

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 二階梁理論及其在側向-扭轉挫屈的應用(2/2)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2211-E-009-010-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程學系(所)

計畫主持人：蕭國模

計畫參與人員：陳弘虎、劉峰成、楊禮龍

報告類型：完整報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 8 月 24 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 二階梁理論及其在側向-扭轉挫屈的應用(2/2)

計畫類別：■ 個別型計畫

計畫編號：NSC 93- 2211 -E- 009 - 010 -

執行期間：2004 年 08 月 01 日至 2005 年 07 月 31 日

計畫主持人：蕭國模

計畫參與人員：陳弘虎、劉峰成、楊禮龍

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)：■ 完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

執行單位：國立交通大學機械工程學系

中 華 民 國 94 年 8 月 30 日

## 二階梁理論及其在側向-扭轉挫屈的應用(2/2)

### A Second Order Beam Theory and Its Application In Lateral-Torsional Buckling (2/2)

計畫編號：NSC 93-2211-E-009-010

執行期限：2004 年 08 月 1 日至 2005 年 07 月 31 日

主持人：蕭國模 國立交通大學機械工程學系

計畫參與人員：陳弘虎、劉峰成、楊禮龍

#### 中文摘要：

本研究的主要目的在利用二階梁理論(Second order beam theory)共旋轉法(corotational formulation)來探討三維尤拉梁在軸力及彎矩同時作用下的非線性側向-扭轉挫屈分析。

在分析時將梁結構分成很多小段，每一小段稱為一個梁元素。然後在每個梁元素變形後的最新位置上建立一個元素座標系統，並在其上描述梁元素的變形、建立平衡方程式與構成方程式。用虛功原理與幾何非線性梁理論完全一致二次線性化推導出梁元素的平衡方程式與構成方程式，然後利用二階梁理論之平衡方程式與構成方程式推導出梁在軸力及彎矩同時作用下之主要平衡路徑的統御方程式，並以數值解法求得主要平衡路徑之精確解。

本研究為了求得梁的側向-扭轉挫屈分析之統御方程式，先在主要平衡路徑加上擾動位移與擾動旋轉向量，元素座標受擾動後對應到新的位置上，並在受擾動後的元素座標上建立素節點擾動位移與元素擾動旋轉參數間關係。然後以一次線性化推導出梁的側向-扭轉挫屈分析之統御方程式。接著以級數解求出空間梁在軸力及不同彎矩型式同時作用下所造成的挫屈彎矩。本為最後以數值例題驗證本文中提出的方法的正確性及有效性，並探討空間梁在不同軸向壓力作用下，對其挫屈彎矩的影響。

**關鍵詞：**梁，幾何非線性，共旋轉法，虛功原理，側向-扭轉挫屈

**Abstract.**

In this study, a consistent co-rotational formulation of second order beam theory is employed for the nonlinear lateral-torsional buckling analysis of three-dimensional elastic Euler beam under axial force and bending moment.

The beam structure is divided into several segments, called beam element for convenience. A set of element coordinate system is constructed at the current configuration of the deformed beam element. The deformations, equilibrium equations, and constitutive equations of the beam element are defined in the element coordinates. The principle of virtual work and the consistent second order linearization of the fully geometrically nonlinear beam theory are used to derive the equilibrium equations and constitutive equation of the beam element. The governing equations for primary equilibrium path for beam under axial force and uniform bending moment is derived using equilibrium equations and constitutive equation of the second order beam theory. The exact solution of the primary path is solved using an analytical and numerical combined method.

To derive the governing equations for lateral-torsional buckling analysis, disturbing nodal displacement and rotation vectors are applied to the primary path of beam elements. Then element coordinates corresponding to this disturbance can be constructed, and element nodal rotation parameters defined in this element coordinates can be determined in terms of the disturbing nodal displacement and rotation vectors. The governing equations for lateral-torsional buckling analysis are derived in this element coordinates by using the first order linearization. A power series solution method is used to solve the buckling moment for spatial beams under axial force and different types of end moment to demonstrate the accuracy and effectiveness of the proposed method. Numerical examples are studied to investigate the effect of compressive force on the buckling moment of spatial beams.

**Keywords:** Beam, Geometrical Nonlinearity, Co-rotational Formulation, Virtual Work Principal, Lateral-Torsional Buckling

## 目 錄

中文摘要 .....	I
英文摘要 .....	I
目 錄 .....	III
表目錄 .....	V
圖目錄 .....	VII
第一章 緒言 .....	1
第二章 理論推導 .....	3
2.1 基本假設 .....	3
2.2 座標系統 .....	3
2.3 旋轉向量 .....	4
2.4 梁元素之變形描述 .....	4
2.4.1 梁元素形心軸的位移 .....	4
2.4.2 元素座標與元素截面座標之關係 .....	5
2.5 梁元素之位移與應變 .....	6
2.6 平衡方程式及構成方程式 .....	10
第三章 挫屈分析 .....	16
3.1 問題描述 .....	16
3.2 主要平衡路徑的統御方程式及其解法 .....	17
3.3 梁結構之次要平衡路徑 .....	21
3.3.1 擾動後的元素座標及變形參數 .....	21
3.3.2 梁元素在次要平衡路徑之統御方程式 .....	24
3.3.3 擾動位移的級數解 .....	27
3.3.4 梁元素在次要平衡路徑的節點內力 .....	33
3.3.5 梁結構的邊界條件 .....	36
3.4 挫屈負荷 .....	38
第四章 數值例題 .....	40
第五章 結論與展望 .....	42
參考文獻 .....	43
附表 .....	45
附圖 .....	69
附錄 A 簡支梁受軸向拉力時之主要平衡路徑 .....	80
附錄 B 懸臂梁之主要平衡路徑 .....	82
附錄 C 擾動後的元素座標及節點旋轉參數 .....	83
附錄 D 梁元素的節點內力 .....	87
附錄 E 橢圓及 W 型鋼之斷面常數 .....	90

附錄 F 簡支梁及懸臂梁的挫屈軸力 .....	94
附錄 G 簡支梁及懸臂梁之線性挫屈彎矩 .....	95

## 表目錄

表一 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 1,BC3).....	45
表二 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 3,BC3).....	46
表三 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 1,抑制翹曲 ST).....	47
表四 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 3,抑制翹曲 ST).....	48
表五 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 1,BC1~BC4).....	49
表六 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 3,BC1~BC4).....	50
表七 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 1,六種邊界條件).....	51
表八 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析(斷面 3,六種邊界條件).....	52
表九(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (本文分析結果).....	53
表九(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (文獻[21]分析結果).....	53
表十(a) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,BC1).....	54
表十(b) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,BC2).....	54
表十(c) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,BC3).....	55
表十(d) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,BC4).....	55
表十一(a) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=300in,BC1).....	56
表十一(b) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,BC1).....	56
表十二(a) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=300in,BC2).....	57
表十二(b) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,BC2).....	57
表十三(a) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=300in,BC3).....	58
表十三(b) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,BC3).....	58
表十四(a) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=300in,BC4).....	59
表十四(b) 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,BC4).....	59
表十五(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,抑制翹曲 QT-1).....	60
表十五(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,自由翹曲 QT-1).....	60
表十六(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,抑制翹曲 QT-2).....	61
表十六(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,自由翹曲 QT-2).....	61
表十七(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,抑制翹曲 ST).....	62
表十七(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (斷面 1,斷面 2,自由翹曲 ST).....	62
表十八(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in,抑制翹曲 QT-1).....	63
表十八(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,抑制翹曲 QT-1).....	63
表十九(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in,抑制翹曲 QT-2).....	64
表十九(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,抑制翹曲 QT-2).....	64
表二十(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in,抑制翹曲 ST).....	65
表二十(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,抑制翹曲 ST).....	65
表二十一(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in,自由翹曲 QT-1).....	66
表二十一(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面,L=600in,抑制翹曲 QT-1).....	66

表二十二(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in, 自由翹曲 QT-2).....	67
表二十二(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面, L=600in, 抑制翹曲 QT-2).....	67
表二十三(a) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面 L=300in, 自由翹曲 ST) .....	68
表二十三(b) 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ (W 斷面, L=600in, 抑制翹曲 ST) .....	68



## 圖目錄

圖一 元素座標與元素截面座標 .....	69
圖二 旋轉向量 .....	70
圖三 作用於梁元素中任一小斷的端點負荷 .....	71
圖四 簡支梁兩端承受彎矩及軸力之結構圖 .....	72
圖五 懸臂梁兩端承受彎矩及軸力之結構圖 .....	73
圖六 QT-1, QT-2, 及 ST 型彎矩示意圖 .....	74
圖七 梁之有限元素分割 .....	75
圖八 簡支梁之主要平衡路徑圖 .....	76
圖九 梁元素在主要平衡路徑的自由體圖 .....	77
圖十 梁元素之角度示意放大圖 .....	78
圖十一(a) 長度 $L$ 懸臂梁之主要平衡路徑示意圖 .....	79
圖十一(b) 長度 $2L$ 懸臂梁之主要平衡路徑示意圖 .....	79
圖十一(c) 長度 $2L$ 之等效簡支梁主要平衡路徑示意圖 .....	79

## 第一章 緒 言

梁在結構工程系統中，長久以來一直扮演著非常重要的角色，在機械、航空太空、建築、車輛及土木工程中皆有很廣泛的應用。有很多梁結構在使用中，需能承受大位移及大旋轉。有些結構如飛機、太空船、船舶等，為了減輕重量而使用了高強度材料及薄壁斷面。當梁斷面為開口薄壁斷面時，其撓曲、扭曲及軸向變形間的耦合效應就不能忽略，否則無法求得挫屈負荷。因線性梁理論無法考慮這些耦合效應，薄壁梁的挫屈的統御方程式都需使用非線性梁理論推導[1-22]，即使是線性挫屈分析的統御方程式[7]，也必需是由非線性梁理論的一致線性化推導[5,7,8,10,21,22]才能得到正確的統御方程式及結果。為考慮各種變形間的耦合效應，在非線性梁理論中最少要保留到變形參數的二次項。文獻中一般的非線性梁理論[1-22]都僅保留到變形參數的二次項，故本文稱之為二階梁理論(second order beam theory)。但是文獻上有關變形間的耦合效應大都不是以梁之正確的變形機制(Kinematics)及二階的一致線性化(consistent second order linearization)推導[5,7,8,21,22]，文獻上有些二階梁理論僅就幾何變形上所能觀察到會影響應變或平衡方程式的部分加入原先傳統之線性推導中，或是在推導的過程中太早對梁的變形機制作線性化，故文獻中梁的平衡微分方程式有很多都無法考慮到完整的耦合效應，僅適用於特定的問題，而且文獻上對斷面主軸方向之力矩與曲率的關係及扭矩與扭率的關係也都採用線性分析所採用的構成方程式(constitutive equation)而不是由二階梁理論推導出來的，所以文獻上的方法有很多無法求得含完整耦合效應之統御方程式，故其分析的結果和結論有很多是不合理的或是錯誤的。

文獻上似乎仍沒有一個以完整的二階梁理論推導的平衡微分方程式及統御方程式，故本人在國科會計畫（二階梁理論及其在側向-扭轉挫屈的應用（I）NSC91-2212-E009-041）中用共旋轉法推導出一個二階梁理論之平衡微分方程式及構成方程式，以添補文獻上的不足，並提供一個分析三維尤拉梁結構之各種非線性挫屈行為正確及有效的理論工具。

梁同時受軸力與彎矩的情況在各種梁柱結構及機構上經常發生，其側向-扭轉挫屈分析文獻上很多[1-4, 9-15, 19,21]，有些文獻中[1, 3, 4, 14]雖然考慮了挫屈前的變形，但僅考慮挫屈前的曲率並未考慮到完整的挫屈前的變形，且皆採用線性分析所採用的彎矩與曲率的構成方程式，而不是由二階梁理論推導的構成方程式。故本研究的目的是將利用本人提出之二階梁理論的平衡微分方程式及斷面合力與變形間的構成方程式探討三維梁同時受軸力與彎矩的側向-扭轉挫屈分析，本研究擬將梁分成數段，利用本人提出之二階梁理論的平衡方程式及構成方程式來推導在軸力及彎矩作用下每段梁之主要平衡路徑之統御方程式，先求得每段梁之解析解，再由共同節點有相同曲率及邊界條件，可求得主要平衡路徑之正確解，將求得之主要平衡路徑之正確解加上擾動位移後，代入二階梁理論的平衡微分方程式及構成方程式並以一致性一階線性化來推導梁之次要平衡路徑之統御線性微分方程組。因該微分方程組應為變係數之微分方程組，本研究將提出一級數解法，求得擾動位移的正確級數一般解。由主要平衡路徑之正確解及擾動位移可推導出每一段梁受端點擾動位移後的局部座標與端點擾動位移及端點變形參數的關係，再由邊界條件及內部節點的平衡求得其挫屈彎矩及挫屈模態的統御方程組，因

該統御方程組應為一非線性代數方程式，故本研究擬再以二分法求行列式值得零根，即非線性挫屈彎矩。因挫屈前之主要平衡路徑含斷面主軸方向的側位移，故其受端點擾動位移後，擾動前後的局部座標與端點變形參數及擾動位移間的關係之推導將很複雜，在梁元素受端點有限位移及旋轉時，本人在[5]中提出一個決定元素局部座標及端點變形參數的程序，可以正確的決定元素局部座標及端點變形參數，本研究擬利用[5]中提出的程序及一致性一階線性化，推導擾動前後的元素局部座標間的關係。

本研究將以數值例題探討不同斷面及軸力對三維梁之側向扭轉挫屈的挫屈彎矩之影響，以說明本研究提出之方法的正確性及有效性，並驗證文獻上之線性挫屈彎矩之正確性。

## 第二章 理論推導

本文對梁變形的假設，梁變形機制的描述及梁的統御方程式，構成方程式的推導方式敘述如下：

### 2.1 基本假設

在本文的推導中對梁所作的基本假設如下：

- (1) 梁為等斷面且為細長桿件。
- (2) Euler-Bernoulli 假說成立。
- (3) 斷面形心與剪力中心重合。
- (4) 梁斷面變形前後，斷面形狀不變且斷面內的應變可略。
- (5) 斷面軸向之翹曲位移量(Warping Displacement)為扭率與該斷面 Saint Venant 翹曲函數之乘積。
- (6) 梁應變均為小應變。

由假設(2)與假設(4)可知梁元素的變形可由其形心軸的位移、斷面的方向(即斷面座標)及其翹曲來決定。

### 2.2 座標系統

本研究用 Corotational Total Lagrangian Formulation 來描述梁結構之變形。即在分析時將梁結構分成很多小段，每一小段梁稱為梁元素，然後在梁元素變形後的位置建立其平衡方程式。對梁元素與梁元素形心軸之交點稱作節點，並假設外加負荷均為集中負荷且作用於節點上。為了描述整個系統的變形，本文中定義了以下三個座標系統：

(a) 固定座標系統： $X_i (i=1, 2, 3)$

為一總體座標系統(global coordinate system)，結構體所有節點的座標，系統的邊界條件與平衡方程式及其他座標系統之基底，如元素座標、元素截面座標等，均在此座標系統上定義。

(b) 元素座標系統： $x_i (i=1, 2, 3)$

此座標系統是建立在每段梁元素變形後的最新位置上，如圖一所示，座標原點為節點 1， $x_1$  軸方向由節點 1 指向節點 2， $x_2$  及  $x_3$  軸方向在元素變形前為元素斷面的主軸方向，至於變形後其方向的決定方式是分別將位於節點 1, 2 變形後的斷面繞一個與該斷面之法線及  $x_1$  軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與  $x_1$  軸方向一致(此時並不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向無法定義)，然後再以兩斷面主軸方向的角平分線作為  $x_2$  軸及  $x_3$  軸的方向。本文中梁元素之變形及其統御方程式、平衡方程式均在此座標系統上定義。

