

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

具應力奇異點之 Mindlin 板振動問題探討(3/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2211-E-009-009-

執行期間：93年08月01日至94年10月31日

執行單位：國立交通大學土木工程學系(所)

計畫主持人：黃炯憲

計畫參與人員：張明儒、洪彥斌、劉凱明

報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 12 月 10 日

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 成果報告
 期中進度報告

具應力奇異點之 Mindlin 板振動問題探討

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC 93-2211-E-009-009-

執行期間：92 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

計畫主持人：黃炯憲

共同主持人：

計畫參與人員：張明儒、洪彥斌、劉凱明

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：國立交通大學

中 華 民 國 94 年 12 月 31 日

目錄

摘要	i
第一章 背景及目的	1
第二章 奇異漸近解之推導	6
第三章 扇形板之振動分析	19
第四章 斜形板之振動分析	26
第五章 裂縫矩形板之振動分析	33
第六章 結論	45
參考文獻	48
表格	54
圖	85

摘要

關鍵詞：應力奇異；特徵函數展開法；Ritz 法；有限元素法；振動分析

板是工程設計上(土木工程、機械工程、航空工程...等)之主要構件之一。Mindlin 板理論亦經常被使用於板相關問題分析上。由於外力點荷重、點彎矩及邊界之不連續性與尖角之存在，應力奇異點常發生於板相關問題。該奇異點須準確地處理，方能使得相關之數值分析解得到準確的答案。但依文獻回顧，目前對 Mindlin 板理論，由於邊界不連續或尖角之存在而引致之應力奇異階數，並未有一完整之探討。更不用論將其應用於含有應力奇異點且幾何較複雜問題之數值分析解。本研究即此相關問題深入探討。

本研究首先以特徵函數展開法(eigenfunction expansion)，求解由於邊界不連續或尖角之存在所引致 Mindlin 板應力奇異之解析漸近解，以求得各種不同條件下之應力奇異階數及其對應漸近解函數。

本研究把所得之漸近解函數融合於 Ritz 數值分析法中，分析含有 V 型開口圓形板及懸臂斜板(cantilevered skewed plates)之振動問題。並進行此等板幾何參數(如 V 型開口大小及位置)探討，以了解該等參數對板振動之影響。並從 Ritz 法中探討漸近解函數於數值分析法中收斂性之效益。

最後，本研究將所得之漸近解函數，進一步融合於有限元素法中。並提出新融合方式，以使得該漸近解函數能被更廣泛地應用於解含有應力奇異點之板問題。所提解題程序被應用於解 V 型開口圓形板及含有裂縫矩形板之振動問題，並進行相關參數探討。

Abstract

Keywords: Stress Singularity, Eigenfunction Expansion, Ritz Method, Finite Element Approach, Vibration Analysis

Plates are widely used components in engineering applications for civil engineering, mechanical engineering, and aerospace engineering. The Mindlin plate theory is often applied to describe the behaviors of plates. It is well known that stress singularities arise in the mathematical solutions of plate problems, which can be due to concentrated forces and moments, discontinuities in edge conditions or sharp corner. It has been pointed out and numerically shown that if singularities due to discontinuities in edge conditions or sharp corners are not properly considered in numerical solutions, significant errors will occur in the calculated global behavior of plates, such as static deflection, free vibration frequencies, forced dynamic response, and critical buckling load. However, there is no comprehensive study in the stress singularities for the Mindlin plate theory. Consequently, it is also short of accurate numerical solutions for the plates with stress singularities. It is the main purpose of this study to investigate the stress singularity behaviors of Mindlin plates due to discontinuities in edge conditions or sharp corner and apply these results to some well known numerical solution techniques to solve some complicate vibration problems involving stress singularities.

Eigenfunction expansion approach is applied to find the asymptotic solution for stress singularity behavior in the Mindlin plate theory. The singularity orders corresponding to various combinations of edge conditions will be determined and expressed in graphic form. The results will be compared with those for thin plate theory.

The obtained asymptotic solutions are used in the Ritz method and to solve the vibration problems such as circular plates with V notches and cantilevered skewed plates. Parameter studies are carried out to investigate the effects of V notches and skewed angles on the vibrations of such problems. Furthermore, the effects of the asymptotic solutions in the Ritz

approach are also investigated.

Finally, the obtained asymptotic solutions are further used in conventional finite element approach. A new approach is proposed so that the proposed approach can be broadly applied to solve the vibration problems with complicated geometry and stress singularities. Numerical investigations on the vibrations of circular plates with V notches and rectangular plates with cracks are carried out.

第一章 背景及目的

板構件常見於許多工程應用，例如土木工程，航空工業，機械工程等等。在板結構之設計上，常會產生應力奇異(singularity)之問題。其發生的原因有：(1)幾何形狀之不連續，如裂縫尖銳切角或邊界條件；(2)載重如單點載重或衝擊載重；(3)材料性質如複合材料之性質之陡變。當所分析之結構元件含有奇異點時，須找到能夠正確描述奇異點特性之漸近解，方能得到準確之數值解。例如於一般有限元素中，以奇異元素(singular element)(例如 Yosibash 和 Schiff, 1993)，或針對薄板理論中在 Ritz 法將角函數(corner function)引入允許函數(admissible function)中(例如 McGee 等人, 1992a；Leissa 等人, 1993)。

薄板理論或是平面彈性問題之應力奇異性探討，在 1970 年代已被廣泛的研究(參看下節之回顧)；但是於利用厚板理論之研究，則非常少且未完整。故本研究主要利用一階剪力變形板理論，探討具有幾何應力奇異點板振動行為。從推導一階剪力變形板理論應力奇異解，再將該解應用於傳統之數值分析法如 Ritz 法和有限元素法，探討扇形板(參見圖 1.1)、懸臂斜形板(參見圖 1.2)及具有裂縫矩形板(參見圖 1.3)之振動行為，以改進其解(含應力奇異點)之精確度。以下回顧本研究四大主題相關文獻：板理論之幾何應力奇異行為、扇形板振動分析、懸臂斜形板振動分析及具有裂縫矩形板之振動分析。

1.1 板理論之幾何應力奇異行為

彈性板之應力奇異性時常發生於邊界條件及幾何不規則處，如存在於 V 型缺口板之角隅尖端，或是有缺角的不規則形狀。準確地決定應力奇異行為的重要性不僅僅只是對破壞力學(Williams, 1966)而言，對於任一含尖銳角之複雜問題進行數值分析(Bartholomew, 1978)也是一樣重要。

文獻中已有了許多關於板由形狀幾何與材料所引起應力奇異之文章，但大多數以古典薄板理論或平面線彈性理論為主。Williams [1952a, 1952b]首先分析均質等向扇形板，探討由邊界條件所引起之應力奇異解問題。接著，Williams 及 Chapkis [1958]擴展 Williams [1952a, 1952b]之研究至極正向性薄板(polarly orthotropic plate)。Hein 和 Erdogan [1971]，Bogy 和 Wang [1971]應用 Mellin 轉換，探討雙材料(bi-material)楔形區域之應力奇異行為。Dempsey

和 Sinclair [1979]以一新 Airy 應力函數求解等向板受拉力所引致之應力奇異解。Ting 和 Chou [1981]應用 Stroh [1962]法求解異向性(anisotropic)楔形板受拉力之應力奇異問題。Ojikutul 等人 [1984]則探討層狀複合薄板之應力奇異行為。Sinclair [2000]求解受彎矩之彈性角板(angular plate)，於各種齊性(homogeneous)與非齊性(nonhomogeneous)邊界條下之應力奇異解，此處之應力奇異性含對數項所造成者(即 $\ln r$ ，在 $r \rightarrow 0$)，不同於 Williams [1952a, 1952b]之應力奇異解。

一階剪力變形板理論已廣為許多學者採用於厚板或積層板(laminated plate)的分析；但該理論因幾何不連續所引起之應力奇異解，則鮮少有人探討。針對一階剪力板奇異解問題之研究，Burton 和 Sinclair [1986]利用應力位能函數探討由六個邊條件所引起之應力奇異解，但此解並沒有考慮剪力造成的奇異性。Huang 等人 [1994]則透過求取徑向簡支撐扇形 Mindlin 板之正確解，探討應力奇異現象。Burton 和 Sinclair [1986]解中，只能描述彎矩奇異性，無法滿足剪力奇異性的條件，然而 Huang 等人 [1994]解中，卻證明了剪力奇異解之存在。依本研究之成果，Huang [2003]利用特徵函數展開法求解扇形板各種徑向邊界條件組合之應力奇異解；該奇異解具有彎矩奇異性及剪力奇異性。Huang [2002a]使用特徵函數展開法進一步推導雙材料楔形複合板之應力奇異解，並探討雙材料界面接合處及尖銳角處之奇異現象。Huang [2002b, 2004]再進一步擴展其對 Mindlin 板奇異解之探討至 Reddy 三階板理論及更高階板理論。

1.2 扇形板之振動分析

Leissa [1969, 1977a, 1977b, 1981a, 1981b, 1987a, 1987b]，在文中回顧了上千篇在 1985 年以前有關薄板及厚板振動的相關文章。Liew 等人 [1995]則將回顧的焦點集中在 1994 年以前有關厚板振動的文獻。從這些回顧發現，對於扇形板振動之研究遠少於對圓形、矩形、環狀扇形板。扇形板尖銳角處之彎矩與剪力奇異性的存在，增加了這類平板在求取精確頻率及振動模態上，數值分析過程的困難度。

過去，已經有一些薄扇形板振動分析之相關論文。基於古典薄板理論，Huang 等人 [1993]首先提出徑向簡支撐扇形板之正確解析解(exact analytical solution)。但其他徑向邊界條件之扇形板則未有正確解析解；因此，發展出各種數值解，例如：能量法(Rubin, 1975；Bhattacharya 和 Bhowmic, 1975)，有限元素法(Houmat, 2001)，有限條狀法(finite strip

method)(Cheung 和 Chan, 1981)，微分數值法(differential quadrature method)(Wang 和 Wang, 2004)以及 Ritz 法(Leissa 等人, 1993；McGee 等人, 2003)。然而上述這些數值方法當中，又以由 Leissa 等人[1993]和 McGee 等人 [2003]所提出的解法最準確，因為在 Ritz 法中之允許函數包含了角函數，該角函數能準確地描述扇形板尖銳角附近區域的彎矩奇異行為。關於實驗方面，則有 Waller [1952]，Maruyama 和 Ichinomiya [1981]各自針對邊界為自由端與固定端扇形板之振動行為所作的研究。

雖然眾所皆知分析厚板或者是決定薄板高模態之振動頻率，剪力變形或旋轉慣量是為重要因素，但很少研究利用 Mindlin [1951]板理論或 Reissner [1945]板理論探討扇形板振動行為。Huang 等人 [1994]提供了徑向簡支撐扇形板之正確解析解，此解包括了原來及修正後之 Bessel 函數。Liu 和 Liew [1999]應用微分數值法分析邊界為固定端或簡支撐之扇形板自由振動；事實上，他們是將扇形板考慮成內半徑和外半徑比為 0.00001 的環狀扇形板，而內半徑的邊界條件為自由端，以致於不須考量扇形角處之彎矩與剪力奇異性。Liu 和 Liew [1999]所得解之精確度取決於內外半徑比以及內半徑的邊界條件。另外，有許多學者利用不同方法來探討環狀扇形板之振動問題(例如：Guruswamy 和 Yang, 1979；Cheung 和 Chan, 1981；Srinivasan 和 Thiruvengkatachari, 1985；Mizusawa, 1991；Xiang 等人, 1993；Mizusawa 等人, 1994；McGee 等人, 1995a；Liew 和 Liu, 2000)；其中只有 Xiang 等人 [1993]分析內外半徑比為 0.00001 之情況，而且其扇形角小於 90° 。

根據上述的相關文獻可知，需要發展出各種邊界條件下在尖銳角附近，具有彎矩與剪力奇異性的數值解，以求獲得更精確的厚扇形板之振動頻率。本研究利用 Ritz 法，其位移允許函數除了有一組具完備性的多項式函數外，並結合具有彎矩與剪力奇異性之角函數。角函數將相當有效地加速了數值結果的收斂。本研究將分析不同的邊界條件、不同的角度 (90° ， 180° ， 270° ， 300° ， 330° 及 355°)與不同的厚徑比($h/a = 0.1$ 或 0.2)之扇形板。

1.3 懸臂斜形板之振動分析

如圖 1.2 所示之懸臂斜形板常被應用於工程上(如飛機翼或導向飛彈之平衡翼)。懸臂斜三角形板或平行四邊形板可視為梯形板之特殊案件。在圖 1.2 中，若 $c/b = 0$ ，則為斜三角形板；若 $c/b = 1$ ，則為平行四邊形板。複雜之邊界條件和幾何形狀導致該問題沒有正確解(exact solution)，許多數值方法(如有限元素法、有限差分法及 Ritz 法)常用於分析該類板。

依據古典薄板理論，Leissa [1969, 1977a, 1981a, 1987a] 收集並回顧了早期分析探討此類板之文獻，而近期相關研究則可參考 McGee 等人 [1992a, 1992b] 之文章。由於奇異應力點之存在，以上文獻用了許多不同的方法，所得到之結果卻有明顯的差異。

利用考慮剪力變形及旋轉慣量之板理論，分析斜形板之文獻並不多見。McGee 和 Butalia [1992c] 利用高階板理論及有限元素法，分析懸臂斜梯形及三角形板之振動。Karunasena 等人 [1996] 則以 Mindlin 板理論，利用 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜三角形板。Kanaka 和 Hinton [1980] 及 Liew 等人 [1993] 依據 Mindlin 板理論，分別利用有限元素法和 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜平行四邊形板。McGee 和 Leissa [1991] 以 Ritz 法與三維彈性理論，探討懸臂斜平行四邊形板之振動行為。McGee 和 Butalia [1994] 則以三種剪力變形的厚板理論，並使用 9 個節點之 Lagrangian 等參數元素分析斜板振動行為。

利用古典薄板理論，McGee 等人 [1992a, 1992b] 於數值近似法中引入應力奇異函數，為了獲得更精確的懸臂斜形板振動頻率。但是，上述關於懸臂斜三角形、梯形、平行四邊形厚板之文獻，均沒有考慮應力奇異性。McGee 和 Butalia [1994] 藉由有限元素法，分析懸臂斜形板之收斂性中發現，數值結果的收斂性有隨斜角的增加變差。另外，Karunasena 等人 [1996] 亦承認利用 pb-2 Rayleigh-Ritz 法分析懸臂斜三角形 Mindlin 板所得之結果，在大斜角時並不精確；因為，沒有將應力奇異性考慮進去。因此，實有必要利用更準確之數值法再重新檢驗文獻上有關懸臂斜形厚板之結果。

本研究的目的即為提出一精確的數值方法，使用 Ritz 法及加入角應力奇異性來探討懸臂斜三角形、梯形、平行四邊形 Mindlin 板之自由振動問題。Ritz 法已被廣泛應用於結構元件振動行為之研究。Ritz 法中常選用多項式函數當允許函數，然而，大量的多項式函數卻容易讓求解特徵值問題的過程，造成奇異矩陣(ill-conditioned matrix)。本研究除了使用多項式函數外，並同時引入角函數(corner functions)，以加速數值解之收斂。含有彎矩與剪力奇異性的角函數即為本研究所得之漸近解。因此，角函數不只可以適當地描述懸臂斜形板固定端凹角處(re-entrant)之奇異行為，更可以同時符合位移及部分力的邊界條件。從各種不同斜角之收斂性分析中，將證明角函數對數值結果之精確度的影響。本研究將探討懸臂斜梯形板之振動頻率，考慮各種不同的斜角、幾何比(aspect ratios) (\bar{a}/b) 、翼弦比(chord ratios) (c/b) 以及厚度比(thickness ratios) (h/b) ，並與過去的文獻所獲得的結果作比較，以改善目前所得到的資料。

1.4 具有裂縫矩形板之振動分析

傳統上，考慮奇異點之應力奇異特性的有限元素方法有二；一為利用奇異元素(singular element)正確地描述應力隨 r 趨近於零而趨近於奇異之階數，而另一種為疊加應力奇異解於有限元素。後者另有兩種方式處理：【1】為該應力奇異解含蓋整個問題之幾何區域(Igarashi 和 Honma, 1996)；【2】為該應力奇異解只含蓋奇異點附近之區域，然後再用所謂之“transfinite elements”，連接該區域與外面由正規(regular)有限元素所含蓋之其他區域(Yosibash 和 Schiff, 1993)。本研究將採用類似第【2】種方式，但不需有“transfinite elements”。本研究主要是探討具裂縫之 Mindlin 矩形板，以下是針對本研究的實例分析相關文獻做一概略回顧。

利用古典板理論分析具裂縫板，Lynn 與 Kumbasar [1967]首先利用 Green 函數推導出 Fredholm 第一型積分方程式，分析具之有裂縫簡支承矩形薄板之自然振動。Stahl 與 Keer [1972]進一步發展出 Fredholm 第二型積分方程式，來決定具裂縫薄板矩形板之自然振動；Solecki [1983]則利用有限傅立葉轉換。Lee [1991]利用 Ritz 法分析邊界條件為簡支承及固定端且具有環向裂縫的環狀薄板。Yuan 等人 [1993]也用了 Ritz 法對具有不同邊界條件的徑向、環向裂縫之環狀板及十字裂縫之圓形板作分析。Khadem 和 Rezaee [2000]以古典板理論，利用 Ritz 法並代入“modified comparison function”分析具裂縫的矩形板。

利用 Mindlin 厚板理論分析具裂縫版，Qian 等人 [1990]用有限元素法分析在板中央有不同長度裂縫的簡支承矩形厚板；Lee 和 Lim [1992]用 Ritz 法分析含有裂縫之簡支承矩形厚板的振動。

綜觀上述前人有關矩形裂縫板振動之研究，其數值解均未考慮奇異點之特性，本研究將以一階剪力變形板理論為基礎，提出以有限元素法(搭配二階形狀函數)，在包含奇異點元素引入奇異點之漸近解(即角函數)；用以求取含有奇異點厚板之自然振動頻率。

第二章 奇異漸近解之推導

2.1 基本公式

應用無外力作用下之一階剪力變形板理論，並配合漢米爾頓變分原理(Hamilton Principal)，可以推導出系統之平衡方程式。以極座標(參見圖 2.1)表示平衡方程(參見 Mindlin [1954])：

$$M_{r,r} + \frac{1}{r}M_{r\theta,\theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0 \quad (2.1a)$$

$$M_{r\theta,r} + \frac{1}{r}M_{\theta,\theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} - Q_r = 0 \quad (2.1b)$$

$$Q_{r,r} + \frac{Q_r}{r} + \frac{1}{r}Q_{\theta,\theta} = 0 \quad (2.1c)$$

式(2.1)中，下標“,”代表對自變數 r 或 θ 之微分， M_r 為垂直於 r 面上沿 θ 方向每單位長度的彎曲力矩， M_θ 為垂直於 θ 面上沿 r 方向每單位長度的彎曲力矩， $M_{r\theta}$ 為垂直於 r 面或 θ 面上沿 θ 方向或 r 方向每單位長度的扭轉力矩， Q_r 為於垂直 r 之面上沿 z 方向每單位長度的剪力(shear force intensity)， Q_θ 為在垂直 θ 之面上沿 z 方向每單位長度的剪力。

在一階剪力變形板理論中，力(stress resultants)與位移分量的關係式為：

$$M_r = -D[\Psi_{r,r} + \nu r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta})] \quad (2.2a)$$

$$M_\theta = -D[r^{-1}(\Psi_r + \Psi_{\theta,\theta}) + \nu \Psi_{r,r}] \quad (2.2b)$$

$$M_{r\theta} = \frac{-(1-\nu)D}{2}[r^{-1}(\Psi_{r,\theta} - \Psi_\theta) + \Psi_{\theta,r}] \quad (2.2c)$$

$$Q_r = \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r}) \quad (2.2d)$$

$$Q_\theta = \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1}W_{,\theta}) \quad (2.2e)$$

其中 W 為中平面(midplane)之垂直向位移， Ψ_r 、 Ψ_θ 分別為徑向與環向撓曲造成中平面上之轉角， h 為板厚度， E 為彈性模數， ν 為波松比， G 為剪力模數， κ^2 為剪力修正因子， D 為撓曲剛度($D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$)。 κ^2 之值，Reissner [1945] 取為 $\frac{5}{6}$ ，而 Mindlin [1951] 則取為 $\pi^2/12$ 。將式(2.2)代入式(2.1)中可得到以位移分量所表示的平衡方程式表示如下：

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\Psi_{r,rr} + r^{-1}\Psi_{r,r} + r^{-2}\Psi_{r,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_r - 2r^{-2}\Psi_{\theta,\theta}) \\ & + (1+\nu)(\Psi_{r,rr} - r^{-2}\Psi_r + r^{-1}\Psi_{r,r} - r^{-2}\Psi_{\theta,\theta} + r^{-1}\Psi_{\theta,\theta r}) \} \\ & + \kappa^2 Gh(-\Psi_r + W_{,r}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\Psi_{\theta,rr} + r^{-1}\Psi_{\theta,r} + r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} - r^{-2}\Psi_\theta + 2r^{-2}\Psi_{r,\theta}) \\ & + (1+\nu)(r^{-2}\Psi_{\theta,\theta\theta} + r^{-2}\Psi_{r,\theta} + r^{-1}\Psi_{r,\theta r}) \} \\ & + \kappa^2 Gh(-\Psi_\theta + r^{-1}W_{,\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3b)$$

$$\kappa^2 Gh(W_{,rr} + r^{-1}W_{,r} + r^{-2}W_{,\theta\theta} - \Psi_{r,r} - r^{-1}\Psi_r - r^{-1}\Psi_{\theta,\theta}) = 0. \quad (2.3c)$$

利用分離變數的觀念，將式(2.3)中的三個位移分量假設成下列形式：

$$\Psi_r(r, \theta) = e^{p\theta} \varphi_r(r), \quad \Psi_\theta(r, \theta) = e^{p\theta} \varphi_\theta(r) \quad \text{和} \quad W(r, \theta) = e^{p\theta} \hat{w}(r) \quad (2.4)$$

上式中 p 可為一複數，將式(2.4)代入式(2.3)中，整理得

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\varphi_r'' + r^{-1}\varphi_r' - (1+p^2)r^{-2}\varphi_r + 2pr^{-2}\varphi_\theta) \\ & + (1+\nu)(\varphi_r'' - r^{-2}\varphi_r + r^{-1}\varphi_r' - pr^{-2}\varphi_\theta + pr^{-1}\varphi_\theta') \} + \kappa^2 Gh(-\varphi_r + \hat{w}') = 0 \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \{ (1-\nu)(\varphi_\theta'' + r^{-1}\varphi_\theta' + (p^2-1)r^{-2}\varphi_\theta + 2pr^{-2}\varphi_r) \\ & + (1+\nu)(p^2r^{-2}\varphi_\theta + pr^{-2}\varphi_r + pr^{-1}\varphi_r') \} + \kappa^2 Gh(-\varphi_\theta + pr^{-1}\hat{w}) = 0 \end{aligned} \quad (2.5b)$$

$$\kappa^2 Gh(\hat{w}'' + r^{-1}\hat{w}' + p^2 r^{-2}\hat{w} - \varphi_r' - r^{-1}\varphi_r - pr^{-1}\varphi_\theta) = 0 \quad (2.5c)$$

上式中上標“'”表示對 r 微分，式(2.5a)~(2.5c)為一組變係數常微分方程，可利用 Frobenius 級數來求解。

2.2 彎矩奇異性之漸近解

假設板的三個位移分量與 r 相關的函數為：

$$\varphi_r(r) = \sum_{m=0} a_{2m} r^{\lambda+2m}, \quad \varphi_\theta(r) = \sum_{m=0} b_{2m} r^{\lambda+2m} \quad \text{and} \quad \hat{w}(r) = \sum_{m=0} c_{2m} r^{\lambda+2m+1} \quad (2.6)$$

λ 可為一複數，且在 r 趨近於 0 時， λ 之實部必須大於 0，以滿足位移分量的正規情況 (regularity conditions)。倘若將式(2.6)代入式(2.2)，則在 $r=0$ 處會發生彎矩奇異 (singular moments) 的現象，但不會引致剪力的奇異性。式(2.6)代入式(2.5)，整理得

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left\{ \sum_{m=0} [(-2 + 2(2m + \lambda)^2 + p^2(1 - \nu))a_{2m} + p((\lambda + 2m)(1 + \nu) - 3 + \nu)b_{2m}] r^{\lambda+2m-2} \right\} \\ & + \sum_{m=0} \kappa^2 Gh[-a_{2m} + (\lambda + 2m + 1)c_{2m}] r^{\lambda+2m} = 0 \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left\{ \sum_{m=0} [(3 - \nu + (1 + \nu)(\lambda + 2m))pa_{2m} + ((1 - \nu)((\lambda + 2m)^2 + p^2 - 1) + (1 + \nu)p^2)b_{2m}] r^{\lambda+2m-2} \right\} \\ & + \sum_{m=0} \kappa^2 Gh[-b_{2m} + pc_{2m}] r^{\lambda+2m} = 0 \end{aligned} \quad (2.7b)$$

$$\sum_{m=0} [((\lambda + 2m + 1)^2 + p^2)c_{2m} - (\lambda + 2m + 1)a_{2m} - pb_{2m}] r^{\lambda+2m-1} = 0 \quad (2.7c)$$

為滿足式(2.7a)~(2.7c)， r 之不同階數係數必須為 0。因此，

$$\begin{aligned} & \frac{D}{2} \left\{ [(-2 + 2(2m + 2 + \lambda)^2 + p^2(1 - \nu))a_{2m+2} + p((\lambda + 2m + 2)(1 + \nu) - 3 + \nu)b_{2m+2}] \right\} \\ & = -\kappa^2 Gh[-a_{2m} + (\lambda + 2m + 1)c_{2m}] \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\frac{D}{2} \left\{ [3 - \nu + (1 + \nu)(\lambda + 2m + 2)]pa_{2m+2} + [(1 - \nu)((\lambda + 2m + 2)^2 + p^2 - 1) + \right.$$

$$(1+\nu)p^2]b_{2m+2}\} = -\kappa^2 Gh[-b_{2m} + pc_{2m}] \quad (2.8b)$$

$$-(\lambda + 2m + 3)a_{2m+2} - pb_{2m+2} + [(\lambda + 2m + 3)^2 + p^2]c_{2m+2} = 0 \quad (2.8c)$$

且

$$[(1-\nu)]p^2 + 2\lambda^2 - 2]a_0 + p[(1+\nu)\lambda - 3 + \nu]b_0 = 0 \quad (2.9a)$$

$$p[3-\nu+(1+\nu)\lambda]a_0 + [(1-\nu)(\lambda^2 + p^2 - 1) + (1+\nu)p^2]b_0 = 0 \quad (2.9b)$$

$$-(\lambda+1)a_0 - pb_0 + [(\lambda+1)^2 + p^2]c_0 = 0 \quad (2.9c)$$

式(2.9)中之 a_0 、 b_0 及 c_0 一組齊次線性代數方程式之解；故 a_0 、 b_0 、 c_0 有非零解(nontrivial solution)時， p 須滿足

$$p = \pm i(\lambda - 1) \text{ 和 } p = \pm i(\lambda + 1) \quad (2.10)$$

當 $p = \pm i(\lambda - 1)$ ， $b_0 = \pm ia_0$ ，且 c_0 是未定係數。

$$\text{當 } p = \pm i(\lambda + 1), \quad b_0 = \pm k_1 a_0, \quad c_0 = \gamma_1 a_0 \quad (2.11)$$

其中

$$k_1 = -\frac{i[2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda - 1)]} \quad (2.12a)$$

$$\gamma_1 = \frac{\nu - 1}{-3 + \lambda + \nu + \nu\lambda} \quad (2.12b)$$

因此，從以上推導知，

$$\begin{aligned} \Psi_r = & e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,1} r^{\lambda+2m} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,2} r^{\lambda+2m} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,3} r^{\lambda+2m} \\ & + e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} a_{2m,4} r^{\lambda+2m} \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\Psi_\theta = e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,1} r^{\lambda+2m} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,2} r^{\lambda+2m} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,3} r^{\lambda+2m}$$

$$+ e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} b_{2m,4} r^{\lambda+2m} \quad (2.13b)$$

$$W = e^{i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,1} r^{\lambda+2m+1} + e^{-i(\lambda+1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,2} r^{\lambda+2m+1} + e^{i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,3} r^{\lambda+2m+1} \\ + e^{-i(\lambda-1)\theta} \sum_{m=0} c_{2m,4} r^{\lambda+2m+1} \quad (2.13c)$$

其中 $b_{0,1} = ia_{0,1}$, $b_{0,2} = -ia_{0,2}$, $b_{0,3} = k_1 a_{0,3}$, $b_{0,4} = -k_1 a_{0,4}$, $c_{0,3} = \gamma_1 a_{0,3}$, $c_{0,4} = \gamma_1 a_{0,4}$; 而 $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $a_{0,3}$, $a_{0,4}$, $c_{0,1}$ 和 $c_{0,2}$ 為待定係數。式(2.13)中的其他係數可從式(2.8)來決定。

式(2.13) 亦可表示成

$$\Psi_r(r, \theta) = (A_1 \cos(\lambda+1)\theta + A_2 \sin(\lambda+1)\theta + A_3 \cos(\lambda-1)\theta + A_4 \sin(\lambda-1)\theta) r^\lambda + O(r^{\lambda+2}) \\ \Psi_\theta(r, \theta) = (A_2 \cos(\lambda+1)\theta - A_1 \sin(\lambda+1)\theta + k_2 A_4 \cos(\lambda-1)\theta - k_2 A_3 \sin(\lambda-1)\theta) r^\lambda + O(r^{\lambda+2}) \\ W(r, \theta) = (C_1 \cos(\lambda+1)\theta + C_2 \sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1 A_3 \cos(\lambda-1)\theta + \gamma_1 A_4 \sin(\lambda+1)\theta) r^{\lambda+1} \\ + O(r^{\lambda+3}) \quad (2.14)$$

上式中 , $A_1 = a_{0,1} + a_{0,2}$, $A_2 = i(a_{0,1} - a_{0,2})$, $A_3 = a_{0,3} + a_{0,4}$, $A_4 = i(a_{0,3} - a_{0,4})$, $C_1 = c_{0,1} + c_{0,2}$, $C_2 = i(c_{0,1} - c_{0,2})$, $k_2 = -ik_1$ 。這些係數決定於邊界條件。

扇形板尖角處之應力奇異性決定於其邊界條件。在一階剪力變形板理論中，其徑向邊界條件有四種(其中 $\theta = \theta_0$)：

固定端

$$W(r, \theta_0) = \Psi_r(r, \theta_0) = \Psi_\theta(r, \theta_0) = 0 \quad (2.15a)$$

自由端

$$M_\theta(r, \theta_0) = M_{r\theta}(r, \theta_0) = Q_\theta(r, \theta_0) = 0 \quad (2.15b)$$

第一型簡支撐端

$$W(r, \theta_0) = \Psi_r(r, \theta_0) = M_\theta(r, \theta_0) = 0 \quad (2.15c)$$

第二型簡支撐端

$$W(r, \theta_0) = M_\theta(r, \theta_0) = M_{r\theta}(r, \theta_0) = 0 \quad (2.15d)$$

以下將針對一為固定端，另一為自由端之徑向邊界條件，闡述其求取特徵方程式 (characteristic equation) 之 λ 值的過程，以及其所相對應的位移場漸近解。將式(2.14)代入式(2.15a)及(2.15b)，可以得到一組六元一次聯立方程式， α 為扇形角(參見圖 2.1)：

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (2.16a)$$

$$A_2 + k_2 A_4 = 0 \quad (2.16b)$$

$$C_1 + \gamma_1 A_3 = 0 \quad (2.16c)$$

$$\begin{aligned} & A_1 \lambda (1 - \nu) \cos(\lambda + 1)\alpha + A_2 \lambda (1 - \nu) \sin(\lambda + 1)\alpha \\ & + A_3 [k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1] \cos(\lambda - 1)\alpha + A_4 [k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1] \sin(\lambda - 1)\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.16d)$$

$$\begin{aligned} & - 2A_1 \lambda \sin(\lambda + 1)\alpha + 2A_2 \lambda \cos(\lambda + 1)\alpha - A_3 (1 + k_2) (\lambda - 1) \sin(\lambda - 1)\alpha \\ & + A_4 (1 + k_2) (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.16e)$$

$$\begin{aligned} & - A_1 \sin(\lambda + 1)\alpha + A_2 \cos(\lambda + 1)\alpha + A_3 (\lambda \gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin(\lambda - 1)\alpha \\ & - A_4 (\lambda \gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \cos(\lambda - 1)\alpha + C_1 (1 + \lambda) \sin(\lambda + 1)\alpha \\ & - C_2 (1 + \lambda) \cos(\lambda + 1)\alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.16f)$$

整理之後，可得一組三元一次聯立方程式

$$\begin{aligned} & A_1 (\lambda (1 - \nu) \cos((\lambda + 1)\alpha) - (k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1) \cos((\lambda - 1)\alpha)) \\ & + A_4 ((k_2 (\lambda - 1) - \lambda \nu - 1) \sin((\lambda - 1)\alpha) - k_2 \lambda (1 - \nu) \sin((\lambda + 1)\alpha)) = 0 \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned}
& A_1(-2\lambda \sin((\lambda+1)\alpha) + (1+k_2)(\lambda-1) \sin((\lambda-1)\alpha)) \\
& + A_4((1+k_2)(\lambda-1) \cos((\lambda-1)\alpha) - k_2 2\lambda \cos((\lambda+1)\alpha)) = 0
\end{aligned} \tag{2.17b}$$

$$\begin{aligned}
& A_1(-\sin((\lambda+1)\alpha) - (\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin((\lambda-1)\alpha) + \gamma_1(1+\lambda) \sin((\lambda+1)\alpha)) \\
& + A_4(-k_2 \cos((\lambda+1)\alpha) - (\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \cos((\lambda-1)\alpha)) \\
& + C_2(-(1+\lambda) \cos((\lambda+1)\alpha)) = 0
\end{aligned} \tag{2.17c}$$

因為 A_1 、 A_4 、 C_2 有非零解，故以上聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0。結果可得到兩條特徵方程式：

$$\cos(\lambda+1)\alpha = 0 \tag{2.18}$$

$$\sin^2 \lambda\alpha = \frac{4 - \lambda^2(1+\nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3-\nu)(1+\nu)} \tag{2.19}$$

但當 $\cos(\lambda+1)\alpha = 0$ 時，會造成 A_1 、 A_4 、 C_2 皆為 0，此結果與上述假設矛盾，故此特徵方程式不該取。

將式(2.19)代回式(2.17)可解出 A_1 、 A_4 、 C_2 等係數，可求得具有彎矩奇異性之漸近解，整理如下：

$$\begin{aligned}
\Psi_r(r, \theta) &= A_1 r^\lambda \{ \cos(\lambda+1)\theta - k_2 \eta_1 \sin(\lambda+1)\theta - \cos(\lambda-1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda-1)\theta \} \\
\Psi_\theta(r, \theta) &= A_1 r^\lambda \{ -\sin(\lambda+1)\theta - k_2 \eta_1 \cos(\lambda+1)\theta + k_2 \sin(\lambda-1)\theta + k_2 \eta_1 \cos(\lambda-1)\theta \} \\
W(r, \theta) &= A_1 r^{\lambda+1} \{ \gamma_1 \cos(\lambda+1)\theta + \eta_2 \sin(\lambda+1)\theta - \gamma_1 \cos(\lambda-1)\theta + \gamma_1 \eta_1 \sin(\lambda-1)\theta \}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\text{其中 } \eta_1 = -\frac{k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1}{\lambda(1-\nu)} \frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2} \tag{2.21a}$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda) \sin(\lambda+1)\alpha/2} \tag{2.21b}$$

$$k_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda+1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda-1)]} \quad (2.21c)$$

