.0	17.130	18.094	18.995	20.362
-15.0	16.213	16.688	18.028	18.701
-10.0	15.506	15.700	17.280	17.557
-5.0	15.056	15.114	16.804	16.888
0.0	14.910	14.910	16.654	16.654
5.0	15.114	15.056	16.888	16.804
10.0	15.700	15.506	17.557	17.280
15.0	16.688	16.213	18.701	18.028
20.0	18.094	17.130	20.362	18.995
25.0	19.952	18.220	22.592	20.142

表四(a)軸交角 30.0°時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 14.5^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$		$\alpha = 20.0^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25.0	12.078	12.254	13.474	13.751
-20.0	11.988	12.125	13.375	13.591
-15.0	11.921	12.022	13.302	13.461
-10.0	11.877	11.944	13.257	13.362
-5.0	11.857	11.890	13.240	13.292
0.0	11.861	11.861	13.252	13.252
5.0	11.890	11.857	13.292	13.240
10.0	11.944	11.877	13.362	13.257
15.0	12.022	11.921	13.461	13.302
20.0	12.125	11.988	13.591	13.375
25.0	12.254	12.078	13.751	13.474

表五(b)軸交角 60.0°時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 60.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25	21.308	24.090	22.691	25.786
-20	20.120	21.684	21.453	23.214
-15	19.118	19.893	20.410	21.289
-10	18.345	18.664	19.605	19.971
-5	17.851	17.950	19.092	19.206
0	17.699	17.699	18.936	18.936
5	17.950	17.851	19.206	19.092
10	18.664	18.345	19.971	19.605
15	19.893	19.118	21.289	20.410
20	21.684	20.120	23.214	21.453
25	24.090	21.308	25.786	22.691

表四(b)軸交角 30.0°時 u_2 之變化(單位:mm)

參數 截面	$\alpha = 22.5^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$		$\alpha = 25.0^\circ$ $\gamma = 30.0^\circ$	
	u_{2L}	u_{2R}	u_{2L}	u_{2R}
Z				
-25	14.311	14.656	15.307	15.739
-20	14.206	14.474	15.195	15.531
-15	14.130	14.327	15.115	15.361
-10	14.085	14.214	15.068	15.230
-5	14.069	14.133	15.056	15.135
0	14.085	14.085	15.078	15.078
5	14.133	14.069	15.135	15.056
10	14.214	14.085	15.230	15.068
15	14.327	14.130	15.361	15.115
20	14.474	14.206	15.531	15.195
25	14.656	14.311	15.739	15.307