(c) 元素截面座標系統： $x_i^s (i=1, 2, 3)$

此座標系統是建立在梁元素任一變形後的截面上，如圖一所示。但翹曲變形部分不予考慮。其中  $x_1^s$  軸垂直且通過截面的形心，而  $x_2^s$  軸與  $x_3^s$  軸則分別與該截面之主軸重合。本文中軸向扭轉所導致的翹曲變形，是先在此座標系統定義，再利用座標轉換關係轉換到元素座標系統上。

### 2.3 旋轉向量

為便利後續的說明起見，在此定義“旋轉向量”代表一有限旋轉。圖二所示為對一向量  $\mathbf{b}$  施以一旋轉向量  $\phi\mathbf{a}$  而使向量  $\mathbf{b}$  旋轉到一個新的位置向量  $\mathbf{b}'$ ，則  $\mathbf{b}$  與  $\mathbf{b}'$  存在有以下的關係[23]

$$\mathbf{b}' = \cos \phi \mathbf{b} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \sin \phi \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (2.3.1)$$

其中  $\phi$  表逆時鐘方向旋轉角， $\mathbf{a}$  表旋轉軸的單位向量；'.'和'×'表向量的內積和外積。

### 2.4 梁元素之變形描述

本文是在元素座標上，描述梁元素的變形，由 2.1 節中的基本假設可知，梁元素的變形可以由其形心軸的單位長度伸長量(unit extension)、側向位移及其截面繞形心軸的旋轉決定。所以本文在描述梁元素的變形前，先描述其形心軸的位移及其斷面的旋轉。

本文中  $\{ \}$  代表行矩陣， $( )_{,s} = ( )'$  代表對  $s$  的微分。

#### 2.4.1 梁元素之形心軸的位移

圖一中  $P$  為梁元素形心軸上的任一點，令其變形前後在元素座標上的位置向量分別為  $\{ x \ 0 \ 0 \}$  及  $\mathbf{r}_p = \{ x_c(s) \ v(s) \ w(s) \}$ ，其中  $s$  為節點 1 量至  $P$  點間的形心軸在變形後的弧長， $v(s)$ ， $w(s)$  為  $P$  點在  $x_2$ ， $x_3$  軸方向的位移。 $P$  點在  $x_1$  軸方向的位移  $u$  可表示成

$$u = x_c(s) - x \quad (2.4.1)$$

在本文中  $x_c(s)$  以下式表示

$$x_c(s) = \int_0^s \cos \theta_n ds \quad (2.4.2)$$

其中

$$\cos \theta_n = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.4.3)$$

$$\theta_2 = -\frac{dw(s)}{ds} \quad (2.4.4)$$

$$\theta_3 = \frac{dv(s)}{ds} \quad (2.4.5)$$

在變形後的形心軸上， $P$  點之單位切線向量可表示成

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}_p}{ds} = \{ \cos \theta_n \ \theta_3 \ -\theta_2 \} \quad (2.4.6)$$

由單位長度伸長量的定義，形心軸的單位長度伸長量  $\epsilon_0$  可寫成

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.4.7)$$

#### 2.4.2 元素座標與元素截面座標之關係

令  $\mathbf{e}_i$  與  $\mathbf{e}_i^s$  ( $i=1, 2, 3$ ) 分別代表元素座標  $x_i$  方向的單位向量與元素截面座標  $x_i^s$  軸方向的單位向量。由座標系統的定義可知，在變形前  $x_i$  軸與  $x_i^s$  軸是一致的，而且變形後  $\mathbf{e}_1^s$  是與(2.4.6)式的  $\mathbf{t}$  重合。所以在本文中假設變形後的單位向量  $\mathbf{e}_i^s$  ( $i=1, 2, 3$ )，是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量  $\mathbf{e}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 來決定[5]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n} \quad (2.4.8)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_1 \mathbf{t} \quad (2.4.9)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{t}\|} = \left\{ 0 \quad \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2} \quad \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2} \right\} = \{0 \quad n_2 \quad n_3\} \quad (2.4.10)$$

其中  $\mathbf{n}$  為垂直  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{t}$  的單位向量， $\theta_n$  為  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{t}$  的夾角， $\theta_1$  為繞  $\mathbf{t}$  軸的轉角。

旋轉向量  $\boldsymbol{\theta}_n$  作用在  $\mathbf{e}_i$  上，將其轉至一中繼位置  $\mathbf{e}_i'$ ，此時  $\mathbf{e}_1'$  與  $\mathbf{t}$  重合，再將  $\boldsymbol{\theta}_t$  作用在  $\mathbf{e}_i'$ ，將其轉至  $\mathbf{e}_i^s$ 。若  $\mathbf{e}_i$ 、 $\boldsymbol{\theta}_n$  以及  $\boldsymbol{\theta}_t$  已知，則元素截面座標  $\mathbf{e}_i^s$  就唯一決定；反之，若  $\mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{e}_i^s$  已知，則旋轉向量  $\boldsymbol{\theta}_n$  與  $\boldsymbol{\theta}_t$  亦唯一決定。

由(2.3.1)式、(2.4.6)式及(2.4.8)~(2.4.10)式可得  $\mathbf{e}_i$  與  $\mathbf{e}_i^s$  的關係可表示如下[5]：

$$\mathbf{e}_i^s = \mathbf{R} \mathbf{e}_i \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t} \quad \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \quad (2.4.12)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{R}_a + \sin \theta_1 \mathbf{R}_b \quad (2.4.13)$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{R}_a + \cos \theta_1 \mathbf{R}_b \quad (2.4.14)$$

$$\mathbf{R}_a = \{-\theta_3 \quad \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n)n_2^2 \quad 1 - \cos \theta_n n_2 n_3\} \quad (2.4.15)$$

$$\mathbf{R}_b = \{\theta_2 \quad (1 - \cos \theta_n)n_2 n_3 \quad \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n)n_3^2\} \quad (2.4.16)$$

其中(2.4.11)式中的  $\mathbf{R}$  是一般所謂的旋轉矩陣同時也是元素座標和元素截面座標間的轉換矩陣。

由(2.4.8)~(2.4.10)式可以發現 $\theta_n$ 與 $\theta_t$ 均由 $\theta_i (i=1,2,3)$ 決定，同樣地，(2.4.11)式中的矩陣 $\mathbf{R}$ 亦為 $\theta_i$ 的函數，所以本文稱 $\theta_i$ 為旋轉參數， $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3\}$ 為旋轉參數向量。當 $\boldsymbol{\theta}$ 有一微小變量 $\delta\boldsymbol{\theta} = \{\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3\}$ 時，截面座標會旋轉至一個新的位置，此一新的位置可由截面座標繞 $x_i (i=1,2,3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\phi_3\}$ 而得。 $\delta\boldsymbol{\theta} = \{\delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \delta\theta_3\}$ 與 $\delta\boldsymbol{\phi} = \{\delta\phi_1 \ \delta\phi_2 \ \delta\phi_3\}$ 之關係可表示如下[5]：

$$\delta\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{t} \ \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t} \ \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}] \delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{T} \delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.4.17)$$

其中

$$\mathbf{t}_1 = \{-\theta_3 \ (1-\theta_3^2)/\cos\theta_n \ \theta_2\theta_3/\cos\theta_n\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \{\theta_2 \ \theta_2\theta_3/\cos\theta_n \ (1-\theta_2^2)/\cos\theta_n\}$$

$$a = \theta_3(1-\cos\theta_n)/(\theta_2^2 + \theta_3^2)$$

$$b = -\theta_2(1-\cos\theta_n)/(\theta_2^2 + \theta_3^2)$$

(2.4.17)式的反函數可表示如下

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{T}^{-1} \delta\boldsymbol{\theta} \quad (2.4.18)$$

當旋轉參數 $\theta_2$ 與 $\theta_3$ 很小時，(2.4.18)式中的 $\mathbf{T}^{-1}$ 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3/2 & -\theta_2/2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.19)$$

## 2.5 梁元素之位移與應變

圖一中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於同一斷面上。在元素座標上，Q 點在梁元素變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.5.1)$$

和

$$\mathbf{r} = x_c(s)\mathbf{e}_1 + v(s)\mathbf{e}_2 + w(s)\mathbf{e}_3 + y\mathbf{e}_2^s + z\mathbf{e}_3^s + \theta_{1,s}\omega\mathbf{e}_1^s \quad (2.5.2)$$

其中  $x_c(s)$ 、 $v(s)$  以及  $w(s)$  分別是 P 點在  $x_i (i=1, 2, 3)$  軸上的座標， $\theta_{1,s}$  是沿變形後的形心軸的斷面之軸向扭轉率， $\omega = \omega(y, z)$  為該截面之 Saint Venant 翹曲函數， $y$ 、 $z$  分別是 Q 點在  $x_2^s$  軸與  $x_3^s$  軸的座標。

本文的應變採用工程應變。為了推導上的方便。本文中先推導出 Green Strain  $\varepsilon_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 。再由 Green Strain 求得與其對應之工程應變。由基本假設(4)，本文僅考慮  $\varepsilon_{11}$ ， $\varepsilon_{12}$  及  $\varepsilon_{13}$ 。如果將  $x, y, z$  當作獨立變數，則依 Green Strain 的定義  $\varepsilon_{11}$ ， $\varepsilon_{12}$ ， $\varepsilon_{13}$  可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right)^t \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) - 1 \quad (2.5.3a)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right)^t \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \quad (2.5.3b)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right)^t \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) \quad (2.5.3c)$$

將(2.5.2)式代入(2.5.3)式，再利用 Chain rule 及  $\frac{\partial s}{\partial x} = 1 + \varepsilon_0$  ((2.4.7)式)，並保留  $\varepsilon_0$ 、旋轉參數以及旋轉參數之微分項至二次項可以得到下式

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = & \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0^2}{2} + (1 + 2\varepsilon_0)\omega\theta_{1,ss} + \frac{1}{2}\omega^2\theta_{1,ss}^2 \\ & + y(-\theta_{3,s} - 2\varepsilon_0\theta_{3,s} + \theta_1\theta_{2,s} - \omega\theta_{3,s}\theta_{1,ss}) \\ & + z(\theta_{2,s} + 2\varepsilon_0\theta_{2,s} + \theta_1\theta_{3,s} + \omega\theta_{2,s}\theta_{1,ss}) - yz\theta_{2,s}\theta_{3,s} \\ & + \frac{z^2}{2}(\theta_{1,s}^2 + \theta_{2,s}^2) + \frac{y^2}{2}(\theta_{1,s}^2 + \theta_{3,s}^2) \end{aligned} \quad (2.5.4a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = & \frac{1}{2}\omega\theta_{1,s}\theta_{3,s} + \frac{1}{2}\omega_{,y}\theta_{1,s}(1 + \varepsilon_0) + \frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,s}\theta_{1,ss} \\ & - \frac{1}{2}y\theta_{1,s}\theta_{3,s}\omega_{,y} + z[-\frac{1}{2}\theta_{1,s}(1 + \varepsilon_0) - \frac{1}{4}(\theta_3\theta_{2,s} - \theta_2\theta_{3,s}) \\ & + \frac{1}{2}\theta_{1,s}\theta_{2,s}\omega_{,y}] \end{aligned} \quad (2.5.4b)$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13} = & -\frac{1}{2}\omega\theta_{1,s}\theta_{2,s} + \frac{1}{2}\omega_{,z}\theta_{1,s}(1+\varepsilon_0) + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,s}\theta_{1,ss} \\
& + \frac{1}{2}z\theta_{1,s}\theta_{2,s}\omega_{,z} + y\left[\frac{1}{2}\theta_{1,s}(1+\varepsilon_0) + \frac{1}{4}(\theta_3\theta_{2,s} - \theta_2\theta_{3,s})\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}\theta_{1,s}\theta_{3,s}\omega_{,z}\right]
\end{aligned} \tag{2.5.4c}$$

Green Strain  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$  與工程應變  $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$  間的關係如下：

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \tag{2.5.5a}$$

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{(1 + e_{11})^{1/2}(1 + e_{22})^{1/2}} \tag{2.5.5b}$$

$$\sin \gamma_{13} = \frac{2\varepsilon_{13}}{(1 + e_{11})^{1/2}(1 + e_{33})^{1/2}} \tag{2.5.5c}$$

當應變很小時(2.5.5)式可以用下列近似式代替

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 \tag{2.5.6a}$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{11} \tag{2.5.6b}$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{11} \tag{2.5.6c}$$

因(2.5.4)式中 Green strain 僅保留到旋轉參數的二次項，所以本文中工程應變亦僅保留到旋轉參數的二次項。由(2.5.4)式及(2.5.6)式，並保留  $\varepsilon_0$ 、旋轉參數及其微分項到二次項可得

$$\begin{aligned}
e_{11} = & \varepsilon_0 + z\theta_{2,s} - y\theta_{3,s} + \omega\theta_{1,s} \\
& + \frac{1}{2}\theta_{1,s}^2(y^2 + z^2) + y(\theta_1\theta_{2,s} - \varepsilon_0\theta_{3,s}) \\
& + z(\varepsilon_0\theta_{2,s} + \theta_1\theta_{3,s}) + \varepsilon_0\omega\theta_{1,ss}
\end{aligned} \tag{2.5.7a}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} = & -z\theta_{1,s} + \theta_{1,s}\omega_{,y} + z^2\theta_{1,s}\frac{\theta_{2,s}}{2} \\
& + \omega\theta_{1,s}\theta_{3,s} + \varepsilon_0\theta_{1,s}\frac{\omega_{,y}}{2} + \omega\theta_{1,s}\theta_{1,ss}\frac{\omega_{,y}}{2} \\
& + z\left(-\varepsilon_0\frac{\theta_{1,s}}{2} - \theta_3\frac{\theta_{2,s}}{2} + \theta_2\frac{\theta_{3,s}}{2} + \omega\theta_{1,s}\frac{\theta_{1,ss}}{2} + \theta_{1,s}\theta_{2,s}\frac{\omega_{,y}}{2}\right) \\
& + y\left(-z\theta_{1,s}\frac{\theta_{3,s}}{2} - \theta_{1,s}\theta_{3,s}\frac{\omega_{,y}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.5.7b}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{13} = & y\theta_{1,s} + \theta_{1,s}\omega_{,z} + y^2\theta_{1,s}\frac{\theta_{3,s}}{2} \\
& - \omega\theta_{1,s}\theta_{2,s} + \varepsilon_0\theta_{1,s}\frac{\omega_{,z}}{2} + \omega\theta_{1,s}\theta_{1,ss}\frac{\omega_{,z}}{2} + z\theta_{1,s}\theta_{2,s}\frac{\omega_{,z}}{2} \\
& + y(\varepsilon_0\frac{\theta_{1,s}}{2} + \theta_3\frac{\theta_{2,s}}{2} - \theta_2\frac{\theta_{3,s}}{2} - \omega\theta_{1,s}\frac{\theta_{1,ss}}{2} - \theta_{1,s}\theta_{3,s}\frac{\omega_{,z}}{2} \\
& - z\theta_{1,s}\frac{\theta_{2,s}}{2}
\end{aligned} \tag{2.5.7c}$$