表 2.1 與表 2.2 分別將不同徑向邊界條件組合下之特徵方程式及其對應的角函數均列於其中。表 2.2 之角函數，當兩徑向邊界條件相同時，角度所考慮的範圍為 $-\alpha/2 \leq \theta \leq \alpha/2$ ；如此，將有助於具有對稱性問題的推導。其他情況下之角度範圍，則為 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 。從表 2.1 中，針對一階剪力變形板理論在十種徑向邊界條件組合下之特徵方程式可發現，兩邊徑向皆自由端與兩邊徑向皆為第二型簡支撐端之特徵方程式相同。此結果顯示出特徵方程式與邊界條件 W 和 Q_0 無關，但此兩種型式之邊界條件卻產生不同角函數（可參見表 2.2）。

以下，將 C 與 F 分別定義成固定端及自由端邊界條件，而 S(I)與 S(II)則定義為第一型及第二型簡支撐端邊界條件。在 r 趨近於 0 時， λ 值之實部必須大於 0，以滿足位移分量的正規情況。各種邊界條件在此限制下， λ 值之實部最小值隨尖銳角(α)之變化，可參見圖 2.2。其數值結果所使用之波松比(ν)為 0.3。彎矩造成之應力奇異性發生在 λ 值之實部小於 1 時。曲線 1 和曲線 6 之曲折尖端處是由於對稱與反對稱模態改變所致。例如，當尖銳角(α)小於 180° 時，曲線 6 之 λ 值實部是由對稱部分的特徵方程式所決定；相反地，當尖銳角(α)大於 180° 時，則是由反對稱部分的特徵方程式所決定。曲線 2 及 5 的非平滑段分別發生在 130° 和 145° 處，這現象是起因於特徵方程式之根從實數改變成複數所致，而非曲線相交造成的。

從圖 2.2 顯示的結果可以發現，不論是任一種邊界條件下，當角度(α)小於 60° ，不會發生彎矩奇異性；當角度(α)大於 180° ，則必然會發生彎矩奇異性。邊界條件為 C_F 和 C_S(II)時，當角度(α)大約比 105° 小一點點處，會有彎矩奇異性。以下幾種情況下，皆會產生彎矩奇異性：如邊界條件為 S(I)_ S(I)和 S(I)_C 時，在角度(α)大於 90° ；邊界條件為 S(I)_ F, S(I)_ S(II)及 S(II)_ F 時，在角度(α)超過 128° ；邊界條件為 F_ F, S(II)_ S(II)和 C_C 時，在角度(α)超過 180° 。奇異性會伴隨著角度的增加而變強，只有 S(I)_ S(I), C_F 與 C_S(II)三種情況是例外。當角度為 2π 時，在 F_ F, S(II)_ S(II)和 C_C 邊界條件下，會使得彎矩奇異性的階數為 $r^{-1/2}$ ；然而，在 S(I)_ S(I)情形下，會得到彎矩奇異性的階數為 r^{-1} ；其他邊界條件下，則奇異性的階數為 $r^{-3/4}$ 。

2.3 剪力奇異性之漸近解

式(2.5)的解也可假設為下列半無限級數(infinite series)的展開式：

$$\varphi_r = \sum_{n=0} \bar{a}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n+1}, \quad \varphi_\theta = \sum_{n=0} \bar{b}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n+1} \quad \text{和} \quad \hat{w} = \sum_{2n=0} \bar{c}_{2n} r^{\bar{\lambda}+2n} \quad (2.22)$$

式(2.22)中 $\bar{\lambda}$ 是一個帶有正實部的複數，以滿足位移分量在 $r=0$ 附近的正規情況(regularity conditions)。倘若將式(2.22)代入式(2.2)，則在 $r=0$ 處會發生剪力奇異(singularity of shear force)，但不會引致彎矩的奇異性。

有關剪力奇異性的漸近解之推導過程和前一節彎矩奇異性的漸近解相同，在這裡便不再贅述。經過計算之後得三個位移表示式如下：

$$\Psi_r(r, \theta) = (\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_3 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \bar{A}_4 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta) r^{\bar{\lambda}+1} + O(r^{\bar{\lambda}+3}) \quad (2.23a)$$

$$\Psi_\theta(r, \theta) = (\bar{B}_1 \cos \bar{\lambda} \theta - \bar{B}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_4 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta - \bar{A}_3 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta) r^{\bar{\lambda}+1} + O(r^{\bar{\lambda}+3}) \quad (2.23b)$$

$$W(r, \theta) = (\bar{l}_1 (\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta) + \bar{l}_2 (\bar{B}_2 \cos \bar{\lambda} \theta - \bar{B}_1 \sin \bar{\lambda} \theta)) r^{\bar{\lambda}} + O(r^{\bar{\lambda}+2}) \quad (2.23c)$$

其中

$$\bar{l}_1 = \frac{-D}{2\kappa^2 Gh} (3 - \nu + (1 + \nu)(1 + \bar{\lambda})) \quad (2.24a)$$

$$\bar{l}_2 = \frac{D}{2\kappa^2 Gh} (2(1 - \nu) - (1 + \nu)\bar{\lambda}) \quad (2.24b)$$

如同 2.2 節推導的過程，將式(2.23)代入式(2.15a)、(2.15b)中，可得到一組六元一次聯立方程式：

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_3 = 0 \quad (2.25a)$$

$$\bar{B}_1 + \bar{A}_4 = 0 \quad (2.25b)$$

$$\bar{l}_1 \bar{A}_1 + \bar{l}_2 \bar{B}_2 = 0 \quad (2.25c)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1(1+\nu+\lambda\nu)\cos\alpha + \bar{A}_2(1+\nu+\lambda\nu)\sin\lambda\alpha \\ & + \bar{A}_3(1+\lambda)(\nu-1)\cos(\lambda+2)\alpha + \bar{A}_4(1+\lambda)(\nu-1)\sin(\lambda+2)\alpha \\ & - \bar{B}_1\lambda\sin(\lambda\alpha) + \bar{B}_2\lambda\cos(\lambda\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.25d)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1\lambda\sin(\lambda\alpha) + \bar{A}_2\lambda\cos(\lambda\alpha) - \bar{A}_3 2(1+\lambda)\sin(\lambda+2)\alpha \\ & + \bar{A}_4 2(1+\lambda)\cos(\lambda+2)\alpha + \bar{B}_1\lambda\cos(\lambda\alpha) + \bar{B}_2\lambda\sin(\lambda\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.25e)$$

$$\bar{A}_1 \bar{l}_1 \lambda \sin(\lambda\alpha) - \bar{A}_2 \bar{l}_1 \lambda \cos(\lambda\alpha) + \bar{B}_1 \bar{l}_2 \lambda \cos(\lambda\alpha) + \bar{B}_2 \bar{l}_2 \lambda \sin(\lambda\alpha) = 0 \quad (2.25f)$$

整理之後，可得一組三元一次聯立方程式

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1[(1+\nu+\nu\bar{\lambda})\cos\bar{\lambda}\alpha - (1+\bar{\lambda})(-1+\nu)\cos(\bar{\lambda}+2)\alpha - \frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}\alpha] \\ & + \bar{A}_2(1+\nu+\bar{\lambda}\nu)\sin\bar{\lambda}\alpha + \bar{A}_4[(1+\bar{\lambda})(\nu+1)\sin(\bar{\lambda}+2)\alpha + \bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}\alpha] = 0 \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1[-\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}\alpha + 2(1+\bar{\lambda})\sin(\bar{\lambda}+2)\alpha - \frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2}\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}\alpha] \\ & + \bar{A}_2\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}\alpha + \bar{A}_4[2(1+\bar{\lambda})\cos(\bar{\lambda}+2)\alpha - \bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}\alpha] = 0 \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$\bar{A}_1[\bar{l}_1\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}\alpha - \bar{l}_1\bar{\lambda}\sin\bar{\lambda}\alpha] - \bar{A}_2(\bar{l}_1\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}\alpha) - \bar{A}_4(\bar{l}_2\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}\alpha) = 0 \quad (2.26c)$$

因為 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{A}_4 有非零解，因此以上聯立方程組的係數矩陣之行列式值要等於 0。

結果可得到特徵方程式：

$$\cos\bar{\lambda}\alpha = 0 \quad (2.27a)$$

$$\sin^2\alpha(\bar{\lambda}+1) = \frac{4-(1+\nu)^2(1+\bar{\lambda})^2\sin^2\alpha}{(3-\nu)(1+\nu)} \quad (2.27b)$$

將式(2.27)代回式(2.26)可解出 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{A}_4 ，可求剪力奇異性之角函數。式(2.27b)之解，將導致 \bar{A}_1 、 \bar{A}_2 、 \bar{B}_1 、 \bar{B}_2 為零而退化成2.2節之解。且由式(2.27a)得知 $\bar{\lambda} = \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}$ ，在 $\alpha > 90^\circ$

時有奇異性。具剪力奇異性之漸近解如下：

$$\begin{aligned}\Psi_r(r, \theta) &= \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \left\{ \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_1 \sin \bar{\lambda} \theta - \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \bar{\eta}_2 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \right\} \\ \Psi_\theta(r, \theta) &= \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \left\{ -\bar{\eta}_2 \cos \bar{\lambda} \theta - \frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2} \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_2 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \right\} \\ W(r, \theta) &= \bar{A}_1 (\bar{l}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{l}_2 \bar{\eta}_2) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta\end{aligned}\quad (2.28)$$

其中 \bar{l}_1 及 \bar{l}_2 如式(2.24)所示。

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1 &= -\frac{-(1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \cos(\bar{\lambda} + 2)\alpha + \bar{\eta}_2((1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \sin(\bar{\lambda} + 2)\alpha + \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \alpha)}{(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu) \sin \bar{\lambda} \alpha} \\ \bar{\eta}_2 &= \frac{(1 + \bar{l}_1/\bar{l}_2) \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \alpha - 2(1 + \bar{\lambda}) \sin(\bar{\lambda} + 2)\alpha}{2(1 + \bar{\lambda}) \cos(\bar{\lambda} + 2)\alpha}\end{aligned}\quad (2.29)$$

各種邊界條件下，剪力奇異性所產生之特徵方程與相對應角函數的推導，如同上述之過程，而其結果可參見表 2.3。

表 2.3 所示，特徵方程式的正根(positive root)容易獲得。如 $\cos \bar{\lambda} \alpha = 0$ 和 $\sin \bar{\lambda} \alpha = 0$ 時，各自得到 $\bar{\lambda} = \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha}$ 及 $\bar{\lambda} = \frac{(n+1)\pi}{\alpha}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)。從圖 2.3 發現，當曲線 1 與曲線 2 中之案例，角度(α)分別大於 $\pi/2$ 及 π 時，會產生剪力奇異性。圖 2.3 之結果為隨角度(α)改變而產生之最小正根。

若正根小於 1，則會使奇異階數 $(\bar{\lambda} - 1)$ 產生剪力奇異性。藉由圖 2.3 可知，當角度(α)愈大，就會產生愈大的奇異性。特別是曲線 1 之三種案例(C_F, S(I)_F 和 S(II)_F)，對於剪力所造成之奇異性就更加顯著。

2.4 結果討論

將本研究中由第一型簡支撐所得到之彎矩及剪力奇異行為，與 Huang 等人[1994]相比較，以驗證推導結果之正確性。Huang 等人 [1994]以 Bessel 函數來表示 Mindlin 徑向簡支撐扇形板自由振動之正確解(exact solution)：其結果顯示，當 $\pi/2 < \alpha < \pi$ ，彎矩奇異性階數是 $\pi/\alpha - 2$ ，且無剪力奇異性存在；當 $\pi < \alpha \leq 3\pi/2$ 和 $3\pi/2 \leq \alpha < 2\pi$ ，彎矩奇異性階數分別為 $-\pi/\alpha$ 和 $2\pi/\alpha - 2$ 。當 $\pi < \alpha \leq 3\pi/2$ ，剪力奇異性階數是 $\pi/\alpha - 1$ 。

根據圖 2.2 中曲線 1 顯示 $S(I)_- S(I)$ 之 λ 值之實部最小值，可發現以下幾種現象：若 $\alpha < \pi$ ，可從 $\cos(\lambda+1)\alpha/2=0$ 獲得 $\lambda = \pi/\alpha - 1$ ；若 $\pi < \alpha \leq 3\pi/2$ ，可從 $\cos(\lambda-1)\alpha/2=0$ 獲得 $\lambda = -\pi/\alpha + 1$ ；此外，若 $3\pi/2 \leq \alpha < 2\pi$ ，則由 $\sin(\lambda+1)\alpha/2=0$ 求得 $\lambda = 2\pi/\alpha - 1$ 。總而言之，本研究所求得之彎矩奇異行為與 Huang 等人 [1994]之結果完全相同。圖 2.3 亦顯示，在 $S(I)_- S(I)$ 條件下之剪力奇異性， $\bar{\lambda}$ 值之實部最小值為 $\pi/\alpha - 1$ ，亦與 Huang 等人 [1994]所得之剪力奇異性完全相同。

從一階剪力變形板理論所推導之特徵方程式，可與三維線彈性理論所得之結果比較。Hartranft 和 Sih [1969]根據三維線彈性理論，求取完全自由端扇形板之特徵方程式，如下所示：

$$\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha \quad (2.30a)$$

$$\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha \quad (2.30b)$$

$$\lambda = 2\pi/\alpha \quad (2.30c)$$

$$\text{或 } \lambda = (2n+1)\pi/\alpha \quad (2.30d)$$

其中 $n=0,1,2,3,\dots$ 。由於式(2.30c)之 λ 大於 1，以致於沒有應力奇異性產生。然而，式(2.30a)和式(2.30b)之特徵方程式，及式(2.30d)之 λ 值與本研究之 F_F 結果完全一樣(可參看表 2.1 與表 2.3)。

表 2.1 也列出由 Williams [1952a]所得各種不同邊界條件所求得古典薄板理論之特徵方程式，以便與一階剪力變形板理論之應力奇異行為比較。乍看一下，從表 2.1 可發現，邊界條件相同之情況下，一階剪力變形板理論之特徵方程式卻與古典薄板理論完全不同。然而，經過小心地研究發現，邊界條件為 $S(I)_- S(I)$ 時，有著相同的特徵方程式；原因在於，三角函數恆等式 $(\cos(\lambda+1)\alpha/2)(\cos(\lambda-1)\alpha/2)=0$ 可化簡成 $\cos \lambda \alpha = -\lambda \cos \alpha$ ，

$(\sin(\lambda+1)\alpha/2)(\sin(\lambda-1)\alpha/2)=0$ 亦可化簡成 $\cos \lambda\alpha = \lambda \cos \alpha$ 。有趣的是，在不同邊界條件下，某些古典薄板理論之特徵方程式會出現在一階剪力變形板理論之特徵方程式中。譬如，古典薄板理論中 S(I)_C 之特徵方程式，等於一階剪力變形板理論中 S(I)_F 之特徵方程式。

圖 2.4 繪製了不同角度時， λ 值之實部最小值，其中包括了古典薄板理論以及一階剪力變形板理論。圖 2.4 顯示(1) 當 C_F 邊界條件時，若 α 小於 130° ，一階剪力變形板理論會比古典薄板理論產生較強的彎矩奇異性；若 α 大於 130° ，則趨勢相反。(2) 當 S(I)_F 邊界條件時，若 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ，一階剪力變形板理論會比古典薄板理論產生較強的彎矩奇異性，而其他角度時，則剛好相反。(3) 當 F_F 邊界條件時，一階剪力變形板理論的彎矩奇異性一直都比古典薄板理論強。從圖 2.2 中，比較曲線 3 和曲線 4 結果顯示，針對 S(I)_C 邊界條件，若 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ，則古典薄板理論的彎矩奇異性將大於一階剪力變形板理論；其他角度時，則剛好相反。另外，比較曲線 5 和曲線 6 可知，針對 C_C 邊界條件，不論是什麼角度，古典薄板理論將比一階剪力變形板理論擁有較強的彎矩奇異性。

古典薄板理論並沒有將剪力變形計算在內；因此，剪力是由力平衡方程決定的。剪力奇異性總是比彎矩奇異性強，剪力奇異性的階數比彎矩奇異性的階數少 1 階。故，古典薄板理論中剪力奇異性要比在一階剪力變形板理論者強大。

表 2.1 中，案例 1-6 之特徵方程式與 Burton 和 Sinclair [1986] 利用 Reissner 的理論所作之結果完全相同，只是表示式不同而已。但這些學者並沒有將表 2.1 中案例 7-10 之考慮進去。此外，他們的解也並未考慮剪力奇異性，如此，更突顯了他們解的不完整性。最後，值得注意的是表 2.1 中邊界條件為 C_C，C_F 及 F_F 之特徵方程式，與 Williams [1952b] 文中針對板承受張力(extension)之下，所得之結果相同。

第三章 扇形板之振動分析

本章將於 Ritz 法中，利用傳統滿足幾何邊界條件之完整集合允許函數，再配合由上章所推導之漸近解，探討含有奇異點之 Mindlin 扇形板之振動行為。

3.1 研究方法

利用 Ritz 法求解板之振動頻率，須由一最小能量函數

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \quad (3.1)$$

其中 V_{\max} 和 T_{\max} 分別為一振動週期內最大應變能及最大動能。將 V_{\max} 和 T_{\max} 以極座標(參見圖 3.1)表示，如下：

$$T_{\max} = \frac{\rho\omega^2}{2} \left[\frac{h^3}{12} \iint (\psi_r^2 + \psi_\theta^2) dA + h \iint w^2 dA \right] \quad (3.2)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \iint \left\{ D \left[\left(\psi_{r,r} + \frac{1}{r} \psi_r + \frac{1}{r} \psi_{\theta,\theta} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{1}{r} \psi_{r,r} (\psi_{\theta,\theta} + \psi_r) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\psi_{\theta,r} + \frac{1}{r} \psi_{r,\theta} - \frac{1}{r} \psi_\theta \right)^2 + \kappa^2 Gh \left[(\psi_r + w_{,r})^2 + \left(\psi_\theta + \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)^2 \right] \right] \right\} dA \quad (3.3)$$

其中 w 為中平面(mid-plane)之側向位移， ψ_r 及 ψ_θ 分別為徑向與環向撓曲造成中平面上之轉角。 h 為板厚度， E 為彈性模數， ν 為波松比， G 為剪力模數， κ^2 為剪力修正因子。 D 為撓曲剛度($D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$)， ρ 為之質量密度， ω 為板之自然振動頻率。

位移分量的允許函數假設成兩個函數之集合，

$$\psi_r(r, \theta) = \Psi_{rp}(r, \theta) + \Psi_{rc}(r, \theta) \quad (3.4a)$$

$$\psi_\theta(r, \theta) = \Psi_{\theta p}(r, \theta) + \Psi_{\theta c}(r, \theta) \quad (3.4b)$$

$$w(r, \theta) = W_p(r, \theta) + W_c(r, \theta) \quad (3.4c)$$

其中 Ψ_{rp} , $\Psi_{\theta p}$ 及 W_p 為代數-三角多項式 (algebraic-trigonometric polynomials) 函數 , $\Psi_{rc}(r, \theta)$, $\Psi_{\theta c}(r, \theta)$ 及 $W_c(r, \theta)$ 為描述在尖銳角處之彎矩與剪力奇異行為之角函數集合。代數-三角多項式函數如下所示：

$$\Psi_{rp}(r, \theta) = g_1(r) \left\{ f_1(\theta) \left[\sum_{i=2,4}^{I_1} \sum_{j=2,4}^i B_{ij} r^{i-1} \cos j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_2} \sum_{j=1,3}^i B_{ij} r^{i-1} \cos j\theta \right] + f_2(\theta) \left[\sum_{i=2,4}^{I_3} \sum_{j=2,4}^i \tilde{B}_{ij} r^{i-1} \sin j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_4} \sum_{j=1,3}^i \tilde{B}_{ij} r^{i-1} \sin j\theta \right] \right\} \quad (3.5a)$$

$$\Psi_{\theta p}(r, \theta) = g_2(r) \left\{ f_3(\theta) \left[\sum_{i=2,4}^{I_1} \sum_{j=2,4}^i C_{ij} r^{i-1} \cos j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_2} \sum_{j=1,3}^i C_{ij} r^{i-1} \cos j\theta \right] + f_4(\theta) \left[\sum_{i=2,4}^{I_3} \sum_{j=2,4}^i \tilde{C}_{ij} r^{i-1} \sin j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_4} \sum_{j=1,3}^i \tilde{C}_{ij} r^{i-1} \sin j\theta \right] \right\} \quad (3.5b)$$

$$W_p(r, \theta) = g_3(r) \left\{ f_5(\theta) \left[\sum_{i=0,2,4}^{I_5} \sum_{j=0,2,4}^i A_{ij} r^i \cos j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_2} \sum_{j=1,3}^i A_{ij} r^i \cos j\theta \right] + f_6(\theta) \left[\sum_{i=2,4}^{I_7} \sum_{j=2,4}^i \tilde{A}_{ij} r^i \sin j\theta + \sum_{i=3,5}^{I_8} \sum_{j=1,3}^i \tilde{A}_{ij} r^i \sin j\theta \right] \right\} \quad (3.5c)$$

其中， A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , \tilde{A}_{ij} , \tilde{B}_{ij} 和 \tilde{C}_{ij} 是由最小值 Π 所決定之係數。式(3.5)中， I_j 對不同 j 可取不同值。以下分析中設定 $I_1 = I_3 = I_5 = I_7$ 和 $I_2 = I_4 = I_6 = I_8$ 。函數 $g_i(r)$ 及 $f_j(\theta)$ 則配合允許函數，使滿足環向與徑向之幾何邊界條件。

對於不同環向邊界條件下 ($r = a$) , $g_i(r)$ 的選擇如下：

固定端： $g_i(r) = (1 - r/a)$, 其中 $i = 1, 2, 3$ 。

簡支撐端： $g_2(r) = g_3(r) = (1 - r/a)$ 和 $g_1(r) = 1$ 。

自由端： $g_i(r) = 1$, 其中 $i = 1, 2, 3$ 。

$f_j(\theta)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) 的表示式如下：

$$f_j(\theta) = \theta^{m_j} \left(1 - \frac{\theta}{\alpha}\right)^{n_j} \quad (3.6)$$

其中 m_j 和 n_j 不是 0 就是 1，完全取決於徑向邊界條件。針對 $\theta = 0$ 不同邊界條件下， m_j 之值如下所示：

固定端： $m_1 = m_3 = m_5 = 1$ ，其餘之值等於 0。

簡支撐端： $m_1 = m_5 = 1$ ，其餘之值等於 0。

自由端：所有值等於 0。

於 $\theta = \alpha$ 之不同邊界條件下， n_j 值也是利用上述相同的原則決定之。

值得注意的是，當面對具有對稱性問題時(例如，兩徑向邊界條件相同)，將利用問題之對稱性，設對稱軸為 $\theta = 0$ ，則函數 $f_j(\theta)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) 可表示成

$$f_j(\theta) = \left(1 + \frac{2\theta}{\alpha}\right)^{k_j} \left(1 - \frac{2\theta}{\alpha}\right)^{k_j} \quad (3.7)$$

其中，決定 k_j 之原則與 m_j 相同。

式(3.4)中角函數的表示如下所示：

$$\Psi_{rc}(r, \theta) = g_1(r) \sum_{k=1}^K [\bar{B}_k \operatorname{Re}(\bar{\Psi}_{rk}(r, \theta, \lambda_k)) + \hat{B}_k \operatorname{Im}(\bar{\Psi}_{rk}(r, \theta, \lambda_k))] \quad (3.8a)$$

$$\Psi_{\alpha}(r, \theta) = g_2(r) \sum_{k=1}^K [\bar{C}_k \operatorname{Re}(\bar{\Psi}_{\theta k}(r, \theta, \lambda_k)) + \hat{C}_k \operatorname{Im}(\bar{\Psi}_{\theta k}(r, \theta, \lambda_k))] \quad (3.8b)$$

$$W_c(r, \theta) = g_3(r) \sum_{l=1}^L \bar{A}_l \bar{W}_l(r, \theta, \lambda_k) \quad (3.8c)$$

其中， $\bar{\Psi}_{rk}$ ， $\bar{\Psi}_{\theta k}$ 及 \bar{W}_l 由上章之漸近解(Huang [2003])所建構，而 $\bar{\Psi}_{rk}$ 與 $\bar{\Psi}_{\theta k}$ 取自表 2.2 並刪掉待定係數， \bar{W}_l 則取自表 2.3。表 2.2 中之 λ 值若為複數函數，則 $\bar{\Psi}_{rk}$ 和 $\bar{\Psi}_{\theta k}$ 亦為複變數。因為 $\bar{\lambda}$ 一直是實數，所以 \bar{W}_l 就是實數函數。為了符合 $r=0$ 處之正規情況， λ 及 $\bar{\lambda}$ 之實部必須大於 0。 $\bar{\Psi}_{rk}$ 和 $\bar{\Psi}_{\theta k}$ 通常比 $\bar{\Psi}_{rp}$ 和 $\bar{\Psi}_{\theta p}$ 中的代數-三角多項式函數更加複雜。

利用 Ritz 法解決自由振動問題時，須將式(3.4)，式(3.5)及式(3.8)代入式(3.2)與式(3.3)

中，並且將式(3.1)之能量函數 Π 對各係數 A_{ij} ， B_{ij} ， C_{ij} ， \tilde{A}_{ij} ， \tilde{B}_{ij} ， \tilde{C}_{ij} ， \bar{A}_l ， \bar{B}_k ， \bar{C}_k ， \hat{B}_k 及 \hat{C}_k 偏微分後，以得到能量最小值。如此可得一組線性代數方程式，並可表示成一標準特徵根問題。此特徵值對應於振動頻率，特徵向量則可用於描述振動模態。

3.2 收斂性分析

Ritz 法總是提供振動頻率之上限(upper-bound)解。當允許函數之項數足夠大時，數值解將收斂至正確解。本文將以收斂性分析證明解之準確性以及數值解中角函數之影響。以下結果之波松比(ν)為 0.3 且剪力修正因子 κ^2 為 $\pi^2/12$ 。

此處與下一節將考慮不同的徑向與環向邊界條件組合，該邊界條件組合含 F-F-F，C-F-F，S-F-F，C-C-F，S-C-F 及 C-C-C。如符號 S-C-F 代表圖 3.1 中扇形板邊 1、2、3 分別為簡支承端、固定端、自由端之邊界條件。其餘之符號意義類推。

表 3.1-3.3 中，藉由使用不同允許函數之項數於 C-F-F 之邊界條件下，列出薄板 ($h/a = 0.001$) 扇形角 (α) 分別為 90° 、 270° 及 355° 之無因次化頻率 ($\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$)。在 $r=0$ 附近，角度愈大將導致更嚴重的應力奇異性。數值結果顯示若只使用代數-三角多項式時，對扇形角為 90° 之解能適度地收斂；相對的，對扇形角為 270° 及 355° 則否。增加角函數至允許函數確實加速數值結果之收斂，特別是對造成更大的應力奇異性的大扇形角。式(3.4)中對 Ψ_{rc} ， $\Psi_{\theta c}$ 及 W_c 分別使用 20 個角函數並設定 $I_2 = I_4 = I_6 = I_8 = 22$ 及 $I_1 = I_3 = I_5 = I_7 = 21$ 可得至少三位有效位數的精確結果。值得注意的是，使用比表 3.1-3.3 大之 I_j 可能會因奇異矩陣(ill-conditioned matrix)造成數值上之困難。McGee 等人 [2003] 以薄板理論為基礎所得的一些結果也列於表 3.1-3.3 中。將本研究 ($h/a = 0.001$) 與薄板理論之結果比較，發現前者仍明顯地小於後者。此差異可能超過 4%。

表 3.1-3.3 已顯示出角函數確實能夠加速數值結果之收斂速度。然而，角函數非常地複雜，我們是否能使用一簡化且與原來相同奇異階數之角函數，並得到精確之結果？為回答此問題，我們利用一簡單的收斂性分析，針對 F-F-F 及 C-F-F 且扇形角為 355° ， $h/a = 0.1$ 之扇形板。表 3.4 與 3.5 之結果，乃使用表 2.2 及表 2.3 之角函數，或者如下所定義之簡化的角函數所獲得之結果。

當徑向邊為固定-自由端時，取

$$\Psi_{rc}(r, \theta) = g_1(r) \sum_{k=1}^K r^{\text{Re}[\lambda_k]} \left\{ \bar{B}_k \sin(\text{Re}[\lambda_k] \theta) + \hat{B}_k \theta \cos(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \right\} \quad (3.9a)$$

$$\Psi_{\theta c}(r, \theta) = g_2(r) \sum_{k=1}^K r^{\text{Re}[\lambda_k]} \left\{ \bar{C}_k \sin(\text{Re}[\lambda_k] \theta) + \hat{C}_k \theta \cos(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \right\} \quad (3.9b)$$

$$W_c(r, \theta) = g_3(r) \sum_{k=1}^K \bar{A}_k r^{\bar{\lambda}_k} \sin(\bar{\lambda}_k \theta) \quad (3.9c)$$

當徑向邊為自由端-自由端時，取

$$\Psi_{rc,S}(r, \theta) = g_1(r) \sum_{k=1}^K \hat{B}_k r^{\text{Re}[\lambda_k]} \cos(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \quad (3.10a)$$

$$\Psi_{\theta c,S}(r, \theta) = g_2(r) \sum_{k=1}^K \bar{C}_k r^{\text{Re}[\lambda_k]} \sin(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \quad (3.10b)$$

$$W_{c,S}(r, \theta) = g_3(r) \sum_{k=1}^K \hat{A}_k r^{\bar{\lambda}_k} \cos(\bar{\lambda}_k \theta) \quad (3.10c)$$

和

$$\Psi_{rc,A}(r, \theta) = g_1(r) \sum_{k=1}^K \bar{B}_k r^{\text{Re}[\lambda_k]} \sin(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \quad (3.11a)$$

$$\Psi_{\theta c,A}(r, \theta) = g_2(r) \sum_{k=1}^K \hat{C}_k r^{\text{Re}[\lambda_k]} \cos(\text{Re}[\lambda_k] \theta) \quad (3.11b)$$

$$W_{c,A}(r, \theta) = g_3(r) \sum_{k=1}^K \bar{A}_k r^{\bar{\lambda}_k} \sin(\bar{\lambda}_k \theta) \quad (3.11c)$$

此處下標“*S*”與“*A*”分別表示對稱與反對稱模式。這些簡化的角函數確實在 $r=0$ 含正確的彎矩與剪力奇異階數。 Ψ_{rc} 與 $\Psi_{\theta c}$ 之簡化角函數較原角函數簡化很多，特別是在徑向邊界為固定端-自由端的情況下。

在表 3.4 與 3.5，對於 Ψ_{rc} ， $\Psi_{\theta c}$ 及 W_c 各使用一個角函數，表示只有將正確的彎矩及剪力奇異階數引入至允許函數。當 λ_k ($k=1$) 為複數，若在允許函數中使用一角函數，則只使用複數角函數的實數部份。在邊界完全自由之扇形板，簡化的角函數與原本的角函數(列於表 2.2-2.3)導致非常接近的結果。雖然後者得到較佳的解，但其差異小於 0.5%。在邊界條件為 C-F-F 的扇形板(表 3.5)，簡化的角函數的確也改善了數值結果之收斂性。然而，使用原角函數仍獲得較大的改善，其差異可能多達 4%。簡化的角函數在改善結果精確性(表 3.4 與 3.5)，因不同邊界條件而有不同。其原因為在固定端-自由端徑向邊界條件時，一開始之

λ_k 是複數，以致於簡化的角函數無法真正抓住鄰近 $r=0$ 處之彎矩奇異行為。在 r 趨近 0 處，複數 λ_k ($k=1$) 導致彎矩以振盪方式趨近無限大；而簡化角函數描述彎矩一直增加至無限大。從表 3.4 及表 3.5 之結果顯示角函數精確地描述彎矩及剪力奇異行為，有效地加速數值結果之收斂性。此結果也暗示使用有限元素法之 r^λ 奇異元素 (λ 被指定為實數)，其有可能未完全準確描述問題之奇異行為。

3.3 數值結果與模態分析

依廣泛之收斂性分析，表 3.6-3.8 所列無因次化頻率至少三位有效位數之準確度。表中列出在不同邊界條件(F-F-F, C-F-F, S-F-F, C-C-F, S-C-F 及 C-C-C)，不同扇形角($\alpha=90^\circ$ 、 180° 、 270° 、 300° 、 330° 及 355°)及不同徑厚比($h/a=0.1$ 及 $h/a=0.2$)下，前 5 個模態之扇形板的無因次化頻率。發表文獻中一直缺乏 $\alpha \geq 180^\circ$ 且徑向簡支扇形板之結果，因此表 3.6-3.8 即強調 $\alpha \geq 180^\circ$ 之情況，以補充文獻中扇形板之頻率數據資料之不足。

如同前言所述，有些學者在探討環狀扇形板時，在內圓(inner circle edge)環向邊使用自由端邊界條件，並以非常小的內外徑比(等於 0.00001)，近似扇形板之解。很顯然地，這些近似解與內外徑比之選擇，以及內圓環向邊之邊界條件兩者有關。表 3.6 顯示本研究結果與 Liu 和 Liew [1999]針對完全固定扇形板之對照，兩者之間具極佳的一致性。然而，Liu 及 Liew [1999]之結果總是較本研究結果小，這是因為 Liu 及 Liew [1999]內圓環向邊使用自由端邊界條件，以致該極小內外徑比環狀扇形板較完全固定之扇形板少束縛。

表 3.7 及 3.8 並未列出為 F-F-F 及 S-F-F 扇形角板頻率分別為零的前三或前一剛體模態。假如這些剛體模態被考慮進去，當邊界條件由 F-F-F 轉變為 S-F-F, C-F-F, S-C-F 再至 C-C-F，則板的勁度逐步提高，以致於每一模態之頻率隨之增加。除了 S-F-F 板之第二個模態外，隨著扇形角增加，無因次化頻率會降低。依薄板理論所得結果亦觀察到此趨勢 (McGee 等人[2003])。

圖 3.2-3.4 所示為 $h/a=0.1$ 及不同角度($\alpha=90^\circ$ 、 180° 、 270° 、 300° 、 330° 及 355°)與不同邊界條件(F-F-F, C-F-F 及 C-C-F)扇形板之前五個模態的節線模式(nodal pattern)。圖中所示的括弧數字為其相對應模態的無因次化頻率。圖 3.2 及 3.3 中 F-F-F 與 C-F-F 扇形板在 $\alpha=355^\circ$ 的節點模式，與 Leissa 等人 [1993]和 McGee 等人 [1995a, 1995b]依薄板理論所

獲得之結果非常相似。V 形缺口($\alpha = 355^\circ$)之存在扭曲了完全自由圓板之振態。當 α 由 330° 轉變為 355° ，F-F-F 扇形板的振態非常相似，而 C-F-F 扇形板除第三模態外之振態也很相似。但是，C-C-F 扇形板之前三模態則有明顯的變化。

