

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

兩個新的運動不穩定定理及其
對自由陀螺穩定性等的應用

Two New Theorems of Motion Instability
with Applications to the Stability of
Free Gyroscopes and Others

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC - 89 - 2212 - E - 009 - 006

執行期間： 88 年 8 月 1 日至 89 年 7 月 31 日

計畫主持人：戈正銘

共同主持人：古富能

計畫參與人員：林宗南(博士班研究生)、廖書賢、許銘凱(碩士班研究生)

執行單位：國立交通大學機械工程學系

中 華 民 國 八 十 九 年 九 月 十 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號：NSC 89-2212-E-009-006

執行期限：88年8月1日至89年7月31日

主持人：戈正銘 國立交通大學機械工程學系教授

共同主持人：古富能 國立澎湖技術學院資訊工程系助理教授

計畫參與人員：林宗南(博士班研究生)、廖書賢、許銘凱(碩士班研究生) 國立交通大學機械系

一、中文摘要

自1934年Chetaev改進了Lyapunov運動不穩定定理而得出Chetaev不穩定定理以來，本計畫首次提出不同於Chetaev定理的兩個新的不穩定定理(適用於自治及非自治系統)，藉由檢驗 V 函數的高次導數，來判別系統解的不穩定性。它們克服了Chetaev定理的缺點。採用所得之第一定理可證明六十餘年來一直未得到直接法證明的自由陀螺儀因框架質量所造成的著名漂移現象。此外並提出十二個其它的應用。

關鍵詞：運動不穩定性、自由陀螺、李亞普諾夫穩定性、直接法

二、英文摘要

Since 1934 Chetaev improved Lyapunov's motion instability theorem and obtained Chetaev motion instability theorem, it will be the first time that this report gives two new motion instability theorems applicable both to autonomous and nonautonomous systems, which are different with Chetaev theorem, and successfully remedy the defect of Chetaev theorem. With the aid of the derivatives of higher order of V function, the motion instability can be determined. By using the first new theorem, the well-known gimbal walk phenomenon of free gyroscope can be proved rigorously by direct method. This problem has remained unsolved by direct method for more than sixty years. Also, twelve other applications are also given in this report.

Keywords: motion instability, free gyroscope, Lyapunov stability, direct method

三、計畫緣由與目的

緣由:

自1934年Chetaev定理提出後，文獻上並無改進Chetaev定理之研究，關於自由陀螺的漂移則Plymale和Goodstein[21]在1955年用小參數法得到近似的證明，1964年陳濱[22]類似地用迭代法作出近似的證明。1991年戈正銘等[23]改進了Plymale等的小參數法的近似證明。

一百餘年來對Lyapunov直接法之改進工作(除Chetaev外)皆集中于改進其穩定及漸近穩定定理。1934年以來Chetaev定理一直未有所改進。本報告提出兩個新定理以改進Chetaev定理，使不穩定性之充分條件得以降低，並用以解決六十餘年一直未能由直接法證明的，自由陀螺儀之漂移現象，更給出其他應用十二種。此二定理對運動穩定性理論及應用作出重要貢獻。

目的:

1892年Lyapunov提出兩個不穩定定理。此處所提乃指其第一不穩定定理(第二不穩定定理由于應用不便故罕為人用)。此定理要求Lyapunov函數 V 在原點附近有大于(或小于)零之區域，而 \dot{V} 為定號函數則運動為不穩定。1934年Chetaev改進此定理，提出著名的Chetaev定理：只需要在原點附近有 V 大于(或小于)零之區域，且在此區域內 \dot{V} 與 V 同號，則運動不穩定。Chetaev定理常常不易滿足。我們提出之新定理將Chetaev定理改進，將其條件放寬，較容易滿足。

四、結果與討論

結果：

1. 得出兩個新的運動不穩定定理及其十三種運用。
2. 得出六十多年來的著名難題 自由陀螺漂移現象 的精確嚴格的直接法的解答。

討論：

由運動不穩定之定義來看，滿足它的條件是很低的，即如在原點之鄰域中總可找到一條軌跡離開原點即可。故不穩定定理之改進空間仍相當大。

五、計畫成果自評

1. 兩個新的運動不穩定定理改進了六十餘年來從未被改進過的 Chetaev 不穩定定理，並給出多方面的應用。這在運動穩定性理論及應用上有重大意義。
2. 得出了帶框架自由陀螺漂移這一著名難題的精確嚴格的直接法解答，深具歷史意義。