將(2.5.7)式中之  $e_{11}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  分別作變分可以得到下式

$$\begin{aligned}
\delta e_{11} = & \delta\varepsilon_0 + z\delta\theta_{2,s} - y\delta\theta_{3,s} + \omega\delta\theta_{1,s} \\
& + (\theta_1y + \varepsilon_0z)\delta\theta_{2,s} + (-\varepsilon_0y + \theta_1z)\delta\theta_{3,s} + \theta_{1,s}(y^2 + z^2)\delta\theta_{1,s} \\
& + (y\theta_{2,s} + z\theta_{3,s})\delta\theta_1 + \varepsilon_0\omega\delta\theta_{1,ss} + (z\theta_{2,s} - y\theta_{3,s} + \omega\theta_{1,ss})\delta\varepsilon_0
\end{aligned} \tag{2.5.8a}$$

$$\begin{aligned}
\delta \gamma_{12} = & (-z + \omega_{,y})\delta\theta_{1,s} \\
& + (-z\frac{\theta_{2,s}}{2})\delta\theta_3 + (z\frac{\theta_{3,s}}{2})\delta\theta_2 + (-z\frac{\theta_{1,s}}{2} + \theta_{1,s}\frac{\omega_{,y}}{2})\delta\varepsilon_0 \\
& + (\omega z\frac{\theta_{1,s}}{2} + \omega\theta_{1,s}\frac{\omega_{,y}}{2})\delta\theta_{1,ss} + (\theta_2\frac{z}{2} + \omega\theta_{1,s} - yz\frac{\theta_{1,s}}{2} \\
& - y\theta_{1,s}\frac{\omega_{,y}}{2})\delta\theta_{3,s} + (-\theta_3\frac{z}{2} + z^2\frac{\theta_{1,s}}{2} + z\theta_{1,s}\frac{\omega_{,y}}{2})\delta\theta_{2,s} \\
& + (-\varepsilon_0\frac{z}{2} + z^2\frac{\theta_{2,s}}{2} + \omega\theta_{3,s} - yz\frac{\theta_{3,s}}{2} + \omega z\frac{\theta_{1,ss}}{2} + \varepsilon_0\frac{\omega_{,y}}{2} \\
& + z\theta_{2,s}\frac{\omega_{,y}}{2} - y\theta_{3,s}\frac{\omega_{,y}}{2} + \omega\theta_{1,ss}\frac{\omega_{,y}}{2})\delta\theta_{1,s}
\end{aligned} \tag{2.5.8b}$$

$$\begin{aligned}
\delta \gamma_{13} = & (y + \omega_{,z})\delta\theta_{1,s} \\
& + (y\frac{\theta_{2,s}}{2})\delta\theta_3 + (-y\frac{\theta_{3,s}}{2})\delta\theta_2 + (y\frac{\theta_{1,s}}{2} + \theta_{1,s}\frac{\omega_{,z}}{2})\delta\varepsilon_0 \\
& + (-\omega y\frac{\theta_{1,s}}{2} + \omega\theta_{1,s}\frac{\omega_{,z}}{2})\delta\theta_{1,ss} + (-\theta_2\frac{y}{2} + y^2\frac{\theta_{1,s}}{2} - y\theta_{1,s}\frac{\omega_{,z}}{2} \\
& \delta\theta_{3,s} + (\theta_3\frac{y}{2} - \omega\theta_{1,s} - yz\frac{\theta_{1,s}}{2} + z\theta_{1,s}\frac{\omega_{,z}}{2})\delta\theta_{2,s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\varepsilon_0 \frac{y}{2} + y^2 \frac{\theta_{3,s}}{2} - \omega \theta_{2,s} - yz \frac{\theta_{2,s}}{2} + \omega y \frac{\theta_{1,ss}}{2} + \varepsilon_0 \frac{\omega_{,z}}{2} \\
& + z \theta_{2,s} \frac{\omega_{,z}}{2} - y \theta_{3,s} \frac{\omega_{,z}}{2} + \omega \theta_{1,ss} \frac{\omega_{,z}}{2}) \delta \theta_{1,s}
\end{aligned} \tag{2.5.8c}$$

由(2.4.1)~(2.4.3)式及(2.4.7)式可得

$$u_{,s} = \frac{dx_c}{ds} - \frac{dx}{ds} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} - \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \tag{2.5.9}$$

將上式變分可得

$$\delta u_{,s} = \frac{1}{2} (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{-1/2} (-2\theta_2 \delta \theta_2 - 2\theta_3 \delta \theta_3) + (1 + \varepsilon_0)^{-2} \delta \varepsilon_0 \tag{2.5.10}$$

將(2.5.10)式級數展開並保留至一次項可得

$$\delta \varepsilon_0 \approx \theta_2 \delta \theta_2 + \theta_3 \delta \theta_3 + (1 + 2\varepsilon_0) \delta u_{,s} \tag{2.5.11}$$

## 2.6 平衡方程式及構成方程式

本文利用虛功原理在元素座標上推導梁元素的統御方程式及構成方程式。圖三所示為梁元素中的一小段，點 a、b 分別表示這一小段梁元素的端點，s 為形心軸弧長。本文採用形心軸在  $x_i (i=1, 2, 3)$  軸方向的位移量  $u_i (u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w)$ ，旋轉參數

$\theta_i (i=1, 2, 3)$ ，及  $\theta_{1,s}$  作為廣義位移。在斷面上與廣義位移對應之廣義合力為在

$x_i (i=1, 2, 3)$  軸方向的力  $F_i (i=1, 2, 3)$ ，廣義力矩  $M_i^\theta (i=1, 2, 3)$  及廣義雙力矩

(Bimoment)  $B^\theta$ 。廣義力矩與傳統力矩  $M_i (i=1, 2, 3)$  (即繞  $x_i$  軸旋轉的力矩) 間的關係可

由(2.4.18)式及 Controgradient Law[24]求得，並可表示如下：

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{-t} \mathbf{M}^\theta \tag{2.6.1}$$

$$\mathbf{M} = \{M_1 \quad M_2 \quad M_3\} \tag{2.6.2}$$

$$\mathbf{M}^\theta = \{M_1^\theta \quad M_2^\theta \quad M_3^\theta\} \tag{2.6.3}$$

其中  $\mathbf{T}^{-t}$  為(2.4.18)式中  $\mathbf{T}^{-1}$  之轉置矩陣。

若給予端點 a 及 b 一個虛廣義位移  $(\delta u_i)_j, (\delta \theta_i)_j, (\delta \theta_{1,s})_j, (i=1, 2,$

$3, j=a, b)$ ，其中  $( )_j$  表  $( )$  在端點  $j$  之值，則由虛功原理可知對應於虛位移，內力所作

的虛功  $\delta W_{int}$  等於外力所作的虛功  $\delta W_{ext}$ ，即

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (2.6.4)$$

因本文假設梁元素間無外加負荷，所以  $\delta W_{ext}$  即為端點 a、b 上內力之廣義合力所作的虛功， $\delta W_{ext}$  可以表示成

$$\delta W_{ext} = [\mathbf{F}^t \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}^\theta)^t \delta \boldsymbol{\theta} + B^\theta \delta \theta_{1,s}]_a^b \quad (2.6.5)$$

其中

$$\mathbf{F} = \{ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \} \quad (2.6.6)$$

$$\delta \mathbf{u} = \{ \delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3 \} = \{ \delta u \quad \delta v \quad \delta w \} \quad (2.6.7)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \{ \delta \theta_1 \quad \delta \theta_2 \quad \delta \theta_3 \} \quad (2.6.8)$$

(2.6.5)式表示[ ]內各項在端點 b 之值減掉各項在端點 a 之值。 $\delta W_{ext}$  可表示成以下的積分式

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_a^b \left[ \frac{d}{ds} (\mathbf{F}^t \delta \mathbf{u}) + \frac{d}{ds} [(\mathbf{M}^\theta)^t \delta \boldsymbol{\theta}] + \frac{d}{ds} (B^\theta \delta \theta_{1,s}) \right] ds \\ &= \int_a^b [M_{1,s}^\theta \delta \theta_1 + M_{2,s}^\theta \delta \theta_2 + M_{3,s}^\theta \delta \theta_3 + (M_1^\theta + B_{,s}^\theta) \delta \theta_{1,s} \\ &\quad + M_2^\theta \delta \theta_{2,s} + M_3^\theta \delta \theta_{3,s} + B^\theta \delta \theta_{1,ss} + F_{1,s} \delta u + F_{2,s} \delta v \\ &\quad + F_{3,s} \delta w + F_1 \delta u_{,s} + F_2 \delta \theta_3 - F_3 \delta \theta_2] ds \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

由基本假設(4)，本文僅考慮  $e_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ ，所以(2.6.4)式中內力所作的虛功可表示成

$$\delta W_{int} = \int_a^b \sigma_{11} \delta e_{11} dV + \int_a^b (\sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \quad (2.6.10)$$

其中  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$  為工程應力， $V$  為端點 a、b 間梁元素變形前的體積

$dV = dA ds / (1 + \epsilon_0)$ 。又本文假設材料為彈性材料，所以應力與應變有如下的關係

$$\sigma_{11} = E e_{11} \quad (2.6.11a)$$

$$\sigma_{12} = G \gamma_{12} \quad (2.6.11b)$$

$$\sigma_{13} = G \gamma_{13} \quad (2.6.11c)$$

其中  $E$  為楊氏模數， $G$  為剪力模數。

將(2.6.11)式代入(2.6.10)式中可得

$$\delta W_{\text{int}} = E \int_a^b e_{11} \delta e_{11} dV + G \int_a^b (\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \quad (2.6.12)$$

將(2.5.7)式及(2.5.8)式代入(2.6.12)式中，經整理後(2.6.12)式的第一個積分式可寫成

$$\begin{aligned} & \int_a^b E e_{11} \delta e_{11} dV \\ &= E \int_a^b \left\{ \delta \varepsilon_0 [\varepsilon_0 A - \varepsilon_0^2 A + \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 I_p + \theta_{2,s}^2 I_y + \theta_{3,s}^2 I_z \right. \\ & \quad + \theta_{1,ss} (1 + \varepsilon_0) A_\omega + 2\theta_{2,s} \theta_{1,ss} \Omega_z - \theta_{3,s} \theta_{1,ss} \Omega_y + \theta_{1,ss}^2 A_{\omega\omega}] \\ & \quad + \delta \theta_1 [\theta_{2,s} \theta_{3,s} (I_y - I_z) + \theta_{2,s} \theta_{1,ss} \Omega_y + \theta_{3,s} \theta_{1,ss} \Omega_z] \\ & \quad + \delta \theta_{1,s} [\varepsilon_0 \theta_{1,s} I_p + \frac{1}{2} I_4 \theta_{1,s}^3 + \theta_{1,s} \theta_{2,s} (\alpha_{yz} + \alpha_z) - \theta_{1,s} \theta_{3,s} (\alpha_y + \alpha_{zy}) \\ & \quad + \theta_{1,s} \theta_{1,ss} \Omega_p] + \delta \theta_{1,ss} [\varepsilon_0 A_\omega + \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 \Omega_p + \theta_1 \theta_{2,s} \Omega_y \\ & \quad + \theta_{2,s} (1 + \varepsilon_0) \Omega_z - \theta_{3,s} (1 + \varepsilon_0) \Omega_y + \theta_1 \theta_{3,s} \Omega_z + \theta_{1,ss} (1 + \varepsilon_0) A_{\omega\omega}] \\ & \quad + \delta \theta_{2,s} [\theta_{2,s} (1 + \varepsilon_0) I_y + \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 (\alpha_{yz} + \alpha_z) + \theta_1 \theta_{3,s} (I_y - I_z) \\ & \quad + \theta_1 \theta_{1,ss} \Omega_y + \theta_{1,ss} (1 + \varepsilon_0) \Omega_z] \\ & \quad - \delta \theta_{3,s} [-\theta_1 \theta_{2,s} (I_y - I_z) + \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 (\alpha_y + \alpha_{zy}) - \theta_3 (1 + \varepsilon_0) I_z \\ & \quad \left. + \theta_{1,ss} (1 + \varepsilon_0) \Omega_y - \theta_{1,s} \theta_{1,ss} \Omega_z \right\} ds \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

(2.6.12)式的第二個積分式可寫成

$$\begin{aligned} & G \int_a^b (\gamma_{12} \delta \gamma_{12} + \gamma_{13} \delta \gamma_{13}) dV \\ &= G \int_a^b \left\{ \delta \varepsilon_0 \left( \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 J \right) + \delta \theta_{1,s} (\theta_{1,s} J + \frac{1}{2} \theta_{2,s} \theta_{3,s} J - \theta_{1,s} \theta_{2,s} J_z - 2\theta_{1,s} \theta_{2,s} J_1 \right. \\ & \quad + \theta_{1,s} \theta_{3,s} J_y + 2\theta_{1,s} \theta_{3,s} J_2 - \frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,s} J - \theta_{1,s} \theta_{1,ss} J_\omega) - \delta \theta_{1,ss} (\theta_{1,s}^2 J_\omega) \\ & \quad \left. - \delta \theta_2 \left( \frac{1}{2} \theta_{1,s} \theta_{3,s} J \right) + \delta \theta_{2,s} \left( \frac{1}{2} \theta_{1,s} \theta_{3,s} J - \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 J_z - \theta_{1,s}^2 J_1 \right) \right\} ds \end{aligned}$$

$$+ \delta\theta_3 \left( \frac{1}{2} \theta_{1,s} \theta_{2,s} J \right) + \delta\theta_{3,s} \left( -\frac{1}{2} \theta_{1,s} \theta_{2,s} J + \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 J_y + \theta_{1,s}^2 J_z \right) \} ds \quad (2.6.14)$$

其中

$$J = \iint (y^2 + z^2 + yw_{,z} - zw_{,y}) dA$$

$$J_1 = \iint [\omega(y + \omega_{,z})] dz dy = - \iint z[\omega_{,y}(-z + \omega_{,y}) + \omega_{,z}(y + \omega_{,z})] dy dz$$

$$J_2 = \iint [\omega(-z + \omega_{,y})] dy dz = - \iint y[\omega_{,y}(-z + \omega_{,y}) + \omega_{,z}(y + \omega_{,z})] dy dz$$

$$I_y = \int z^2 dA \quad , \quad I_z = \int y^2 dA \quad , \quad I_p = I_y + I_z \quad , \quad I_4 = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

$$\alpha_y = \int y^3 dA \quad , \quad \alpha_{yz} = \int y^2 z dA \quad , \quad \alpha_z = \int z^3 dA \quad , \quad \alpha_{zy} = \int z^2 y dA$$

$$\Omega_y = \int y\omega dA \quad , \quad \Omega_z = \int z\omega dA \quad , \quad A_\omega = \int \omega dA \quad , \quad A_{\omega\omega} = \int \omega^2 dA$$

$$\Omega_{yy} = \int y^2 \omega dA \quad , \quad \Omega_{zz} = \int z^2 \omega dA \quad , \quad \Omega_p = \Omega_{yy} + \Omega_{zz}$$

$$J_y = \int y(y^2 + z^2 - \omega_{,y}^2 - \omega_{,z}^2) dA$$

$$J_z = \int z(y^2 + z^2 - \omega_{,y}^2 - \omega_{,z}^2) dA$$

$$J_\omega = \int \omega(y^2 + z^2 - \omega_{,y}^2 - \omega_{,z}^2) dA$$

如斷面為雙軸對稱，則  $J_1, J_2, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_{yz}, \alpha_{zy}, \Omega_y, \Omega_z, \Omega_{yy}, \Omega_{zz}$

,  $\Omega_p, J_\omega, J_y, J_z, A_\omega$  在斷面上的積分值均為零，所以(2.6.13)式與(2.6.14)式可分別簡

化如下

$$\begin{aligned} & \int_a^b E e_{11} \delta e_{11} dV \\ &= E \int_a^b \left\{ \delta \varepsilon_0 [A \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0) + \frac{1}{2} I_p \theta_{1,s}^2 + I_y \theta_{2,s}^2 + I_z \theta_{3,s}^2 + \theta_{1,ss}^2 A_{\omega\omega}] \right. \\ & \quad + \delta \theta_1 (I_y - I_z) \theta_{2,s} \theta_{3,s} + \delta \theta_{1,s} (\varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + \frac{1}{2} I_4 \theta_{1,s}^3) \\ & \quad \left. + \delta \theta_{1,ss} [\theta_{1,ss} A_{\omega\omega} (1 + \varepsilon_0)] + \delta \theta_{2,s} [\theta_1 \theta_{3,s} (I_y - I_z) + \theta_{2,s} I_y (1 + \varepsilon_0)] \right\} dV \end{aligned}$$

$$+ \delta\theta_{3,s}[\theta_1\theta_{2,s}(I_y - I_z) + \theta_{3,s}I_z(1 + \varepsilon_0)]ds \quad (2.6.15)$$

$$\begin{aligned} & G \int_a^b (\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13}) dV \\ &= GJ \int_a^b \left\{ \delta\varepsilon_0 \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 + \delta\theta_{1,s} \left[ \theta_{1,s} + \frac{1}{2} \theta_{2,s}\theta_3 - \frac{1}{2} \theta_2\theta_{3,s} \right] - \delta\theta_2 \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_{3,s} \right. \\ & \quad \left. + \delta\theta_{2,s} \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_3 + \delta\theta_3 \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_{2,s} + \delta\theta_{3,s} \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_2 \right\} ds \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