角度的增加會改變 F-F-F 及 C-C-F 扇形板對稱及反對稱模態之順序。例如，F-F-F 扇形板， $\alpha = 90^\circ$ 、 180° 之第一模態為對稱模態，但 $\alpha = 270^\circ$ 、 300° 、 330° 、 355° 的第一模態則為反對稱模態。隨著 α 之改變，第二模態之對稱及反對稱模態順序剛好與第一模態者相反；對 C-C-F 邊界條件， $\alpha = 90^\circ$ 、 180° 、 270° 、 300° 、 330° 之板第一模態為對稱模態且無節點線，而 $\alpha = 355^\circ$ 時沒有出現無節點線之模態，且其第一個模態為反對稱。這些模態之改變不會影響頻率隨著扇形角之增加而減少之趨勢。

第四章 斜形板之振動分析

本章亦將應用 Ritz 法配合角函數，分析含有應力奇異點之斜形板之振動頻率。不同前章的是，所有方程式及分析須架構於斜座標 $\xi - \eta$ 。

4.1 研究方法

在 $x - y$ 直角座標系統，Ritz 法中之最大應變能(V_{\max})與最大動能(T_{\max})可表示為，

$$V_{\max} = \iint_A \frac{D}{2} \left\{ \psi_{x,x}^2 + \psi_{y,y}^2 + 2\nu \psi_{x,x} \psi_{y,y} + \frac{1-\nu}{2} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 \right\} + \frac{\kappa^2 Gh}{2} [(\psi_x + w_{,x})^2 + (\psi_y + w_{,y})^2] dA \quad (4.1)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \iint_A \left\{ \rho h w^2 + \frac{\rho h^3}{12} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right\} dA \quad (4.2)$$

其中 w 為中平面(mid-plane)之垂直向位移， ψ_x 及 ψ_y 分別為中平面上之 x 向與 y 向撓曲轉角(bending rotation)。 h 為板厚度， E 為彈性模數， ν 為波松比， G 為剪力模數， κ^2 為剪力修正因子。 D 為撓曲剛度($D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$)， ρ 為之質量密度， ω 為板之自然振動頻率。

由於將分析者為斜形體，為方便式(4.1)及(4.2)之積分及滿足幾何邊界條件，以如圖 1.2 所示之斜座標 $\xi - \eta$ 來描述所有物理量，將座標系統從 $x - y$ 直角座標系統轉換到 $\xi - \eta$ 座標系統之過程如下：

$$\xi = x / \cos \beta \quad , \quad \eta = y - x \tan \beta \quad (4.3)$$

及

$$\psi_\xi = \psi_x + \psi_y \tan \beta \quad , \quad \psi_\eta = \psi_y / \cos \beta \quad (4.4)$$

其中 β 為 BC 邊之斜角(參見圖 1.2)，由式(4.1)~(4.4)可將位移函數以 $\xi - \eta$ 座標系統表示，則

$$V_{\max} = \iint_A \frac{D}{2} \left\{ \sec^2 \beta (\psi_{\xi,\xi} - \sin \beta \psi_{\xi,\eta} - \sin \beta \psi_{\eta,\xi} + \psi_{\eta,\eta})^2 - \right.$$

$$2(1-\nu)[\psi_{\eta,\eta}\psi_{\xi,\xi} - \frac{1}{4}(\psi_{\xi,\eta} + \psi_{\eta,\xi})^2] + \frac{\kappa^2 Gh}{2}[(\psi_{\xi} - \sin \beta \psi_{\eta} + \sec \beta w_{,\xi} - \tan \beta w_{,\eta})^2 + (\cos \beta \psi_{\eta} + w_{,\eta})^2]dA \quad (4.5)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \iint_A \left\{ \rho h w^2 + \frac{\rho h^3}{12} [(\psi_{\xi} - \sin \beta \psi_{\eta})^2 + (\cos \beta \psi_{\eta})^2] \right\} dA \quad (4.6)$$

其中 $dA = \cos \beta d\xi d\eta$ 。

在 Ritz 法中，能量函數(Π)定義與式(3.1)同，式(4.5)~(4.6)中之 $w(\xi, \eta)$ ， $\psi_{\xi}(\xi, \eta)$ 及 $\psi_{\eta}(\xi, \eta)$ 之允許函數表示成

$$\psi_{\xi}(\xi, \eta) = \Psi_{\xi p}(\xi, \eta) + \Psi_{\xi c}(\xi, \eta) \quad (4.7a)$$

$$\psi_{\eta}(\xi, \eta) = \Psi_{\eta p}(\xi, \eta) + \Psi_{\eta c}(\xi, \eta) \quad (4.7b)$$

$$w(\xi, \eta) = W_p(\xi, \eta) + W_c(\xi, \eta) \quad (4.7c)$$

其中 $\Psi_{\xi p}$ ， $\Psi_{\eta p}$ 和 W_p 為多項式函數， $\Psi_{\xi c}$ ， $\Psi_{\eta c}$ 及 W_c 為角函數。角函數準確描述 $\angle ABC$ (圖 1.2) 處之彎矩和剪力奇異行為。多項式以斜座標表示為

$$\Psi_{\xi p} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J A_{ij} \xi^i \eta^{j-1} \quad (4.8a)$$

$$\Psi_{\eta p} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J B_{ij} \xi^i \eta^{j-1} \quad (4.8b)$$

$$W_p = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij} \xi^i \eta^{j-1} \quad (4.8c)$$

其中， A_{ij} ， B_{ij} 和 C_{ij} 由最小化 Π 後決定。式(4.8)滿足固定端 ($\xi=0$) 幾何邊界條件。且式 (4.8a)~(4.8c) 三式中之 (I, J) 可以各不同，但本研究單獨只使用一個 I 及 J 。

式(4.8a)~(4.8c)之多項式構成一組完備的允許函數。若 (I, J) 之項數夠多時，理論上可以求得精確的頻率。但是，實際上常造成奇異矩陣而引致數值上的困難。因此，於允許函數中加入能夠描述於 $\angle ABC$ 附近應力奇異性的角函數，以加速數值解的收斂性。

角函數取為

$$\Psi_{\xi c}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^K \bar{A}_k \bar{\Psi}_{\xi k}(\xi, \eta) \quad (4.9a)$$

$$\Psi_{\eta c}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^K \bar{B}_k \bar{\Psi}_{\eta k}(\xi, \eta) \quad (4.9b)$$

$$W_c(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^N \bar{C}_n \bar{W}_n(\xi, \eta) \quad (4.9c)$$

其中 \bar{A}_k , \bar{B}_k , \bar{C}_n 為任意係數，而 $\bar{\Psi}_{\xi k}$, $\bar{\Psi}_{\eta k}$ 和 \bar{W}_n 則由第二章(Huang [2003])所推導得之漸近解構成。因為該漸近解是建立於極座標系統(參見圖 1.2)，故須將位移分量從極座標系統轉換到 $\xi - \eta$ 座標系統，轉換後之位移分量為

$$\bar{\Psi}_{\xi k} = (\cos \theta + \tan \beta \sin \theta) \bar{\Psi}_{\theta k} + (\sin \theta - \tan \beta \cos \theta) \bar{\Psi}_{r k} \quad (4.10a)$$

$$\bar{\Psi}_{\eta k} = (\sin \theta \bar{\Psi}_{\theta k} - \cos \theta \bar{\Psi}_{r k}) / \cos \beta \quad (4.10b)$$

$$\bar{W}_n = r^{\bar{\lambda}_n} \sin \bar{\lambda}_n \theta \quad (4.10c)$$

其中，

$$\bar{\Psi}_{r k} = r^{\lambda_k} \{ \cos(\lambda_k + 1)\theta - k_1 \eta_1 \sin(\lambda_k + 1)\theta - \cos(\lambda_k - 1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda_k - 1)\theta \} \quad (4.11a)$$

$$\bar{\Psi}_{\theta k} = r^{\lambda_k} \{ -\sin(\lambda_k + 1)\theta - k_1 \eta_1 \cos(\lambda_k + 1)\theta + k_1 \sin(\lambda_k - 1)\theta + k_1 \eta_1 \cos(\lambda_k - 1)\theta \} \quad (4.11b)$$

$$\eta_1 = -\frac{\lambda_k(1-\nu)\cos(\lambda_k+1)\alpha - (k_1(\lambda_k-1) - \lambda_k\nu - 1)\cos(\lambda_k-1)\alpha}{(k_1(\lambda_k-1) - \lambda_k\nu - 1)\sin(\lambda_k-1)\alpha - k_1\lambda_k(1-\nu)\sin(\lambda_k+1)\alpha} \quad (4.11c)$$

$$k_1 = -\frac{2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda_k+1)}{2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda_k-1)} \quad (4.11d)$$

$$r = \left\{ \left(\frac{b}{2} - \eta \right)^2 + \xi^2 - 2\xi \left(\frac{b}{2} - \eta \right) \sin \beta \right\}^{1/2} \quad (4.11e)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\xi \cos \beta}{(b/2 - \eta) - \xi \sin \beta} \right) \quad (4.11f)$$

而 α 為圖 1.2 中之 $\angle ABC$ 角度(re-entrant angle)。特徵值 λ_k 及 $\bar{\lambda}_n$ 分別為下列特徵方程式之根：

$$\sin^2 \lambda_k \alpha = \frac{4 - \lambda_k^2(1+\nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3-\nu)(1+\nu)} \quad (4.12a)$$

$$\cos \bar{\lambda}_n \alpha = 0 \quad (4.12b)$$

式(4.12a)中之解可為複數；倘若如此，則式(4.10a)~(4.10b)中 $\bar{\Psi}_{\xi k}$ 與 $\bar{\Psi}_{\eta k}$ 亦為複數函數，且實部和虛部皆為獨立函數。值得注意的是，式(4.10a)~(4.10b)之 $\bar{\Psi}_{r k}$ 和 $\bar{\Psi}_{\theta k}$ 是由滿足彎矩

奇異性之漸近解中求得，而式(4.10c)之 \bar{W}_n 則是由滿足剪力奇異性之漸近解中求得(Huang [2003])。當 λ_k 之實部小於 1，則 $\bar{\Psi}_{r,k}$ 及 $\bar{\Psi}_{\theta,k}$ 將在凹角處產生彎矩奇異性；同樣地，當 $\bar{\lambda}_n$ 小於 1，亦會引起剪力奇異性。最後值得注意的是， λ_k 及 $\bar{\lambda}_n$ 的實部必須大於 0，以滿足凹角處有限位移之要求。

利用 Ritz 法，解決自由振動問題，須將式(4.8a)~(4.8c)及式(4.10a)~(4.10c)代入式(4.5)~(4.6)中，並且將 Π 最小化。分別針對未定係數 A_{ij} ， B_{ij} ， C_{ij} ， \bar{A}_k ， \bar{B}_k 和 \bar{C}_n 進行最小化，可得到 $3IJ+2K+N$ 條未定係數的齊性線性代數方程式。進而整理可得一般特徵值問題的矩陣形式。特徵值所對應的即是無因次化振動頻率。

4.2 收斂性分析與比較

若使用足夠多項之完備允許函數時，由 Ritz 法所獲得之頻率應精確地從上限收斂至真解。本章所有的數值結果以無因次頻率參數 Ω (定義為 $\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho h / D}$)表示；且針對波松比(ν)為 0.3 之材料。

表 4.1-4.6 為針對五種斜三角形板($\bar{a}/b=1$ 或 0.5； $h/b=0.001$ 或 0.2； $\beta=30^\circ, 60^\circ$ 或 75°)及斜平行四邊形薄板($\bar{a}/b=0.5$ ； $c/b=1$ ； $\beta=75^\circ$ ； $h/b=0.001$)的無因次頻率參數收斂性分析。剪力修正因子設定為 5/6，以便與現有之文獻資料比較。表中之結果乃利用式(4.8a)~(4.8c)中不同項數之多項式(例如(L,J)=(4,4),(5,5),..., (9,9))配合式(4.9a)~(4.9c)中不同項數之角函數(例如：當 $\beta=30^\circ$ ， $K=N=0, 2, 5$ 及 10；當 $\beta \geq 60^\circ$ ， $K=N=0, 5, 10$ 及 15)。

表 4.1-4.6 顯示當多項式函數之項數或角函數之項數增加時，頻率會從上限值收斂至精確解。此結果亦顯示當只使用多項式函數($K=N=0$)時，在斜角小($\beta=30^\circ$)時能得到合理的收斂值，但在斜角大($\beta=60^\circ$ 或 75°)時則否。頻率之收斂速度會隨著角函數項數之增加，而顯著地增快；特別在斜角大時。隨著角函數增加導致頻率收斂的特性，並不會因不同的 h/b ， c/b 或 \bar{a}/b 而有所改變。使用 $I=J=8$ 及 $M=N=10$ 所獲得之結果將精確地收斂至三位有效位數。

加入角函數加速頻率收斂之因素有二。首先，角函數能適當地描述固定端尖銳角附近高彎曲應力及剪應力之行為。第二，在式(4.9a)及式(4.9b)中的每一對 $\bar{\Psi}_{\xi k}$ 與 $\bar{\Psi}_{\eta k}$ 皆滿足沿尖

銳角自由端彎矩為零之邊界條件。

文獻中相關的結果亦列於表 4.1-4.6。以古典薄板理論為基礎，McGee 等人 [1992a]應用 Ritz 法並加入薄板理論之角函數至多項式位移函數中。依據 Mindlin 板理論，Karunasena 等人 [1996]之結果乃藉由 Ritz 法及針對 w ， ψ_ξ 及 ψ_η 各取 120 項多項式函數。本研究與 McGee 等人 [1992a]之結果比較，滿足 Mindlin 板理論所得頻率較薄板理論者小之趨勢。然而，Karunasena 等人 [1996]之結果則違背此趨勢，顯現該結果並不夠精確；尤其是在 $\beta = 60^\circ$ 的某些頻率。Karunasena 等人 [1996]承認當斜角增大時，其結果的精確性會降低；原因為尖銳角的應力奇異性並未被考慮。另外，表中之結果亦顯現，將 Mindlin 板理論應用解薄板問題時，本研究的解法並未出現類似有限元素方法的剪力閉鎖現象(shear locking)。

表 4.7 所列者為懸臂正方形薄板之收斂分析。剪力修正因子仍設定為 $5/6$ 。依據 Huang [2003]之結果，當角度(α)超過 60° 且在邊界條件為自由及固定端下，彎矩奇異性會開始出現。因此，當固定端及自由端之夾角在 90° 時，理論上應加入角函數於角 A 及角 B 處(圖 1.2)。然而，表 4.7 所列者為角 A 無任何角函數下之結果。表 4.7 顯示加入角函數能加速收斂之速度。另外，從表 4.7 亦可發現，當使用允許函數為 10 個角函數再加上多項式(項數為 $I=J=4$)，與不引入角函數，只使用多項式(項數為 $I=J=9$)之結果可得到相同的精確度；以上兩種解的自由度分別為 68 及 243。因此，引入角函數將加快計算之效率。表 4.7 中引用 Huang [1991]及 Leissa [1973]與本研究結果比較，前二者是以古典薄板理論為基礎，並也利用 Ritz 法。Leissa [1973]以特徵樑函數(characteristic beam functions)作為允許函數，Huang [1991]則與 McGee 等人 [1992a]所使用的方法相同。另外，本研究結果與由薄板理論得到之結果相當符合，尤其是與 Huang [1991]之結果比較。

為了進一步證明本研究成果之精確性，表 4.8-4.10 列本研究與文獻針對不同形狀斜形板所得之結果。表 4.8-4.10 為斜三角形板、梯形板及平行四邊形板的結果；為配合所引用的文獻，剪力修正因子分別取為 $5/6$ ， $\pi^2/12$ 及 0.823 。表 4.8-4.10 所列本研究之結果，乃是依下列方式取允許函數所得：當於 $\beta \leq 30^\circ$ 時，所使用多項式項數為 $I=J=8$ 及 $K=N=2$ (參見式(4.8)及式(4.9))；當於 $\beta > 30^\circ$ 時，則取 $I=J=8$ 及 $K=N=10$ (參見式(4.8)及式(4.9))。藉由表 4.1-4.7 的收斂性分析可知，本研究之結果至少有一位有效位數之準確性。

表 4.8 所列者為 $h/b=0.2$ ，不同 \bar{a}/b 比及 β 值之斜三角板頻率參數 Ω ，其結果與

Karunasena 等人 [1996]相符合。然而，本研究所得的 Ω 值比 Karunasena 等人 [1996]之結果小，表示本研究之結果較精確，因本研究之方法能保證頻率之上限。對於 β 值較大之斜板，因具有更大的應力奇異性，故此差異變得更加明顯。在不同之 \bar{a}/b 時，此差異則沒有特定趨勢。

表 4.8-4.10 中 McGee 和 Butalia [1992c, 1994]利用高階剪力變形板理論及有限元素法，該結果由具有 2448 個自由度的有限元素網格配合 Lagrangian 等參數板元素獲得；而本研究使用之方法最多只有 222 個自由度。在 McGee 和 Butalia [1992c]之收斂性分析指出這些結果只會收斂至 2 位有效位數。將本研究之結果與 McGee 和 Butalia [1992c, 1994]比較後得知，三者有合理的一致性，除了 $\beta=75^\circ$ 之情形以外。表 4.9 中 McGee 和 Butalia [1992c]對於 $\bar{a}/b=1$ ， $c/b=0.5$ 及 $\beta=45^\circ$ 之數值結果應該是打錯字了，因其結果與 $\beta=30^\circ$ 時完全相同。值得注意的是，McGee 和 Butalia [1992c]承認當其結果超過以薄板理論所獲得之結果 (McGee 等人 [1992a])時，凹角處之角應力奇異性應加入高角度斜板之有限元素模型中。

表 4.10 列出不同 \bar{a}/b 比及 β 值之平行四邊形板之頻率參數 Ω ，本研究結果與 Liew 等人 [1993]之結果相當接近；Liew 等人 [1993]也是使用 Mindlin 板理論，不過本研究結果都低於 Liew 等人 [1993]，顯示本研究之成果為準確之上限。Liew 等人 [1993]利用 Ritz 法，引入 360 個多項式允許函數，而本研究針對 $\beta \leq 30^\circ$ 及 $\beta > 30^\circ$ 之斜板分別只有 198 及 222 個。

4.3 模態分析

圖 4.1-4.3 所示者分別為三角形板、梯形板及平行四邊形板之節點線($w=0$)模態，所繪製者為較薄的板($h/b=0.1$)，雖然沒有針對較厚的板($h/b=0.2$)，但兩者模態類似。從圖 4.3 中 $\beta=0$ 之模態可觀察到，其對稱性與反對稱性非常的清楚。當 c/b 減少至 0.5(參看圖 4.2)變成梯形板時。則對稱性消失，且各模態之間彎矩與扭轉相互耦合(couple)，但圖 4.2 與圖 4.3 在 $\beta=0^\circ$ 之模態，仍是極為相似的。例如，矩形板(圖 4.3 中， $\beta=0^\circ$)的第二模態是承受扭轉的模態；然而，對於 $c/b=0.5$ (參看圖 4.3)所受扭轉的節點線，則是有點扭曲及偏移。當 $c/b=0.5$ 且 $b/a=2$ 或 1 之第三模態乃 ξ 方向彎矩(spanwise bending)所致。值得注意的是第五模態，對矩形板而言，因彎矩與扭轉耦合，使其模態之兩條節點線相交；當 c/b 從 1 逐漸減少至 0 時，此兩條相交的節點線將會分開，此即所謂的“曲線分離(curve

veering)”的現象(Leissa [1974])。

再回到圖 4.3 中，小斜角($\beta = 5^\circ$)之模態會稍微扭曲，但仍與 $\beta = 0^\circ$ 的模態類似。 $\beta = 45^\circ$ 在第五個模態會發生曲線分離的現象。對第一模態，在 $\beta = 0^\circ$ 沒有節點線出現，但在 $\beta = 45^\circ$ 及 $\beta = 75^\circ$ 則有。

第五章 裂縫矩形板之振動分析

本章將把角函數引入有限元素法，探討扇形板及具有裂縫矩形板的振動行為。配合使用二階形狀函數進行收斂性分析，來驗證本研究方法之可行性與正確性。最後，將本研究方法分析具不同裂縫長度、裂縫位置與裂縫角度之矩形板，探討該等因素對矩形板振動頻率及模態影響。

5.1 有限元素平衡方程式之推導

本章節將介紹用一階剪力變形板理論的控制方程，以虛功法推導有限元素的勁度、質量矩陣，進而導出求取自然振動頻率之特徵方程式。

5.1.1 有限元素法的位移場表示式

如圖 5.1 所示，本研究先用傳統的有限元素法於整個板區域 Γ 內建立網格，於 $x-y$ 座標系統，Mindlin 板理論三個位移函數可表示為

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{xe}^T \{\hat{\psi}_x\}_e \quad (5.1a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{ye}^T \{\hat{\psi}_y\}_e \quad (5.1b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{N}_{we}^T \{\hat{w}\}_e \quad (5.1c)$$

上式中 \mathbf{N}_e 為元素 e 之形狀函數行向量(以圖 5.2 或 5.3 之 (ξ, η) 座標表示)， $\{\hat{\psi}_x\}_e$ ， $\{\hat{\psi}_y\}_e$ ， $\{\hat{w}\}_e$ 為元素 e 之節點位移向量。如圖 5.1 所示， Ω_c 區域內含應力奇異點，故於該區域引入角函數(corner function)：

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} a_c(t) \tilde{\psi}_{xc}(x, y) f_{\Gamma_c}(x, y) \quad (5.2a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} b_c(t) \tilde{\psi}_{yc}(x, y) f_{\Gamma_c}(x, y) \quad (5.2b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{c=1}^{N_c} c_c(t) \tilde{w}_c(x, y) f_{\Gamma_c}(x, y) \quad (5.2c)$$

上式中 $\tilde{\psi}_{xc}$ 、 $\tilde{\psi}_{yc}$ 、 \tilde{w}_c 為角函數， a_c 、 b_c 、 c_c 為其係數，而 $f_{\Gamma_c}(x, y)$ 則為一在邊界 Γ_c 處為 0 之函數。角函數乘上 $f_{\Gamma_c}(x, y)$ 後，雖會改變角函數之行為，但卻依然保存該角函數於奇異點處之原來奇異特性。由於 Ω_c 內之三個位移函數是由式(5.1)與式(5.2)疊加，且角函數乘上 $f_{\Gamma_c}(x, y)$ ，使得 Ω_c 內位移場不會與 Ω_c 外由純有限元素函數所描述之位移場產生不連續現象。另外，由於式(5.2)只侷限於 Ω_c ，故其與有限元素之位移函數(式(5.1))之相互關係亦僅侷限於 Ω_c 。因此，整個板結構之三個位移函數可整理表示成

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{\mathbf{x}\mathbf{e}}^T \{\hat{\psi}_x\}_{\mathbf{e}} + \sum_{c=1}^{N_c} a_c \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma_c} = \hat{\Phi}_x + \tilde{\Phi}_{xc} \quad (5.3a)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{\mathbf{y}\mathbf{e}}^T \{\hat{\psi}_y\}_{\mathbf{e}} + \sum_{c=1}^{N_c} b_c \tilde{\psi}_{yc} f_{\Gamma_c} = \hat{\Phi}_y + \tilde{\Phi}_{yc} \quad (5.3b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{N}_{\mathbf{w}\mathbf{e}}^T \{\hat{w}\}_{\mathbf{e}} + \sum_{c=1}^{N_c} c_c \tilde{w}_c f_{\Gamma_c} = \hat{W} + \tilde{W}_c \quad (5.3c)$$

為了方便以下推導，令

$$\tilde{\Phi}_{xc} = \bar{\Phi}_{\mathbf{x}\mathbf{c}}^T \{\mathbf{a}_c\}, \quad \tilde{\Phi}_{yc} = \bar{\Phi}_{\mathbf{y}\mathbf{c}}^T \{\mathbf{b}_c\}, \quad \tilde{W}_c = \bar{\mathbf{w}}_c^T \{\mathbf{c}_c\}$$

其中定義 $\bar{\Phi}_{\mathbf{x}\mathbf{c}}$ 、 $\bar{\Phi}_{\mathbf{y}\mathbf{c}}$ 與 $\bar{\mathbf{w}}_c$ 為各位移分量之角函數與邊界函數 $f_{\Gamma_c}(x, y)$ 相乘後之行矩陣，且 $\tilde{\Phi}_{xc}$ 、 $\tilde{\Phi}_{yc}$ 、 \tilde{W}_c 僅存在於 Ω_c 內。

5.1.2 以虛功法推導出特徵方程式

將式(5.3a)~式(5.3c)之位移函數代入有限元素法推導之標準程序，可得各元素無外力下之運動方程：

在 Ω_c 區域外之每一元素：

$$[\mathbf{K}_e] \begin{Bmatrix} \hat{\Psi}_x \\ \hat{\Psi}_y \\ \hat{w} \end{Bmatrix}_e + [\mathbf{M}_e] \begin{Bmatrix} \ddot{\Psi}_x \\ \ddot{\Psi}_y \\ \ddot{w} \end{Bmatrix}_e = [0] \quad (5.4a)$$

其中

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Omega_c} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA \quad (5.4b)$$

$$[\mathbf{B}]_e^T = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{xe,x} & \{0\} & \mathbf{N}_{xe,y} & \{0\} & -\mathbf{N}_{xe} \\ \{0\} & \mathbf{N}_{ye,y} & \mathbf{N}_{ye,x} & -\mathbf{N}_{ye} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{0\} & \mathbf{N}_{we,y} & \mathbf{N}_{we,x} \end{bmatrix} \quad (5.4c)$$

$$[\mathbf{D}]_e = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 Gh & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 Gh \end{bmatrix} \quad (5.4d)$$

$[\mathbf{K}_e]$ 、 $[\mathbf{M}_e]$ 分別是在 Ω_c 區域之外的單元勁度、質量矩陣，“ $\cdot\cdot$ ” 是代表對 t 微分兩次，

$(\hat{\Psi}_x^T, \hat{\Psi}_y^T, \hat{w}^T)_e^T$ 為有限元素法中各個元素的節點位移。

在 Ω_c 區域內之每一元素：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Psi}_x \\ \hat{\Psi}_y \\ \hat{w} \\ \mathbf{a}_c \\ \mathbf{b}_c \\ \mathbf{c}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\Psi}_x \\ \ddot{\Psi}_y \\ \ddot{w} \\ \ddot{\mathbf{a}}_c \\ \ddot{\mathbf{b}}_c \\ \ddot{\mathbf{c}}_c \end{Bmatrix} = [0] \quad (5.5a)$$

其中

$$[\mathbf{K}_{11}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA \quad (5.5b)$$

$$[\mathbf{K}_{22}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_c^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_c dA \quad (5.5c)$$

$$[\mathbf{K}_{12}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_e^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_c dA \quad (5.5d)$$

$$[\mathbf{K}_{21}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]_c^T [\mathbf{D}]_e [\mathbf{B}]_e dA \quad (5.5e)$$

$$[\mathbf{B}]_c^T = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{xc,x} & \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{xc,y} & \{\mathbf{0}\} & -\bar{\varphi}_{xc} \\ \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{yc,y} & \bar{\varphi}_{yc,x} & -\bar{\varphi}_{yc} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \bar{\varphi}_{w,y} & \bar{\varphi}_{w,x} \end{bmatrix} \quad (5.5f)$$

$$[\mathbf{M}_{11}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \mathbf{N}_{xe} \mathbf{N}_{xe}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_2 \mathbf{N}_{ye} \mathbf{N}_{ye}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_0 \mathbf{N}_{we} \mathbf{N}_{we}^T \end{bmatrix} dA \quad (5.5g)$$

$$[\mathbf{M}_{12}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \bar{\varphi}_{xc} \mathbf{N}_{xe}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_2 \bar{\varphi}_{yc} \mathbf{N}_{ye}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_0 \bar{\varphi}_{we} \mathbf{N}_{we}^T \end{bmatrix} dA \quad (5.5h)$$

$$[\mathbf{M}_{21}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \mathbf{N}_{xe} \bar{\varphi}_{xc}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_2 \mathbf{N}_{ye} \bar{\varphi}_{yc}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_0 \mathbf{N}_{we} \bar{\varphi}_{we}^T \end{bmatrix} dA \quad (5.5i)$$

$$[\mathbf{M}_{22}] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 \bar{\varphi}_{xc} \bar{\varphi}_{xc}^T & \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_2 \bar{\varphi}_{yc} \bar{\varphi}_{yc}^T & \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & \{\mathbf{0}\} & \mathbf{I}_0 \bar{\varphi}_{we} \bar{\varphi}_{we}^T \end{bmatrix} dA \quad (5.5j)$$

$\{\mathbf{a}_c\}$ 、 $\{\mathbf{b}_c\}$ 、 $\{\mathbf{c}_c\}$ 為各個角函數之係數； \mathbf{K}_{11} 、 \mathbf{M}_{11} 分別是 Ω_e 區域內的單元勁度、質量矩

陣， \mathbf{K}_{12} 、 \mathbf{K}_{21} 、 \mathbf{M}_{12} 、 \mathbf{M}_{21} 是有限元素與角函數相關的部分， \mathbf{K}_{22} 、 \mathbf{M}_{22} 則是完全由角函數所組成的。

整個板內所有元素的勁度及質量矩陣可疊加組成一組方程式：

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{d}\} + [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{d}}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5.6)$$

其中 $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$ 分別為板結構的大域勁度矩陣、大域質量矩陣， $\{d\}$ 為板結構所有節點的位移向量與角函數之係數。

$$\text{令 } \{\mathbf{d}\} = e^{i\omega t} \{\tilde{\mathbf{d}}\} \quad (5.7)$$

將式(5.7)代入式(5.6)得

$$[\mathbf{K}] = \omega^2 [\mathbf{M}] \quad (5.8)$$

式(5.8)為一特徵方程式，依解特徵值的方法即可求得自然振動頻率。

本研究所用有限元素八個節點四邊形單元(有 24 個自由度)或六個節點三角形單元(有 18 個自由度)，若網格切割的越細，總自由度便增多。因此，式(5.8)中， $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$ 兩矩陣的維度大小乃決定於網格切割的多寡，由於本研究案例的總自由度非常多，所以在利用程式求解的過程中，為節省電腦記憶體的儲存空間，便使用林聰悟與林佳慧 [1999]中變寬帶儲存矩陣的方式配合次空間法(subspace)來求取自然振動頻率 ω 。

5.2 漸近解的採用

考慮 V 型開口或裂縫其兩邊邊界條件為自由端(參見圖 1.3)。因此所採用的角函數會有對稱和反對稱兩種特性。在考慮三個位移分量漸近解的特性後， $\tilde{\psi}_{xc}$ 、 $\tilde{\psi}_{yc}$ 採用考慮彎矩奇異的漸近解， \tilde{w}_c 將採用考慮剪力奇異的漸近解。本研究第二章(Huang, 2003)所給之漸近解是在極座標系統：

對稱的漸近解：

$$\psi_{ri} = r^{\lambda_i} \{ \eta_i \cos(\lambda_i + 1)\theta + \cos(\lambda_i - 1)\theta \} \quad (5.9a)$$

$$\psi_{\theta i} = r^{\lambda_i} \{ -\eta_i \sin(\lambda_i + 1)\theta - k_2 \sin(\lambda_i - 1)\theta \} \quad (5.9b)$$

$$w_i = r^{\bar{\lambda}_i} \cos \bar{\lambda}_i \theta \quad (5.9c)$$

其中

$$\eta_i = -\frac{k_2 (\lambda_i - 1) - \lambda_i \nu - 1}{\lambda_i (1 - \nu)} \frac{\cos(\lambda_i - 1) \alpha / 2}{\cos(\lambda_i + 1) \alpha / 2} \quad (5.10a)$$

$$k_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\lambda_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\lambda_i - 1)]} \quad (5.10b)$$

λ_i 滿足 $\sin \lambda_i \alpha = -\lambda_i \sin \alpha$,

$\bar{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \frac{\bar{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$, 所以得到 $\bar{\lambda}_i = \frac{2n\pi}{\alpha}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

反對稱漸近解：

$$\psi_{ri} = r^{\tilde{\lambda}_i} \{ \tilde{\eta}_i \sin(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + \sin(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta \} \quad (5.11a)$$

$$\psi_{\theta i} = r^{\tilde{\lambda}_i} \{ \tilde{\eta}_i \cos(\tilde{\lambda}_i + 1)\theta + k_2 \cos(\tilde{\lambda}_i - 1)\theta \} \quad (5.11b)$$

$$w_i = r^{\hat{\lambda}_i} \sin \hat{\lambda}_i \theta \quad (5.11c)$$

其中

$$\tilde{\eta}_i = -\frac{\tilde{k}_2 (\tilde{\lambda}_i - 1) - \tilde{\lambda}_i \nu - 1}{\tilde{\lambda}_i (1 - \nu)} \frac{\sin(\tilde{\lambda}_i - 1) \alpha / 2}{\sin(\tilde{\lambda}_i + 1) \alpha / 2} \quad (5.12a)$$

$$\tilde{k}_2 = -\frac{[2(1-\nu) + (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i + 1)]}{[2(1-\nu) - (1+\nu)(\tilde{\lambda}_i - 1)]} \quad (5.12b)$$

$\tilde{\lambda}_i$ 滿足 $\sin \tilde{\lambda}_i \alpha = \tilde{\lambda}_i \sin \alpha$,

$\hat{\lambda}_i$ 滿足 $\cos \frac{\hat{\lambda}_i \alpha}{2} = 0$, 所以得到 $\hat{\lambda}_i = \frac{(2n+1)\pi}{\alpha}$, $n = 0, 1, 2 \dots$

5.3 座標轉換

5.3.1 極座標轉換到卡氏座標

式(5.1)及(5.2)表示的角函數是以極座標系統來表示，而 5.1 節中有限元素的勁度及質量矩陣卻是用 ξ 、 η 座標系統建立的。因此要引入角函數到具奇異點附近的元素中，需將 ψ_r 、 ψ_θ 作兩次座標轉換。本小節先介紹極座標與卡氏座標的轉換。考慮兩座標系統如圖 5.4 所示，則位移分量間轉換如下：

$$\tilde{\psi}_{xc} = \psi_r \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta \quad (5.13a)$$

$$\tilde{\psi}_{yc} = \psi_r \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta \quad (5.13b)$$

$$\tilde{w}_c = w \quad (5.13c)$$

由於為使存在於 Ω_c 內之解與 Ω_c 外有限元素解連續，將角函數乘以邊界函數 $f_{\Gamma_c}(x, y)$ ，使其在邊界 Γ_c 處為 0。故取

$$\bar{\psi}_{xc} = \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma_c} \quad (5.14a)$$

$$\bar{\psi}_{yc} = \tilde{\psi}_{yc} f_{\Gamma_c} \quad (5.14b)$$

$$\bar{w}_c = \tilde{w}_c f_{\Gamma_c} \quad (5.14c)$$

在式(5.4)組成勁度矩陣的過程中， $\bar{\psi}_{xc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 、 $\bar{\psi}_{yc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{yc,y}$ 、 $\bar{w}_{c,x}$ 、 $\bar{w}_{c,y}$ 也是需要透過 ψ_r 、 ψ_θ 轉換得來。在此列出 $\bar{\psi}_{xc,x}$ 、 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 的轉換過程如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (5.15b)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta = \frac{x}{r} \quad (5.15c)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (5.15d)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{r^2} \quad (5.15e)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{r^2} \quad (5.15f)$$

式(5.15)是一些微分的基本公式。因此， $\bar{\psi}_{xc,x}$ 及 $\bar{\psi}_{xc,y}$ 可以寫成

$$\bar{\psi}_{xc,x} = \tilde{\psi}_{xc,x} \cdot f_{\Gamma c} + \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma c,x} \quad (5.16a)$$

$$\bar{\psi}_{xc,y} = \tilde{\psi}_{xc,y} \cdot f_{\Gamma c} + \tilde{\psi}_{xc} f_{\Gamma c,y} \quad (5.16b) \quad \text{其}$$