六、參考文獻

1. Chetaeff, N. G., One theorem of instability. DAN, Vol. I, No. 9. 1934.
2. Malkin, I. G., Theory of stability of Motion, Moscow-Leningrad, 1952.
3. Rouche, N., Habets, P., and Laloy, M., Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Springer-Verlag, New York. Heidelberg. Berlin, 1977
4. Vidysagar, M., Nonlinear System Analysis, Prentice-Hall, 1993.
5. Protter, M., Morrey, C. B., A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag, 1991.
6. Malik, S. C., Saveta Arord, Mathematical Analysis, John Wiley & Sons, 1992.
7. Khalil, H. K., Nonlinear Systems, Macmilan Publishing Company, 1992.

8. Slotine, J.O.J. E., and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
9. Meirovitch, L., Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill Book Company, 1970.
10. Plymale, B. T., and R. Goodstein, "Nutation of a Free Gyro Subjected to an Impulse., J. Appl. Mech., September, 1995, pp. 265-366.
11. Ranian Mukherjee and Degang Chen, Asymptotic Stability Theorem for Autonomous Systems, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 5, 1993. pp. 961-963.
12. Guliaev, M. P., On the Stability of Rotation of a Rigid Body with One Point Fixed in the Euler Case, PMM Vol. 23, No. 2, 1959. pp. 406-408.
13. Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 1990.
14. Liapunov, A. M., The General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, London, Washington, D. C., 1992.
15. Robert, L. B., Courtney, S. C., Differential Equations, Prentice-Hall, Inc., 1987.
16. Hahn, W., Stability of Motion, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
17. Ge, Zheng-Ming, Yao, Change-Win and Chen, Hsien-Keng, Stability on Partial Region in Dynamics, Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 15, No. 2, 1994, pp. 140-151.
18. Mikhailov, G. K., Parton., V. Z., Applied Mechanics: Soviet Reviews, Vol. 1, 1990.
19. Krasovski, N. N., The Inversion of the Theorems of Liapunov's Second Method and the Question Stability of Motion Using the First Approximation, Prikl. Mat. Mech.,

- 20, 255-265, 1965.
20. Krasovski, N. N., Problem of the Theory of Stability of Motion, Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1963; Translation of the Russian Edition, Moscow, 1959.
 21. Plymale, B. T., and R. Goodstein, "Nutation of a Free Gyro Subjected to an Impulse", J. Appl. Mech. No. 3, 1955.
 22. 陳濱, "自由陀螺漂移理論及有關的某些一般問題", 力學學報(中國大陸), 第7卷, 第3期, 1964.
 23. Ge, Zheng-Ming and Chiu, Chui-Kun, "Gimbal Walk of a free Gyroscope", Proceedings of the National Science Council, part A: Physical Science and Engineering, vol. 15, No. 2, 1991.
 24. Z.-M. Ge and Y.-J. Wu, "Another Theorem for Determining the Definiteness of Sign of Functions and Its Applications to the Stability of Permanent Rotations of a Rigid Body", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.51, No.2, 1984.
 25. Z.-M. Ge and M.-H. Wu, "The Stability of a Sleeping Top with Damping Torque", International Journal of Engineering Science, Vol.27, No.3, 1989.
 26. Z.-M. Ge and Chen-Jung Chen, "The Stability of Rate Gyro", AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.15, No.4, 1992.
 27. Zheng-Ming Ge, Chuang-Wen Yao, and Hsien-keng Chen, "Instability and Asymptotical Stability on Partial Region in Dynamical Systems", Proceedings of the National Science Council, Part A: Physical Science and Engineering, Vol.17, No.5, 1993.
 28. Zheng-Ming Ge, Hsien-Keng Chen and Chuang-Wen Yao, "Stability on Partial Region for Various Dynamical Systems", The Chinese Journal of Mechanics, Vol.10, No.3, 1994.
 29. Zheng-Ming Ge, Jung-Kui Yu and Hsien-Keng Chen, "Three Asymptotical Stability Theorems on Partial Region with Applications", Japanese Journal of Applied Physics, Vol.37, Part 1, No. 5, 1998.
 30. Zheng-Ming Ge, Jung-Kui Yu and Yu-Tzong Chen, "Pragmatical Asymptotical stability Theorem with Application to Satellite System", Japanese Journal of Applied Physics, Part 1, Vol.38. No. 10, 1999.