將(2.5.11)式代入(2.6.15)式及(2.6.16)式，則 $\delta W_{\text{int}}$ 可寫成下式

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_a^b Ee_{11}\delta e_{11}dV + G \int_a^b (\gamma_{12}\delta\gamma_{12} + \gamma_{13}\delta\gamma_{13}) dV \\ &= E \int_a^b \left\{ \delta u_{,s} A \bar{\varepsilon}_0 + \delta\theta_1 (I_y - I_z) \theta_{2,s} \theta_{3,s} + \delta\theta_{1,s} (\varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + \frac{1}{2} I_4 \theta_{1,s}^3) \right. \\ & \quad + \delta\theta_{1,ss} [\theta_{1,ss} A \omega \omega (1 + \varepsilon_0)] + \delta\theta_2 \theta_2 A \bar{\varepsilon}_0 \\ & \quad + \delta\theta_{2,s} [\theta_1 \theta_{3,s} (I_y - I_z) + \theta_{2,s} I_y (1 + \varepsilon_0)] + \delta\theta_3 \theta_3 A \bar{\varepsilon}_0 \\ & \quad \left. + \delta\theta_{3,s} [\theta_1 \theta_{2,s} (I_y - I_z) + \theta_{3,s} I_z (1 + \varepsilon_0)] \right\} ds \\ & \quad + GJ \int_a^b \left\{ \delta u_{,s} \frac{1}{2} \theta_{1,s}^2 + \delta\theta_{1,s} \left[ \theta_{1,s} + \frac{1}{2} \theta_{2,s}\theta_3 - \frac{1}{2} \theta_2\theta_{3,s} \right] \right. \\ & \quad \left. - \delta\theta_2 \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_{3,s} + \delta\theta_{2,s} \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_3 + \delta\theta_3 \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_{2,s} - \delta\theta_{3,s} \frac{1}{2} \theta_{1,s}\theta_2 \right\} ds \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

其中

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{1}{A} [A\varepsilon_0(1 + \varepsilon_0) + \frac{1}{2} I_p \theta_{1,s}^2 + I_y \theta_{2,s}^2 + I_z \theta_{3,s}^2 + \theta_{1,ss}^2 A \omega \omega]$$

對一斷面為雙軸對稱之梁，由(2.6.4)式、(2.6.9)式與(2.6.17)式可得下列方程式：

$$M_{1,s}^\theta = E(I_y - I_z) \theta_{2,s} \theta_{3,s} \quad (2.6.18)$$

$$M_{2,s}^\theta - F_3 = \underline{F_1 \theta_2} - \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_{3,s} \quad (2.6.19)$$

$$M_{3,s}^\theta + F_2 = \underline{F_1 \theta_3} + \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_{2,s} \quad (2.6.20)$$

$$F_{1,s} = F_{2,s} = F_{3,s} = 0 \quad (2.6.21)$$

$$M_1^\theta + B_{,s}^\theta = E\varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + C[\theta_{1,s} + \frac{1}{2}\theta_{2,s}\theta_3 - \frac{1}{2}\theta_2\theta_{3,s}] + \frac{1}{2}EI_4\theta_{1,s}^3 \quad (2.6.22)$$

$$M_2^\theta = E[\theta_{2,s}I_y(1+\varepsilon_0) + \theta_1\theta_{3,s}(I_y - I_z)] + \frac{1}{2}C\theta_{1,s}\theta_3 \quad (2.6.23)$$

$$M_3^\theta = E[\theta_{3,s}I_z(1+\varepsilon_0) + \theta_1\theta_{2,s}(I_y - I_z)] - \frac{1}{2}C\theta_{1,s}\theta_2 \quad (2.6.24)$$

$$B^\theta = C_1\theta_{1,ss}(1+\varepsilon_0) \quad (2.6.25)$$

$$F_1 = EA\bar{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2}C\theta_{1,s}^2 \quad (2.6.26)$$

其中

(2.6.19)與(2.6.20)式中之 $F_1$ 為(2.6.26)式的 $F_1$ ， $C_1 = EA_{\omega\omega}$ 為翹曲剛度 (warping rigidity)， $C = GJ$ 為扭轉剛度(torsional rigidity)。

(2.6.18)~(2.6.26)式中保留變形參數的全部一次項、二次項和部份三次項(含底線項)。(2.6.18)~(2.6.21)式可視為平衡方程式，(2.6.22)~(2.6.26)式可視為構成方程式。因此，由(2.6.1)式，(2.6.22)~(2.6.26)式即可得傳統力矩在元素座標上的構成方程式。由(2.4.11)式，將在元素座標上的傳統力矩轉換到元素截面座標上，即可求得傳統力矩在截面主軸上的構成方程式。由(2.6.18)~(2.6.26)式也可發現如果僅保存變形參數的一次項，則(2.6.18)~(2.6.26)式就變成一階梁理論用的平衡方程式及構成方程式。



### 第三章 挫屈分析

#### 3.1 問題描述

如圖四所示之簡支梁在 B 點先受一軸向保守力  $P$  作用，然後在 A,B 兩端各加上一保守力矩  $M$ 。如圖五所示之懸臂梁在其自由端先加上一軸向保守力  $P$ ，然後在加上一保守力矩  $M$ ，當  $M$  超過某一值時，會引起結構的側向扭轉挫屈(Later-torsional buckling)，該值則稱為挫屈彎矩(Buckling moment)。本文中將探討軸力  $P$  的大小對挫屈彎矩的影響。

本章中取梁變形前的形心軸為總體座標的  $X_1$  軸，兩個梁截面的主軸為  $X_2$  及  $X_3$ 。令  $I_y$ 、 $I_z$  分別代表斷面對  $X_2$  及  $X_3$  軸的二次矩，為了方便說明起見，假設  $I_y > I_z$ 。軸向力  $P$  為施加於  $X_1$  軸方向的保守力，彎矩  $M$  為施加在  $X_1 X_3$  平面上。彎矩的施加方式是假設在自由端上有一剛性相接之剛體圓盤，且圓盤面是在  $X_1 X_3$  平面上，圓盤重量不計。此時二個作用無窮遠處，大小相等，方向相反的保守力透過二條環繞於圓盤上的繩索施加一彎矩。

如果作用在無窮遠處的保守力平行於  $X_1$  軸的方向則稱此彎矩為 first kind Quasi Tangential Moment 或簡稱為 QT-1 型彎矩(圖六(a))。同樣地，如果作用在無窮處的保守力平行於  $X_3$  軸方向則稱此彎矩為 second kind Quasi Tangential Moment 或簡稱 QT-2 型彎矩(圖六(b))。如果 QT-1 和 QT-2 同時作用，則稱此彎矩為 Semi-Tangential Moment 或簡稱 ST 型彎矩(圖六(c))。無論是 QT-1、QT-2、ST 型的彎矩都可表示成力矩的向量形式  $\mathbf{M}^g = \{0 \quad M \quad 0\}$ ，其中  $M = 2rF$  其中  $r$  為圓盤之半徑， $F$  為保守力大小，上標  $g$  代表總體座標系統。

如果在一自由端施加一  $\delta\boldsymbol{\phi}^g = \{\delta\phi_1^g \quad \delta\phi_2^g \quad \delta\phi_3^g\}$  的微小擾動時( $\delta\phi_i^g$  代表繞  $X_i$  軸的微小旋轉)對 QT-1 型的彎矩而言，其端點處力臂

$\mathbf{r} = \{0 \quad 0 \quad r\}$  之變化量為

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\phi}^g \times \mathbf{r} = \{r\delta\phi_2^g \quad r\delta\phi_1^g \quad 0\} \quad (3.1.1)$$

而力矩變化量為

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M}^g &= 2\delta\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 2\{r\delta\phi_2^g \quad r\delta\phi_1^g \quad 0\} \times \{F \quad 0 \quad 0\} \\ &= \{0 \quad 0 \quad 2rF\delta\phi_1^g\} \end{aligned}$$

或是寫成

$$\Delta\mathbf{M}^g = \{0 \quad 0 \quad M\delta\phi_1^g\} \quad (3.1.2)$$

所以，QT-1 型的彎矩在端點受到  $\delta\varphi^g$  的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g + \Delta\mathbf{M}^g = \{ 0 \quad M \quad M\delta\phi_1^g \} \quad (3.1.3)$$

同理，QT-2 型的彎矩在端點受到  $\delta\varphi^g$  的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g + \Delta\mathbf{M}^g = \{ M\delta\phi_3^g \quad M \quad 0 \} \quad (3.1.4)$$

同理，ST 型的彎矩在端點受到  $\delta\varphi^g$  的擾動後，其端點所承受的負荷變成

$$\mathbf{M}^g + \Delta\mathbf{M}^g = \left\{ \frac{1}{2}M\delta\phi_3^g \quad M \quad \frac{1}{2}M\delta\phi_1^g \right\} \quad (3.1.5)$$

當負荷小於挫屈負荷時，滿足平衡方程式的變形只有主要平衡路徑，但當負荷等於挫屈負荷時滿足平衡方程式的變形除了主要平衡路徑還有次要平衡路徑。

為了求得挫屈負荷，本文先求出梁結構在某一大小  $P$  和  $M$  作用下的主要平衡路徑，然後在該平衡位置上加上擾動位移，使其到達一新的變形位置，若此新的變形位置也能滿足平衡方程式，則該負荷即為挫屈負荷。本文在分析時將梁分成  $N$  個元素(圖七)，共有  $N+1$  個節點。每個元素在其元素座標上都需滿足平衡方程式及構成方程式((2.6.18)~(2.6.26)式)，相鄰兩元素在共同節點上都需滿足變形的相容條件及力的平衡條件，即有相同的位移、旋轉、曲率、軸向扭轉率、合力、合力矩及廣義雙力矩。梁元素在結構的兩端點都需滿足外加的位移和力的邊界條件。

### 3.2 主要平衡路徑的統御方程式及其解法

本節中僅探討簡支梁受端點彎矩及軸向壓力的情況。簡支梁受軸向拉力及懸臂梁的情況在附錄(A)和(B)中說明。

如圖八所示之簡支梁在挫屈前主要平衡路徑的變形僅有在  $X_1X_3$  平面上的位移，即

$v = \frac{dv}{ds} = \theta_1 = 0$ ，所以任一元素在其元素座標上的旋轉參數向量可以表示成

$$\boldsymbol{\theta}^0 = \{ 0 \quad \theta_2^0 \quad 0 \} \quad (3.2.1)$$

$$\theta_2^0 = \sin \varphi = -\frac{dw}{ds} \quad (3.2.2)$$

其中  $\varphi$  為梁的切線和其元素座標之  $x_1$  軸的夾角， $w$  為在  $x_2$  軸方向的位移。

令  $\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$  表示梁的曲率，當  $\varphi \ll 1$  時，利用近似式  $\varphi \approx \theta_2^0$  及將(3.2.2)式微分一次可得

$$\kappa = \frac{d\theta_2^0}{ds} = -\frac{d^2w}{ds^2} \quad (3.2.3)$$

將(3.2.1)式代入(2.6.19)、(2.6.23)及(2.6.26)式並採用近似式 $1 + \varepsilon_0$  1可得

$$\frac{dM_2}{ds} - F_3 = F_1\theta_2^0 \quad (3.2.4)$$

$$M_2 = EI\theta_{2,s}^0 \quad (3.2.5)$$

$$F_1 = AE\varepsilon_0 + EI_y(\theta_{2,s}^0)^2 \quad (3.2.6)$$

其中

$$F_1 = -P \cos \phi^e \quad (3.2.7)$$

$\phi^e$  表示元素座標  $x_1$  軸和  $X_1$  軸的夾角(見圖九)。

將(3.2.3)式代入(3.2.5)式可得

$$\kappa = \frac{M_2}{EI_y} \quad (3.2.8)$$

將(3.2.4)式微分一次，並將(3.2.2)式、(3.2.5)式、(3.2.7)式及(2.6.21)式代入其中可得

$$EI_y \frac{d^4w}{ds^4} + P \cos \phi^e \frac{d^2w}{ds^2} = 0 \quad (3.2.9)$$

(3.2.9)式為梁元素在主要平衡路徑的統御方程式。

令  $\zeta = \frac{s}{S} - \frac{1}{2}$  其中  $S$  為梁元素的弧長， $-\frac{1}{2} \leq \zeta \leq \frac{1}{2}$ ，則  $\frac{d}{ds}$  可表示成

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\zeta}{ds} \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{S} \frac{d}{d\zeta} \quad (3.2.10)$$

將(3.2.10)式代入(3.2.9)式中可將其無因次化成

$$\frac{EI_y}{S^2} \frac{d^4w}{d\zeta^4} + P \cos \phi^e \frac{d^2w}{d\zeta^2} = 0 \quad (3.2.11)$$

(3.2.11)式的通解可表示成

$$w(\zeta) = \mathbf{N}^t(\zeta) \mathbf{q}^0 \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{N}(\zeta) = \{\sin a\zeta \quad \cos a\zeta \quad \zeta \quad 1\} \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{q}^0 = \{D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4\} \quad (3.2.14)$$

$$a = \left( \frac{PS^2 \cos \phi^e}{EI_y} \right)^{1/2} \quad (3.2.15)$$

其中  $D_i (i=1 \sim 4)$  為未定係數，其值必須由邊界條件決定。

圖九中梁元素之兩端節點  $j (j=1, 2)$  的邊界條件可表示如下

$$w(\zeta_1) = w(\zeta_2) = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\kappa_1 = \frac{-1}{S^2} w_{,\zeta\zeta}(\zeta_1), \quad \kappa_2 = \frac{-1}{S^2} w_{,\zeta\zeta}(\zeta_2) \quad (3.2.17)$$

其中  $\zeta_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\zeta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\kappa_1, \kappa_2$  分別為梁在  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$  的曲率。由(3.2.8)式可知

$$\kappa_1 = \frac{M_{21}}{EI_y}, \quad \kappa_2 = \frac{M_{22}}{EI_y} \quad (3.2.18)$$

其中  $M_{2j} (j=1, 2)$  為  $M_2$  在節點  $j$  之值

將(3.2.12)式代入(3.2.16)及(3.2.17)式可以得到

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{T}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{T} = \frac{S^2}{2a^2} \begin{bmatrix} -1/\sin \frac{a}{2} & 1/\sin \frac{a}{2} \\ 1/\cos \frac{a}{2} & 1/\cos \frac{a}{2} \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_1 \quad \kappa_2\} \quad (3.2.21)$$

將(3.2.19)式代入(3.2.12)式可得

$$w(\zeta) = \mathbf{N}^t(\zeta)\mathbf{T}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{N}_w^t(\zeta)\boldsymbol{\kappa} \quad (3.2.22)$$

由圖九可知梁元素在節點  $j (j=1, 2)$  的切線和水平線( $X_1$  軸)的夾角可表示成

$$\phi_t^j = \phi^e - \phi^j \quad (3.2.23)$$

其中  $\phi^e$  在(3.2.7)式中已定義， $\phi^j$  為(3.2.2)式中的  $\varphi$  在節點  $j$  之值。

由圖九的自由體圖，節點 1 的合力矩為 0 及(3.2.18)式可得

$$\sin \phi^e = \frac{EI_y}{Pl} (\kappa_2 - \kappa_1) \quad (3.2.24)$$

(3.2.24)式中  $l$  為梁元素的弦長，當  $\varphi \ll 1$  時，利用近似式  $\varphi \approx \sin \varphi$ ，(3.2.2)式及(3.2.22)式可得

$$\varphi = -\frac{dw}{ds} = -\mathbf{N}_w^t \boldsymbol{\kappa} \quad (3.2.25)$$