中

$$\tilde{\psi}_{xc,x} = \tilde{\psi}_{xc,r} \cdot \frac{x}{r} + \tilde{\psi}_{xc,\theta} \cdot \left(-\frac{y}{r^2} \right) \quad (5.17a)$$

$$\tilde{\psi}_{xc,y} = \tilde{\psi}_{xc,r} \cdot \frac{y}{r} + \tilde{\psi}_{xc,\theta} \cdot \frac{x}{r^2} \quad (5.17b)$$

其中 (r, θ) 與 (x, y) 之關係為

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.18)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (5.19)$$

代入式(5.17)即完成極座標對卡氏座標之轉換。

5.3.2 卡氏座標轉換到 ξ 、 η 座標

本研究所用的有限元素單元有兩種，一為八個節點的四邊形元素(參看圖 5.2)，另一個則是六個節點的三角形單元(參看圖 5.3)；其形狀函數分別列於圖 5.2、5.3，此兩種元素皆為等參數元素(isoparametric element)。每個元素都是轉換到 ξ 、 η 座標；這個座標系相對於原來的卡氏座標稱為局部座標系，它只適用於各個單元的範圍之內。整體座標 (x, y) 與局部座標 (ξ, η) 的轉換方式可由下列的關係式得到

$$x = \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} N_i(\xi, \eta) x_i \quad (5.20a)$$

$$y = \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} N_i(\xi, \eta) y_i \quad (5.20b)$$

其中 N_i 是以 ξ 、 η 表示的形狀函數， x_i 、 y_i 分別是節點 i 的 x 、 y 座標值。由於座標系的變換，因此在式(5.4)中 $N_{xe,x}$ 、 $N_{xe,y}$ 、 $N_{ye,x}$ 和 $N_{ye,y}$ 都必須作以下的轉換：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (i=1\sim 6 \text{ or } 8) \quad (5.21)$$

其中

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{6 \text{ or } 8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix},$$

稱為 Jacobian Matrix。

另外在組成勁度、質量矩陣的式(5.4)、式(5.5)中積分的變數，也要因座標轉換而改變如下：

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (5.22)$$

其中 $|J|$ 為 Jacobian 行列式值。

5.4 收斂性分析

為了展示角函數在具有應力奇異性問題之有限元素解中的影響，以下針對具有奇異性之板分別作動力分析，探討角函數對有限元素解收斂速度快慢影響。本節以扇形板與具有裂縫的矩形板為實例，使用有限元素法配合二階形狀函數，於奇異點附近元素引入角函數，再藉由收斂性分析探討角函數對收斂速度之影響。

5.4.1 扇形板自然振動頻率分析

如圖 5.5，為 $\alpha = 355^\circ$ 完全無束縛的扇形板，即在徑向及環向的邊界條件皆為自由邊界(free)，取 $h/a=0.1$ (a 為扇形板半徑)，波松比(ν)為 0.3；傳統有限元素的分析中，當切割

的網格越多，越能逼近到正確解。本案例共切割了四種網格分別具有 397、635、667、779 個元素，為了方便描述，分別給予編號為 sp1、sp2、sp3、sp4，如圖 5.6-5.9 所示。圖中灰色區域即為加入角函數之區域。由於應力的奇異點產生的部分都是在尖端；為方便切割，吾人皆採用三角形元素來涵蓋奇異點附近的區域。sp1 網格中，引入角函數的區域 Ω_c 內切割成 8 個元素，該元素遠比外圍的元素大。sp2 網格則將 Ω_c 範圍縮小，並用 16 個元素連結於奇異點(參看如圖 5.7)，並將外圍的網格分割的比 sp1 者細。sp3(a)的 Ω_c 區域和 sp2 相同，而 sp(b)則再把 Ω_c 區域縮小。最後的 sp4 則是將 sp3 靠近奇異點處切的更細(如圖 5.9 所示)，而圖 5.10 為其內部示意圖；此時奇異點附近網格已足夠故暫不考慮角函數作用之情形。

表 5.1 所列者為利用不同有限元素網格配合不同數目之角函數所得之無因次自由振動頻率 $\Omega_1 (= \omega \alpha^2 \sqrt{\rho h / D})$ 。另外，利用 Ritz 法結合角函數所得結果(第三章)亦列於表中。從該表發現：

(a) 傳統的有限元素，其網格的精細度影響其數值結果，本案例 sp1~sp4 隨著網格元素的增加而收斂到準確解。

(b) 角函數確實可以增加收斂速度，尤其是低模態者。當 sp1 有限元網格配合角函數 $\bar{\psi}_{xc}$ 、 $\bar{\psi}_{yc}$ 及 \bar{w}_c 各 10 項、10 項與 4 項所得前 2 模態之結果較 sp3 有限元解佳；而基本模態則較 sp4 有限元解佳。

(c) 角函數最主要是用於準確描述應力奇異行為，而該奇異行為則在 $r \rightarrow 0$ 處才顯現重要。因此，理論上，可把 Ω_c 區域儘量內縮。sp3(a)及 sp3(b)之結果支持以上論點。但此論點不足之處為若當 Ω_c 內之有限元網格過粗，則稍微擴大 Ω_c ，將對結果之準確度有所幫忙。

5.4.2 具裂縫之矩形板自然振動頻率分析

現再將上述方法應用到具裂縫之矩形板(參看圖 5.11)。此矩形板具有 $l_3/l_1=0.5$ 的裂縫於中間， l_3 為裂縫長度而 l_1 為矩形板之長。考慮在四周邊界為 CFCF(與 x 軸平行之邊界為固定端)而內部裂縫處的邊界條件為自由端，且 $l_1/h=10$ ，波松比(ν)0.3。圖 5.12 為裂縫端點示意圖，圖中裂縫視為兩平行線，但裂縫的端點須閉合成一點，因此可視為一尖角，其

開口約 0.5 度，；本案例將裂縫的端點模擬成 359.5 度的尖角。於矩形板之振動，定義無因次自由振動頻率 $\bar{\Omega} = \omega l_1^2 \sqrt{\rho h / D}$

由於裂縫的位於板內，故須考慮兩個應力奇異點，分別在裂縫的起點和終點。藉由本實例也可觀察角函數對於描述角度將近 360 度的應力奇異點，是否能達到良好的效果。

為方便收斂性分析之網格劃分，將此板內部區分為三個區間如圖 5.11 所示，其中 n1 及 n2 隔間數由 4 個增加到 8 個，最後增加到 10 個，而 n3 由 8 個隔間數增加到 16 個，最後增加到 20 個；共產生三組網格，分別有 128、512、800 個元素(參看圖 5.13)。為了方便描述，分別給予編號為 rec1、rec2、rec3。圖 5.13 中深色部分為角函數涵蓋之區域。第一組網格 rec1 在含奇異點之 Ω_c 內各含 4 個較粗之有限元素；rec2(a)便是將 rec1 再作等分切割的動作，而在每個 Ω_c 內包含 16 個元素；rec2(b)不同於 rec2(a)處為將 Ω_c 內縮至祇包含 4 個元素。最後的 rec3 則是將 rec2(a)針對裂縫周圍再加以切割，而在每個 Ω_c 內包圍的元素為 64 個。

表 5.2 所列者為三組網格配合不同數之角函數所得無因次自然振動頻率。該表所顯示之現象與上節扇形板之收斂性分析所發現者同。

5.5 案例分析

此節將探討不同裂縫長度、位置及方向對矩形板振動之影響。該矩形板之長寬比為 2，寬厚比為 10 或 20；包松比 0.3。四邊邊界條件為 CFCF(長邊為固定端)。本節考慮水平裂縫時，其長度與板長度之比(l_3/l_1)=1/8,2/8,3/8 或 6/8，位置為 $c_1/l_1=0,1/4$ 或 $1/2$ 且 $b_1/l_2=1/2$ 或 $1/4$ (參看圖 1.3)。當考慮裂縫方向之影響時，取裂縫斜角 $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ 及 90° ；裂縫長度及位置則取為 $l_3/l_1=3/8$ ， $c_1/l_1=1/2$ 及 $c_1/l_2=1/2$ 。

分析每一塊板時，有限元素網格如圖 5.14~5.18 所示，每一正方元素之長寬為 $l_1/16$ ，共有 512 個元素(但當考慮斜向裂縫時，則在裂縫附近採用三角形元素，故總元素數稱大於 512)。一般而言，在奇異點(裂縫尖端處)取 Ω_c 含有 16 個正方元素(或有部份一正方形元素分割成 2 三角元素)如圖 5.14~5.18 所示深色區域。依照上節收斂性分析，在每一 Ω_c 內，加入對稱及反對稱之 $\bar{\psi}_{xc}$ 及 $\bar{\psi}_{yc}$ 角函數各一項，與反對稱的 \bar{w}_c 一項。

表 5.3-5.4 所列之無因次頻率 $\bar{\Omega}$ 為水平裂縫者。表 5.5 所列者則為考慮斜向裂縫。另外，圖 5.19~5.22 所示者為具有不同裂縫矩形板之前 5 模態的節點模式。從此些結果可發現下列事實：

- (1) 在其他因素不變下，隨著裂縫長度增加，將導致板撓曲勁度之減小，故自然振動頻率隨之減小。
- (2) 當 $l_3/l_1=1/8$ 時，代表小裂縫；故該裂縫之存在並不明顯導致頻率之降低，除了當 $c_1/l_1=0$ ， $b_1/l_2=0.5$ 時之第 5 模態。其他者的頻率降低程度(相對於裂縫者)小於 7%。而當 $c_1/l_1=0$ 且 $b_1/l_2=0.5$ 時，第 5 模態之所以明顯改變，可從其節點模式看出端倪；該節點模式是完全不同於其他板第 5 模態者。
- (3) 當改變裂縫之水平位置(即改變 b_1/l_2)，對 $\bar{\Omega}$ 之影響無一定之趨勢，決定於 l_3/l_1 及模態數。
- (4) 改變裂縫左端之點(即改變 c_1/l_1)對 $\bar{\Omega}$ 之影響亦無一定之趨勢。不過，一般而言， $c_1/l_1=0$ 者之頻率相對於其他者小。
- (5) 改變裂縫角度(θ)對頻率之影響亦無一定趨勢。例如第一模態之頻率隨 θ 從 0° 改變至 90° 而增加，而第 4 模態則呈相反趨勢。
- (6) 不同寬厚比亦為改變 b_1/l_1 ， c_1/l_1 及 θ 對頻率影響之趨勢。例如當 $l_1/h=20$ 時， $c_1/l_1=1/4$ ， $b_1/l_2=1/2$ 且 $l_3/l_1=1/4$ 之前 5 模態自然振動頻率均較 $c_1/l_1=1/2$ ， $b_1/l_2=1/2$ 且 $l_3/l_1=1/4$ 者低；但於 $l_1/h=10$ 時，則不盡然如此。
- (7) 從節點模式可發現當 $l_3/l_1=3/4$ 時，其節點模式大部份均與 $l_3/l_1=0$ 或 $1/8$ 者大不相同，因此，其頻率改變也相對大。

第六章 結論

本結論將依本研究之四大主題來分述：

6.1 應力奇異性

本研究提出以特徵函數展開法求解三條位移分量表示之偏微分方程式，並探討各種不同邊界條件下，在厚板角隅處之 Williams-type 漸近解。此特徵方程式決定彎矩和剪力奇異性階數。值得注意的是，在相同邊界條件下，彎矩奇異性所顯示出的特徵現象完全不同於剪力奇異行為。

漸近解之正確性，可透過與正確解之彎矩和剪力奇異行為相比較之下得知。而所比較之正確解為徑向邊界皆為第一型簡支撐之扇形板自由振動解析解。此外，針對徑向邊界為 F-F 之特徵方程式，則符合完全自由端的楔形板之三維線彈性之解。

除了徑向邊為簡支撐(S(I))之案例外，一階剪力變形板理論之特徵方程式完全異於古典薄板理論。邊界條件與尖角角度(α)大小決定了一階剪力變形板理論或古典薄板理論何者具有較大的彎矩奇異性。不過，由於古典薄板理論沒有考慮剪力變形的影響，故古典薄板理論比一階剪力變形板理論具有較強的剪力奇異性。

在 α 小於 60° 時，不論是何種邊界條件都不會有彎矩奇異性。相對地，在 α 大於 180° 時，不論是何種邊界條件都會產生彎矩奇異性。C-F 邊界條件下，當 α 小於 105° 時，比其他邊界條件者具有較強的彎矩奇異性。

各種邊界條件只要在 α 大於 180° 時，就會產生剪力奇異性。對於徑向邊界條件 C-F，S(I)-F 和 S(II)-F，在 α 大於 90° 時，就會發生剪力奇異性。

6.2 扇形板之振動分析

在 Ritz 法，於傳統允許函數，三角函數多項式中加入角函數，有效加速扇形板數值結果的收斂性。角函數主要的影響是精確地提供了尖銳角附近之彎矩與剪力奇異性。若尖銳角附近之彎矩或剪力以振盪的方式趨近於無限大時(當 λ_k 為複數)，則允許函數必須能顯示

正確的彎矩或剪力奇異階數，並且須能準確地描述該振盪行為。

本研究針對各種不同邊界條件和不同扇形角角度情況下之厚扇形板($h/a=0.1$ 及 $h/a=0.2$)，提供了詳細的數值結果。本研究所得頻率之有效位數至少三位。一般來說，振動頻率會隨著角度的增加而減，而無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$)會隨著厚度的增加而減少，對於節點模態也是首先出現在文獻中。這些可靠的資訊不僅提供了對扇形板振動更進一步的了解，也給予其他計算方法(例如：有限元素法，邊界元素法或微分數值法)有了參考與比較的依據。雖然本研究只考慮扇形板之振動行為，但此方法也易延伸至具有 V 型缺口圓板振動之研究。

6.3 斜形板之振動分析

本研究再次利用 Ritz 法，及搭配 Mindlin 板理論，求解出懸臂斜三角形板，梯形及平行四邊形板之準確自然振動頻率。本研究除了在允許函數中加入完備地多項式函數，並結合角函數；不祇可以描述固定端凹角(re-entrant corner)處之彎矩與剪力奇異行為，更可以滿足凹角處自由端彎矩為 0 之邊界條件。

針對各種不同形狀板之收斂性分析，了解到將角函數引入多項式之允許函數中，對於 Ritz 法中決定板振動頻率之影響。事實證明，加入角函數對於加速解之收斂性確實有很大的效能。如此一來，不僅可以從較小的特徵值行列式中獲得精確的頻率，也可減少奇異矩陣的發生。

針對斜三角形板，梯形及平行四邊形板，將本研究方法所獲得之結果與文獻者比較，發現前者之精確度較高。特別是針對大角度($\beta \geq 45^\circ$)的厚板時，明顯地看出改善的程度。

本研究方法易於改變至分析其他形狀，且由邊界條件引起的應力奇異性之 Mindlin 板。除了可以處理固定端-自由端邊界所造成的尖銳角以外，亦可將此方法應用於其他不同邊界下的尖銳角，例如，裂縫或缺口(邊界為自由端-自由端)之問題也令人矚目。因此，雖然本研究方法只有探討到自由振動的問題，但是也可將此法應用於其他板的問題，如靜載重，挫掘或動力反應等。

6.4 具有裂縫矩形板之振動分析

本研究以有限元素法為基礎，引進角函數來探討具有奇異應力矩形 Mindlin 板之問題，並針對不同裂縫長度、位置及角度進行探討與分析。藉由收斂性分析與文獻結果比較印證本研究所發展方法之可行性與正確性。

矩形裂縫板收斂性分析驗證出角函數的確可以增加數值解收斂的速度。但角函數對於高階模態成效則不甚理想；因此，尚須配合較細之有限元網格，如此高階模態才會趨近收斂。

本研究所發展之加入角函數於有限元素數值解，雖然對具有裂縫矩形板之自然振動分析有一定之幫助；但其成效未如預期。其未如加角函數於 Ritz 法之允許函數有效率。不過，因為角函數能準確描述尖角處之應力奇異行為，故將來應可嘗試將本解應用於解靜力問題，直接估算應力強度因子(stress intensity factor)。

參考文獻

- Bartholomew, P., (1978), "Solution of elastic crack problems by superposition of finite element and singular field", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 13(4), pp 59 -78.
- Bhattacharya, A. P. and Bhowmic, K. N., (1975), "Free vibration of a sectorial plate", *Journal of Sound and Vibration*, 41(4), pp. 503-505.
- Bogy, D. B. and Wang, K. C., (1971), "Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials", *International Journal of Solids and Structures*, 7(10), pp.993-1005.
- Burton, W. S. and Sinclair, G. B., (1986), "On the singularities in Reissner's theory for the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 53, pp. 220-222.
- Cheung, M. S. and Chan, M. Y. T., (1981), "Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method", *Computer and Structure*, 14, pp. 79-88.
- Dempsey, J. P. and Sinclair, G. B., (1979), "On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge", *Journal of Elasticity*, 9(4), pp. 373-391.
- Guruswamy, P. and Yang, T. Y., (1979), "A sector finite element for dynamic analysis of thick plates", *Journal of Sound and Vibration*, 62(4), pp. 505-516.
- Hartranft, R. J. and Sih, G. C., (1969), "The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems", *Journal of Mathematics and Mechanics*, 19(2), pp. 123-138.
- Hein, V. L. and Erdogan, F., (1971), "Stress singularities in a two-material wedge", *International Journal of Fracture Mechanics*, 7(3), pp. 317-330.
- Houmat, A., (2001), "A sector Fourier p-element applied to free vibration analysis of sectorial plates", *Journal of Sound and Vibration*, 243(2), pp. 269-282.
- Huang, C. S., (1991), "Singularities in plate vibration problems", Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Huang, C. S., Leissa, A. W., and McGee, O. G., (1993), "Exact analytical solutions for the vibrations of sectorial plates with simply supported radial edges", *Journal of Applied Mechanics*, 60(2), pp. 478-483.
- Huang, C. S., Leissa, A. W., and McGee, O. G., (1994), "Exact analytical solutions for free vibrations of thick sectorial plates with simply supported radial edges", *International Journal of Solid and Structures*, 31(11), pp. 1609-1631.
- Huang, C. S., (2002a), "Corner singularities in bi-material Mindlin plates", *Composite*

- Structures*, 56(3), pp.315-327.
- Huang, C. S., (2002b), "On the singularity induced by boundary conditions in a third-order thick plate theory", *Journal of Applied Mechanics, Transactions, ASME*, 69(6), pp.800-810.
- Huang, C. S., (2003), "Stress singularities at angular corners in first-order shear deformation plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(1), pp.1-20.
- Huang, C. S., (2004), "Corner stress singularities in a high-order plate theory", *Composite Structures*, 82(20-21), pp.1657-1669.
- Igarashi, H. and Honma, T., (1996), "A finite element method for scalar Helmholtz Equation with field singularities", *EICE Trans. Electron.*, E79_C(1), pp.131-138.
- Kanaka, R. K. and Hinton, E., (1980), "Natural frequencies and modes of rhombic Mindlin plates", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8(1), pp. 55-62.
- Karunasena, W., Kitipornchai, S., and AL-Bermani, F. G. A., (1996), "Free vibration of cantilevered arbitrary triangular Mindlin plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 38(4) , pp. 431-442.
- Khadem, S. E. and Rezaee, M., (2000), "Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), pp. 245-258.
- Kim, J. W., (1998), "A Ritz variational procedure for three-dimensional vibroelasticity problems with singularities", Ph.D dissertation, Georgia Institute of Technology.
- Lee, H. P., (1991), "Fundamental frequencies of annular plates with internal cracks", *Computers & Structures*, 43(6), pp. 1085-1089.
- Lee, H. P. and Lim, S. P., (1992), "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia", *Computers & Structures*, 49(4), pp. 715-718.
- Leissa, A. W., (1969), *Vibration of Plates. NASA SP-160*, U.S. Government Printing Office.
- Leissa, A. W., (1973), "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), pp. 257-293.
- Leissa, A. W., (1974), "On a curve veering aberration", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 25, pp. 99-111.
- Leissa, A. W., (1977a), "Recent research in plate vibrations, 1973-1976: Classical

- theory”, *The Shock and Vibration Digest*, 9(10), pp. 13-24.
- Leissa, A. W., (1977b), “Recent research in plate vibrations, 1973-1976: Complicating effects”, *The Shock and Vibration Digest*, 9(11), pp. 21-35.
- Leissa, A. W., (1981a), “Recent research in plate vibrations, 1976-1980: Classical theory”, *The Shock and Vibration Digest*, 13(9), pp. 11-22.
- Leissa, A. W., (1981b), “Recent research in plate vibrations, 1976-1980: Complicating effects”, *The Shock and Vibration Digest*, 13(10), pp. 19-36.
- Leissa, A. W., (1987a), “Recent studies in plate vibrations: 1981-1985. Part I: Classical theory”, *The Shock and Vibration Digest*, 19(2), pp. 11-18.
- Leissa, A. W., (1987b), “Recent studies in plate vibrations: 1981-1985. Part II: Complicating effects”, *The Shock and Vibration Digest*, 19(3), pp.10-24.
- Leissa, A. W., McGee, O. G., and Huang, C. S., (1993), “Vibrations of sectorial plates having corner stress singularities”, *Journal of Applied Mechanics*, 60(1), pp. 134-140.
- Liew, K. M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., and Wang, C. M., (1993), “Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory”, *Journal of Sound and Vibration*, 168(1), pp.39-69.
- Liew, K. M., Xiang, Y., and Kitipornchai, S., (1995), “Research on thick plate vibration: a literature survey”, *Journal of Sound and Vibration*, 180(1), pp. 163-176.
- Liew, K. M. and Liu, F.-L., (2000), “Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 230(2), pp. 335-356.
- Liu, F.-L. and Liew, K. M., (1999), “Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp. 77-92.
- Lynn, P. P. and Kumbasar, N., (1967), “Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges”, *Midwestern Mechanics Conference.Fort*, pp. 911-928.
- Maruyama, K. and Ichinomiya, O., (1981), “Experimental Investigation of free vibrations of clamped sector plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 74(4), pp. 565-573.
- McGee, O. G. and Leissa, A. W., (1991), “Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 144(2), pp.305-322.

- McGee, O. G., Leissa, A. W., and Huang, C. S., (1992a), "Vibrations of cantilevered skewed trapezoidal and triangular plates with corner stress singularities", *International Journal of Mechanical Sciences*, 34(1), pp.63-84.
- McGee, O. G., Leissa, A. W., and Huang, C. S., (1992b), "Vibrations of cantilevered skewed plates with corner stress singularities", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(2), pp.409-424.
- McGee, O. G. and Butalia, T. S., (1992c), "Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew trapezoidal and triangular thick plates", *Computer Structures*, 45(5/6), pp.1033-1059.
- McGee, O. G. and Butalia, T. S., (1994), "Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew thick plates", *Journal of Sound and Vibration*, 176(3), pp.351-376.
- McGee, O. G., Huang, C. S., and Leissa, A. W., (1995a), "Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges", *International Journal of Mechanical Science*, 37(5), pp. 537-566.
- McGee, O. G., Leissa, A. W., Huang, C. S., and Kim, J. W., (1995b), "Vibration of circular plates with clamped V-notches or rigidly constrained radial cracks", *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 185-201.
- McGee, O. G., Leissa, A. W., Kim, J. W., and Kim, Y. S., (2003), "Vibration of plates with constrained V-notches or cracks", *Journal of Engineering Mechanics*, 129(7), pp. 812-822.
- McGee, O. G., Kim, J. W., and Leissa, A. W., (2005), "Sharp corner functions for Mindlin plates", *Journal of Applied Mechanics (to appear)*.
- Mindlin, R. D., (1951), "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 18, pp. 31-38.
- Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., (1954), "Thickness-shear and flexural vibrations of a circular disk", *Journal of Applied Physics*, 25, pp. 1392-1332.
- Mizusawa, T., (1991), "Vibration of thick annular sector plates using semi-analytical methods", *Journal of Sound and Vibration*, 150(2), pp. 245-259.
- Mizusawa, T., Kito, H., and Kajita, T., (1994), "Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method", *Computer & Structures*, 53(5), pp. 1205-1215.
- Ojikutu, I. O., Low, R. D., and Scott, R. A., (1984), "Stress singularities in laminated composite wedges", *International Journal of Solids and Structures*, 20(8), pp. 777-790.
- Qian, G. L., Gu, S. N., and Jiang, J. S., (1990), "A finite element model of cracked

- plates and application to vibration problems”, *Computers & Structures*, 39(5), pp. 483-487.
- Reddy, J. N., (1999), *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis, Philadelphia.
- Reissner, E., (1945), “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”, *Journal of Applied Mechanics*, 12, pp. 69-77.
- Rubin, C., (1975), “Nodal circles and natural frequencies for the isotropic wedge”, *Journal of Sound and Vibration*, 39(4), pp. 523-526.
- Sinclair, G. B., (2000), “Logarithmic stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending”, *Journal of Applied Mechanics, Transactions, ASME*, 67(1), pp. 219-223.
- Solecki, R., (1983), “Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge”, *Engineering Fracture Mechanics*, 18, pp. 1111-1118.
- Srinivasan, R. S. and Thiruvenkatachari, V., (1985), “Free vibration of transverse isotropic annular sector Mindlin plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 101(2), pp. 193-201.
- Stahl, B. and Keer, L. M., (1972), “Vibration and stability of crack rectangular plates”, *International Journal of Solid and structures*, 29, pp.69-91.
- Stroh, A. N., (1962), “Steady state problems in anisotropic elasticity”, *Journal of Mathematics and Physics*, 41(2), pp. 77-103.
- Ting, T. C. T. and Chou, S. C., (1981), “Edge singularities in anisotropic composites”, *International Journal of Solids and Structures*, 17(11), pp. 1057-1068.
- Waller, M. D., (1952), “Vibrations of free plates, line symmetry, corresponding modes”, *Proceedings of the Royal Society(London) A211*, pp. 265-276.
- Wang, X. and Wang, Y., (2004), “Free vibration analysis of thin sector plates by the new version of differential quadrature method”, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp. 3957-3971.
- Williams, M. L., (1952a), “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending”, *Proceeding of 1st U.S. National congress of Applied Mechanics*, pp. 325-329.
- Williams, M. L., (1952b), “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension”, *Journal of Applied Mechanics*, 19(4), pp. 526-528.

- Williams, M. L. and Chapkis, R. L., (1958), “Stress singularities for a sharp-notched polarly orthotropic plate”, *Proceeding of 3st U.S. National congress of Applied Mechanics*, pp. 281-286.
- Williams, M. L., (1966), “Stress singularity, adhesion, and fracture”, *Proceeding of 5th U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp. 451-464.
- Xiang, Y., Liew, K. M., and Kitipornchai, S., (1993), “Transverse vibration of thick annular sector plates”, *Journal of Engineering Mechanics*, 119(8) pp. 1579-1599.
- Yosibash, Z. and Schiff, B., (1993), “ A superelement for two-dimensional singular boundary value problems in linear elasticity”, *International Journal of Fracture*, 62, pp. 325-340.
- Yuan, J., Young, P. G., and Dickinson, S. M., (1993), “*Natural frequencies of circular and annular plates with radial or circumferential cracks*” , *Computers & Structures*, 53(2), pp. 327-334.

林聰悟，林佳慧，「數值方法與程式」，圖文技術服務有限公司，民國八十八年。

表 2.1 一階剪力變形板理論與古典板理論之特徵方程式之比較

案例 編號	邊界條件	特徵方程式	
		一階剪力變形板理論	古典板理論
1	第一型簡支承 -第一型簡支承	$(\cos(\lambda-1)\alpha/2)(\cos(\lambda+1)\alpha/2) = 0$ (S*) $(\sin(\lambda-1)\alpha/2)(\sin(\lambda+1)\alpha/2) = 0$ (A*)	$\cos \alpha \lambda = -\cos \alpha$ (S*) $\cos \alpha \lambda = +\cos \alpha$ (A*)
2	固定端-自由端	$\sin^2 \lambda \alpha = \frac{4 - \lambda^2(1+\nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3-\nu)(1+\nu)}$	$\sin^2 \lambda \alpha = \frac{4 - \lambda^2(1-\nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3+\nu)(1-\nu)}$
3	第一型簡支承 -自由端	$\sin 2\lambda \alpha = \lambda \sin 2\alpha$	$\sin 2\lambda \alpha = \frac{\lambda(1-\nu)}{-3-\nu} \sin 2\alpha$
4	第一型簡支承 -固定端	$\sin 2\lambda \alpha = \frac{\lambda(1+\nu)}{-3+\nu} \sin 2\alpha$	$\sin 2\lambda \alpha = \lambda \sin 2\alpha$
5	自由端-自由端	$\sin \lambda \alpha = -\lambda \sin \alpha$ (S*) $\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha$ (A*)	$\sin \lambda \alpha = -\frac{\lambda(1-\nu)}{-3-\nu} \sin \alpha$ (S*) $\sin \lambda \alpha = \frac{\lambda(1-\nu)}{-3-\nu} \sin \alpha$ (A*)
6	固定端-固定端	$\sin \lambda \alpha = -\frac{\lambda(1+\nu)}{-3+\nu} \sin \alpha$ (S*) $\sin \lambda \alpha = \frac{\lambda(1+\nu)}{-3+\nu} \sin \alpha$ (A*)	$\sin \lambda \alpha = -\lambda \sin \alpha$ (S*) $\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha$ (A*)
7	第二型簡支承 -第二型簡支承	$\sin \lambda \alpha = -\lambda \sin \alpha$ (S*) $\sin \lambda \alpha = \lambda \sin \alpha$ (A*)	
8	固定端 -第二型簡支承	$\sin^2 \lambda \alpha = \frac{4 - \lambda^2(1+\nu)^2 \sin^2 \alpha}{(3-\nu)(1+\nu)}$	
9	第一型簡支承 -簡支承第二型	$\sin 2\lambda \alpha = \lambda \sin 2\alpha$	
10	第二型簡支承 -自由端	$\sin \lambda \alpha = \pm \lambda \sin \alpha$	

註：S*-對稱案例，A*-反對稱案例。

表 2.2 各種邊界條件下之角函數

案例編號	邊界條件	角函數
1	第一型 簡支承 -第一型 簡支承	<p>(1) $\Psi_r(r, \theta) = A_3 \gamma^\lambda \cos(\lambda - 1)\theta$, $\Psi_\theta(r, \theta) = -k_2 A_3 r^\lambda \sin(\lambda - 1)\theta$,</p> $W(r, \theta) = \gamma_1 A_3 r^{\lambda+1} \cos(\lambda - 1)\theta \quad (\text{for } \cos(\lambda - 1)\alpha / 2 = 0)$ <p>(2) $\Psi_r(r, \theta) = A_1 \gamma^\lambda \cos(\lambda + 1)\theta$, $\Psi_\theta(r, \theta) = -A_1 r^\lambda \sin(\lambda + 1)\theta$,</p> $W(r, \theta) = C_1 r^{\lambda+1} \cos(\lambda + 1)\theta \quad (\text{for } \cos(\lambda + 1)\alpha / 2 = 0)$ <p>(3) $\Psi_r(r, \theta) = A_4 \gamma^\lambda \sin(\lambda - 1)\theta$, $\Psi_\theta(r, \theta) = k_2 A_4 r^\lambda \cos(\lambda - 1)\theta$,</p> $W(r, \theta) = \gamma_1 A_4 r^{\lambda+1} \sin(\lambda - 1)\theta \quad (\text{for } \sin(\lambda - 1)\alpha / 2 = 0)$ <p>(4) $\Psi_r(r, \theta) = A_2 \gamma^\lambda \sin(\lambda + 1)\theta$, $\Psi_\theta(r, \theta) = A_2 r^\lambda \cos(\lambda + 1)\theta$,</p> $W(r, \theta) = C_2 r^{\lambda+1} \sin(\lambda + 1)\theta \quad (\text{for } \sin(\lambda + 1)\alpha / 2 = 0)$
2	固定端- 自由端	$\Psi_r(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ \cos(\lambda + 1)\theta - k_2 \eta_1 \sin(\lambda + 1)\theta - \cos(\lambda - 1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ -\sin(\lambda + 1)\theta - k_2 \eta_1 \cos(\lambda + 1)\theta + k_2 \sin(\lambda - 1)\theta + k_2 \eta_1 \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_1 r^{\lambda+1} \{ \gamma_1 \cos(\lambda + 1)\theta + \eta_2 \sin(\lambda + 1)\theta - \gamma_1 \cos(\lambda - 1)\theta + \gamma_1 \eta_1 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_1 = -\frac{\lambda(1-\nu)\cos(\lambda+1)\alpha - (k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1)\cos(\lambda-1)\alpha}{(k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1)\sin(\lambda-1)\alpha - k_2\lambda(1-\nu)\sin(\lambda+1)\alpha}$ $\eta_2 = \frac{((\lambda+1)\gamma_1 - 1)\sin(\lambda+1)\alpha - (\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1)(\sin(\lambda-1)\alpha + \eta_1 \cos(\lambda-1)\alpha)}{(1+\lambda)\cos(\lambda+1)\alpha}$ $-\frac{k_2\eta_1}{1+\lambda}$
3	第一型 簡支承 -自由端	$\Psi_r(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_3 \sin(\lambda + 1)\theta + \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_3 \cos(\lambda + 1)\theta + k_2 \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_4 r^{\lambda+1} \{ \eta_4 \sin(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_3 = -\frac{(1+\lambda)(1+\nu)\sin(\lambda-1)\alpha}{-3+\lambda+\nu+\lambda\nu\sin(\lambda+1)\alpha}$ $\eta_4 = \frac{\eta_3 \cos(\lambda+1)\alpha + (\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1)\cos(\lambda-1)\alpha}{(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\alpha}$

表 2.2(續上頁)

4	第一型簡支承 - 固定端	$\Psi_r(r, \theta) = A_4 r^\lambda \left\{ -\frac{\sin(\lambda-1)\alpha}{\sin(\lambda+1)\alpha} \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_4 r^\lambda \left\{ -\frac{\sin(\lambda-1)\alpha}{\sin(\lambda+1)\alpha} \cos(\lambda+1)\theta + k_2 \cos(\lambda-1)\theta \right\}$ $W(r, \theta) = A_4 \gamma_1 r^{\lambda+1} \left\{ -\frac{\sin(\lambda-1)\alpha}{\sin(\lambda+1)\alpha} \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \right\}$
5	自由端-自由端	<p>(1) 對稱案例:</p> $\Psi_r(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{ \eta_5 \cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{ -\eta_5 \sin(\lambda+1)\theta - k_2 \sin(\lambda-1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_3 r^{\lambda+1} \{ \eta_6 \cos(\lambda+1)\theta + \gamma_1 \cos(\lambda-1)\theta \}$ $\eta_5 = -\frac{k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1}{\lambda(1-\nu)} \frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2}$ $\eta_6 = \frac{\eta_5}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda) \sin(\lambda+1)\alpha/2}$ <p>(2) 反對稱案例:</p> $\Psi_r(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_7 \sin(\lambda+1)\theta + \sin(\lambda-1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_7 \cos(\lambda+1)\theta + k_2 \cos(\lambda-1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_4 r^{\lambda+1} \{ \eta_8 \sin(\lambda+1)\theta + \gamma_1 \sin(\lambda-1)\theta \}$ $\eta_7 = -\frac{k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1}{\lambda(1-\nu)} \frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2}$ $\eta_8 = \frac{\eta_7}{1+\lambda} - \frac{(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \cos(\lambda-1)\alpha/2}{(1+\lambda) \cos(\lambda+1)\alpha/2}$
6	固定端-固定端	<p>(1) 對稱案例:</p> $\Psi_r(r, \theta) = A_1 r^\lambda \left\{ \cos(\lambda+1)\theta - \left(\frac{\cos(\lambda+1)\alpha/2}{\cos(\lambda-1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_1 r^\lambda \left\{ -\sin(\lambda+1)\theta + k_2 \left(\frac{\cos(\lambda+1)\alpha/2}{\cos(\lambda-1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}$ $W(r, \theta) = A_1 \gamma_1 r^{\lambda+1} \left\{ \cos(\lambda+1)\theta - \left(\frac{\cos(\lambda+1)\alpha/2}{\cos(\lambda-1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}$ <p>(2) 反對稱案例:</p> $\Psi_r(r, \theta) = A_2 r^\lambda \left\{ \sin(\lambda+1)\theta - \left(\frac{\sin(\lambda+1)\alpha/2}{\sin(\lambda-1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_2 r^\lambda \left\{ \cos(\lambda+1)\theta - k_2 \left(\frac{\sin(\lambda+1)\alpha/2}{\sin(\lambda-1)\alpha/2} \right) \cos(\lambda-1)\theta \right\}$ $W(r, \theta) = A_2 \gamma_1 r^{\lambda+1} \left\{ \sin(\lambda+1)\theta - \left(\frac{\sin(\lambda+1)\alpha/2}{\sin(\lambda-1)\alpha/2} \right) \sin(\lambda-1)\theta \right\}$