由(3.2.25)式可得

$$\varphi^j = -\mathbf{N}_w^t(\zeta_j) \boldsymbol{\kappa} \quad (3.2.26)$$

因梁元素在共同的節點上有相同的切線，所以由圖十及(3.2.23)式可以得到

$$F_i = \phi_{t(i-1)}^2 - \phi_{t(i)}^1 = 0 \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (3.2.27)$$

$$\phi_{t,(i)}^j = \phi_{(i)}^e - \varphi_{(i)}^j \quad (3.2.28)$$

其中下標  $(i)$  表示第  $(i)$  個元素，下標  $i$  表示系統之第  $i$  個節點，上標  $j$  ( $j=1, 2$ ) 表示該元素的節點  $j$ ，因梁元素在共同的節點上有相同的曲率，所以在系統節點  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, N+1$ ) 的曲率可用  $\kappa_i$  表示。由(3.2.24)及(3.2.26)式可知元素  $(i)$  之  $\phi_{(i)}^e$  及  $\varphi_{(i)}^j$  都是  $\kappa_i, \kappa_{i+1}$   $i=1, 2, \dots, N$  的函數。

我們可以將(3.2.27)式寫成如下的向量形式

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{C}) = \mathbf{F}(\mathbf{C}) = \mathbf{0} \quad (3.2.29)$$

$$\mathbf{C} = \{\kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_N\} \quad (3.2.30)$$

(3.2.30)式即為梁結構在主要平衡路徑的統御方程式。因本題中  $\kappa_1 = \kappa_{N+1} = \frac{M}{EI_y}$  為已知，所以不包括在(3.2.30)式中。(3.2.30)式為  $N-1$  個  $N-1$  元的非線性聯立代數方程式。令

$$\mathbf{f} = \{-\phi_t^1 \quad \phi_t^2\} \quad (3.2.31)$$

其中  $\phi_t^j$  已在(3.2.23)式中定義。若將  $\mathbf{f}$  視為元素的節點內力則(3.2.29)式中的  $\mathbf{F}$  可視為系統的節點內力，且可以和一般有限元素法一樣由  $\mathbf{f}$  組合而成；(3.2.29)式中之  $\boldsymbol{\Psi}$  可視為系統的不平衡力。

當軸向壓力  $F$  和端點的彎矩  $M$  為已知時，系統在節點  $i$  的曲率可以由(3.2.29)式決定。本文中採用牛頓法解(3.2.29)式，本文中以一個元素(即  $N=1$ )的解析解，作為牛頓法的初解(Predictor)。將(3.2.22)式代入(3.2.3)式，及  $S=L$ ， $\cos \phi^e = 1$  代入(3.2.15)式，可得  $N=1$  時的曲率如下

$$k = \frac{M}{EI_y} \frac{\cos a \zeta}{\cos a/2} \quad (3.2.32)$$

$$a = \left( \frac{PL^2}{EI_y} \right)^{1/2} \quad (3.2.33)$$

牛頓法中  $\mathbf{C}$  的改正量可表示成

$$\delta \mathbf{C} = -\mathbf{K}_T^{-1} \boldsymbol{\Psi} \quad (3.2.34)$$

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.2.35)$$

其中  $\mathbf{K}_T$  可視為系統的切線剛度矩陣。 $\mathbf{K}_T$  可以由元素的剛度矩陣  $\mathbf{k}$  利用直接勁度法(direct stiffness method)組合而成。元素的剛度矩陣  $\mathbf{k}$  可以由(3.2.31)式對  $\boldsymbol{\kappa}$  (3.2.21)式微分求得，並可表示如下

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.36)$$

其中

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_\phi + N'_{w,1}(\zeta_1) & k_{12} &= -k_\phi + N'_{w,2}(\zeta_1) \\ k_{21} &= -k_\phi - N'_{w,1}(\zeta_2) & k_{22} &= k_\phi - N'_{w,2}(\zeta_2) \end{aligned}$$

$$k_\phi = \frac{EI_y}{Pl \cos \phi^e} \quad (3.2.37)$$

$N'_{w,k}$  表示  $N'_w$  (3.2.25)式中之第  $k$  ( $k=1,2$ ) 個元素

### 3.3 梁結構之次要平衡路徑

#### 3.3.1 擾動後的元素座標及變形參數

本節中的推導考慮了簡支梁和懸臂梁兩種情況。當梁結構由 3.2 節中求得之主要平衡路徑上受到擾動位移作用時會達到一個新變形位置。令梁元素節點  $j$  ( $j=1,2$ ) 在總體座標上的擾動位移及旋轉向量為

$$\mathbf{u}_j^g = \{ u_j^g, v_j^g, w_j^g \} \quad (3.3.1)$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^g = \{ \phi_{1j}^g, \phi_{2j}^g, \phi_{3j}^g \} \quad (3.3.2)$$

其中  $( )^g$  代表  $( )$  是在總體座標上定義的， $\phi_{ij}^g$  為梁元素截面在節點  $j$  繞  $X_i$  軸的擾動

旋轉。梁元素節點  $j$  ( $j=1,2$ ) 在總體座標上形心軸的擾動扭轉率為  $\beta_j$ 。

由圖九知，在擾動前的平衡位置，元素座標  $x_i$  和總體座標  $X_i$  的關係表示成

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi^e & 0 & -\sin \phi^e \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi^e & 0 & \cos \phi^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{ge} \mathbf{x} \quad (3.3.3)$$

其中  $\phi^e$  為  $X_i$  軸和  $x_i$  軸的夾角，由(3.3.3)式可得

$$\mathbf{u}_j^g = \mathbf{A}_{ge} \mathbf{u}_j \quad (3.3.4)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^g = \mathbf{A}_{ge} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (3.3.5)$$

其中  $\mathbf{u}_j = \{u_j, v_j, w_j\}$ 、 $\boldsymbol{\varphi}_j = \{\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}\}$  為元素節點  $j$  ( $j=1, 2$ ) 在元素座標  $x_i$  上的擾動位移及旋轉向量，節點扭轉率的擾動量與座標系統無關，故在元素座標仍為  $\beta_j$ 。

當元素節點受到  $\mathbf{u}_j$  及  $\boldsymbol{\varphi}_j$  擾動後，利用文獻[5]中的方法，可以決定擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  及節點旋轉參數  $\theta_{ij}$ ，其推導過程在附錄 C 中有詳盡的說明。梁元素受擾動後在任意截面的旋轉向量可表示成

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \quad \theta_2^0 + \theta_2 \quad \theta_3\} \quad (3.3.6)$$

在(3.3.6)式中  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  是由所施加的擾動量造成的，故為極小量 (infinitesimal quantity) 即  $\theta_i \rightarrow 0$  ( $i=1, 2, 3$ ) 而  $\theta_2^0$  為擾動前的旋轉參數為一有限量 (finite quantity)。由元素座標的定義可知，當梁元素的數目取的夠多時  $\theta_2^0$  為一微小量 (small quantity)，即  $\theta_2^0 \ll 1$ ，但仍為一有限量。由以上討論可知(2.6.18)~(2.6.26)式在任一元素上都能適用。在本文的推導過程中因  $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 為極小量，所以僅保留  $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 及其微分至一次項，而  $\theta_2^0$  為有限量，故  $\theta_2^0$  及其微分項都全部保留。

由(2.6.18)~(2.6.26)式中可發現當僅保留至  $\theta_i$  及其微分的一次項時，僅  $\theta_1$  和  $\theta_3$  有偶合關係。且由附錄 C 中可發現  $\theta_{1j}$  和  $\theta_{3j}$  僅和擾動位移  $v_j, \phi_{1j}, \phi_{3j}$  ( $j=1, 2$ ) 有

關，所以本研究在以後的推導中僅考慮與  $\theta_1$ 、 $\theta_3$  有關的統御方程式及擾動量，即取

$u_j = w_j = \phi_{2j} = \theta_2 = 0$ 。所以由附錄 C 可知本節中擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  與擾動前的元素座標間的關係可表示成

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{e\bar{e}} \bar{\mathbf{x}} \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{A}_{e\bar{e}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta v}{\ell} & 0 \\ \frac{\Delta v}{\ell} & 1 & -\bar{e}_{23} \\ 0 & \bar{e}_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

其中  $\bar{e}_{23} = \frac{1}{2}(\phi_{11} + \phi_{12}) - \frac{1}{4}s_1(\phi_{31} - \frac{\Delta v}{\ell}) - \frac{1}{4}s_2(\phi_{32} - \frac{\Delta v}{\ell})$ ， $\Delta v = v_2 - v_1$

$s_j = \sin \phi_{2j}^0 = \theta_{2j}^0$  ( $j=1, 2$ )， $\ell$  為元素擾動前的弦長。

因本研究以後的推導都是以節點在總體座標上的擾動位移、旋轉及扭轉率為獨立變數，所以必須將擾動後之元素座標的節點擾動位移及旋轉參數表示成總體座標之節點擾動量的函數。

令  $\mathbf{u}_g$  和  $\mathbf{u}_e$  代表元素的節點擾動位移向量， $\mathbf{u}_\theta$  代表擾動後的節點參數向量，並表示如下：

$$\mathbf{u}_g = \{ v_1^g, \phi_{11}^g, \phi_{31}^g, \beta_1, v_2^g, \phi_{12}^g, \phi_{32}^g, \beta_2 \} \quad (3.3.9)$$

$$\mathbf{u}_e = \{ v_1, \phi_{11}, \phi_{31}, \beta_1, v_2, \phi_{12}, \phi_{32}, \beta_2 \} \quad (3.3.10)$$

$$\mathbf{u}_\theta = \{ \bar{v}_1, \theta_{11}, \theta_{31}, \beta_1, \bar{v}_2, \theta_{12}, \theta_{32}, \beta_2 \} \quad (3.3.11)$$

其中  $\mathbf{u}_g$  和  $\mathbf{u}_e$  的分量在(3.3.1)、(3.3.2)、(3.3.4)及(3.3.5)式中已有定義。

$\theta_{1j}, \theta_{3j}$  ( $j=1, 2$ ) 為擾動後節點  $j$  的旋轉參數， $\bar{v}_j$  ( $j=1, 2$ ) 表示元素節點  $j$  在擾動後之元素座標  $\bar{x}_2$  軸方向的擾動位移。由元素座標的定義可知  $\bar{v}_j = 0$ ，因  $\beta_j$  和座標系統無

關，故在  $x_i$  和  $\bar{x}_i$  座標中有相同的值。

由(3.3.3)~(3.3.5)式可得

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{T}_{ge} \mathbf{u}_e \quad (3.3.12)$$



$$\mathbf{T}_{ge} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi^e & -\sin \phi^e & 0 \\ 0 & \sin \phi^e & \cos \phi^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

其中  $\phi^e$  在(3.2.24)式中已有定義，且  $\mathbf{0}$  為  $4 \times 4$  的零矩陣， $j=1,2$ 。

由附錄 C 中可得  $\theta_{1j}, \theta_{3j}$  與擾動量  $v_j, \phi_{1j}, \phi_{3j}$  之間的關係，所以(3.3.10)及(3.3.11)式的關係可表示如下：

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{T}_{\theta e} \mathbf{u}_e \quad (3.3.15)$$

$$\mathbf{T}_{\theta e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s_1 & 0 & a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s_2 & 0 \\ b_1 & \frac{1}{2}s_1 & c_1 + \frac{s_1^2}{4} & 0 & -b_1 & -\frac{1}{2}s_1 & \frac{s_1s_2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}s_1 & 0 & -a & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}s_2 & 0 \\ b_2 & -\frac{1}{2}s_2 & \frac{s_1s_2}{4} & 0 & -b_2 & \frac{1}{2}s_2 & c_2 + \frac{s_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

$$\text{其中 } a = \frac{1}{4\ell}(s_1 - s_2), \quad b_j = \frac{c_j}{\ell} + \frac{s_j^2}{4\ell} + \frac{s_1s_2}{4\ell}$$

### 3.3.2 梁元素在次要平衡路徑的統御方程式

本節中除了另有聲明外，所有的變數都是在擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  中定義。

$\theta_1, \theta_3$  在次要平衡路徑之統御方程式的推導的過程如下：

將(2.6.22)式對  $s$  微分可得

$$M_{1,s}^\theta = B_{1,ss}^\theta + E\varepsilon_{0,s}I_P\theta_{1,s} + E\varepsilon_0I_P\theta_{1,ss} + C\theta_{1,ss} - \frac{C\theta_2^0\theta_{3,ss}}{2} + \frac{C\theta_{2,ss}^0\theta_3}{2} \quad (3.3.17)$$

將(2.6.25)式對  $s$  微分二次可得

$$B_{1,ss}^{\theta} = C_1(1 + \varepsilon_0)\theta_{1,ssss} + 2C_1\varepsilon_{0,s}\theta_{1,sss} + C_1\varepsilon_{0,ss}\theta_{1,ss} \quad (3.3.18)$$

將(2.6.20)式對  $s$  微分，並將(2.6.21)式代入其中，可得

$$M_{3,ss}^{\theta} = F_1\theta_{3,s} + \frac{1}{2}C\theta_{2,ss}^0\theta_{1,s} + \frac{1}{2}C\theta_{2,s}^0\theta_{1,ss} \quad (3.3.19)$$

將(2.6.24)式對  $s$  微分二次可得

$$\begin{aligned} M_{3,ss}^{\theta} = & E[\theta_{3,sss}I_z(1 + \varepsilon_0) + 2\theta_{3,ss}I_z\varepsilon_{0,s} + \theta_{3,s}I_z\varepsilon_{0,ss} + \theta_{2,s}^0\theta_{1,ss}(I_y - I_z) \\ & + 2\theta_{2,ss}^0\theta_{1,s}(I_y - I_z) + \theta_{2,sss}^0\theta_1(I_y - I_z)] \\ & - \frac{1}{2}C\theta_2^0\theta_{1,sss} - C\theta_{2,s}^0\theta_{1,ss} - \frac{1}{2}C\theta_{2,ss}^0\theta_{1,s} \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

分別將(3.3.17)、(3.3.18)式代入(2.6.18)式及(3.3.20)式代入(3.3.19)式可得

$$\begin{aligned} & -C_1(1 + \varepsilon_0)\theta_{1,ssss} - 2C_1\varepsilon_{0,s}\theta_{1,sss} + [C_1\varepsilon_{0,ss} + E\varepsilon_0I_P + C]\theta_{1,ss} \\ & + E\varepsilon_{0,s}I_P\theta_{1,s} - \frac{C\theta_2^0\theta_{3,ss}}{2} - E(I_y - I_z)\theta_{2,s}^0\theta_{3,s} + \frac{C\theta_{2,ss}^0\theta_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}C\theta_2^0\theta_{1,sss} + [\frac{3}{2}C\theta_{2,s}^0 - \theta_{2,s}^0(I_y - I_z)E]\theta_{1,ss} + [C\theta_{2,ss}^0 \\ & - 2\theta_{2,ss}^0(I_y - I_z)E]\theta_{1,s} - \theta_{2,sss}^0(I_y - I_z)\theta_1 - EI_z(1 + \varepsilon_0)\theta_{3,sss} \\ & - 2EI_z\varepsilon_{0,s}\theta_{3,ss} + (EI_z\varepsilon_{0,ss} + F_1)\theta_{3,s} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

其中  $\varepsilon_0$ 、 $\varepsilon_{0,s}$  及  $\varepsilon_{0,ss}$  可以求得如下：

將(3.3.1)式代入(2.6.26)式可得

$$F_1 = EA\varepsilon_0 + EI_y(\theta_{2,s}^0)^2 \quad (3.3.23)$$

因梁結構僅在端點受軸向壓力  $P$  及彎矩  $M$ ，當保留擾動量到一次項時，由(3.3.7)與(3.3.8)式知梁元素的軸力  $F_1 = -P\cos\phi^e$  和擾動前相同，所以  $\varepsilon_0$  可表示成

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon_p - \frac{I_y(\theta_{2,s}^0)^2}{A} \quad (3.3.24)$$

其中

$$\varepsilon_p = \frac{P\cos\phi^e}{EA} \quad (3.3.25)$$

將(3.3.24)式微分可得

$$\varepsilon_{0,s} = -\frac{2I_y\theta_{2,s}^0\theta_{2,ss}^0}{A} \quad (3.3.26a)$$

$$\varepsilon_{0,ss} = -\frac{2I_y[(\theta_{2,ss}^0)^2 + \theta_{2,s}^0\theta_{2,sss}^0]}{A} \quad (3.3.26b)$$

(3.3.21)及(3.3.22)式即為 $\theta_1$ 和 $\theta_3$ 在次要平衡路徑的統御方程式。

令

$$\zeta = \frac{s}{S} - \frac{1}{2} \quad (3.3.27)$$

將(2.4.5)式及(3.3.27)式代入(3.3.21)及(3.3.22)式中，並使用近似式 $1 + \varepsilon_0 \approx 1$ 則(3.3.21)及

(3.3.22)式可無因次化成以下的形式

$$\mathbf{P} \begin{Bmatrix} \theta_{1,\zeta\zeta\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} \end{Bmatrix} + \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} \theta_{1,\zeta\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta\zeta} \end{Bmatrix} + \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \theta_{1,\zeta\zeta} \\ v_{,\zeta\zeta} \end{Bmatrix} + \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \theta_{1,\zeta} \\ v_{,\zeta} \end{Bmatrix} + \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3.28)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -EI_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &= S \begin{bmatrix} -2C_1\varepsilon_{0,s} & -\frac{C\theta_2^0}{2} \\ \frac{C\theta_2^0}{2} & -2EI_z\varepsilon_{0,s} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= S^2 \begin{bmatrix} -C_1\varepsilon_{0,ss} + E\varepsilon_0 I_P + C & -E(I_y - I_z)\theta_{2,s}^0 \\ \frac{3}{2}C\theta_{2,s}^0 - \theta_{2,s}^0(I_y - I_z)E & -EI_z\varepsilon_{0,ss} + F_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= S^3 \begin{bmatrix} E\varepsilon_{0,s}I_P & \frac{C\theta_{2,ss}^0}{2} \\ C\theta_{2,ss}^0 - 2\theta_{2,ss}^0(I_y - I_z)E & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{T} &= S^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\theta_{2,sss}^0(I_y - I_z)E & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

### 3.3.3 擾動位移的級數解

假設(3.3.28)式的解可以表示成下列的級數

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbf{A}_n \quad (3.3.30)$$

$$\mathbf{A}_n = \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} \quad (3.3.31)$$

如前節所述， $\theta_1$  和  $v$  是定義在擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  中。

因(3.3.28)式的為二個聯立的四次線性常微分方程式，所以其解只有 8 個獨立的未定係數，本節中取  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  為獨立的未定係數，所以所有的  $\mathbf{A}_n (n \geq 4)$  都可以表示成  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  的函數，其間的遞迴關係可由以下的推導求得。由(3.2.12)~(3.2.14)式及(3.3.24)式知(3.3.28)式中的  $\theta_2^0, \varepsilon_0$  及其微分都是  $\sin a\zeta$  及  $\cos a\zeta$  的函數。因本節中採用了  $\zeta$  的多項式作為(3.3.28)式的級數解所以必須先將(3.3.14)式中的  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$  表示成以下多項式的形式。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{i=0}^m \zeta^i \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{R} &= \sum_{i=0}^m \zeta^i \mathbf{R}_i \\ \mathbf{S} &= \sum_{i=0}^m \zeta^i \mathbf{S}_i \\ \mathbf{T} &= \sum_{i=0}^m \zeta^i \mathbf{T}_i \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

其中  $m \geq 0$ ，本文中  $m$  最大取到 5， $\mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i, \mathbf{T}_i$  為常數矩陣。

將(3.3.31)，(3.3.32)式及  $m = 5$  代入(3.3.28)式中並將其化成  $\zeta^{n-4}$  的形式可得

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\zeta^{n-4} \mathbf{A}_n \\
& + \left( \sum_{i=0}^5 \zeta^i \mathbf{Q}_i \right) \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\zeta^{n-4} \mathbf{A}_{n-1} \\
& + \left( \sum_{i=0}^5 \zeta^i \mathbf{R}_i \right) \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\zeta^{n-4} \mathbf{A}_{n-2} \\
& + \left( \sum_{i=0}^5 \zeta^i \mathbf{S}_i \right) \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\zeta^{n-4} \mathbf{A}_{n-3} \\
& + \left( \sum_{i=0}^5 \zeta^i \mathbf{T}_i \right) \sum_{n=4}^{\infty} \zeta^{n-4} \mathbf{A}_{n-4} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.3.33}$$

將(3.3.33)式展開並按照 $\zeta$ 的次方排列可得

$$\begin{aligned}
& \left[ \mathbf{P} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \right. \\
& + \mathbf{R}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} + \mathbf{S}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_0 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \left. \right] \zeta^{n-4} \\
& + \left[ \mathbf{Q}_1 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{R}_1 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} \right. \\
& + \mathbf{S}_1 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_1 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \left. \right] \zeta^{n-3} + \left[ \mathbf{Q}_2 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \right. \\
& + \mathbf{R}_2 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} + \mathbf{S}_2 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_2 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \left. \right] \zeta^{n-2} \\
& + \left[ \mathbf{Q}_3 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{R}_3 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} \right. \\
& + \mathbf{S}_3 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_3 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \zeta^{n-1} \left. \right] + \left[ \mathbf{Q}_4 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \right. \\
& + \mathbf{R}_4 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} + \mathbf{S}_4 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_4 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \left. \right] \zeta^n \\
& + \left[ \mathbf{Q}_5 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{R}_5 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} \right. \\
& + \mathbf{S}_5 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_5 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4} \left. \right] \zeta^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

將(3.3.34)式化成  $\zeta^{n-4}$  的排列方式

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{P} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_n + \mathbf{Q}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-1)(n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-1} \\
& + \mathbf{R}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-2)(n-3)\mathbf{A}_{n-2} + \mathbf{S}_0 \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)\mathbf{A}_{n-3} + \mathbf{T}_0 \sum_{n=4}^{\infty} \mathbf{A}_{n-4}] \zeta^{n-4} \\
& + [\mathbf{Q}_1 \sum_{n=5}^{\infty} (n-2)(n-3)(n-4)\mathbf{A}_{n-2} + \mathbf{R}_1 \sum_{n=5}^{\infty} (n-3)(n-4)\mathbf{A}_{n-3} \\
& + \mathbf{S}_1 \sum_{n=5}^{\infty} (n-4)\mathbf{A}_{n-4} + \mathbf{T}_1 \sum_{n=5}^{\infty} \mathbf{A}_{n-5}] \zeta^{n-4} + [\mathbf{Q}_2 \sum_{n=6}^{\infty} (n-3)(n-4)(n-5)\mathbf{A}_{n-3} \\
& + \mathbf{R}_2 \sum_{n=6}^{\infty} (n-4)(n-5)\mathbf{A}_{n-4} + \mathbf{S}_2 \sum_{n=6}^{\infty} (n-5)\mathbf{A}_{n-5} + \mathbf{T}_2 \sum_{n=6}^{\infty} \mathbf{A}_{n-6}] \zeta^{n-4} \\
& + [\mathbf{Q}_3 \sum_{n=7}^{\infty} (n-4)(n-5)(n-6)\mathbf{A}_{n-4} + \mathbf{R}_3 \sum_{n=7}^{\infty} (n-5)(n-6)\mathbf{A}_{n-5} \\
& + \mathbf{S}_3 \sum_{n=7}^{\infty} (n-6)\mathbf{A}_{n-6} + \mathbf{T}_3 \sum_{n=7}^{\infty} \mathbf{A}_{n-7}] \zeta^{n-4} + [\mathbf{Q}_4 \sum_{n=8}^{\infty} (n-5)(n-6)(n-7)\mathbf{A}_{n-5} \\
& + \mathbf{R}_4 \sum_{n=8}^{\infty} (n-6)(n-7)\mathbf{A}_{n-6} + \mathbf{S}_4 \sum_{n=8}^{\infty} (n-7)\mathbf{A}_{n-7} + \mathbf{T}_4 \sum_{n=8}^{\infty} \mathbf{A}_{n-8}] \zeta^{n-4} \\
& + [\mathbf{Q}_5 \sum_{n=9}^{\infty} (n-6)(n-7)(n-8)\mathbf{A}_{n-6} + \mathbf{R}_5 \sum_{n=9}^{\infty} (n-7)(n-8)\mathbf{A}_{n-7} \\
& + \mathbf{S}_5 \sum_{n=9}^{\infty} (n-8)\mathbf{A}_{n-8} + \mathbf{T}_5 \sum_{n=9}^{\infty} \mathbf{A}_{n-9}] \zeta^{n-4} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

由(3.3.28)式可得下列遞迴關係式

當  $4 \leq n \leq 8$  時

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_n^j \mathbf{A}_{n-j} \tag{3.3.36}$$

當  $n \geq 9$  時

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_n^j \mathbf{A}_{n-j} \tag{3.3.37}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_n^1 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}_0}{n} \\
\mathbf{X}_n^2 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{R}_0 + (n-4)\mathbf{Q}_1]}{n(n-1)} \\
\mathbf{X}_n^3 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{S}_0 + (n-4)\mathbf{R}_1 + (n-4)(n-5)\mathbf{Q}_2]}{n(n-1)(n-2)} \\
\mathbf{X}_n^4 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_0 + (n-4)\mathbf{S}_1 + (n-4)(n-5)\mathbf{R}_2 + (n-4)(n-5)(n-6)\mathbf{Q}_3]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
\mathbf{X}_n^5 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_1 + (n-5)\mathbf{S}_2 + (n-5)(n-6)\mathbf{R}_3 + (n-5)(n-6)(n-7)\mathbf{Q}_4]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
\mathbf{X}_n^6 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_2 + (n-6)\mathbf{S}_3 + (n-6)(n-7)\mathbf{R}_4 + (n-6)(n-7)(n-8)\mathbf{Q}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
\mathbf{X}_n^7 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_3 + (n-7)\mathbf{S}_4 + (n-7)(n-8)\mathbf{R}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
\mathbf{X}_n^8 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{T}_4 + (n-8)\mathbf{S}_5]}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
\mathbf{X}_n^9 &= -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}_5}{n(n-1)(n-2)(n-3)}
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

由(3.3.36)及(3.3.37)式中的遞迴關係式，我們可以將 $\mathbf{A}_n (n \geq 4)$ 表示成 $\mathbf{A}_i (i = 0 \sim 3)$ 的函數，其推導過程如下所述。

令

$$\mathbf{A}_n = \sum_{j=0}^3 \mathbf{T}_j^n \mathbf{A}_j \quad (4 \leq n \leq 8) \tag{3.3.39}$$

比較(3.3.36)和(3.3.39)式可得

$$\mathbf{T}_j^4 = \mathbf{X}_4^j \quad (j = 0 \sim 3) \tag{3.3.40}$$

$$\mathbf{T}_j^n = \mathbf{X}_n^{n-j} + \sum_{i=1}^{n-4} \mathbf{X}_n^i \mathbf{T}_j^{n-i} \quad (j = 0 \sim 3), (5 \leq n \leq 8) \tag{3.3.41}$$

由(3.3.41)式的遞迴關係及(3.3.40)式即可求出(3.3.39)式中的 $\mathbf{T}_j^n (4 \leq n \leq 8)$

當  $n \geq 9$  時，令

$$\mathbf{A}_n = \sum_{i=0}^8 \mathbf{Y}_i^n \mathbf{A}_i \quad n \geq 9 \quad (3.3.42)$$

由(3.3.35)式可得

$$\mathbf{A}_{n-j} = \sum_{i=0}^8 \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \quad j=1 \sim 9 \quad (3.3.43)$$

將(3.3.43)式代入(3.3.37)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_n^j \sum_{i=0}^8 \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=0}^8 \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_n^j \mathbf{Y}_i^{n-j} \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

比較(3.3.42)式和(3.3.44)式可得

$$\mathbf{Y}_i^n = \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_n^j \mathbf{Y}_i^{n-j} \quad (i=0 \sim 8), (n \geq 9) \quad (3.3.45)$$

當  $n=9$  時，由(3.3.37)式可得

$$\mathbf{A}_9 = \sum_{j=1}^9 \mathbf{X}_9^j \mathbf{A}_{9-j} \quad (3.3.46)$$

由(3.3.44)式可得

$$\mathbf{A}_9 = \sum_{j=1}^9 \sum_{i=0}^8 \mathbf{X}_9^j \mathbf{Y}_i^{9-j} \mathbf{A}_i \quad (3.3.47)$$

比較(3.3.46)式和(3.3.47)式可得

$$\mathbf{Y}_i^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{if } i=k \\ \mathbf{0} & \text{if } i \neq k \end{cases} \quad (3.3.48)$$

其中  $i=0 \sim 8, k=0 \sim 8$ ， $\mathbf{I}$  為  $2 \times 2$  的單位矩陣， $\mathbf{0}$  為  $2 \times 2$  的零矩陣。

由(3.3.45)式中的遞迴關係式及(3.3.48)式即可求得  $\mathbf{Y}_i^n$  ( $n \geq 9, i=0 \sim 8$ ) ((3.3.42)式)。將(3.3.39)及(3.3.42)式代入(3.3.30)式，可將  $\{\theta_1, v\}$  的級數解表示成以下  $A_j$  ( $j=0 \sim 3$ ) 的函數

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^3 \mathbf{U}_j^N \mathbf{A}_j \quad (3.3.49)$$



$$\mathbf{U}_j^N = \zeta^j \mathbf{I} + \sum_{m=4}^8 \zeta^m \mathbf{T}_j^m + \sum_{n=9}^N \mathbf{Z}_j^n \quad (3.3.50)$$

$$\mathbf{Z}_j^n = \zeta^n (\mathbf{Y}_j^n + \sum_{m=4}^8 \mathbf{Y}_m^n \mathbf{T}_j^m) \quad (3.3.51)$$

其中  $9 \leq n \leq \infty$ ,  $j = 0 \sim 3$

本文在數值計算時，是以下式作為  $\{\theta_1, v\}$  級數解((3.3.49)式)的收斂準則

$$\frac{\|\mathbf{Z}_j^n\|_\infty}{\|\mathbf{U}_j^N\|_\infty} \leq E_{tol} \quad (3.3.52)$$

其中  $E_{tol}$  為所給定之容許誤差值， $\|\cdot\|_\infty$  為矩陣的Row sum norm。一個矩陣

$\mathbf{A}_{N \times N}$  的Row sum norm 的定義如下[25]

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^N |A_{ij}| \right)$$

由(3.3.49)式可將  $\theta_1$  和  $v$  表示成下列的形式

$$\theta_1 = \mathbf{N}_1^t \mathbf{q} \quad (3.3.53)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{q} \quad (3.3.54)$$

$$\mathbf{q} = \{A_0 \ B_0 \ A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_3 \ B_3\} \quad (3.3.55)$$

其中  $\mathbf{N}_1$  和  $\mathbf{N}_v$  皆為  $8 \times 1$  的行矩陣，本文中稱其為形狀函數。

$A_i, B_i$  ( $i = 0 \sim 3$ ) 為未定係數。其值是由梁元素端點的邊界條件定。令  $\theta_{1j}$ 、 $v_j$ 、

$\theta_{3j}$ 、 $\beta_j$  表示  $\theta_1$ 、 $v$ 、 $\theta_3 = \frac{dv}{ds}$  ((2.4.5)式)， $\beta = \frac{d\theta_1}{ds}$  在節點  $j$  ( $j = 1, 2$ ) 之值。