表 2.2(續上頁)

7	第二型簡支承 - 第二型簡支承	(1) 對稱案例: $\Psi_r(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{ \eta_9 \cos(\lambda + 1)\theta + \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_3 r^\lambda \{ -\eta_9 \sin(\lambda + 1)\theta - k_2 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_3 \gamma_1 r^{\lambda+1} \{ \eta_{10} \cos(\lambda + 1)\theta + \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_9 = -\frac{(1+k_2)(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha/2}{2\lambda \sin(\lambda+1)\alpha/2}, \quad \eta_{10} = -\frac{\cos(\lambda-1)\alpha/2}{\cos(\lambda+1)\alpha/2}$ (2) 反對稱案例: $\Psi_r(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_{11} \sin(\lambda + 1)\theta + \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_4 r^\lambda \{ \eta_{11} \cos(\lambda + 1)\theta + k_2 \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_4 \gamma_1 r^{\lambda+1} \{ \eta_{12} \sin(\lambda + 1)\theta + \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_{11} = -\frac{(1+k_2)(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\alpha/2}{2\lambda \cos(\lambda+1)\alpha/2}, \quad \eta_{12} = -\frac{\sin(\lambda-1)\alpha/2}{\sin(\lambda+1)\alpha/2}$
8	固定端- 第二型簡支承	$\Psi_r(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ \cos(\lambda + 1)\theta - k_2 \eta_1 \sin(\lambda + 1)\theta - \cos(\lambda - 1)\theta + \eta_1 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ -\sin(\lambda + 1)\theta - k_2 \eta_1 \cos(\lambda + 1)\theta + k_2 \sin(\lambda - 1)\theta + k_2 \eta_1 \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_1 r^{\lambda+1} \{ \gamma_1 \cos(\lambda + 1)\theta + \eta_{13} \sin(\lambda + 1)\theta - \gamma_1 \cos(\lambda - 1)\theta + \gamma_1 \eta_1 \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_{13} = -\frac{\gamma_1}{\sin(\lambda + 1)\alpha} (\cos(\lambda + 1)\alpha - \cos(\lambda - 1)\alpha + \eta_1 \sin(\lambda - 1)\alpha)$
9	第一型簡支承 - 第二型簡支承	$\Psi_r(r, \theta) = A_2 r^\lambda \{ \sin(\lambda + 1)\theta + \frac{1}{\eta_3} \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_2 r^\lambda \{ \cos(\lambda + 1)\theta + (k_2 / \eta_3) \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_2 r^{\lambda+1} \left\{ \frac{\nu - 1}{1 + \lambda + \nu + \lambda \nu} \sin(\lambda + 1)\theta + (\gamma_1 / \eta_3) \sin(\lambda - 1)\theta \right\}$

表 2.2(續上頁)

10	第二型簡支承 -自由端	$\Psi_r(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ \cos(\lambda + 1)\theta + \eta_{14} \sin(\lambda + 1)\theta + \eta_{15} \cos(\lambda - 1)\theta + \eta_{16} \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = A_1 r^\lambda \{ -\sin(\lambda + 1)\theta + \eta_{14} \cos(\lambda + 1)\theta - k_2 \eta_{15} \sin(\lambda - 1)\theta + k_2 \eta_{16} \cos(\lambda - 1)\theta \}$ $W(r, \theta) = A_1 r^{\lambda+1} \{ -\gamma_1 \eta_{15} \cos(\lambda + 1)\theta + \eta_{17} \sin(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 \eta_{15} \cos(\lambda - 1)\theta + \gamma_1 \eta_{16} \sin(\lambda - 1)\theta \}$ $\eta_{14} = -\frac{(1+k_2)(\lambda-1)}{2\lambda} \eta_{16}, \quad \eta_{15} = -\frac{-3+\lambda+\nu+\lambda\nu}{(1+\lambda)(1+\nu)},$ $\eta_{16} = -\frac{\lambda(1-\nu) \cos(\lambda+1)\alpha + \eta_{15} (k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1) \cos(\lambda-1)\alpha}{(-1+k_2)(\lambda-1)/2(1-\nu) \sin(\lambda+1)\alpha + (k_2(\lambda-1) - \lambda\nu - 1) \sin(\lambda-1)\alpha}$ $\eta_{17} = \frac{-(1+(1+\lambda)\gamma_1\eta_{15}) \sin(1+\lambda)\alpha + \eta_{15}(\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \sin(\lambda-1)\alpha}{(1+\lambda) \cos(1+\lambda)\alpha} +$ $\frac{-(1+k_2)(\lambda-1)/(2\lambda) \cos(1+\lambda)\alpha - (\lambda\gamma_1 - k_2 - \gamma_1) \cos(\lambda-1)\alpha}{(1+\lambda) \cos(1+\lambda)\alpha} \eta_{16}$
----	----------------	--

表 2.3 剪力奇異性之特徵方程式及其角函數

案例編號	邊界條件	特徵方程式	角函數
1	第一型簡支承 -第一型簡支承	$\cos \bar{\lambda} \alpha / 2 = 0$ (S*)	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta, \Psi_\theta(r, \theta) = \bar{B}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta,$ $W(r, \theta) = r^{\bar{\lambda}} (\bar{l}_1 \bar{A}_1 + \bar{l}_2 \bar{B}_2) \cos \bar{\lambda} \theta$
2	固定端-自由端	$\cos \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \{ \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_1 \sin \bar{\lambda} \theta - \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \bar{\eta}_2 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \{ -\bar{\eta}_2 \cos \bar{\lambda} \theta - \frac{\bar{l}_1}{\bar{l}_2} \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_2 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \}$ $W(r, \theta) = \bar{A}_1 (\bar{l}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{l}_2 \bar{\eta}_2) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$ $\bar{\eta}_1 = -\frac{(1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \cos(\bar{\lambda} + 2) \alpha + \bar{\eta}_2 ((1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \sin(\bar{\lambda} + 2) \alpha + \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \alpha)}{(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu) \sin \bar{\lambda} \alpha}$ $\bar{\eta}_2 = \frac{(1 + \bar{l}_1 / \bar{l}_2) \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \alpha - 2(1 + \bar{\lambda}) \sin(\bar{\lambda} + 2) \alpha}{2(1 + \bar{\lambda}) \cos(\bar{\lambda} + 2) \alpha}$
3	第一型簡支承 -自由端	$\cos \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta, \Psi_\theta(r, \theta) = \frac{(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}} \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta,$ $W(r, \theta) = \bar{A}_2 (\bar{l}_1 - \frac{\bar{l}_2 (1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}}) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$
4	第一型簡支承 -固定端	$\sin \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta, W(r, \theta) = \bar{A}_2 \bar{l}_1 r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$
5	自由端-自由端	$\cos \bar{\lambda} \alpha / 2 = 0$ (A*)	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta$ $\Psi_\theta(r, \theta) = \frac{(1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}} \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta,$ $W(r, \theta) = \bar{A}_2 (\bar{l}_1 - \frac{\bar{l}_2 (1 + \nu + \bar{\lambda} \nu)}{\bar{\lambda}}) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$
6	固定端-固定端	$\cos \bar{\lambda} \alpha / 2 = 0$ (S*)	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta, W(r, \theta) = \bar{A}_1 \bar{l}_1 r^{\bar{\lambda}} \cos \bar{\lambda} \theta$
7	第二型簡支承 -第二型簡支承	$\cos \bar{\lambda} \alpha / 2 = 0$ (S*)	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta, \Psi_\theta(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta,$ $W(r, \theta) = \bar{A}_1 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) r^{\bar{\lambda}} \cos \bar{\lambda} \theta$

註: S*一對稱案例, A*一反對稱案例。

表 2.3(續上頁)

案例編號	邊界條件	特徵方程式	角函數
8	固定端- 第二型 簡支承	$\sin \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \{ \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_3 \sin \bar{\lambda} \theta - \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \bar{\eta}_4 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \left\{ -\bar{\eta}_4 \cos \bar{\lambda} \theta - \frac{\bar{l}_1}{l_2} \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_4 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \right\}$ $W(r, \theta) = \bar{A}_1 (\bar{l}_1 \bar{\eta}_3 + \bar{l}_2 \bar{\eta}_4) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$ $\bar{\eta}_3 = -\frac{2(1 + \bar{\lambda}) \sin(\bar{\lambda} + 2) \alpha + \bar{\eta}_4 (2(1 + \bar{\lambda}) \cos(\bar{\lambda} + 2) \alpha - \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} \alpha)}{\bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} \alpha}$ $\bar{\eta}_4 = -\frac{(1 + \nu + \nu \bar{\lambda}) \cos \bar{\lambda} \alpha - (1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \cos(2 + \bar{\lambda}) \alpha - (\bar{l}_1 / \bar{l}_2) \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} \alpha}{(1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \sin(2 + \bar{\lambda}) \alpha}$
9	第一型 簡支承 -第二型 簡支承	$\sin \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \sin \bar{\lambda} \theta$ $\Psi_\theta(r, \theta) = -\bar{A}_2 r^{\bar{\lambda}+1} \cos \bar{\lambda} \theta$ $W(r, \theta) = \bar{A}_2 (\bar{l}_1 + \bar{l}_2) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$
10	第二型 簡支承- 自由端	$\cos \bar{\lambda} \alpha = 0$	$\Psi_r(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \{ \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_5 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_6 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta + \bar{\eta}_7 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \}$ $\Psi_\theta(r, \theta) = \bar{A}_1 r^{\bar{\lambda}+1} \left\{ \bar{\eta}_8 \cos \bar{\lambda} \theta - \frac{\bar{l}_1}{l_2} \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{\eta}_7 \cos(2 + \bar{\lambda}) \theta - \bar{\eta}_6 \sin(2 + \bar{\lambda}) \theta \right\}$ $W(r, \theta) = \bar{A}_1 (\bar{l}_1 \bar{\eta}_5 - \bar{l}_2 \bar{\eta}_8) r^{\bar{\lambda}} \sin \bar{\lambda} \theta$ $\bar{\eta}_5 = -\frac{\bar{\eta}_6 (1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \cos(\bar{\lambda} + 2) \alpha + \bar{\eta}_7 (1 + \bar{\lambda})(\nu - 1) \sin(\bar{\lambda} + 2) \alpha + 2(1 + \bar{\lambda}) \bar{\eta}_7 \sin \bar{\lambda} \alpha}{(1 + \nu + \bar{\lambda} + \nu \bar{\lambda}) \sin \bar{\lambda} \alpha}$ $\bar{\eta}_6 = -\frac{1 + \nu + \bar{\lambda} \nu - (\bar{l}_1 / \bar{l}_2) \bar{\lambda}}{(1 + \bar{\lambda})(\nu - 1)}$ $\bar{\eta}_7 = \frac{(1 + \bar{l}_1 / \bar{l}_2) \bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} \alpha + 2 \bar{\eta}_6 (1 + \bar{\lambda}) \sin(2 + \bar{\lambda}) \alpha}{2(1 + \bar{\lambda}) \cos(2 + \bar{\lambda}) \alpha}$ $\bar{\eta}_8 = -(\bar{\eta}_5 + \frac{2(1 + \bar{\lambda}) \bar{\eta}_7}{\bar{\lambda}})$

表 3.1 邊界條件為固定端-自由端-自由端(C-F-F)之 90° 扇形薄板

無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)之收斂性分析

模態數	角函數數目 ($\Psi_{rc}, \Psi_{\theta c}, W_c$)	式 (3.5)中之($I_{\text{even}}, I_{\text{odd}}$)					McGee 等人[2003]
		(16,15)	(18,17)	(20,19)	(22,21)	(22,23)	
		437 [#]	546 [#]	667 [#]	800 [#]	872 [#]	
1	(0,0,0)	4.485	4.454	4.440	4.437	4.435	4.493
	(10,10,10)	4.455	4.446	4.438	4.434	4.432	
	(20,20,20)	4.446	4.440	4.435	4.430	4.429	
2	(0,0,0)	13.14	13.05	12.99	12.98	12.98	13.57
	(10,10,10)	13.01	12.99	12.98	12.97	12.97	
	(20,20,20)	12.99	12.98	12.97	12.97	12.97	
3	(0,0,0)	24.43	24.33	24.30	24.28	24.28	24.90
	(10,10,10)	24.34	24.31	24.28	24.27	24.27	
	(20,20,20)	24.30	24.28	24.26	24.26	24.26	
4	(0,0,0)	33.70	33.55	33.51	33.50	33.50	/
	(10,10,10)	33.55	33.52	33.50	33.49	33.49	
	(20,20,20)	33.52	33.50	33.49	33.49	33.49	
5	(0,0,0)	50.41	50.26	50.19	50.18	50.17	/
	(10,10,10)	50.28	50.24	50.18	50.16	50.16	
	(20,20,20)	50.20	50.18	50.16	50.16	50.16	

註：“#”代表 Ψ_{rc} ， $\Psi_{\theta c}$ 和 W_c 之總項數。

“/” 意指沒有適當的資料。

表 3.2 邊界條件為固定端-自由端-自由端(C-F-F)之 270° 扇形薄板

無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)之收斂性分析

模態數	角函數數目 ($\Psi_{rc}, \Psi_{\theta c}, W_c$)	式 (3.5) 中之($I_{\text{even}}, I_{\text{odd}}$)					McGee 等人 [2003]
		(16,15)	(18,17)	(20,19)	(22,21)	(24,23)	
		437 [#]	546 [#]	667 [#]	800 [#]	945 [#]	
1	(0,0,0)	2.602	2.543	2.504	2.470	2.445	2.166
	(10,10,10)	2.297	2.135	2.079	2.059	2.056	
	(20,20,20)	2.130	2.120	2.061	2.056	2.055	
2	(0,0,0)	3.164	3.092	3.012	2.983	2.951	2.479
	(10,10,10)	2.643	2.442	2.367	2.344	2.341	
	(20,20,20)	2.446	2.387	2.345	2.340	2.337	
3	(0,0,0)	4.819	4.768	4.752	4.744	4.728	4.690
	(10,10,10)	4.661	4.591	4.499	4.495	4.494	
	(20,20,20)	4.590	4.544	4.495	4.493	4.492	
4	(0,0,0)	8.312	8.219	8.192	8.186	8.161	/
	(10,10,10)	8.020	7.959	7.953	7.946	7.942	
	(20,20,20)	7.960	7.955	7.946	7.942	7.938	
5	(0,0,0)	12.82	12.77	12.75	12.73	12.72	/
	(10,10,10)	12.53	12.44	12.42	12.42	12.41	
	(20,20,20)	12.45	12.43	12.42	12.41	12.41	

註：“#”代表 Ψ_{rc} , $\Psi_{\theta c}$ 和 W_c 之總項數。

“/”意指沒有適當的資料。

表 3.3 邊界條件為固定端-自由端-自由端(C-F-F)之 355° 扇形薄板

無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)的收斂性分析

模態數	角函數數目 ($\Psi_{rc}, \Psi_{\theta c}, W_c$)	式 (3.5)中之($I_{\text{even}}, I_{\text{odd}}$)				McGee 等人 [2003]
		(16,15)	(18,17)	(20,19)	(22,21)	
		437 [#]	546 [#]	667 [#]	800 [#]	
1	(0,0,0)	2.504	2.373	2.301	2.245	1.753
	(10,10,10)	1.825	1.752	1.731	1.728	
	(20,20,20)	1.763	1.730	1.727	1.725	
2	(0,0,0)	3.011	2.907	2.835	2.771	2.210
	(10,10,10)	2.957	2.296	2.195	2.192	
	(20,20,20)	2.320	2.195	2.191	2.188	
3	(0,0,0)	3.719	3.670	3.636	3.601	3.426
	(10,10,10)	3.691	3.351	3.294	3.293	
	(20,20,20)	3.362	3.332	3.290	3.289	
4	(0,0,0)	5.433	5.351	5.292	5.253	/
	(10,10,10)	5.386	4.796	4.748	4.739	
	(20,20,20)	5.032	4.747	4.742	4.735	
5	(0,0,0)	8.025	7.987	7.933	7.890	/
	(10,10,10)	8.006	7.398	7.357	7.354	
	(20,20,20)	7.401	7.355	7.354	7.352	

註：“#”代表 Ψ_{rc} ， $\Psi_{\theta c}$ 和 W_c 之總項數。

“/”意指沒有適當的資料。

表 3.4 利用不同角函數且完全自由端之扇形板無因次化頻率

$$(\omega a^2 \sqrt{\rho h / D})\text{-之比較}(\alpha = 355^\circ, h/a=0.1)$$

模態數	角函數數目 ($\Psi_{rc}, \Psi_{\theta c}, W_c$)	式 (3.5)中之($I_{\text{even}}, I_{\text{odd}}$)				
		(16, 15)	(18,17)	(20,19)	(22,21)	(24,23)
1 (A)	(0,0,0)	5.261	5.244	5.242	5.240	5.237
	(1,1,1)	4.875	4.814	4.779	4.755	4.750
		[4.890]	[4.819]	[4.783]	[4.758]	[4.752]
	(5,5,5)	2.782	2.760	2.747	2.740	2.736
[2.795]		[2.763]	[2.752]	[2.746]	[2.740]	
2 (S)	(0,0,0)	5.345	5.301	5.297	5.296	5.294
	(1,1,1)	4.713	4.690	4.642	4.601	4.579
		[4.721]	[4.695]	[4.649]	[4.607]	[4.596]
	(5,5,5)	4.268	4.241	4.234	4.232	4.231
[4.277]		[4.246]	[4.239]	[4.237]	[4.235]	
3 (S)	(0,0,0)	8.881	8.854	8.849	8.843	8.839
	(1,1,1)	8.010	7.980	7.936	7.894	7.845
		[8.024]	[7.988]	[7.940]	[7.899]	[7.850]
	(5,5,5)	7.645	7.561	7.556	7.551	7.547
[7.659]		[7.566]	[7.560]	[7.556]	[7.551]	
4 (A)	(0,0,0)	12.02	12.00	11.99	11.98	11.98
	(1,1,1)	10.25	10.18	10.09	10.02	10.00
		[10.27]	[10.19]	[10.10]	[10.03]	[10.02]
	(5,5,5)	7.653	7.609	7.596	7.592	7.589
[7.667]		[7.616]	[7.603]	[7.599]	[7.594]	
5 (S)	(0,0,0)	12.12	12.12	12.12	12.11	12.11
	(1,1,1)	11.51	11.51	11.50	11.49	11.49
		[11.52]	[11.52]	[11.51]	[11.51]	[11.51]
	(5,5,5)	11.26	11.24	11.23	11.23	11.22
[11.27]		[11.25]	[11.24]	[11.23]	[11.23]	

註：(S)及(A)分別定義為對稱及反對稱振態。

[] 表示為利用簡化角函數所得之結果。

表 3.5 利用不同角函數且邊界條件為固定端-自由端-自由端(C-F-F)之

扇形板無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)之比較($\alpha = 355^\circ$, $h/a=0.1$)

模態數	角函數數目 ($\Psi_{rc}, \Psi_{\theta c}, W_c$)	式 (3.5)中之($I_{\text{even}}, I_{\text{odd}}$)				
		(16,15)	(18,17)	(20,19)	(22,21)	(24,23)
1	(0,0,0)	2.504	2.448	2.375	2.319	2.263
	(1,1,1)	2.388	2.237	2.187	1.932	1.895
		[2.428]	[2.302]	[2.200]	[1.993]	[1.955]
	(5,5,5)	2.216	2.186	1.884	1.851	1.811
[2.264]		[2.201]	[1.958]	[1.929]	[1.885]	
2	(0,0,0)	3.029	2.918	2.839	2.765	2.744
	(1,1,1)	2.857	2.571	2.473	2.416	2.380
		[2.914]	[2.689]	[2.598]	[2.518]	[2.490]
	(5,5,5)	2.513	2.422	2.409	2.377	2.294
[2.607]		[2.455]	[2.429]	[2.416]	[2.372]	
3	(0,0,0)	3.717	3.654	3.624	3.597	3.474
	(1,1,1)	3.625	3.526	3.485	3.463	3.352
		[3.641]	[3.604]	[3.564]	[3.518]	[3.431]
	(5,5,5)	3.510	3.489	3.464	3.345	3.319
[3.595]		[3.537]	[3.521]	[3.412]	[3.370]	
4	(0,0,0)	5.452	5.335	5.281	5.237	5.196
	(1,1,1)	5.298	5.223	5.149	5.112	5.048
		[5.305]	[5.278]	[5.191]	[5.166]	[5.139]
	(5,5,5)	5.185	5.139	5.116	4.988	4.961
[5.252]		[5.207]	[5.139]	[5.078]	[5.005]	
5	(0,0,0)	8.041	7.979	7.927	7.880	7.822
	(1,1,1)	7.918	7.839	7.810	7.761	7.717
		[7.950]	[7.926]	[7.875]	[7.839]	[7.794]
	(5,5,5)	7.762	7.633	7.536	7.498	7.463
[7.816]		[7.701]	[7.623]	[7.568]	[7.541]	

註：[] 表示為利用簡化角函數所得之結果。

表 3.6 完全固定端之扇形板無因次化頻率

($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)之收斂性分析

h/a	α (degree)	模態數				
		1	2	3	4	5
0.1	90	42.78	72.01	83.94	105.2	122.4
		[42.75]	[71.96]	[83.86]	[105.1]	[122.2]
	180	25.94	37.46	51.20	61.10	66.32
		[25.91]	[37.43]	[51.16]	[61.06]	[66.26]
	270	21.64	27.63	35.71	44.70	53.90
		[21.62]	[27.60]	[35.68]	[44.66]	[53.87]
	330	20.37	24.43	30.53	37.45	44.88
		[20.35]	[24.40]	[30.51]	[37.43]	[44.85]
0.2	90	33.31	52.06	59.20	72.17	81.72
		[33.28]	[52.04]	[59.16]	[72.14]	[81.71]
	180	21.66	30.08	39.63	45.57	49.60
		[21.63]	[30.06]	[39.61]	[45.53]	[49.55]
	270	18.18	23.09	29.10	35.46	40.91
		[18.14]	[23.07]	[29.07]	[35.43]	[40.88]
	330	16.97	20.75	25.38	30.46	35.69
		[16.95]	[20.71]	[25.36]	[30.42]	[35.66]

註：[] 表示為 Liu 和 Liew [1999] 之結果。

表 3.7 不同邊界條件之扇形板無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)

($h/a=0.1$)

邊界 條件	α (degree)	模態數				
		1	2	3	4	5
F-F-F	90	15.37	22.00	28.66	35.25	51.66
	180	6.813	9.146	17.30	17.37	27.35
	270	4.454	5.859	9.063	12.29	16.40
	300	3.675	5.378	8.155	10.29	15.01
	330	3.101	4.757	7.737	8.679	12.73
	355	2.730	4.228	7.548	7.577	11.23
C-F-F	90	4.400	12.71	23.06	32.20	47.77
	180	2.388	3.817	8.971	15.53	18.50
	270	1.964	2.200	4.366	7.789	12.15
	300	1.937	2.198	3.839	6.411	10.05
	330	1.802	2.180	3.317	5.373	8.432
	355	1.712	2.177	3.266	4.722	7.336
S-F-F	90	9.055	17.13	27.09	42.39	48.79
	180	2.726	7.342	14.02	16.59	22.63
	270	2.161	3.350	6.681	11.01	15.99
	300	2.156	2.744	5.423	9.059	13.34
	330	1.891	2.868	4.268	7.589	11.33
	355	1.613	2.987	3.742	6.605	10.93
C-C-F	90	13.36	29.81	41.53	56.75	72.98
	180	4.462	8.789	16.81	24.64	24.93
	270	3.066	4.074	7.851	11.12	17.63
	300	2.920	3.461	6.109	10.08	14.13
	330	2.839	3.062	5.113	8.306	11.76
	355	2.688	2.858	3.947	7.240	10.83
S-C-F	90	8.881	25.45	37.66	48.54	69.31
	180	2.899	7.155	14.14	22.99	23.40
	270	2.403	3.281	6.591	10.90	16.17
	300	2.238	3.156	5.415	8.909	13.30
	330	2.027	3.055	4.116	7.497	11.23
	355	1.815	2.847	3.794	7.232	10.81

註：F-自由端，S-簡支撐端，C-固定端。

表 3.8 不同邊界條件之扇形板無因次化頻率($\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$)

($h/a=0.2$)

邊界條件	α (degree)	模態數				
		1	2	3	4	5
F-F-F	90	14.82	21.31	27.45	33.10	47.30
	180	6.724	8.997	16.39	16.51	25.81
	270	4.376	5.765	8.927	11.99	15.65
	300	3.590	5.286	8.021	10.05	14.47
	330	3.057	4.637	7.645	8.481	11.98
	355	2.632	4.152	7.430	7.458	10.98
C-F-F	90	4.326	12.38	22.14	30.06	44.59
	180	2.296	3.713	8.801	15.19	18.10
	270	1.905	2.134	4.258	7.556	11.85
	300	1.868	2.130	3.822	6.202	9.700
	330	1.758	2.127	3.230	5.261	8.246
	355	1.659	2.121	3.184	4.497	6.725
S-F-F	90	8.573	15.79	24.11	36.75	40.74
	180	2.624	6.835	13.01	15.58	20.60
	270	1.993	3.147	6.475	10.00	14.97
	300	1.954	2.541	5.218	8.691	12.32
	330	1.710	2.656	4.064	7.312	10.81
	355	1.431	2.774	3.538	6.298	10.42
C-C-F	90	11.35	24.77	32.49	40.70	52.90
	180	4.198	8.479	14.80	20.62	21.90
	270	2.823	3.779	7.144	10.11	15.66
	300	2.717	3.187	5.530	9.469	13.11
	330	2.657	2.750	4.601	7.898	10.74
	355	2.474	2.566	3.454	6.930	10.09
S-C-F	90	8.289	23.32	31.60	40.04	52.72
	180	2.649	6.685	12.99	20.57	20.96
	270	2.271	3.078	6.284	9.887	13.16
	300	2.056	2.953	5.210	8.671	12.28
	330	1.829	2.747	3.821	7.247	10.70
	355	1.613	2.561	3.374	6.929	9.738

註：F-自由端，S-簡支撐端，C-固定端。

表 4.1 三角形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析

$$(\bar{a}/b=1, \beta = 30^\circ, h/b=0.001)$$

模態數	式(4.9a-4.9c)中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						McGee 等人 [1992a]	Karunasena 等人 [1996]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)		
1	0	6.060	5.846	5.723	5.708	5.693	5.689	5.689	5.705
	2	5.861	5.700	5.688	5.687	5.686	5.686		
	5	5.698	5.687	5.686	5.686	5.685	5.685		
	10	5.687	5.686	5.685	5.685	5.685	5.685		
2	0	21.93	21.65	21.51	21.49	21.47	21.46	21.46	21.50
	2	21.56	21.48	21.46	21.46	21.45	21.45		
	5	21.47	21.46	21.45	21.45	21.45	21.45		
	10	21.46	21.45	21.45	21.45	21.44	21.44		
3	0	36.95	36.46	36.29	36.21	35.98	35.94	35.92	36.09
	2	36.57	35.98	35.93	35.92	35.91	35.91		
	5	36.05	35.93	35.92	35.91	35.91	35.90		
	10	35.92	35.91	35.91	35.90	35.90	35.90		
4	0	55.32	54.67	54.64	54.59	54.50	54.42	54.40	54.46
	2	54.83	54.49	54.42	54.41	54.40	54.39		
	5	54.57	54.41	54.40	54.39	54.39	54.38		
	10	54.41	54.40	54.39	54.38	54.38	54.38		
5	0	71.04	70.29	70.22	70.20	70.15	70.14	70.15	70.16
	2	70.58	70.24	70.20	70.13	70.13	70.13		
	5	70.38	70.15	70.13	70.13	70.13	70.12		
	10	70.14	70.13	70.12	70.12	70.12	70.11		

表 4.2 三角形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析

($\bar{a}/b=1$, $\beta = 60^\circ$, $h/b=0.001$)

模態 數	式(4.9a-4.9c) 中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之(I, J)						McGee 等人 [1992a]	Karunasena 等人 [1996]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)		
1	0	7.225	6.597	6.369	6.203	6.163	6.104	6.093	6.277
	5	6.443	6.331	6.184	6.065	6.065	6.064		
	10	6.305	6.107	6.064	6.064	6.064	6.064		
	15	6.075	6.064	6.064	6.064	6.064	6.063		
2	0	32.53	27.13	26.13	25.74	25.44	25.42	25.43	25.84
	5	26.95	25.82	25.70	25.40	25.39	25.39		
	10	25.80	25.55	25.39	25.39	25.39	25.39		
	15	25.42	25.39	25.39	25.39	25.38	25.38		
3	0	73.65	60.93	55.70	54.30	53.12	53.02	53.06	54.49
	5	66.34	54.61	53.25	52.91	52.91	52.91		
	10	53.66	53.10	52.91	52.91	52.91	52.90		
	15	53.06	52.91	52.91	52.90	52.90	52.90		
4	0	127.2	108.3	87.94	81.65	74.43	74.39	74.26	81.46
	5	110.4	85.96	80.25	74.24	74.24	74.23		
	10	90.35	79.21	74.24	74.24	74.23	74.23		
	15	75.91	74.24	74.23	74.23	74.23	74.22		
5	0	183.9	123.1	106.4	103.1	102.5	101.6	101.5	102.6
	5	142.4	108.6	102.5	101.4	101.4	101.4		
	10	122.3	101.9	101.4	101.4	101.4	101.3		
	15	101.5	101.4	101.3	101.3	101.3	101.3		

表 4.3 三角形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析

$$(\bar{a}/b=1, \beta = 75^\circ, h/b=0.001)$$

模態數	式(4.9a-4.9c)中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						McGee 等人 [1992a]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	8.251	7.835	7.677	7.272	6.721	6.651	6.437
	5	7.792	6.689	6.484	6.436	6.435	6.435	
	10	6.882	6.457	6.435	6.434	6.434	6.433	
	15	6.450	6.435	6.434	6.433	6.433	6.432	
2	0	32.56	31.13	30.37	29.47	28.84	27.92	27.75
	5	30.87	29.44	28.27	27.74	27.74	27.73	
	10	29.95	28.01	27.74	27.73	27.73	27.72	
	15	27.85	27.73	27.73	27.73	27.72	27.72	
3	0	76.20	72.32	71.22	69.86	68.28	67.69	66.85
	5	73.10	68.11	66.90	66.81	66.81	66.80	
	10	68.01	66.87	66.81	66.80	66.79	66.79	
	15	66.86	66.81	66.80	66.79	66.79	66.78	
4	0	139.2	131.6	128.5	123.2	120.4	118.3	117.9
	5	133.0	118.5	117.9	117.9	117.8	117.8	
	10	120.2	117.9	117.8	117.8	117.8	117.8	
	15	117.9	117.8	117.8	117.7	117.7	117.7	
5	0	209.8	179.3	165.5	154.1	151.0	146.4	144.3
	5	185.7	148.5	144.7	144.3	144.3	144.2	
	10	154.4	144.5	144.3	144.2	144.2	144.1	
	15	144.4	144.3	144.3	144.2	144.1	144.1	

表 4.4 三角形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析

$(\bar{a}/b=0.5, \beta = 60^\circ, h/b=0.001)$

模態數	式(4.9a-4.9c)中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						McGee 等人 [1992a]	Karunasena 等人 [1996]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)		
1	0	8.663	7.183	6.599	6.163	5.947	5.883	5.846	6.112
	5	7.846	6.017	5.856	5.842	5.842	5.842		
	10	6.513	5.845	5.842	5.842	5.842	5.841		
	15	5.843	5.842	5.842	5.841	5.841	5.841		
2	0	30.96	25.33	23.65	23.15	23.00	22.97	22.95	23.26
	5	26.45	23.34	23.10	22.94	22.94	22.94		
	10	23.15	23.08	22.94	22.94	22.93	22.93		
	15	22.96	22.94	22.93	22.93	22.93	22.92		
3	0	58.37	45.65	42.70	40.49	40.14	40.05	39.56	42.23
	5	46.62	43.15	39.73	39.52	39.52	39.51		
	10	42.81	39.62	39.52	39.52	39.51	39.51		
	15	39.54	39.51	39.51	39.50	39.50	39.50		
4	0	108.0	81.40	67.16	64.67	63.29	63.05	63.16	63.92
	5	85.62	70.82	63.14	62.99	62.99	62.99		
	10	72.45	64.14	62.99	62.99	62.99	62.98		
	15	63.00	62.99	62.98	62.97	62.96	62.96		
5	0	120.4	97.40	74.26	70.23	67.43	66.37	66.64	73.89
	5	105.2	80.64	69.13	66.36	66.36	66.36		
	10	85.31	70.16	66.36	66.36	66.36	66.34		
	15	67.42	66.36	66.36	66.34	66.34	66.34		

表 4.5 三角形厚板頻率係數 Ω 之收斂性分析

$$(\bar{a}/b=1, \beta = 60^\circ, h/b=0.2)$$

模態數	式(4.9a-4.9c)中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						Karunasena 等人 [1996]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	6.314	5.747	5.624	5.500	5.483	5.424	5.517
	5	5.622	5.534	5.458	5.410	5.410	5.409	
	10	5.509	5.449	5.409	5.409	5.409	5.408	
	15	5.432	5.409	5.409	5.408	5.408	5.408	
2	0	25.16	21.26	20.49	20.14	19.95	19.94	20.32
	5	20.98	20.42	20.00	19.93	19.93	19.92	
	10	20.29	20.20	19.93	19.93	19.92	19.92	
	15	19.99	19.93	19.92	19.92	19.92	19.91	
3	0	40.79	29.38	25.27	24.49	23.33	23.22	23.65
	5	27.39	24.64	23.98	23.20	23.19	23.19	
	10	24.56	23.41	23.19	23.19	23.19	23.19	
	15	23.28	23.19	23.19	23.19	23.18	23.18	
4	0	87.98	66.92	46.68	40.92	34.89	34.80	35.43
	5	69.74	44.60	38.92	34.75	34.75	34.75	
	10	41.03	38.01	34.75	34.75	34.75	34.74	
	15	35.66	34.75	34.74	34.74	34.74	34.73	
5	0	101.7	76.13	47.29	43.74	42.16	41.74	41.90
	5	80.46	46.95	42.45	41.27	41.27	41.27	
	10	47.37	41.75	41.27	41.27	41.26	41.26	
	15	41.66	41.27	41.26	41.26	41.25	41.25	