由(3.3.53)和(3.3.54)式可得

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{T}_{\theta q} \mathbf{q} \quad (3.3.56)$$

$$\mathbf{T}_{\theta q} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{N}_v^t(\zeta_1) & \mathbf{N}_1^t(\zeta_1) & \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_1) & \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_1) \\ \mathbf{N}_v^t(\zeta_2) & \mathbf{N}_1^t(\zeta_2) & \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_2) & \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_2) \end{array} \right\} \quad (3.3.57)$$

其中  $\mathbf{u}_\theta$  已在(3.3.11)式中定義， $\zeta_1 = -0.5$ ， $\zeta_2 = 0.5$ 。

因本文以後的推導都是以節點在總體座標上的擾動位移、旋轉及形心軸的扭轉率為獨立變數，所以必須將(3.3.53)式及(3.3.54)式中的  $\mathbf{q}$  表示成  $\mathbf{u}_g$  的函數。

由(3.3.12)、(3.3.15)及(3.3.56)式可得

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_{qg} \mathbf{u}_g \quad (3.3.58)$$

$$\mathbf{T}_{qg} = \mathbf{T}_{\theta q}^{-1} \mathbf{T}_{\theta e} \mathbf{T}_{ge}^t \quad (3.3.59)$$

### 3.3.4 梁元素在次要平衡路徑的節點內力

因在次要平衡路徑上，梁元素的內力在共同的節點上必須滿足力的平衡，在兩端的節點必須必須滿足外力的邊界條件，所以本節中首先要將梁截面在元素座標上的合力、合力矩及雙力矩表示成擾動位移  $\mathbf{u}_g$  的函數。在本節的推導中，所有的擾動量及其微分都僅取到一次項。梁的內力必須在受擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  上計算。

令

$$\bar{\mathbf{F}}_j = \{ \bar{F}_{1j}, \bar{F}_{2j}, \bar{F}_{3j} \} \quad (3.3.60)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_j = \{ \bar{M}_{1j}, \bar{M}_{2j}, \bar{M}_{3j} \} \quad (3.3.61)$$

其中  $\bar{F}_{ij}$  及  $\bar{M}_{ij}$  表示元素節點  $j$  ( $j=1,2$ ) 在擾動後之元素座標軸  $\bar{x}_i$  ( $i=1,2,3$ ) 方向的節點力及力矩。 $\bar{F}_{ij}$  及  $\bar{M}_{ij}$  的計算方法在附錄 D 中有詳盡的推導。

為了推導上的方便，本研究將  $\bar{\mathbf{F}}_j$  及  $\bar{\mathbf{M}}_j$  的分量表示成在擾動前之元素座標  $x_i$  上的分量  $F_{ij}$  及  $M_{ij}$ ，由(3.3.8)式可得

$$\mathbf{F}_j = \{ F_{1j}, F_{2j}, F_{3j} \} = \mathbf{A}_{e\bar{e}} \bar{\mathbf{F}}_j \quad (3.3.62)$$

$$\mathbf{M}_j = \{ M_{1j}, M_{2j}, M_{3j} \} = \mathbf{A}_{e\bar{e}} \bar{\mathbf{M}}_j \quad (3.3.63)$$

所以由(3.3.8)、(3.3.62)、(3.3.63)式可得

$$F_1 = \bar{F}_1 \quad (3.3.64)$$

$$F_2 = \bar{F}_2 + \bar{F}_1 \frac{\Delta v}{\ell} - \bar{F}_3 \bar{e}_{23} \quad (3.3.65)$$

$$F_3 = \bar{F}_3 \quad (3.3.66)$$

$$M_1 = \bar{M}_1 - \bar{M}_2 \frac{\Delta v}{\ell} \quad (3.3.67)$$

$$M_2 = \bar{M}_2 \quad (3.3.68)$$

$$M_3 = \bar{M}_2 \bar{e}_{23} + \bar{M}_3 \quad (3.3.69)$$

因本文中僅取到擾動量的一次項，所以(3.3.65)、(3.3.67)及(3.3.69)式中之 $\bar{F}_1$ 、 $\bar{F}_3$ 及 $\bar{M}_2$ 是採用其在擾動前之值，即(3.2.4)、(3.2.5)及(3.2.7)式

令

$$\mathbf{F}_e = \{ -\mathbf{F}_{e1}, -B_1^\theta, \mathbf{F}_{e2}, B_2^\theta \} \quad (3.3.70)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \{ -\bar{\mathbf{F}}_{e1}, -B_1^\theta, \bar{\mathbf{F}}_{e2}, B_2^\theta \} \quad (3.3.71)$$

$$\mathbf{F}_{ej} = \{ F_{2j}, M_{1j}, M_{3j} \} \quad (3.3.72)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{ej} = \{ \bar{F}_{2j}, \bar{M}_{1j}, \bar{M}_{3j} \} \quad (3.3.73)$$

其中  $j(j=1, 2)$ ， $\mathbf{F}_e$ 、 $\bar{\mathbf{F}}_e$  為元素擾動後的節點內力向量分別表示成擾動前元素座標上的分量及擾動後元素座標上的分量。

由(3.3.8)、(3.3.62)、(3.3.63)及(3.3.70)~(3.3.73)式可將擾動後的元素節點內力表示成

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{F}}_e + \mathbf{T}_{\bar{e}e} \mathbf{u}_e \quad (3.3.74)$$

其中

$$\mathbf{T}_{\bar{e}e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{F1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 8} \\ \mathbf{T}_{F2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 8} \end{bmatrix} \quad (3.3.75)$$

$\mathbf{T}_{Fj}$  代表  $\mathbf{T}_F$  在節點  $j(j=1, 2)$  之值

$$\mathbf{T}_{Fj}^t = \begin{bmatrix} -\frac{F_{1j}}{\ell} + \frac{F_{3j}}{4\ell}(s_1 + s_2) & \frac{M_{2j}}{\ell} & -\frac{M_{2j}}{4\ell}(s_1 + s_2) \\ -\frac{F_{3j}}{2} & 0 & \frac{M_{2j}}{2} \\ \frac{F_{3j}}{4}s_1 & 0 & -\frac{M_{2j}}{4}s_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_{1j}}{\ell} - \frac{F_{3j}}{4\ell}(s_1 + s_2) & -\frac{M_{2j}}{\ell} & \frac{M_{2j}}{4\ell}(s_1 + s_2) \\ -\frac{F_{3j}}{2} & 0 & \frac{M_{2j}}{2} \\ \frac{F_{3j}}{4}s_2 & 0 & -\frac{M_{2j}}{4}s_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_j = \sin \varphi_{2j}^0 = \theta_{2j}^0$$

由附錄 D 中的(D.18)與(3.3.74)式可得

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{N}_F \mathbf{q} + \mathbf{T}_{\bar{e}e} \mathbf{u}_e \quad (3.3.76)$$

其中  $\mathbf{N}_F$  可在附錄 D 中(D.19)式中已有定義， $\mathbf{q}$  在(3.3.55)式中已有定義。

由(3.3.15)、(3.3.56)式可將(3.3.76)式表示成

$$\mathbf{F}_e = (\mathbf{N}_F \mathbf{T}_{\theta q}^{-1} \mathbf{T}_{\theta e} + \mathbf{T}_{\bar{e}e}) \mathbf{u}_e \quad (3.3.77)$$

令

$$\mathbf{F}_g = \{ F_{21}^g \quad M_{11}^g \quad M_{31}^g \quad B_1^\theta \quad F_{22}^g \quad M_{12}^g \quad M_{32}^g \quad B_2^\theta \} \quad (3.3.78)$$

其中  $F_{2j}^g, M_{1j}^g, M_{3j}^g, B_j^\theta$  ( $j=1,2$ ) 分別為梁元素在節點  $j$  沿  $X_2$  軸方向的內力，繞  $X_1$  及

$X_3$  軸的力矩及雙力矩。

由(3.3.12)式可知  $\mathbf{F}_g$  (3.3.78)式及  $\mathbf{F}_e$  (3.3.77)式的關係如下：

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{T}_{ge} \mathbf{F}_e \quad (3.3.79)$$

利用(3.3.12)式可將 (3.3.79)式表示成

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{T}_{ge} (\mathbf{N}_F \mathbf{T}_{\theta q}^{-1} \mathbf{T}_{\theta e} + \mathbf{T}_{\bar{e}e}) \mathbf{T}_{ge}^t \mathbf{u}_g \quad (3.3.80)$$

### 3.3.5 梁結構的邊界條件

本文中分析的簡支梁和懸臂梁在兩端點因支承不同而有不同的邊界條件，但在內部節點則有相同邊界條件，所以本節中將邊界分為兩端節點和內部節點兩種邊界。本節中以  $( )_i^g$  表示  $( )$  在系統節點  $i$  ( $i=1-N+1$ ) 的值且  $( )$  是在總體座標上定義的， $( )_{j(i)}^g$  表示  $( )$  在第  $i$  ( $i=1-N$ ) 個元素節點  $j$  ( $j=1,2$ ) 之值，且  $( )$  是在總體座標上定義的。所以  $v_{,i}^g, \phi_{1,i}^g, \phi_{3,i}^g, \beta_{,i}^\theta$  代表系統之第  $i$  個節點在  $X_2$  方向的擾動位移，繞  $X_1$  及  $X_3$  軸的擾動旋轉及形心軸的扭轉率。 $v_{,j(i)}^g, \phi_{1,j(i)}^g, \phi_{3,j(i)}^g, \beta_{,j(i)}^\theta$  ( $j=1,2$ ) 代表第  $i$  個元素的節點  $j$  在  $X_2$  方向的擾動位移，繞  $X_1$  及  $X_3$  軸的擾動旋轉及形心軸的扭轉率。為了方便說明，本節中令懸臂梁的第一個節點為固定端，第  $N+1$  個節點為自由端，本文中僅考慮兩端具有相同邊界條件的簡支梁。

梁端點的的邊界條件可以說明如下：

(1) 固定端(第一個節點)邊界條件：

$$\phi_{1,1}^g = \phi_{11(1)}^g = 0$$

$$\phi_{3,1}^g = \phi_{31(1)}^g = 0$$

$$v_{,1}^g = v_{1(1)}^g = 0$$

$$B_{,1}^\theta = B_{1(1)}^\theta = 0 \text{ (自由翹曲)}, \text{ 或 } \beta_{,1}^\theta = \beta_{1(1)}^\theta = 0 \text{ (抑制翹曲)}$$

(3.3.81)

(2) 自由端第  $N+1$  個節點

自由端的邊界條件和施加力矩方式有關(見(3.1.3)~(3.1.5)式)，可分為 QT-1，QT-2 及 ST 來說明

QT-1：

$$M_{1,N+1}^g = M_{12(N)}^g = 0 \quad M_{3,N+1}^g = M\phi_{1,N+1}^g = M_{32(N)}^g \quad (3.3.82a)$$

QT-2：

$$M_{1,N+1}^g = -M\phi_{3,N+1}^g = M_{12(N)}^g \quad M_{3,N+1}^g = M_{32(N)}^g = 0 \quad (3.3.82b)$$

ST：

$$M_{1,N+1}^g = -\frac{1}{2}M\phi_{3,N+1}^g = M_{12(N)}^g \quad M_{3,N+1}^g = \frac{1}{2}M\phi_{1,N+1}^g = M_{32(N)}^g$$

(3.3.82c)

另外與力矩形式無關的邊界條件有

$$F_{2,N+1}^g = F_{22(N)}^g = 0 \quad B_{,N+1}^\theta = B_{2(N)}^\theta = 0 \quad (3.3.83a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1,N+1}^g &= \phi_{12(N)}^g & \phi_{3,N+1}^g &= \phi_{32(N)}^g \\ v_{,N+1}^g &= v_{2(N)}^g \\ \beta_{,N+1}^g &= \beta_{2(N)}^g \end{aligned} \quad (3.3.83b)$$

(3) 簡支梁端點邊界條件(第 1 和第  $N+1$  個節點)

本文中共考慮了以下四種不同的邊界條件。

$$\begin{aligned} (a) \quad M_{3,1}^g &= M_{31(1)}^g = 0 & M_{3,N+1}^g &= M_{32(N)}^g = 0 \\ \beta_{,1}^\theta &= \beta_{1(1)}^\theta = 0 & \beta_{,N+1}^\theta &= \beta_{2(N)}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3.84a)$$

$$\begin{aligned} (b) \quad M_{3,1}^g &= M_{31(1)}^g = 0 & M_{3,N+1}^g &= M_{32(N)}^g = 0 \\ B_{,1}^\theta &= B_{1(1)}^\theta = 0 & B_{,N+1}^\theta &= B_{2(N)}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3.84b)$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \phi_{3,1}^g &= \phi_{31(1)}^g = 0 & \phi_{3,N+1}^g &= \phi_{32(N)}^g = 0 \\ \beta_{,1}^\theta &= \beta_{1(1)}^\theta = 0 & \beta_{,N+1}^\theta &= \beta_{2(N)}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3.84c)$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \phi_{3,1}^g &= \phi_{31(1)}^g = 0 & \phi_{3,N+1}^g &= \phi_{32(N)}^g = 0 \\ B_{,1}^\theta &= B_{1(1)}^\theta = 0 & B_{,N+1}^\theta &= B_{2(N)}^\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3.84d)$$

另外四種不同的邊界有以下共同的邊界條件。

$$\begin{aligned} \phi_{1,1}^g &= \phi_{11(1)}^g = 0 & \phi_{1,N+1}^g &= \phi_{12(N)}^g = 0 \\ v_{,1}^g &= v_{1(1)}^g = 0 & v_{,N+1}^g &= v_{2(N)}^g = 0 \end{aligned} \quad (3.3.85)$$

以上的四種邊界條件在外加彎矩為 QT-1, QT-2 及 ST 時皆適用。

在簡支梁和懸臂梁的內部節點，即第 2 個到第  $N$  個節點，相鄰元素在共同節點上必需有一致的變形且滿足力的平衡，其邊界條件可以表示如下

(1) 位移邊界條件：

$$\begin{aligned}
v_{2(i)}^g &= v_{1(i+1)}^g = v_{,i+1}^g \\
\phi_{12(i)}^g &= \phi_{11(i+1)}^g = \phi_{1,i+1}^g \\
\phi_{32(i)}^g &= \phi_{31(i+1)}^g = \phi_{3,i+1}^g \\
\beta_{2(i)}^g &= \beta_{1(i+1)}^g = \beta_{,i+1}^g
\end{aligned} \tag{3.3.86a}$$

(2)力邊界條件：

$$\begin{aligned}
F_{22(i)}^g - F_{21(i+1)}^g &= 0 \\
M_{12(i)}^g - M_{11(i+1)}^g &= 0 \\
M_{32(i)}^g - M_{31(i+1)}^g &= 0 \\
B_{2(i)}^\theta - B_{1(i+1)}^\theta &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.86b}$$

本文在分析時候將  $v_{,i}^g, \phi_{1,i}^g, \phi_{3,i}^g$  及  $\beta_i^g (i=1, N+1)$  當做獨立變數，所以位移的邊界條件都可以自動滿足。

### 3.4 挫屈負荷

將(3.3.79)、(3.3.80)式代入 3.3.5 節中力的邊界條件，即可求得挫屈負荷的統御方程式。今以懸臂梁固定端為抑制翹曲，外加彎矩為 QT-1 型為例，說明挫屈負荷統御方程式的形成。將 (3.3.79)、(3.3.80)、(3.3.81)、(3.3.83b)及(3.3.86a)式代入(3.3.82a)、(3.3.83a)及(3.3.86b)式可得

$$[\mathbf{K}]_{4N \times 4N} \{\mathbf{U}\}_{4N \times 1} = \{\mathbf{0}\}_{4N \times 1} \tag{3.4.1}$$

$$\{\mathbf{U}\}_{4N \times 1} = \{V_2^g \quad \phi_{1,2}^g \quad \phi_{3,2}^g \quad \beta_2^\theta \quad \dots \quad V_{N+1}^g \quad \phi_{1,N+1}^g \quad \phi_{3,N+1}^g \quad \beta_{N+1}^\theta\} \tag{3.4.2}$$