表 4.6 平行四邊形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析

($\bar{a}/b=0.5$, $\beta = 75^\circ$, $h/b=0.001$)

模態數	式(4.9a-4.9c) 中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						McGee 等人 [1992a]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)	
1	0	7.477	6.915	6.785	6.435	6.295	6.184	6.054
	5	6.994	6.398	6.137	5.995	5.994	5.994	
	10	6.256	6.074	5.994	5.994	5.993	5.993	
	15	6.023	5.994	5.994	5.993	5.993	5.992	
2	0	29.83	27.31	25.20	24.77	24.68	24.81	25.00
	5	28.08	24.88	24.56	24.52	24.51	24.51	
	10	24.66	24.52	24.52	24.51	24.50	24.50	
	15	24.52	24.51	24.51	24.50	24.50	24.49	
3	0	50.04	49.87	48.68	47.85	47.34	47.25	47.21
	5	49.94	47.15	46.95	46.94	46.93	46.93	
	10	47.26	46.94	46.94	46.93	46.93	46.92	
	15	46.94	46.93	46.93	46.92	46.92	46.92	
4	0	75.35	62.53	59.49	58.37	57.52	57.42	57.86
	5	64.74	59.11	57.86	57.29	57.29	57.28	
	10	58.27	57.67	57.29	57.28	57.28	57.28	
	15	57.57	57.28	57.28	57.28	57.27	57.27	
5	0	102.0	84.95	71.36	69.48	68.92	68.59	69.05
	5	85.25	78.42	69.21	68.59	68.58	68.57	
	10	77.89	69.01	68.58	68.57	68.57	68.56	
	15	68.75	68.58	68.57	68.57	68.56	68.55	

表 4.7 正方形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析
 ($\beta = 0^\circ$, $h/b=0.001$)

模態數	式(4.9a-4.9c) 中之 K 及 N (角函數數目)	式(4.8a-4.8c)中之 (I, J)						Huang [1991]	Leissa [1973]
		(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(8,8)	(9,9)		
1	0	3.494	3.478	3.475	3.473	3.472	3.471	3.472	3.492
	2	3.479	3.473	3.472	3.471	3.471	3.471		
	5	3.472	3.472	3.471	3.471	3.470	3.470		
	10	3.471	3.471	3.471	3.470	3.470	3.470		
2	0	8.547	8.543	8.512	8.511	8.511	8.510	8.509	8.525
	2	8.544	8.512	8.511	8.510	8.509	8.509		
	5	8.511	8.511	8.510	8.509	8.509	8.508		
	10	8.510	8.509	8.509	8.508	8.508	8.508		
3	0	21.56	21.43	21.31	21.30	21.29	21.28	21.29	21.43
	2	21.51	21.32	21.29	21.28	21.28	21.28		
	5	21.30	21.29	21.28	21.28	21.28	21.28		
	10	21.29	21.28	21.28	21.28	21.27	21.27		
4	0	31.41	27.52	27.46	27.20	27.19	27.18	27.20	27.33
	2	27.82	27.48	27.19	27.19	27.18	27.18		
	5	27.26	27.19	27.18	27.18	27.18	27.17		
	10	27.19	27.18	27.18	27.17	27.17	27.17		
5	0	31.90	31.33	30.98	30.98	30.97	30.95	30.97	31.11
	2	31.55	30.97	30.97	30.96	30.95	30.95		
	5	30.97	30.96	30.96	30.95	30.94	30.94		
	10	30.96	30.95	30.95	30.94	30.94	30.94		

表 4.8 三角形薄板頻率係數 Ω 之收斂性分析 ($h/b=0.2$)

\bar{a}/b	β (degrees)	模態數			
		1	2	3	4
0.5	0	4.535 [4.540] <4.542>	9.783 [9.801] <9.873>	14.93 [14.98] <15.03>	16.94 [16.99] </>
	15	4.273 [4.283] <4.284>	9.452 [9.470] <9.531>	14.40 [14.44] <14.43>	16.24 [16.29] </>
	30	4.233 [4.239] <4.239>	9.762 [9.783] <9.831>	14.04 [14.06] <13.95>	16.42 [16.49] <16.62>
	45	4.335 [4.338] <4.334>	10.58 [10.62] <10.59>	13.41 [13.48] <13.33>	17.46 [17.48] </>
	60	4.553 [4.565] <4.534>	9.626 [9.699] <9.633>	13.76 [13.82] <13.83>	15.92 [16.01] </>
	75	4.915 [5.031] <4.925>	5.454 [5.567] <6.264>	9.471 [9.672] <15.37>	15.53 [15.64] </>
1.0	0	5.740 [5.744] <5.730>	18.74 [18.75] <18.76>	23.75 [23.77] <23.79>	38.82 [38.85] </>
	15	5.366 [5.369] <5.356>	17.47 [17.48] <17.47>	23.54 [23.55] <23.57>	35.79 [35.81] </>
	30	5.210 [5.261] <5.246>	17.32 [17.49] <17.46>	23.65 [23.88] <23.87>	34.85 [35.19] </>
	45	5.225 [5.330] <5.306>	18.24 [18.60] <18.57>	24.09 [24.57] <24.49>	35.56 [36.26] </>
	60	5.409 [5.517] <5.479>	19.92 [20.32] <20.21>	23.19 [23.65] <23.55>	34.75 [35.43] </>
	75	5.728 [5.912] <5.806>	13.52 [14.76] <15.77>	21.42 [22.37] <21.85>	21.59 [22.45] </>

註：[]內數值來自 Karunasena 等人 [1996]；

< >內數值來自 McGee and Butalia [1992c]；

/ 表示沒有找到適當的數值。

表 4.8(續上頁)

\bar{a}/b	$\beta?$ (degrees)	模態數			
		1	2	3	4
2.0	0	6.435 [6.475] <6.447>	26.28 [26.45] <26.29>	39.33 [39.48] <39.53>	60.22 [60.40] </>
	15	6.066 [6.080] <6.074>	24.52 [24.67] <24.53>	39.50 [39.68] <39.69>	56.69 [56.89] </>
	30	5.932 [5.961] <5.939>	23.89 [24.32] <23.90>	41.34 [45.44] <41.51>	55.84 [56.61] </>
	45	5.948 [5.961] <5.959>	24.18 [24.32] <24.15>	45.34 [45.44] <45.40>	56.57 [56.61] </>
	60	6.077 [6.119] <6.081>	24.99 [25.15] <24.95>	49.77 [49.94] <49.99>	57.60 [57.64] </>
	75	6.257 [6.396] <6.327>	26.38 [26.57] <26.12>	35.83 [36.24] <38.28>	50.51 [50.53] </>

註：[]內數值來自 Karunasena 等人 [1996]；

< >內數值來自 McGee and Butalia [1992c]；

/ 表示沒有找到適當的數值。

表 4.9 梯形厚板頻率係數 Ω 之收斂性分析 ($h/b=0.2$)

\bar{a}/b	c/b	$\beta?$ (degrees)	模態數			
			1	2	3	4
0.5	0.25	15	3.508 <3.521>	7.602 <7.674>	12.71 <12.86>	14.43 </>
		30	3.551 <3.565>	7.882 <7.947>	12.97 <13.06>	14.52 <14.65>
		45	3.724 <3.747>	8.823 <8.897>	13.25 <13.27>	15.77 </>
		60	4.017 <4.026>	10.03 <10.05>	13.26 <13.29>	18.40 </>
		75	4.448 <4.455>	7.244 <7.633>	12.33 <14.63>	15.05 </>
	0.5	15	3.314 <3.330>	6.087 <6.147>	11.36 <11.40>	12.00 <12.00>
		30	3.461 <3.472>	6.396 <6.451>	11.82 <11.90>	12.34 <12.47>
		45	3.736 <3.759>	7.407 <7.410>	12.41 <12.53>	13.49 <13.52>
		60	4.126 <4.135>	9.701 <9.764>	12.92 <12.88>	15.71 </>
		75	4.674 <4.653>	7.780 <8.139>	12.85 <13.93>	13.54 </>
1.0	0.25	15	4.168 <4.170>	14.26 <14.32>	19.42 <19.52>	30.91 </>
		30	4.152 <4.153>	14.43 <14.49>	20.11 <20.22>	30.43 </>
		45	4.275 <4.278>	15.73 <15.80>	21.17 <21.27>	32.31 </>
		60	4.475 <4.494>	17.99 <18.08>	22.16 <22.18>	36.72 </>
		75	4.803 <4.817>	17.90 <18.19>	20.43 <20.54>	34.60 </>
	0.5	15	3.772 <3.774>	11.40 <11.44>	18.42 <18.53>	27.55 </>
		30	3.858 <3.864>	11.76 <11.81>	19.39 <19.52>	27.16 </>
		45	4.078 <3.864>	13.17 <11.81>	20.68 <19.52>	29.11 </>
		60	4.243 <4.444>	16.06 <16.25>	22.31 <22.50>	34.60 </>
		75	4.718 <4.887>	19.21 <19.61>	21.59 <21.68>	35.56 </>

註：< >內數值來自 McGee and Butalia [1992c]；

/ 表示沒有找到適當的數值。

表 4.10 平行四邊形板頻率係數 Ω 之收斂性分析($\bar{a}/b=1$)

h/b	$\beta?$ (degrees)	模態數			
		1	2	3	4
0.1	0	3.427 [3.431] <3.431>	8.052 [8.058] <8.064>	20.07 [20.08] <20.10>	25.48 [25.49] <25.52>
	15	3.523 [3.536] <3.537>	8.203 [8.228] <8.235>	20.73 [20.85] <20.88>	24.62 [24.65] <24.68>
	30	3.856 [3.858] <3.863>	8.862 [8.870] <8.878>	23.23 [23.24] <23.29>	24.21 [24.27] <24.30>
	45	4.385 [4.387] <4.401>	10.52 [10.54] <10.55>	24.72 [24.77] <24.82>	28.24 [28.26] <28.32>
	60	4.956 [5.049] <5.008>	14.90 [14.90] <14.96>	26.39 [27.08] <27.11>	38.25 [38.33] <38.41>
0.2	0	3.335 [3.338] <3.342>	7.333 [7.340] <7.367>	17.53 [17.55] <17.69>	22.42 [22.44] <22.57>
	15	3.430 [3.434] <3.439>	7.482 [7.489] <7.516>	18.04 [18.06] <18.18>	21.58 [21.60] <21.74>
	30	3.715 [3.719] <3.729>	8.047 [8.055] <8.086>	19.50 [19.51] <19.68>	21.32 [21.35] <21.48>
	45	4.163 [4.171] <4.194>	9.505 [9.524] <9.572>	20.74 [20.78] <21.02>	23.51 [23.56] </>
	60	4.709 [4.719] <4.771>	13.17 [13.20] <13.32>	22.05 [22.10] <22.50>	28.97 [29.03] </>

註：[]內數值來自 Liew 等人 [1993]；

< >內數值來自 McGee and Butalia [1994]；

/ 表示沒有找到適當的數值。

表 5.1 355 度扇形板 (Ω_1) 之收斂性分析結果($h/a=0.1$)

網格名稱	sp1			sp2			sp3								sp4	Ritz**
節點數	1100			1810			1876								2150	
元素數目	397			635			667								779	
模態數	角函數			角函數			角函數								角函數	
					(a)				(b)							
	(0,0,0)	(2,2,1)*	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	
1	2.768	2.734	2.730	2.765	2.729	2.725	2.740	2.728	2.723	2.721	2.740	2.729	2.723	2.722	2.729	2.729
2	4.254	4.239	4.233	4.250	4.235	4.229	4.235	4.229	4.228	4.226	4.235	4.230	4.228	4.226	4.229	4.228
3	7.574	7.560	7.553	7.570	7.555	7.550	7.555	7.550	7.549	7.547	7.555	7.550	7.549	7.547	7.549	7.548
4	7.599	7.588	7.588	7.595	7.584	7.583	7.586	7.583	7.581	7.581	7.586	7.583	7.582	7.581	7.582	7.577
5	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.24	11.23

註：(2,2,1)* 代表 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 2 項， \hat{w}_c 的對稱及反對稱項各取 1 項；以此類推。

**結果出自第三章

表 5.2 $l_3/l_1 = 0.5$ 矩形裂縫厚板 ($\bar{\Omega}$) 收斂性分析結果

網格名稱	rec1			rec2						rec3		
節點數	448			1664						2560		
元素數目	128			512						800		
模態數	角函數			角函數						角函數		
				(a)			(b)					
	(0,0,0)	(2,2,1)*	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)	(0,0,0)	(2,2,1)	(5,5,2)
1	60.38	60.21	60.09	60.17	60.03	60.02	60.17	60.07	60.03	60.09	60.02	60.02
2	72.21	72.11	72.04	72.05	71.96	71.96	72.05	71.99	71.96	72.00	71.96	71.96
3	79.66	79.66	79.66	79.59	79.48	79.47	79.59	79.59	79.59	79.58	79.43	79.43
4	80.99	80.11	79.94	80.16	79.59	79.59	80.16	79.72	79.65	79.79	79.58	79.58
5	101.3	101.1	101.0	101.0	100.9	100.9	101.0	101.0	100.9	101.0	100.9	100.9

註：(2,2,1)* 代表 $\hat{\psi}_{xc}$ 、 $\hat{\psi}_{yc}$ 的對稱及反對稱項各取 2 項， \hat{w}_c 的對稱及反對稱項各取 1 項；以此類推。

表 5.3 不同位置之矩形裂縫板之無因次振動頻率 ($\bar{\Omega}$) ($l_1/h=10$)

c_i/l_1	b_i/l_2	l_3/l_1	1/8	2/8	3/8	6/8
		模態數				
0	1/2	1	65.94	59.24	55.47	51.62
		2	71.53	71.43	61.42	52.52
		3	82.22	74.32	71.36	64.24
		4	105.0	82.05	80.93	72.90
		5	116.0	104.5	102.1	76.10
1/4	1/2	1	68.95	65.86	62.34	51.62
		2	72.48	72.42	72.17	52.52
		3	82.90	80.81	78.95	64.24
		4	103.9	102.9	97.09	72.90
		5	139.8	130.3	102.2	76.10
1/2	1/2	1	69.12	66.11	62.43	54.92
		2	72.84	72.72	72.24	62.25
		3	81.64	79.51	78.67	65.80
		4	105.4	104.6	97.10	77.60
		5	138.7	130.3	102.4	95.02
1/2	1/4	1	69.77	66.36	57.62	36.16
		2	72.80	72.64	72.15	60.56
		3	82.36	78.89	76.59	74.29
		4	105.2	104.4	101.7	88.18
		5	138.9	133.0	127.0	123.3

表 5.4 不同位置之矩形裂縫板之無因次振動頻率 ($\bar{\Omega}$) ($l_1/h=20$)

c_i/l_1	b_i/l_2	l_3/l_1	1/8	2/8	3/8	6/8
		模態數				
0	1/2	1	19.18	16.83	15.52	14.20
		2	21.15	21.11	17.64	14.51
		3	24.66	22.29	21.09	18.48
		4	31.83	24.60	24.19	21.39
		5	37.95	31.68	30.83	22.55
1/4	1/2	1	20.31	18.73	17.99	14.20
		2	21.50	21.48	21.39	14.51
		3	24.96	23.61	23.58	18.48
		4	31.56	31.35	30.96	21.39
		5	43.06	41.32	31.49	22.55
1/2	1/2	1	20.32	19.27	17.96	15.36
		2	21.62	21.57	21.40	17.94
		3	24.50	23.76	23.47	19.12
		4	32.04	31.75	30.97	23.08
		5	42.69	42.22	31.01	29.26
1/2	1/4	1	20.63	19.91	17.57	10.26
		2	21.61	21.57	21.47	18.05
		3	24.90	23.85	22.86	22.18
		4	32.00	31.78	31.09	26.19
		5	42.88	41.18	39.14	37.50

表 5.5 不同旋轉角之裂縫矩形板無因次自然振動頻率 ($\bar{\Omega}$)

$$(\ell_3/\ell_1=3/8, c_1/\ell_1=1/2, c_1/\ell_2=1/2)$$

(a)					
ℓ_1/h	θ 模態數	0 度	30 度	60 度	90 度
10	1	62.43	64.96	68.72	70.03
	2	72.24	72.02	71.44	71.29
	3	78.67	77.92	78.23	79.50
	4	97.10	89.61	85.46	84.52
	5	102.4	115.8	126.8	125.5
(b)					
ℓ_1/h	θ 模態數	0 度	30 度	60 度	90 度
20	1	17.96	18.95	20.25	20.65
	2	21.40	21.45	21.21	21.12
	3	23.47	23.27	23.54	24.04
	4	30.97	27.94	26.43	26.01
	5	31.01	35.81	38.92	38.69

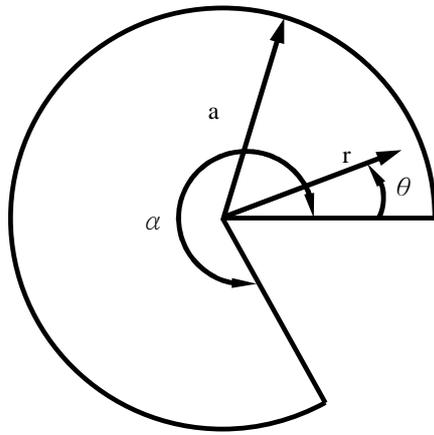


圖 1.1 扇形板示意圖

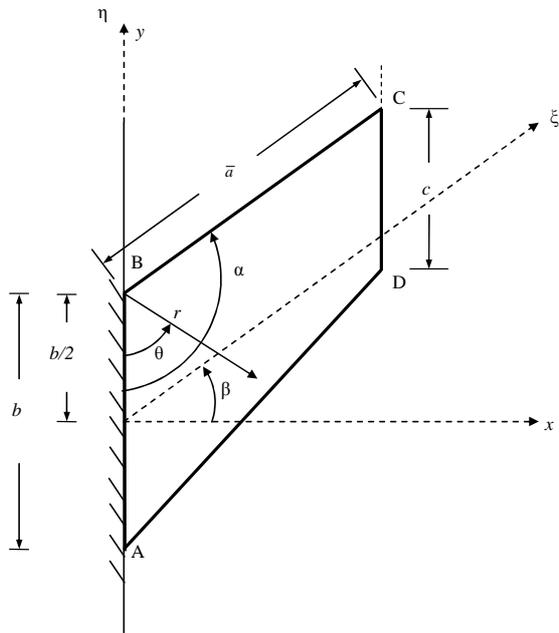
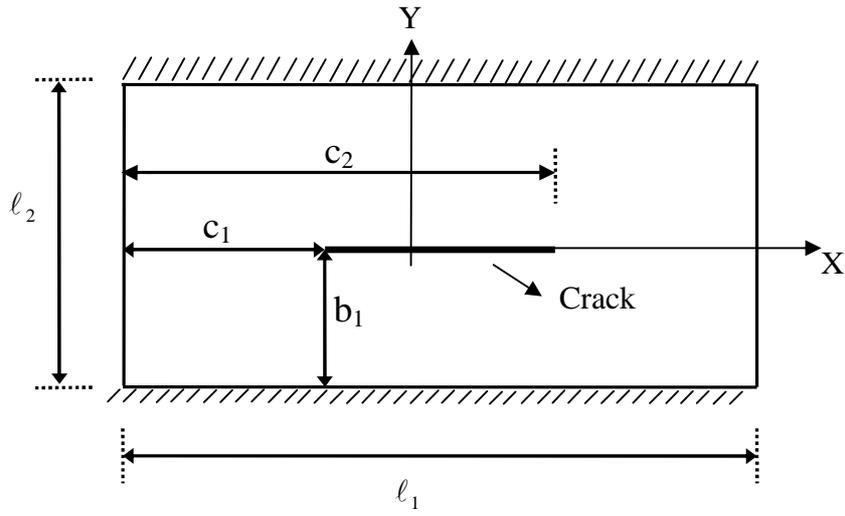


圖 1.2 斜形板示意圖(於 $\theta=0$ 處固定)



注： $l_3 = c_2 - c_1$

圖 1.3 矩形板之裂縫示意圖

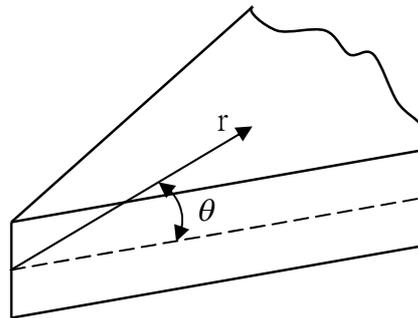


圖 2.1 楔形板示意圖

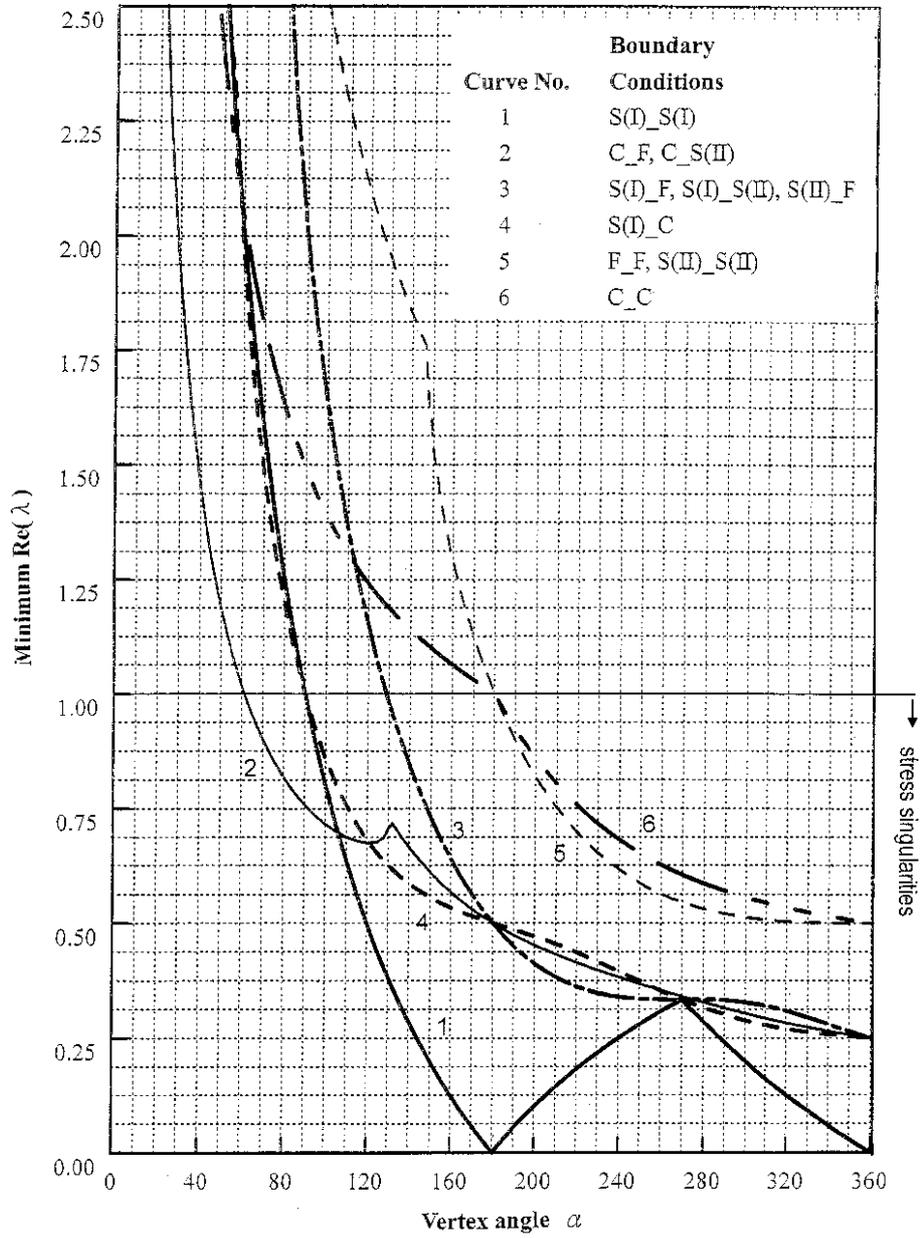


圖 2.2 最小 $\text{Re}(\lambda)$ 隨 α 角度之變化

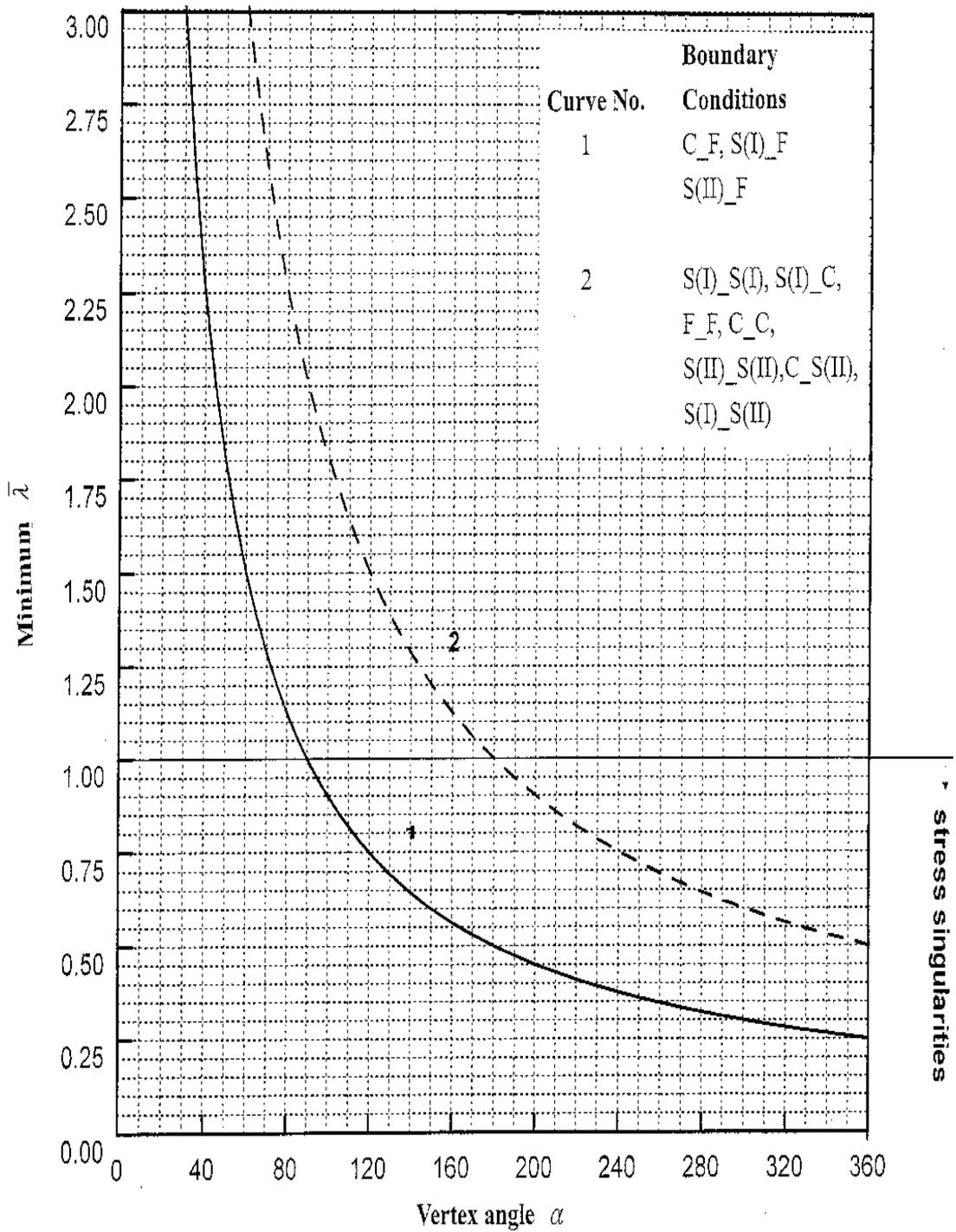


圖 2.3 最小 $\text{Re}(\bar{\lambda})$ 隨 α 角度之變化

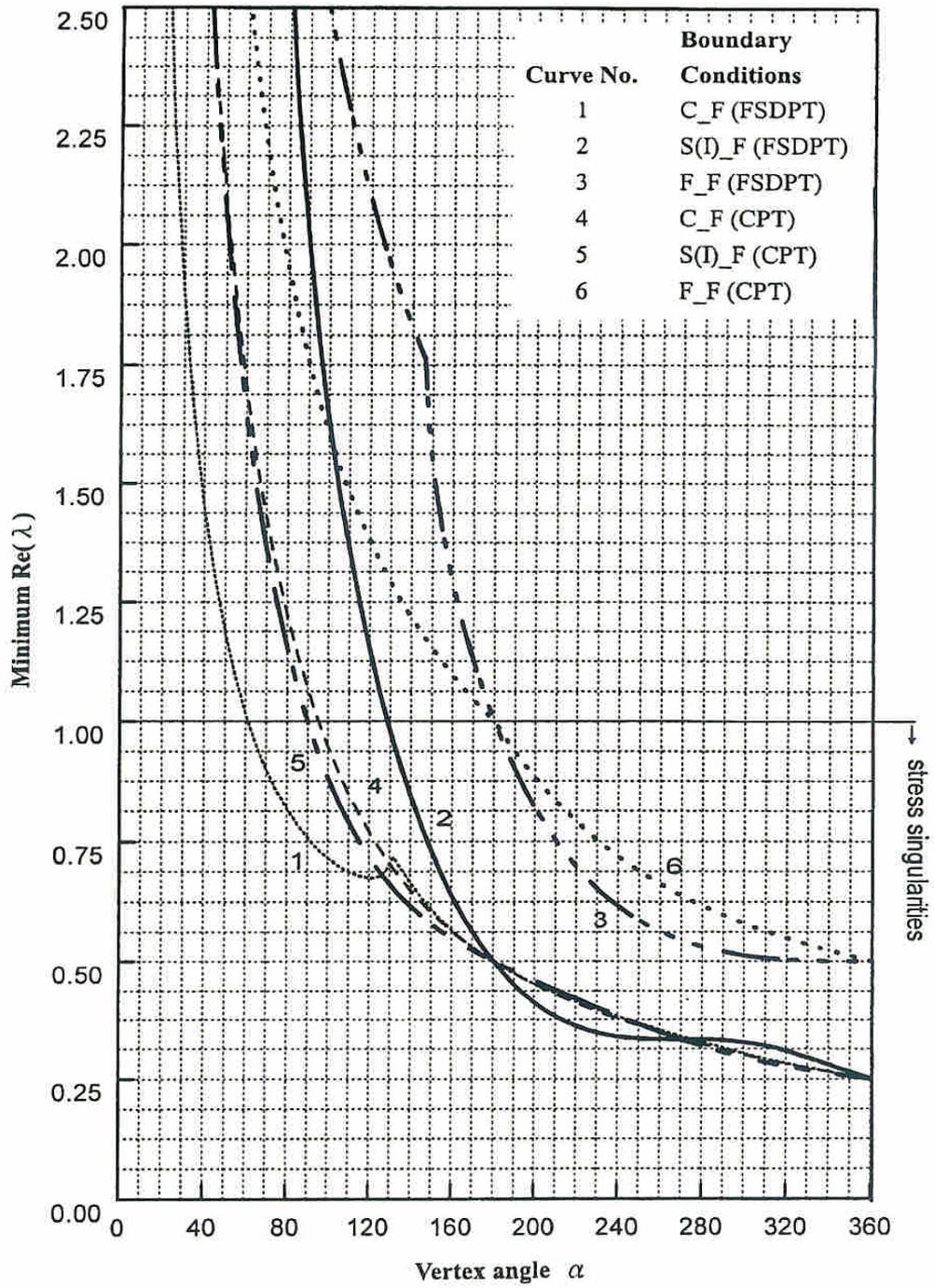


圖 2.4 一階剪力變形板理論與古典薄板理論
之最小正的 $\text{Re}(\bar{\lambda})$ 之比較

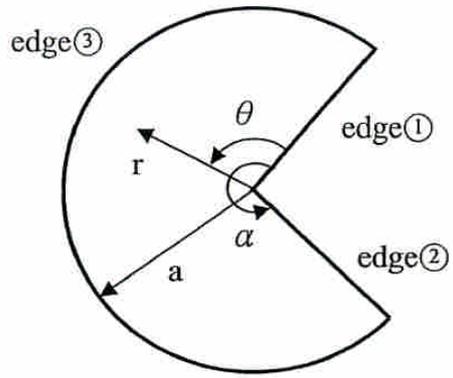


圖 3.1 扇形板之幾何圖形與極座標系統

圖 3.2 各種角度 F-F-F 扇形板之振態節線模式($h/a = 0.1$)

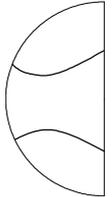
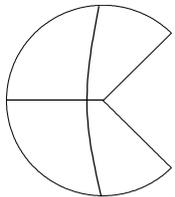
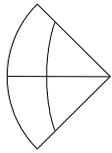
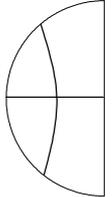
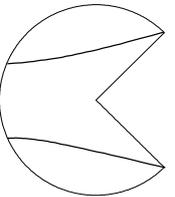
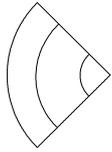
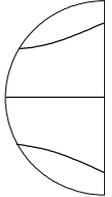
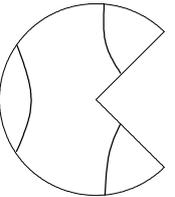
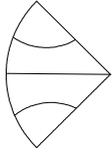
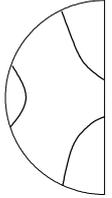
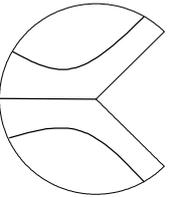
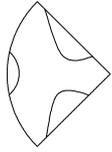
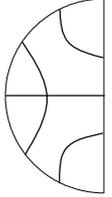
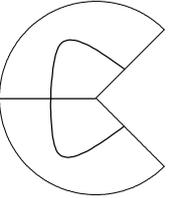
模態數	扇形角 α		
	90	180	270
1			
	(15.37)	(6.813)	(4.454)
2			
	(22.00)	(9.146)	(5.859)
3			
	(28.66)	(17.30)	(9.063)
4			
	(35.25)	(17.37)	(12.29)
5			
	(51.66)	(27.35)	(16.40)

圖 3.2 (續上頁)

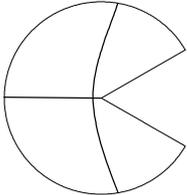
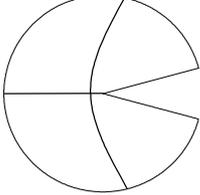
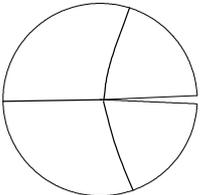
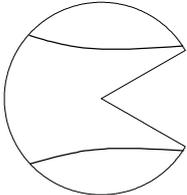
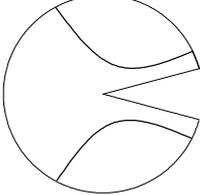
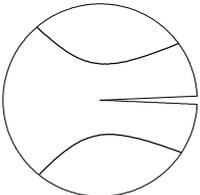
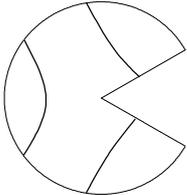
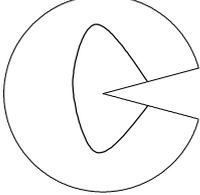
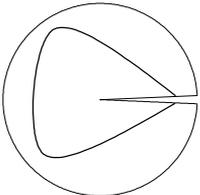
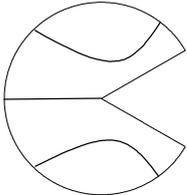
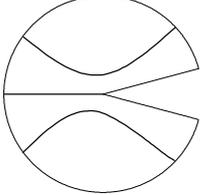
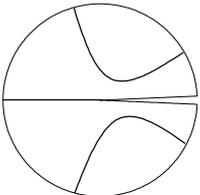
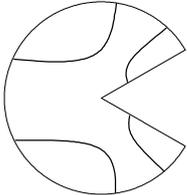
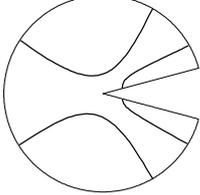
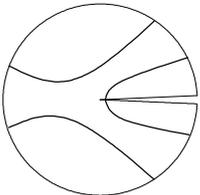
模態數	扇形角 α		
	300	330	355
1			
	(3.675)	(3.101)	(2.730)
2			
	(5.378)	(4.757)	(4.228)
3			
	(8.155)	(7.737)	(7.548)
4			
	(10.29)	(8.679)	(7.577)
5			
	(15.01)	(12.73)	(11.23)

圖 3.3 各種角度 C-F-F 扇形板之振態節線模式($h/a = 0.1$)

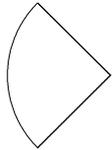
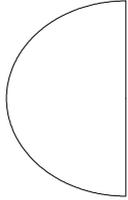
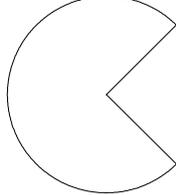
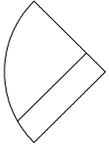
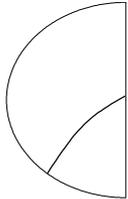
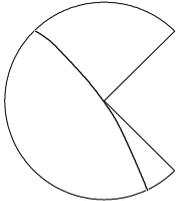
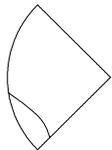
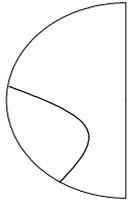
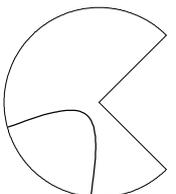
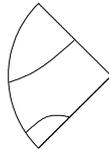
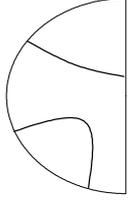
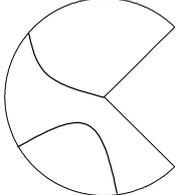
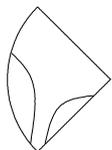
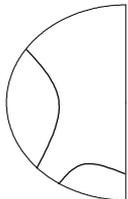
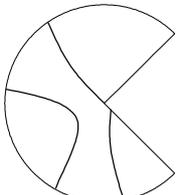
模態數	扇形角 α		
	90	180	270
1			
	(4.400)	(2.388)	(1.964)
2			
	(12.71)	(3.817)	(2.200)
3			
	(23.06)	(8.971)	(4.366)
4			
	(32.20)	(15.53)	(7.789)
5			
	(47.77)	(18.50)	(12.15)

圖 3.3 (續上頁)

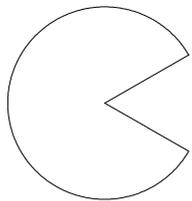
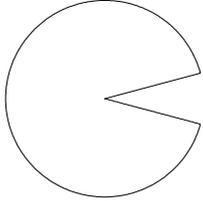
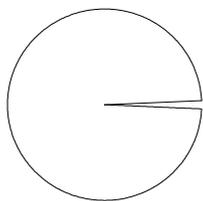
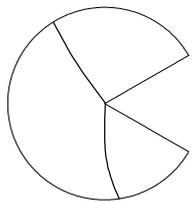
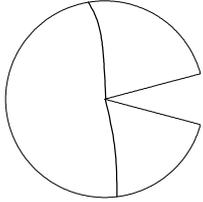
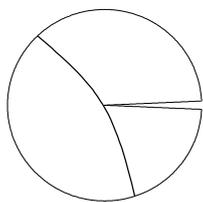
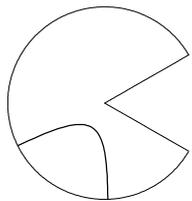
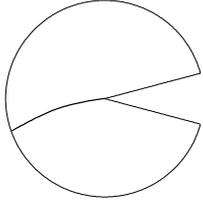
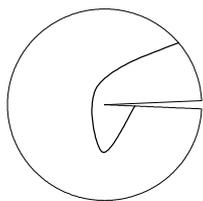
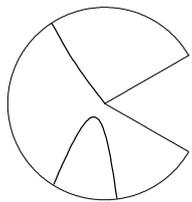
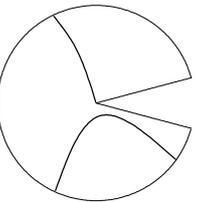
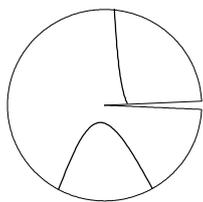
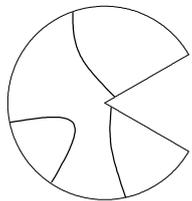
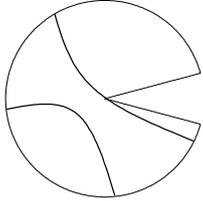
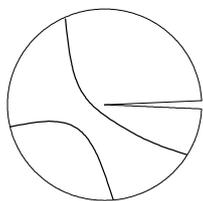
模態數	扇形角 α		
	300	330	355
1			
	(1.937)	(1.802)	(1.712)
2			
	(2.198)	(2.180)	(2.177)
3			
	(3.839)	(3.317)	(3.266)
4			
	(6.411)	(5.373)	(4.722)
5			
	(10.05)	(8.432)	(7.336)

圖 3.4 各種角度 C-C-F 扇形板之振態節線模式($h/a = 0.1$)

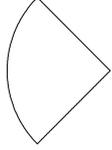
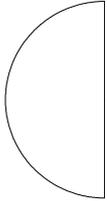
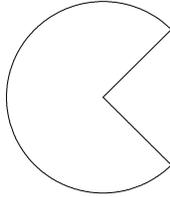
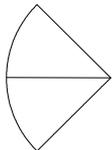
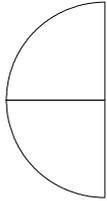
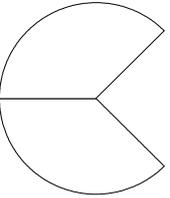
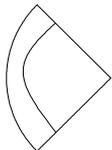
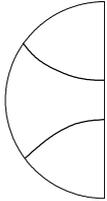
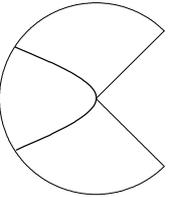
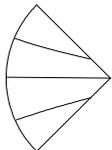
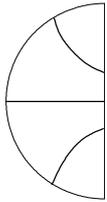
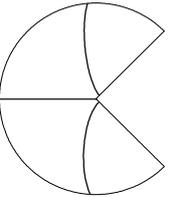
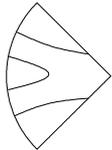
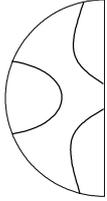
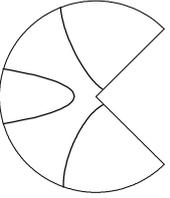
模態數	扇形角 α		
	90	180	270
1			
	(13.36)	(4.462)	(3.066)
2			
	(29.81)	(8.789)	(4.074)
3			
	(41.53)	(16.81)	(7.851)
4			
	(56.75)	(24.64)	(11.12)
5			
	(72.98)	(24.93)	(17.63)

圖 3.4 (續上頁)

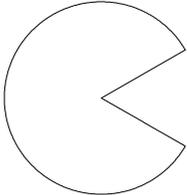
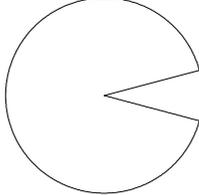
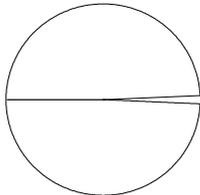
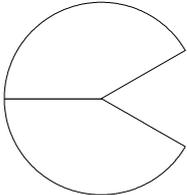
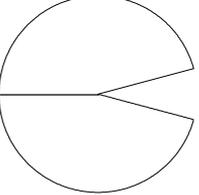
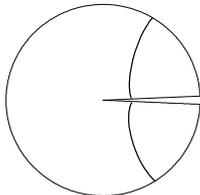
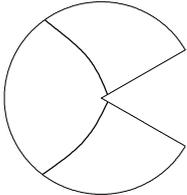
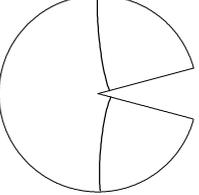
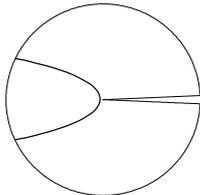
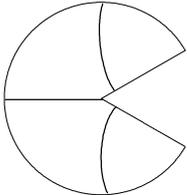
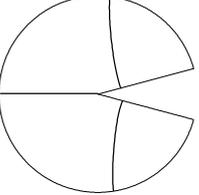
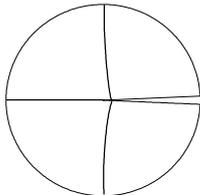
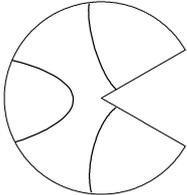
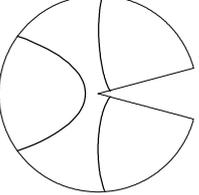
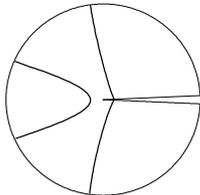
模態數	扇形角 α		
	300	330	355
1			
	(2.920)	(2.839)	(2.688)
2			
	(3.461)	(3.062)	(2.858)
3			
	(6.109)	(5.113)	(3.947)
4			
	(10.08)	(8.306)	(7.240)
5			
	(14.13)	(11.76)	(10.83)

圖 4.1 三角形板之節點線模態($c/b=0, h/b=0.1$)

?	b/\bar{a}	模態數				
		1	2	3	4	5
0?	2					
		(5.146)	(12.78)	(22.11)	(23.59)	(35.15)
	1.0					
		(6.014)	(21.73)	(29.19)	(49.11)	(64.96)
	0.5					
		(6.546)	(27.79)	(45.66)	(66.56)	(105.8)
45?	2					
		(5.001)	(14.93)	(22.56)	(27.56)	(35.84)
	1.0					
		(5.589)	(21.22)	(33.96)	(50.15)	(62.72)
	0.5					
		(6.104)	(25.57)	(54.62)	(68.05)	(103.3)

圖 4.1 (續上頁)

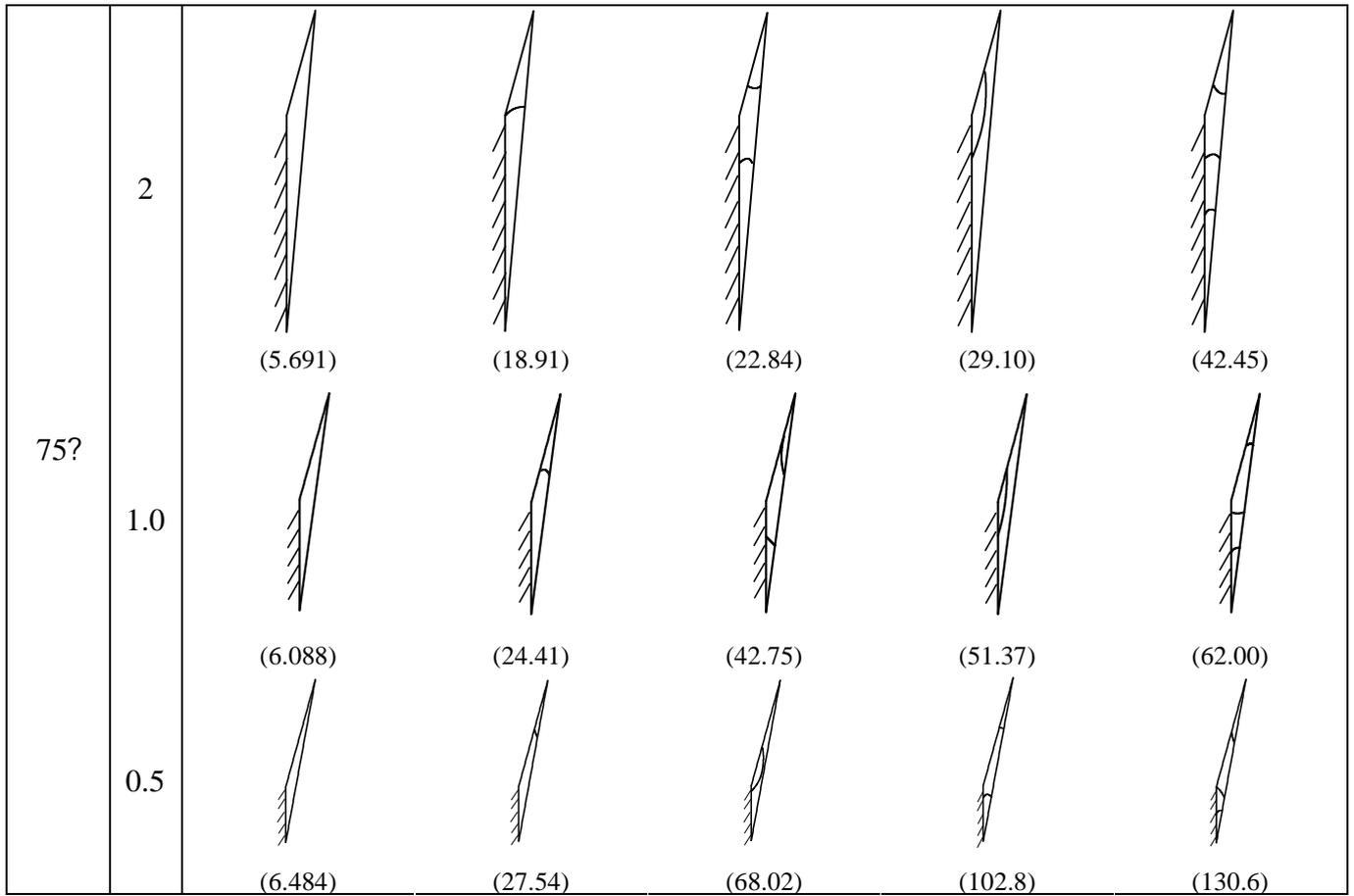


圖 4.2 梯形板之節點線模態 ($c/b=0.5, h/b=0.1$)

?	b/\bar{a}	模態數					
		1	2	3	4	5	
0?	2						
		(3.729)	(7.582)	(15.69)	(19.13)	(23.25)	
		1.0					
	(4.008)		(13.27)	(21.14)	(35.49)	(51.92)	
	0.5						
		(4.121)	(21.88)	(24.28)	(57.47)	(63.73)	
		45?	2				
	(4.270)			(9.286)	(18.20)	(21.23)	(27.12)
	1.0						
(4.299)			(15.11)	(26.35)	(35.22)	(55.21)	
0.5							
	(4.230)		(21.23)	(34.90)	(53.73)	(86.37)	

圖 4.2 (續上頁)

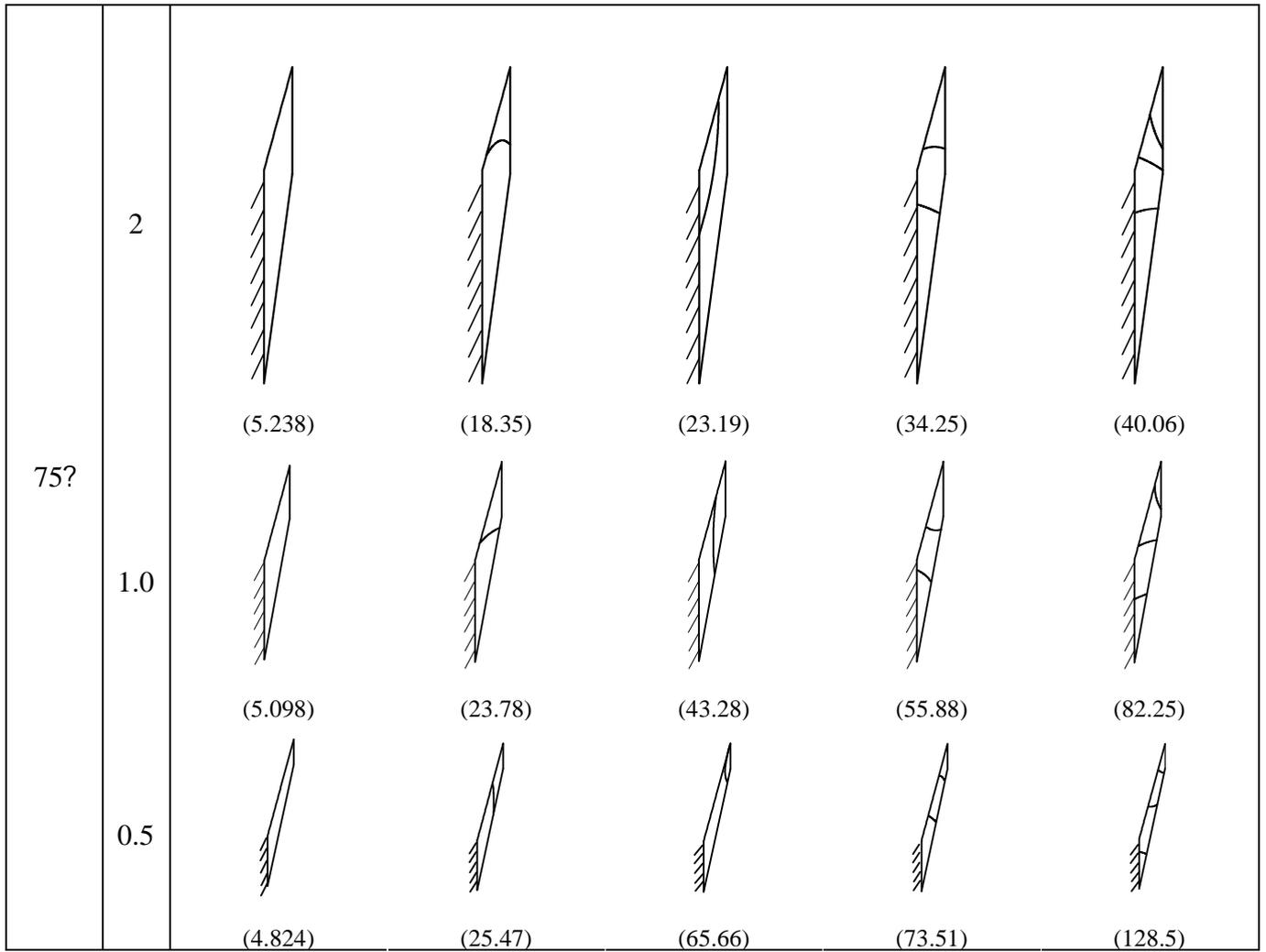


圖 4.3 平行四邊形板之節點線模態 ($c/b=1, h/b=0.1$)

?	b/\bar{a}	模態數					
		1	2	3	4	5	
0?	2						
		(3.324)	(4.716)	(8.945)	(16.16)	(17.79)	
		1.0					
	(3.427)		(8.051)	(20.06)	(25.48)	(28.22)	
	0.5						
		(3.420)	(14.18)	(21.08)	(45.79)	(58.01)	
		45?	2				
	(4.236)			(7.359)	(11.38)	(18.29)	(21.22)
	1.0						
(4.384)			(10.52)	(24.72)	(28.24)	(44.97)	
0.5							
	(4.009)		(17.14)	(28.49)	(47.35)	(78.85)	

圖 4.3 (續上頁)

75?	2						
		(5.693)	(21.19)	(25.12)	(36.22)	(39.67)	
		1.0					
			(5.295)	(22.95)	(44.78)	(64.09)	(85.48)
			0.5				
	(5.018)			(25.51)	(59.77)	(64.91)	(107.4)

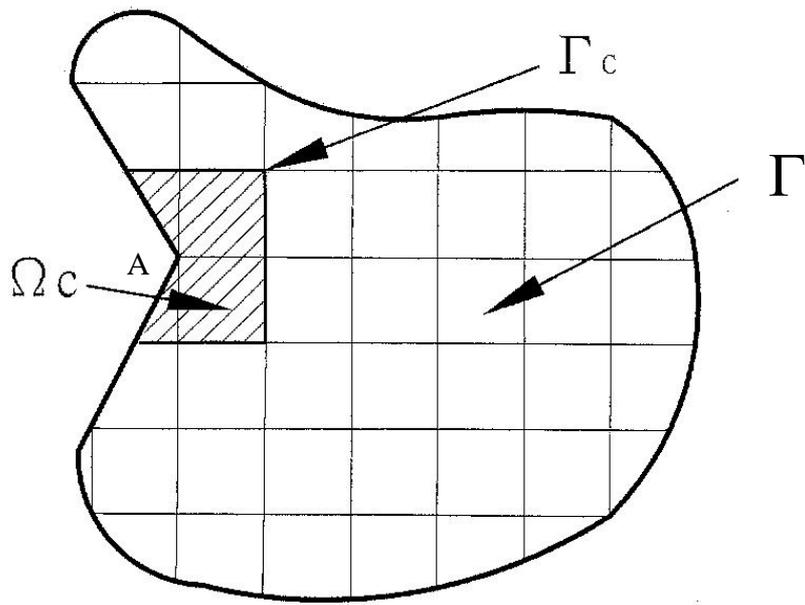


圖 5.1 具應力奇異點板示意圖

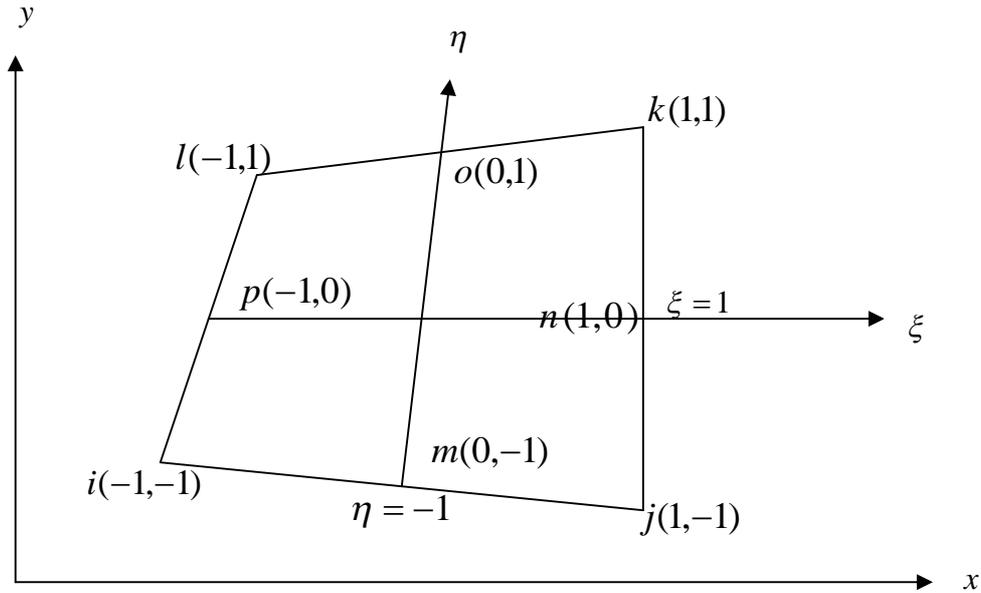


圖 5.2 四邊型元素示意圖

其中形狀函數(shape function)如下

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

$$N_l(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_n(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_o(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_p(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

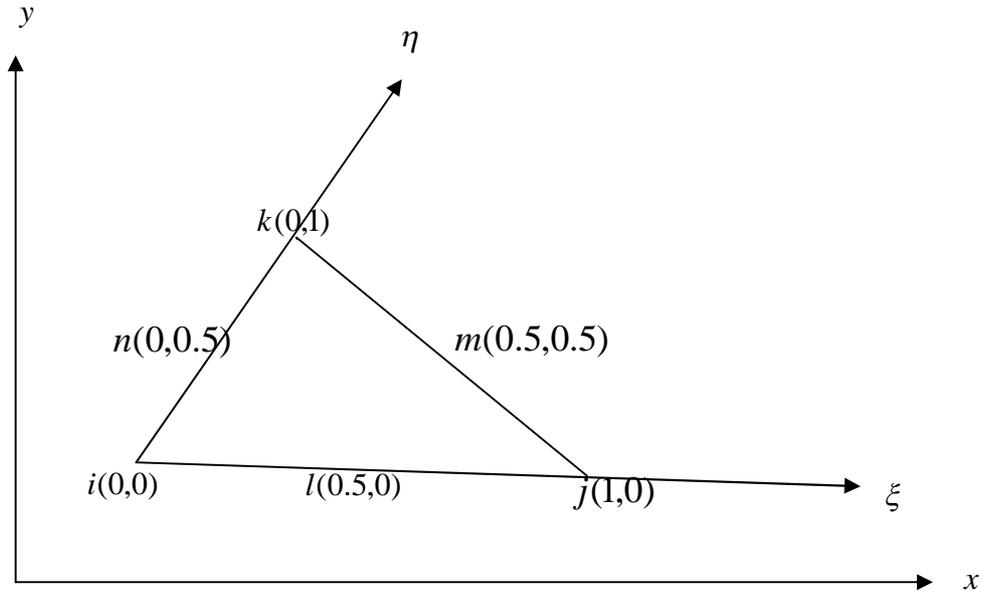


圖 5.3 三角形元素示意圖

其中形狀函數(shape function)如下

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

$$N_j(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_l(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_m(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$N_n(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

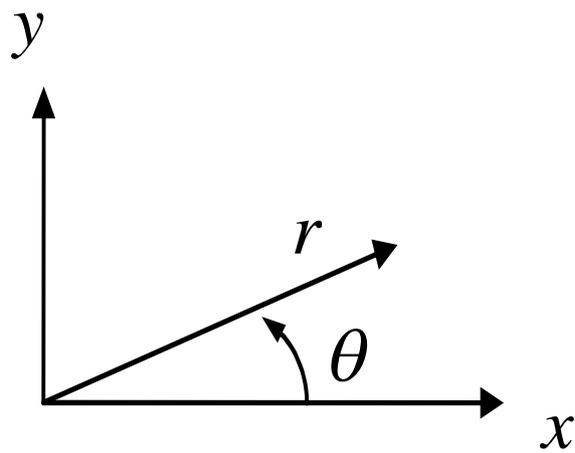


圖 5.4 極座標和卡氏座標的轉換關係

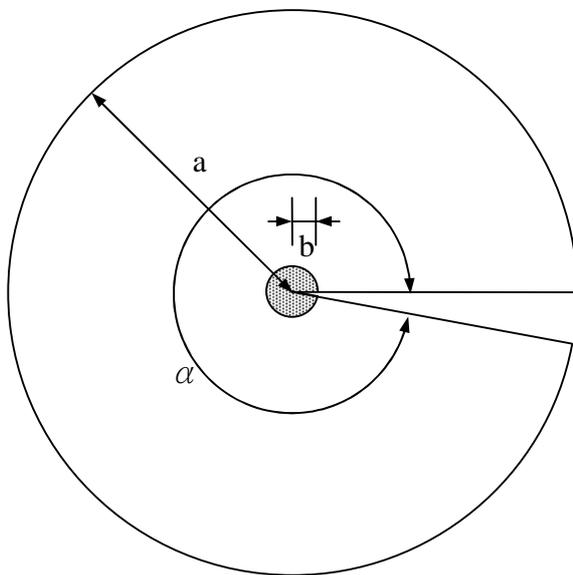


圖 5.5 355° 扇形板示意圖

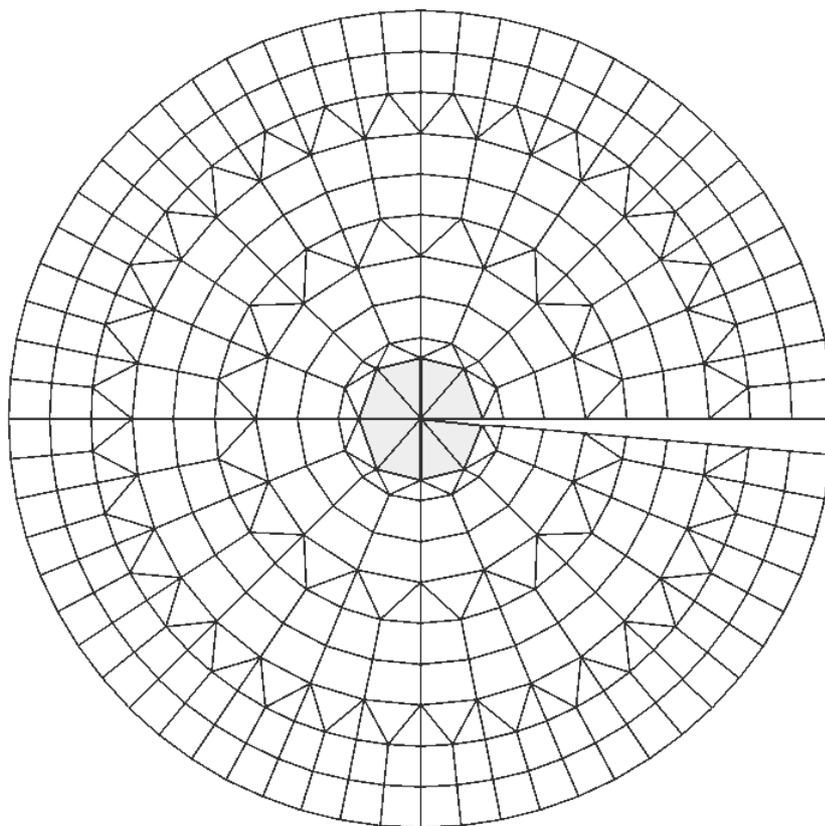


圖 5.6 sp1 網格切割

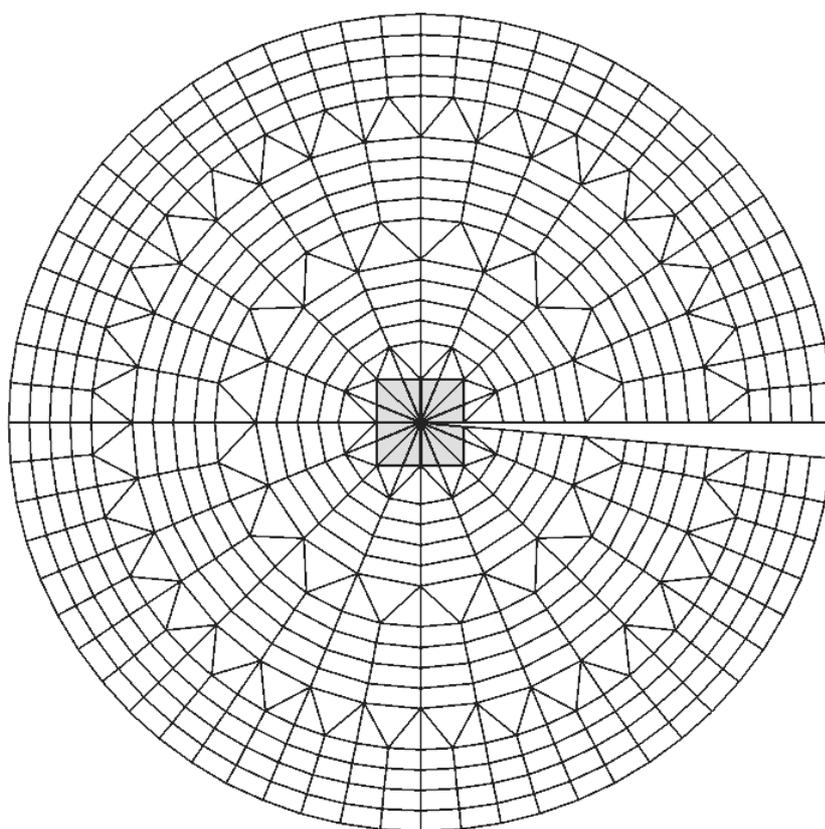


圖 5.7 sp2 網格切割圖

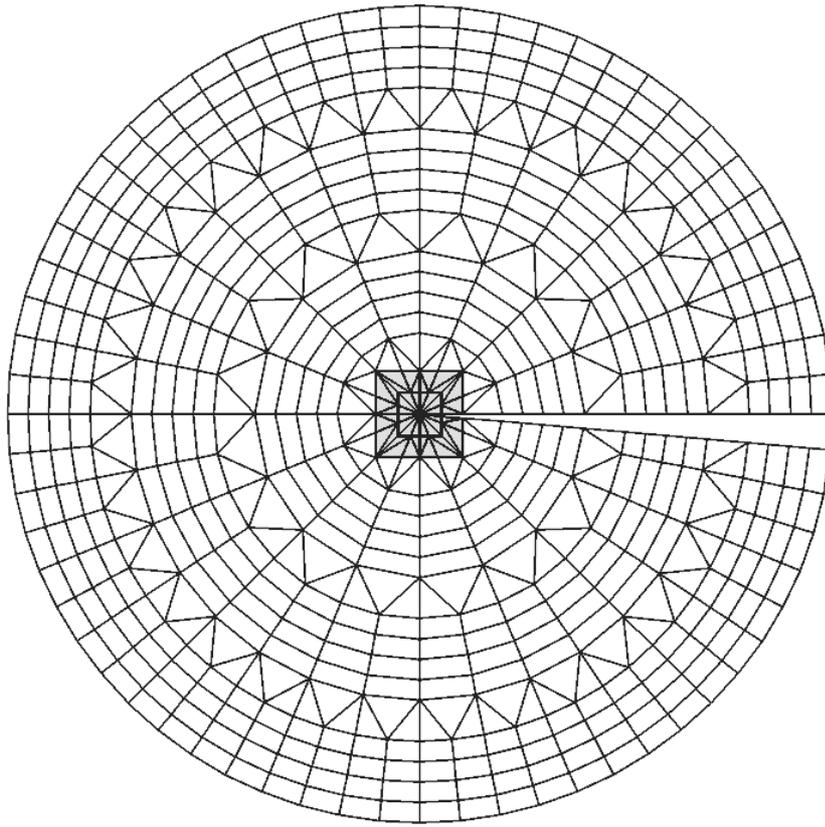


圖 5.8(a) sp3(a)網格切割

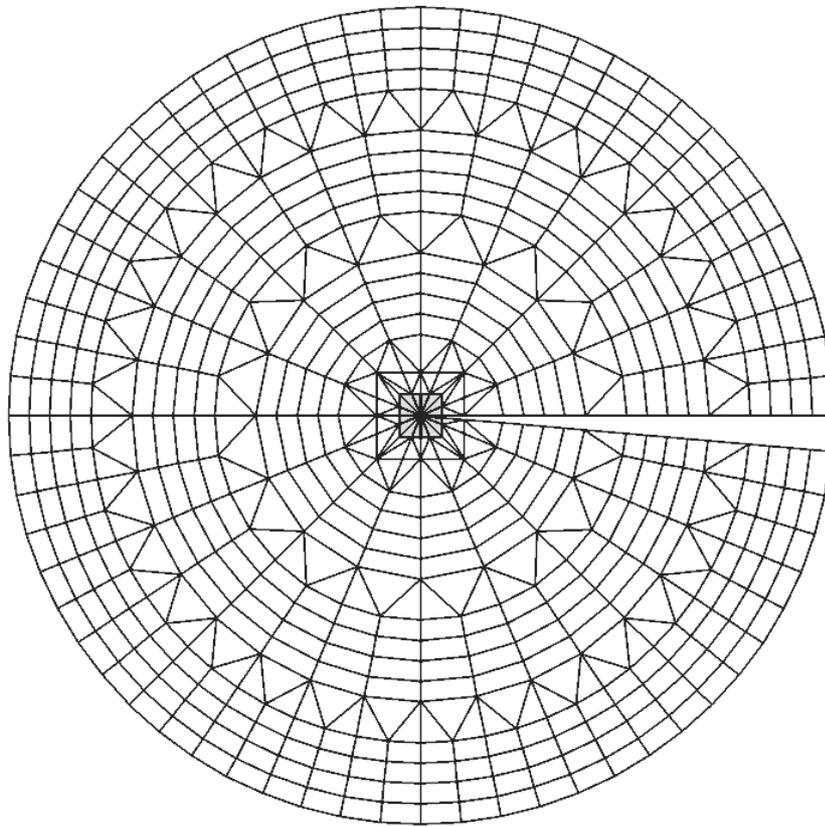


圖 5.8(b) sp3(b)網格切割圖

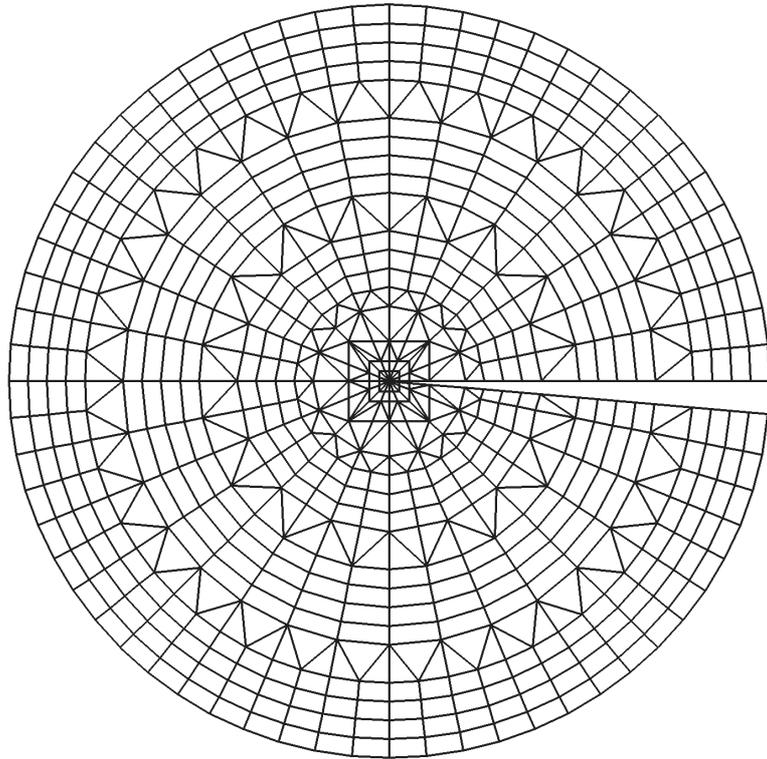


圖 5.9 sp4 網格切割圖

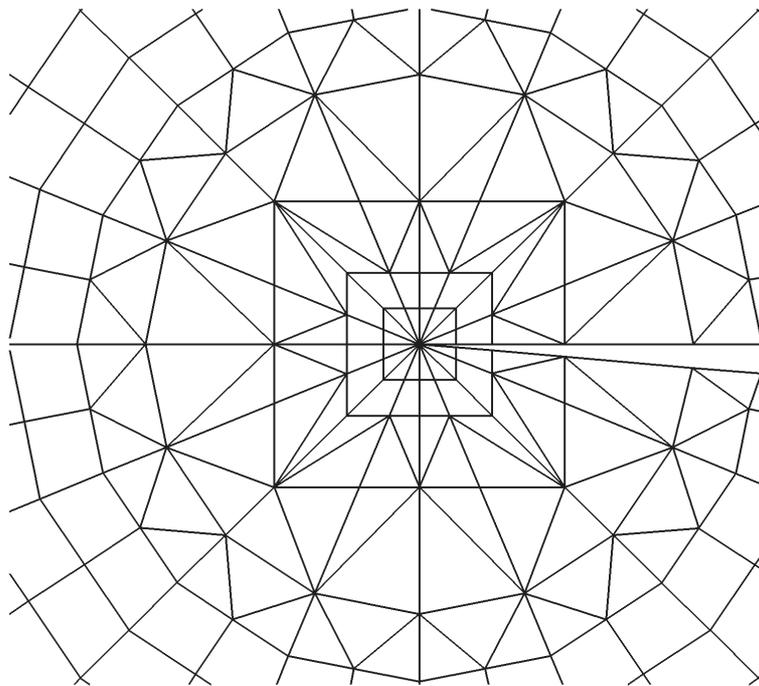


圖 5.10 sp4 網格內部示意圖

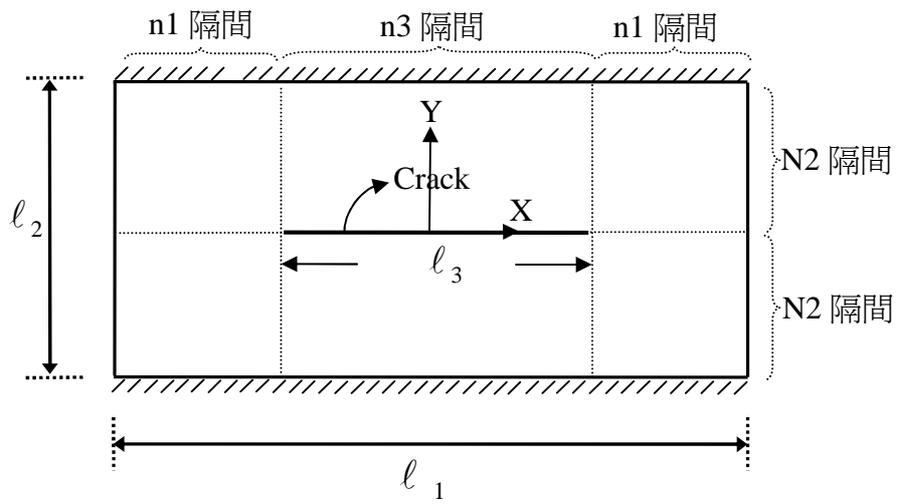


圖 5.11 矩形板之裂縫示意圖

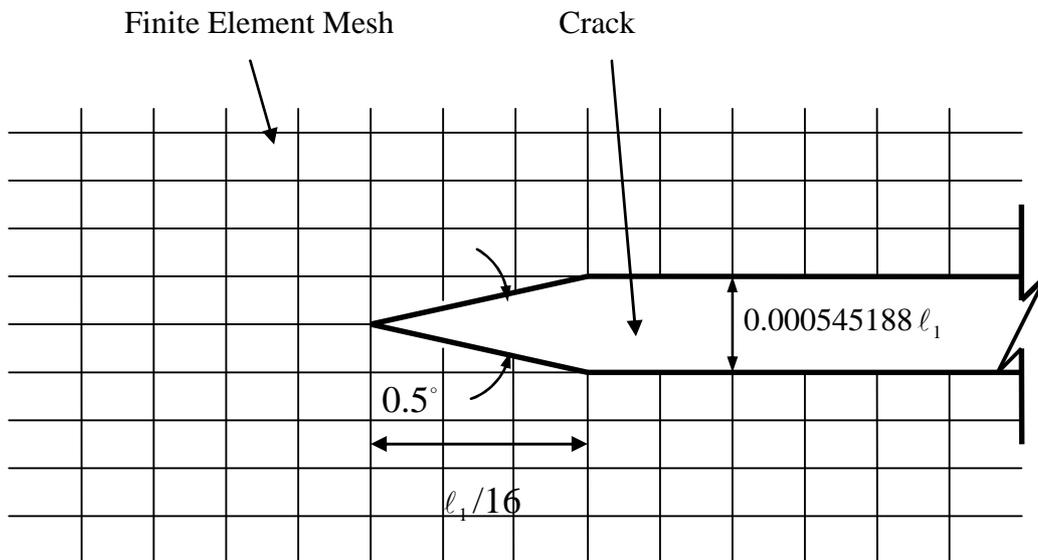
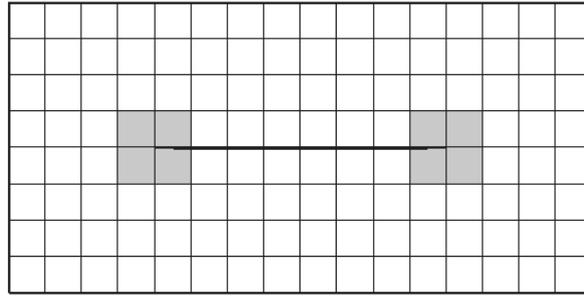
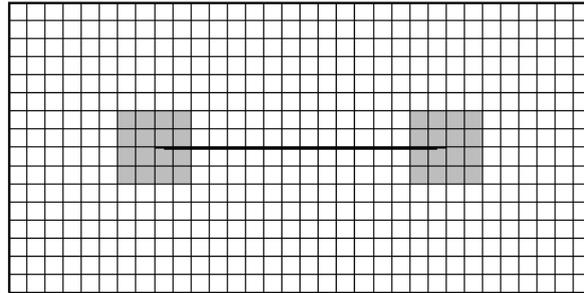


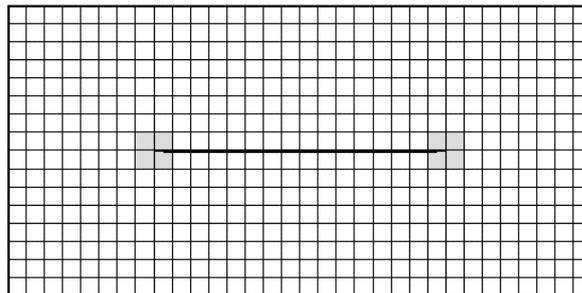
圖 5.12 裂縫之端點示意圖



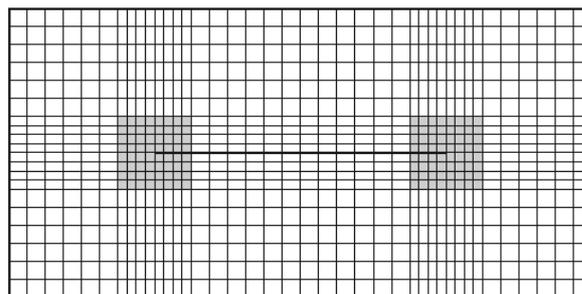
rec1



rec2(a)



rec2(b)



rec3

圖 5.13 rec1、rec2 與 rec3 之網格切割圖

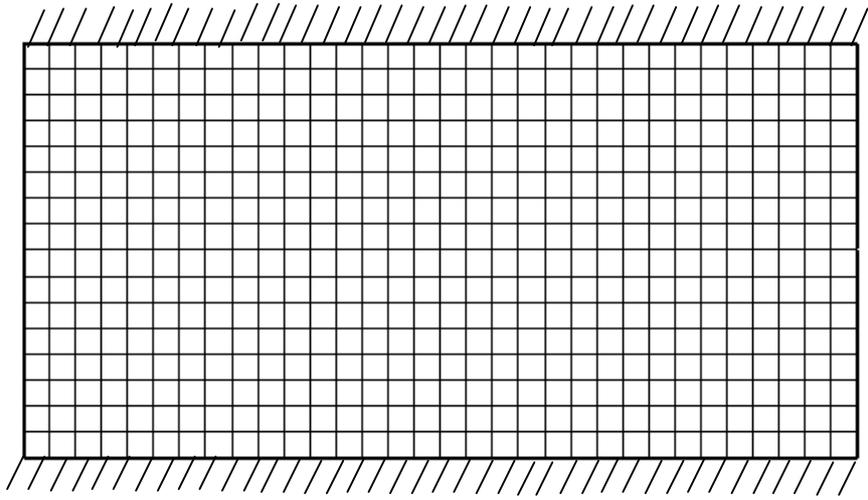


圖 5.14 矩形板網格切割圖

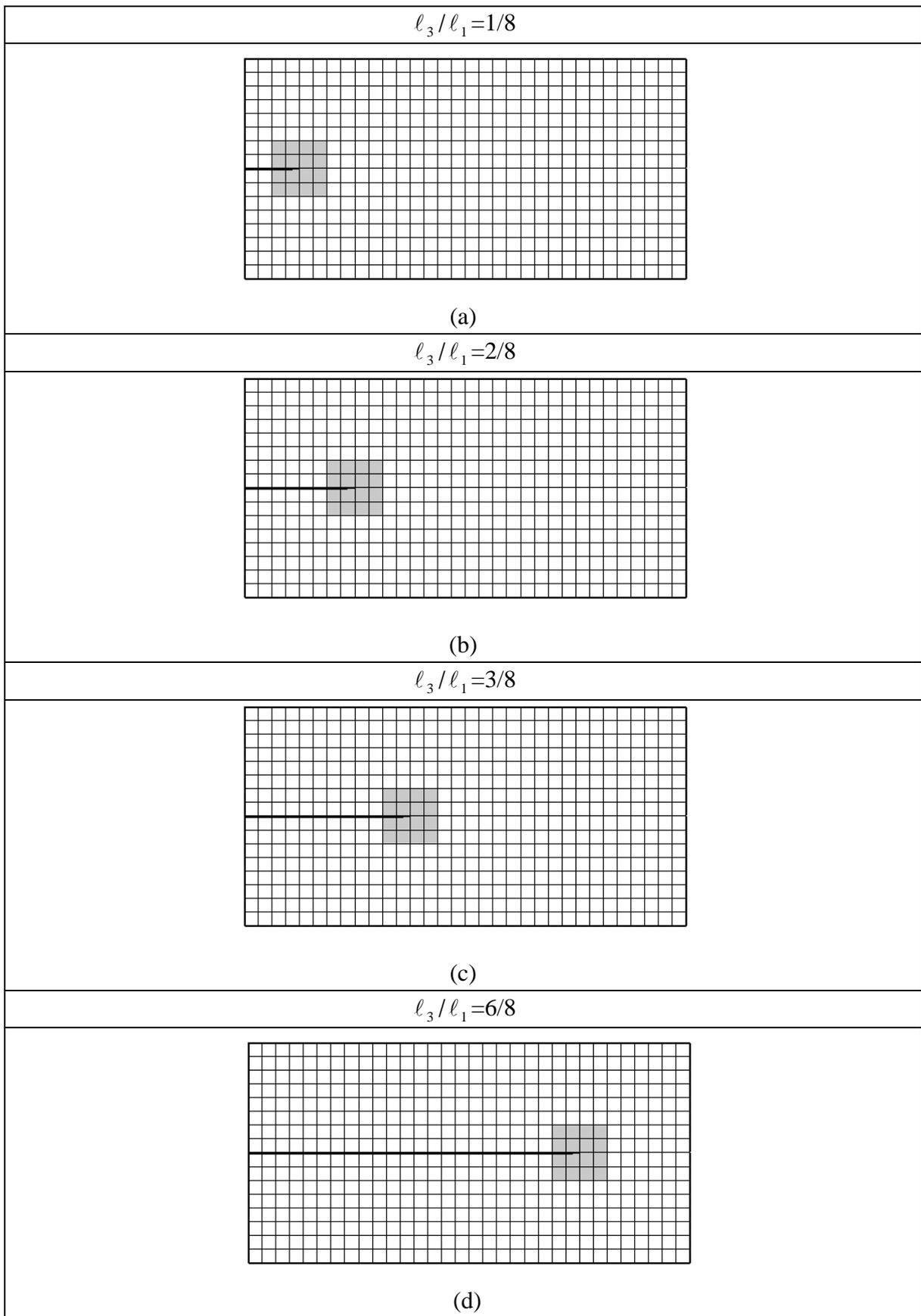


圖 5.15 $c_1/l_1=0$ 之網格切割圖

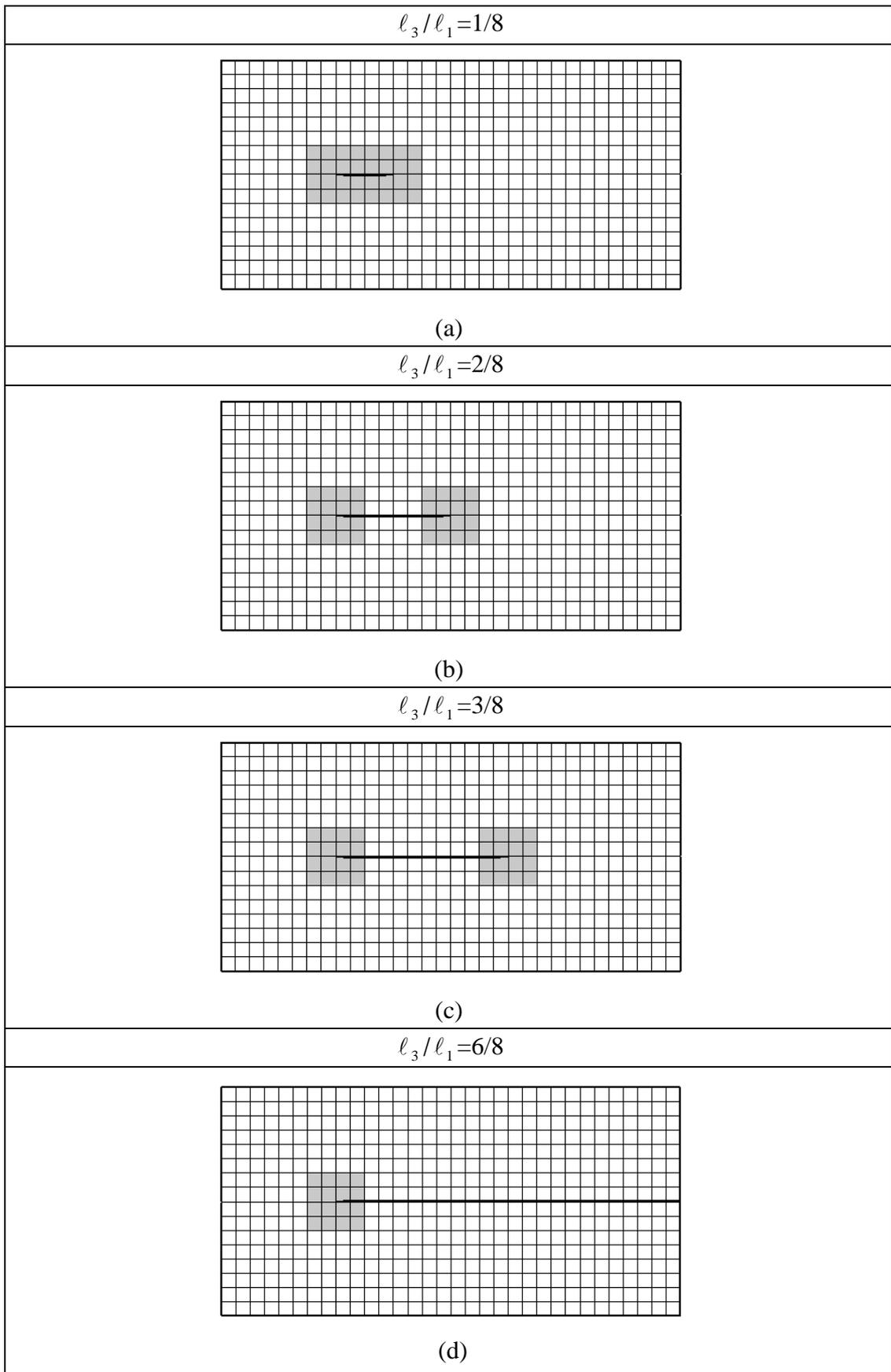


圖 5.16 $c_1/l_1=0.25$ 之網格切割圖

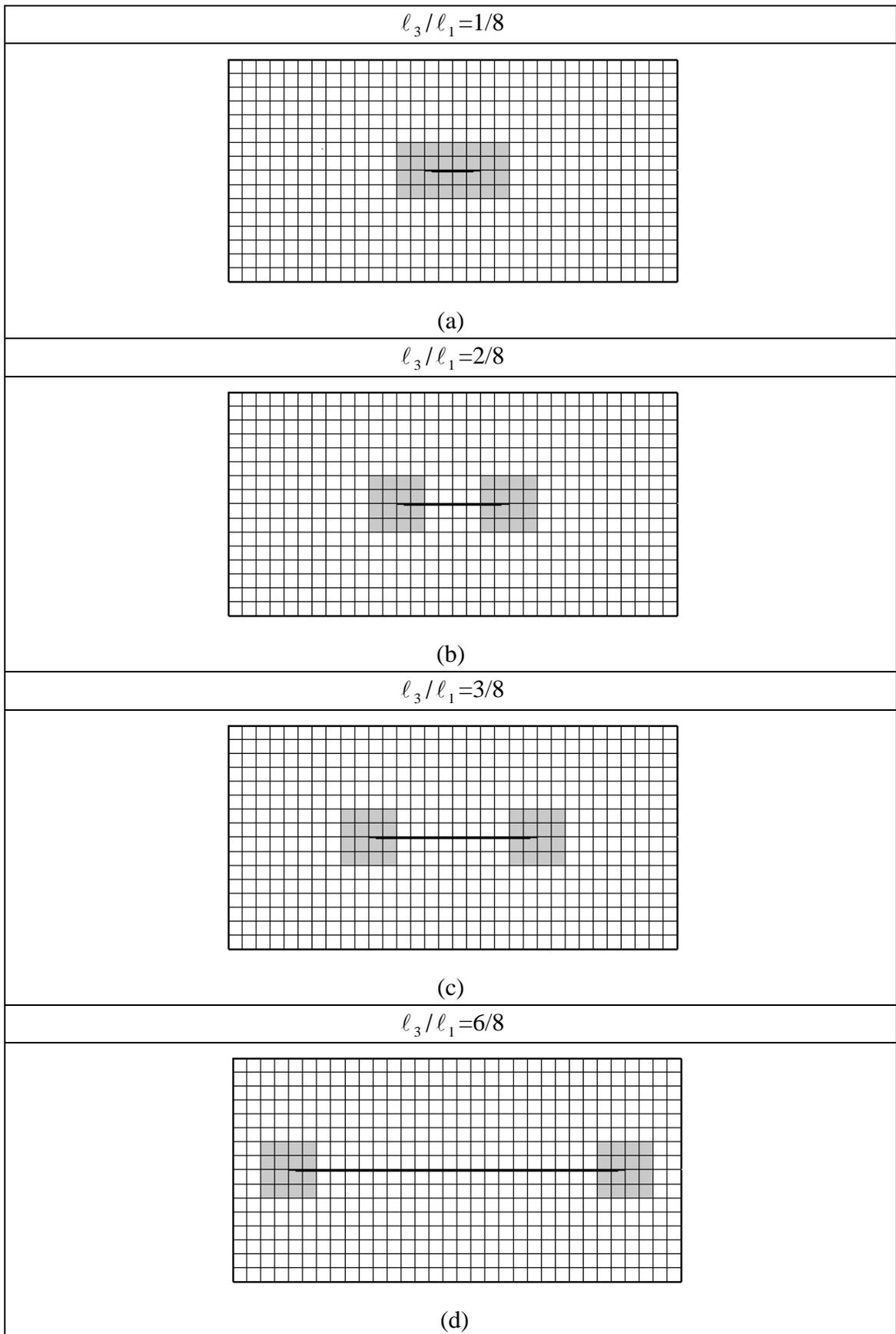


圖 5.17 裂縫位於中間之網格切割圖($c_1/l_1=0.5$)

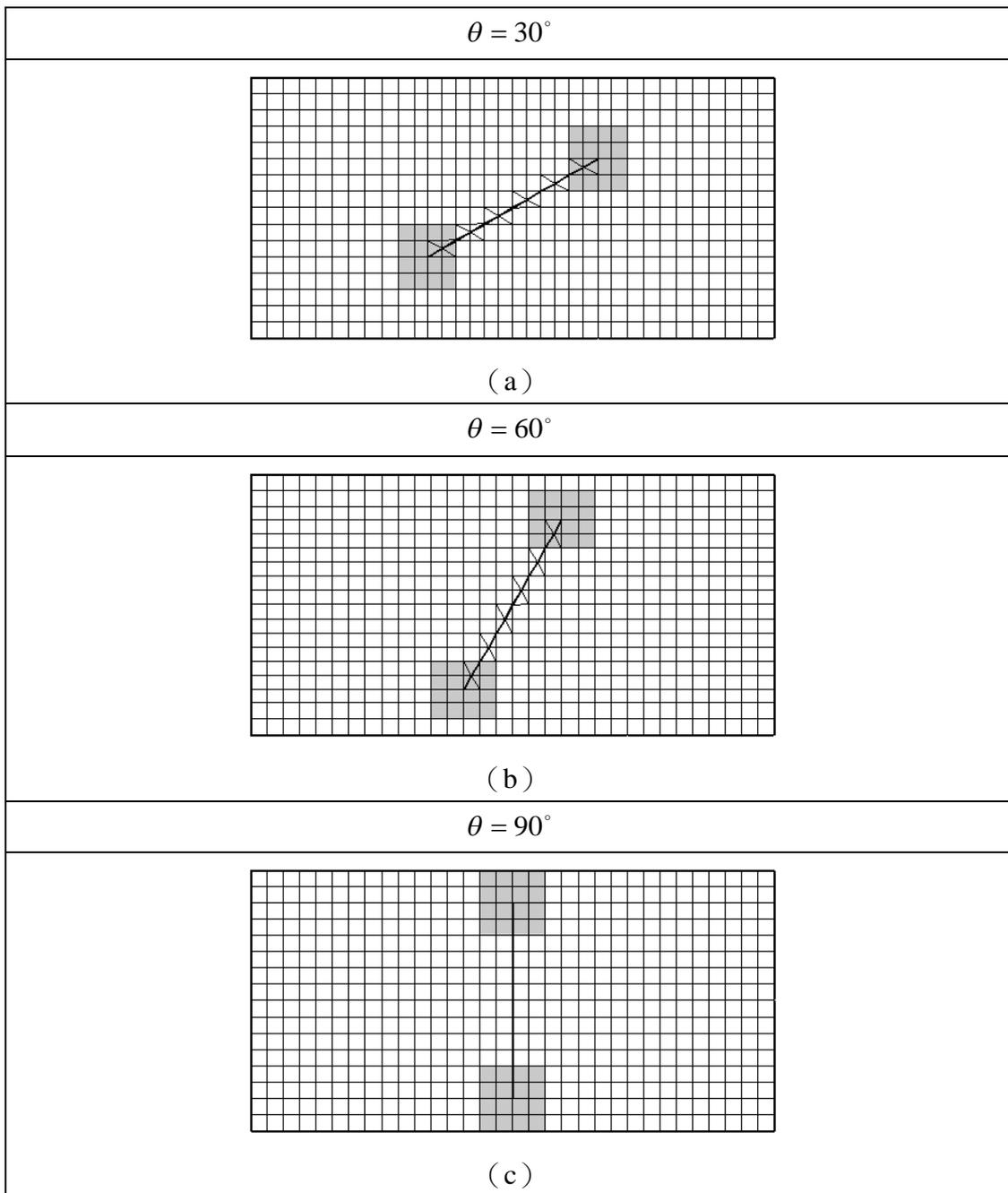


圖 5.18 不同旋轉角之網格示意圖

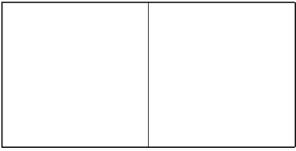
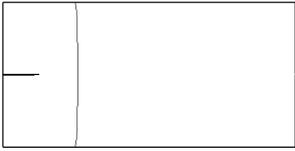
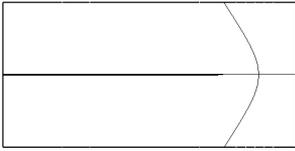
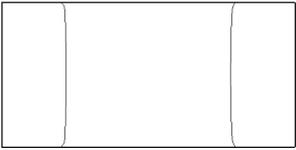
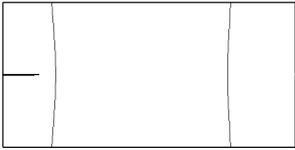
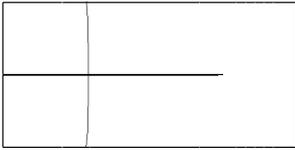
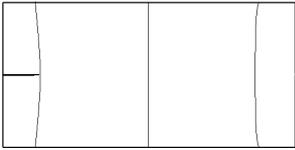
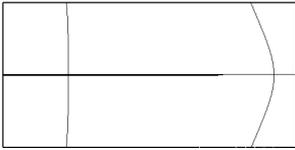
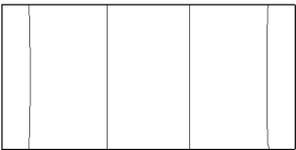
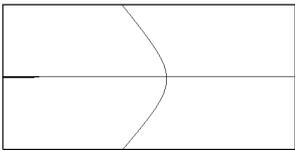
模態數	l_3/l_1		
	0	1/8	6/8
1			
	70.28	65.94	51.62
2			
	72.85	71.53	52.52
3			
	83.41	82.22	64.24
4			
	105.5	105.0	72.90
5			
	140.3	116.0	76.10

圖 5.19 $c_1/l_1=0$ 之矩形裂縫板節點線圖

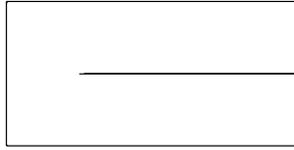
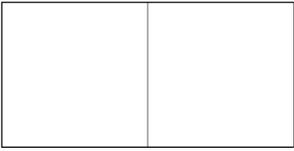
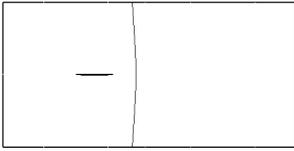
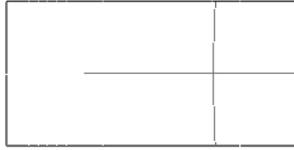
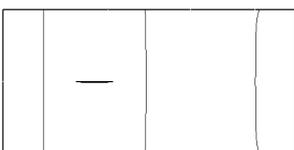
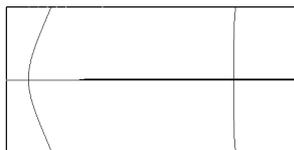
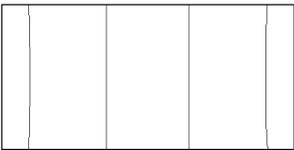
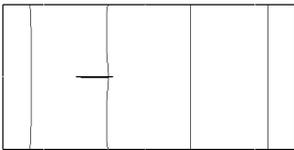
模態數	l_3/l_1		
	0	1/8	6/8
1			
	70.28	68.95	51.62
2			
	72.85	72.48	52.52
3			
	83.41	82.90	64.24
4			
	105.5	103.9	72.90
5			
	140.3	139.8	76.10

圖 5.20 $c_1/l_1=0.25$ 之矩形裂縫板節點線圖

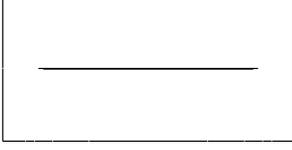
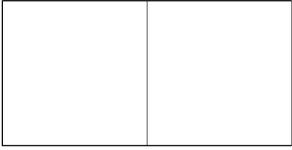
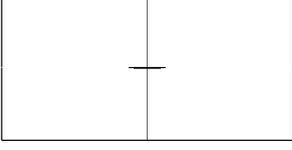
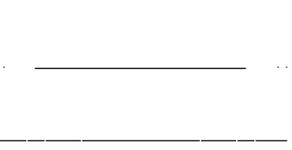
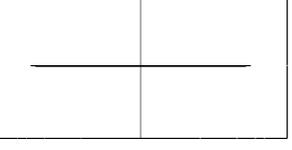
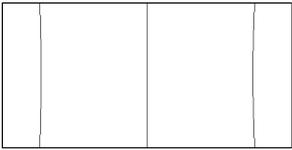
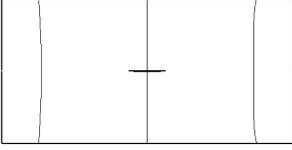
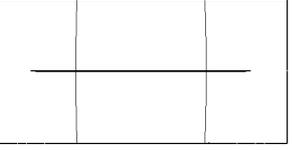
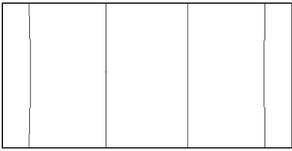
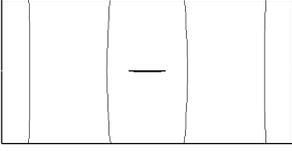
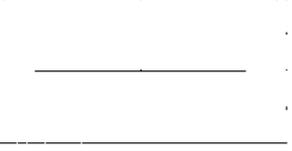
模態數	0	1 / 8	6 / 8
1			
	70.28	69.12	54.92
2			
	72.85	72.84	62.25
3			
	83.40	81.64	65.80
4			
	105.5	105.4	77.60
5			
	140.3	138.7	95.02

圖 5.21 裂縫位於中間之矩形板節點線圖

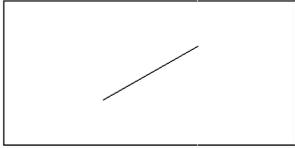
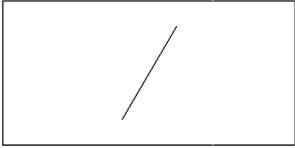
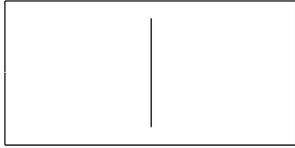
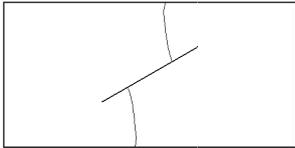
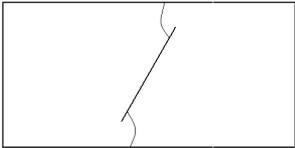
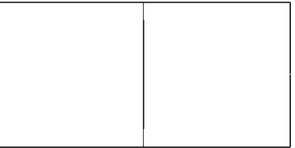
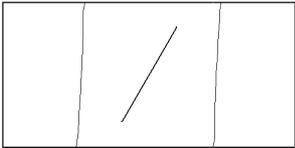
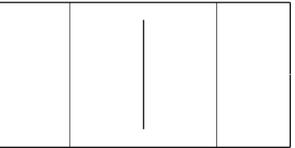
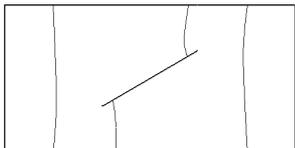
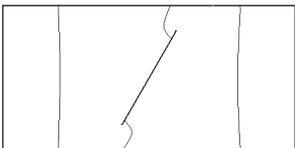
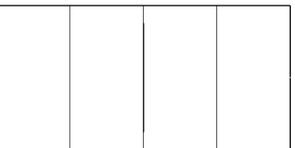
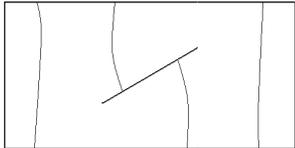
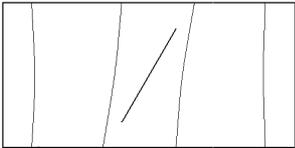
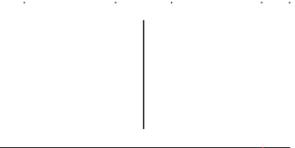
模態數	θ		
	30	60	90
1			
	64.96	68.72	70.03
2			
	72.02	71.44	71.29
3			
	77.92	78.23	79.50
4			
	89.61	85.46	84.42
5			
	115.8	126.8	125.5

圖 5.22 不同旋轉角之矩形裂縫板節點線圖