其中 [ ], { } 之下標分別代表矩陣和向量的維數(dimension)。而  $N$  代表元素的數目。 $[\mathbf{K}]$  可視為系統的剛度矩陣， $\{\mathbf{U}\}$  為系統的位移向量。

對於不同的邊界條件，該統御方程式的維數會有不同，但形式相同，所以本文中以下式作為挫屈負荷的統御方程式

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{3.4.3}$$

若(3.4.3)式有非零解時，表示結構在原平衡位置附近還有其他的平衡位置，也就是發生挫屈。因(3.4.3)式為一齊項式(homogeneous equation)，所以僅有當剛度矩陣  $\mathbf{K}$  的行列式值  $\det \mathbf{K}$  為零時  $\mathbf{U}$  才有非零的解。而(3.4.3)式中剛度矩陣  $\mathbf{K}$  為彎矩  $M$  之非線性函數，即  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(M)$ 。因此能滿足  $\det \mathbf{K}(M^*) = 0$  之最小  $M^*$  即稱為臨界負荷。本文中求臨界負荷的方法可說明如下：

在數值程序中則是先給定一個  $M$  初始值  $M^0$ ，及迭代增量  $\Delta M$ ，然後再計算對應於

$M = M^0 + I\Delta M$  ( $I = 1, 2, 3, \dots$ ) 的  $\det \mathbf{K}$ ，一直到  $\det \mathbf{K}$  的值變號，然後再用二分法求得滿足  $\det \mathbf{K} = 0$  之  $M^*$  數值。本文中

$$|\det \mathbf{K}| / |\det \mathbf{K}|_{\max} \leq e_{tol} \quad (3.4.4)$$

作為判斷  $\det \mathbf{K} = 0$  的收斂準則，其中  $|\det \mathbf{K}|_{\max}$  為計算過程最大的  $|\det \mathbf{K}|$ ， $e_{tol}$  為給定的誤差值。當求得挫屈負荷  $M^*$  後，本文用以下的方法求得挫屈模態。

將  $\mathbf{K}(M^*)$  分解成

$$\mathbf{K}(M^*) = \mathbf{K}_L \mathbf{K}_U \quad (3.4.5)$$

其中  $\mathbf{K}_L$  為一下三角矩陣，其對角線元素皆為 1， $\mathbf{K}_U$  為一上三角矩陣。

若  $\mathbf{K}_U$  之對角線元素之絕對值在第  $I$  行有最小值取挫屈模態第  $I$  個分量  $U_I = 1$ 。將 (3.4.3) 式改寫成  $(4N - 1)$  個聯立方程式，再用高斯消去法求出剩餘的  $(4N - 1)$  個挫屈模態的分量。



#### 第四章 數值例題

本文中的例題共考慮了 7 種不同斷面的梁：(1)橢圓斷面，長軸半徑  $a = 2.5\text{cm}$ ，短軸半徑  $b = 0.25\text{cm}$ ，(2)橢圓斷面，長軸半徑  $a = 3\text{cm}$ ，短軸半徑  $b = 0.1\text{cm}$ ，(3)W14×159 型鋼，(4)W14×90 型鋼，(5)W10×100 型鋼，(6)W10×60 型鋼，(7)W10×30 型鋼。

橢圓形梁的長度有二種： $L = 25、50\text{cm}$ ，楊氏模數  $E = 10^4 \text{ N/cm}^2$ ，剪力模數  $G = 5 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$ 。W 型鋼的長度有二種： $L = 300、600\text{in}$ ，其楊氏模數  $E = 2.9 \times 10^4 \text{ ksi}$ ，剪力模數  $G = 1.12 \times 10^4 \text{ ksi}$ 。橢圓及 W 型鋼的斷面尺寸及斷面常數都列於附錄 E 的表中，本章中  $\alpha = I_z/I_y$ ， $P_{CR}$  代表梁在軸力作用時的側向挫屈負荷。本文中將不同邊界條件的梁之挫屈軸力列於附錄 F 中。本章中  $M_{CR}$  代表簡支梁或懸臂梁在均勻彎矩作用時線性挫屈分析的側向-扭轉彎矩。本文中將簡支梁及懸臂梁在不同邊界條件的  $M_{CR}$  列於附錄 G 中，本章中用  $M_B$  代表本文的挫屈彎矩。N 代表使用的元素數目，本文中 BC1,BC2,BC3 及 BC4 分別代表簡支梁的四種邊界條件即((3.3.84a)~(3.3.84d)式)。本文在分析時使用(3.3.32)式將  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$  展開成了  $\zeta$  的多項式級數，而本文中  $m$  代表多項式級數所取到的項次。為了  $M_B$  的準確性，本文中用不同的  $m$  及  $N$  對  $M_B$  做了一些收斂分析，並將其結果列於表一至表四中。

本文分析的結果將與文獻上線性挫屈分析的古典解比較，為了方便比較，本文將文獻上的古典解公式列於附錄 G 中。

首先分析級數解(3.3.32)式到達要求收斂精度， $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$  所需  $\zeta$  的項次。由表二發現，當軸力為  $10^{-6} P_{CR}$ ，採用 50 個元素，W14×159 型鋼( $\alpha = 0.3973$ )，只要保留到  $\zeta^0$  項就有相當的精確度，但是，在同一型鋼和邊界條件下，當軸力增為  $0.9 P_{CR}$  時，只採用 30 個元素時則只取到  $\zeta^0$  項也有相當精確度，分別比較表一和表二，表三和表四可知，在大變形，元素數目較少時，且承受大軸力的情況下，必須取到  $\zeta$  較高的次項，才能達到較高的精確度。且由表二可知在大變形的情況下只要取到  $\zeta^2$  項方有相當精確度，但本文分析時為求更精確，故一律取到  $\zeta^5$  項。

表五到表八為所需元素數目的收斂分析，由表六，W14×159 型鋼( $\alpha = 0.3973$ )中可以發現當軸力接近 0，且  $I_z/I_y$  較大時，50 個元素的解即已相當正確，當軸力增大到  $0.9 P_{CR}$  時，挫屈前的變形較軸力為 0 時更小，所以取十個元素時其精度較軸力為  $10^{-6} P_{CR}$  時更為精確。但為了確保在各種不同情況答案的精度，本文所有例題的分析除另有聲明都採用 50 個元素。由表五和表七中橢圓斷面的結果和線性挫屈分析的古典解很接近。這是可預期的結果，因橢圓斷面其主要主軸的撓曲剛度  $EI_y$  遠大於次要主軸的撓曲剛度  $EI_z$  及扭轉剛度  $GJ$ ，所以挫屈前的變形應可忽略，由此可證明本文方法的正確性。由表六和表八中的 W14×159 型鋼分析可以發現，本文的結果和古典解有相當的差異，這是因為 W14×159 的斷面之  $I_z/I_y = 0.3937$ ，所以挫屈前的變形對挫屈彎矩有相當的影響。

為了驗證本文所採用的方法的準確性，我們以文獻[21]所採用的方法及本文所採用的方法分析了一長度為  $L = 762(\text{cm})$ 、斷面為 W10×100 的懸臂梁，其斷面常數及材料常數為， $b = 26.2636 \text{ cm}$ ， $t_f = 2.8448 \text{ cm}$ ， $d = 28.194 \text{ cm}$ ， $t_w = 1.7272 \text{ cm}$ ，楊氏模數  $E = 19994804 \text{ N/cm}^2$ ，剪力模數  $G = 8273712 \text{ N/cm}^2$ ， $\alpha = 0.332279$ ， $\beta = 0.72401 \times 10^{-2}$ ，

$\gamma = 0.736673 \times 10^4$ 。表九(a)和(b)分別為本文的方法及文獻[21]的方法使用 80 個元素的結果。從表九中可以看出本文所採用的方法所求得的結果相當的吻合。

表十到表二十三為軸力對挫屈彎矩的影響，文中 WR 表示 warping restraint，WF 表示 warping free。當軸向壓力增加時，本文方法所求得的挫屈彎矩  $M_B$  逐漸降低。表十到表十四為不同斷面的簡支梁，由表十至表十二分析得知當軸力為  $0.9 P_{CR}$  時，挫屈彎矩  $M_B$  約為  $M_{CR}$  (古典挫屈彎矩) 的 0.2~0.3 倍，表十三和表十四顯示當軸力為  $0.9 P_{CR}$  時且邊界條件為固端梁時簡支梁的挫屈彎矩  $M_B$  大約只有  $0.1 M_{CR}$ ，但是，在表十四(a)W14×90 型鋼中當軸力為  $0.6 P_{CR}$  起時  $M_B = 0$  已開始挫屈。表十五至十七為懸臂梁(橢圓斷面)的挫屈分析，QT-1, 和 ST 型彎矩所得的  $M_B$  和  $M_{CR}$  較接近，當軸力為  $0.9 P_{CR}$  時  $M_B$  約為  $0.3 M_{CR}$ ，而 QT-2 型的  $M_B$  約為  $0.45 M_{CR}$ ，顯示不同彎矩的施加方式所得的  $M_B$  有蠻大差距，而表十八至二十三中 W 型鋼斷面受 QT-1, ST 型彎矩也有類似的結果，但在表十九中 (Warping restraint, QT-2) 所受軸力為  $0.9 P_{CR}$  時， $M_B$  仍可高達  $0.50 \sim 0.56 M_{CR}$ 。

## 第五章 結論

本文利用二階梁理論及共旋轉法探討梁在軸力及均勻彎矩同時作用下的幾何非線性側向-扭轉挫屈(Lateral-torsional buckling)。本文中首先求出梁元素在主要平衡路徑的統御方程式及其通解，再利用梁元素在共同節點上有相同的切線及曲率的邊界條件，求出梁結構的主要平衡路徑。然後在主要平衡路徑加上擾動位移，建立元素受擾動後的元素座標，求得元素節點擾動位移與擾動變形間的關係及節點內力在不同座標轉換的關係，求出梁元素在次要平衡路徑的統御方程式及其級數解，然後再利用梁結構的端點及內部節點邊界條件求得挫屈負荷及挫屈模態。

由本文例題之結果可以發現隨著軸向壓力的增加，懸臂梁及簡支梁所得到的挫屈彎矩逐漸降低。不同的斷面、不同長度、不同的邊界條件，都有個別的挫屈彎矩曲線趨勢，本文分析的方法及結果應可作為梁柱設計的參考。

## 參考文獻

- [1] P. Vacharajittiphan, S.T. Woolcock and N.S. Trahair, Effect of in-plane deformation on lateral buckling, *J. Struct. Mech.* 3(1) (1974) 29-60.
- [2] M.M. Attard, Lateral buckling analysis of beams by the FEM, *Comput. Struct.* 23 (1985) 217-231.
- [3] Y.L. Pi and N.S. Trahair, Prebuckling deflections and lateral buckling: part I- theory, *J. Struct. Engrg. ASCE* 118(11) (1992) 2949-2966.
- [4] Y.L. Pi and N.S. Trahair, Prebuckling deflections and lateral buckling: part II- application, *J. Struct. Engrg. ASCE* 118(11) (1992) 2967-2985.
- [5] K.M. Hsiao, Corotational total Lagrangian formulation for three- dimensional beam element, *AIAA J.* 30(3) (1992) 797-804.
- [6] Y. Goto, X. S. Li and T. Kasugal, Buckling analysis of elastic space rods under torsional moment, *J. of Engrg. Mech. ASCE* 122 (1996) 826-833.
- [7] K.M. Hsiao, R.T. Yang and W.Y. Lin, A consistent finite element formulation for linear buckling analysis of spatial beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 156 (1998) 259-276.
- [8] J.C. Simo and L. Vu-Quoc, The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures, *J. Sound Vib.* 119 (1987) 487-508.
- [9] Y. Fukumoto and T.V. Galambos, Inelastic lateral-torsional buckling of beam-columns, *J. of Structural Division ASCE* 92 (1966) 41-61.
- [10] P. Vacharajittiphan and N. S. Trahair, Analysis of lateral buckling in plane frames, *J. of Structural Division ASCE* 101 (1975) 1479-1516.
- [11] J.M. Anderson and N.S. Trahair, Stability of monosymmetric beams and cantilevers, *J. Struct. Div. ASCE* 98(1) (1972) 269-286.
- [12] Z. P. Bazant and M. Nimeriri, Large deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE* 99(EM6) (1973) 1259-1281.
- [13] N.S. Trahair and S.T. Woolcock, Effect of major axis curvature on I-beam stability, *J. Engrg. Mech. Div. ASCE* 99(EM1) (1974) 85-98.
- [14] J. L. Meek and P. Swannell, The lateral-torsional buckling problem reviewed from virtual displacement principles, *Civ. Engrg. Trans. Australia CE19 (2) (1977)* 153-161.
- [15] T.M. Roberts and Z.G. Azizian, Influence of pre-buckling displacement on the elastic critical loads of thin walled bars of open cross section, *Int. J. Mech. Sci.* 25(2) (1983) 93-104.
- [16] Z. M. Elias, *Theory and Methods of Structural Analysis* (John Wiley & Sons, NY, 1986).
- [17] Y.B. Yang and W. McGuire, Joint rotation and geometric nonlinear analysis, *J. Struct. Engrg. ASCE*, 112(4) (1986) 879-905.

- [18] S. L. Chan and S. Kitipornchai, Geometrically nonlinear analysis of asymmetrical thin-walled beam-columns, *Engrg. Struct.* 9 (1987) 243-254.
- [19] P. Vacharajittiphan and N. S. Trahair, dstiffness analysis of lateral buckling, *J. of Structural Mechanics* 3 (197-195) 107-137.
- [20] M.Y. Kim, S.P. Chang and S.B. Kim, Spatial stability analysis of thin-walled space frames, *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 39 (1996) 499-525.
- [21] K.M. Hsiao and W.Y. Lin, Co-rotational Formulation for Geometric Nonlinear Analysis of Doubly Symmetric Thin-Walled Beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) 6023-6050.
- [22] K.M. Hsiao and W.Y. Lin, A co-rotational finite element formulation for buckling and postbuckling analysis of spatial beams, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188 (2000) 567-594.
- [23] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Publishing Company, 1980.
- [24] D.J. Dawe, *Matrix and Finite Element Displacement Anslysis of Structures*, Oxford University Press, New York, 1984.
- [25] C.F. Gerald and P.O. Wheatley, *Applied Numerica Analysis*, Addison-Wesley, 1989.
- [26] L.H. Teh and M.J. Clarke, Co-Rotational and Lagrangian Formulations for Elastic Three-Dimensional Beam Finite Elements, *J. Construct. Steel Research*, 48 (1998) 123-144.
- [27] *Manual of Steel Construction*, eighth edition, AISC, 1980.
- [28] S.T. Timoshenko and J.M. Gear, *Mechanics of Materials*, PWS Publishing Company, Boston, 1990.
- [29] W.F. Chen and T. Atsuta, *Theory of beam-columns, volumn 2 space behavior and design*, McGraw Hill, 1977.
- [30] W.F. Chen and E.M. Liu, *Structrual Stability*, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.

表一 簡支梁挫屈彎矩  $M_B$  的收斂分析

斷面 1 : Ellipse(a:b=10,a=2.5(cm),L=25(cm),BC3)

P/ P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> / M <sub>CR</sub>					
		m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
10 <sup>-6</sup>	3	0.9904	0.9902	0.9902	0.9902	0.9902	0.9902
	10	0.9883	0.9882	0.9882	0.9882	0.9882	0.9882
	30	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880
	50	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880
	70	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880
	90	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880
	100	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880	0.9880
0.9	3	0.2959	0.2953	0.2957	0.2957	0.2957	0.2957
	10	0.2959	0.2958	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
	30	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
	50	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
	70	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
	90	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
	100	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959	0.2959
P <sub>CR</sub> (10 <sup>1</sup> N)		1.9379					
M <sub>CR</sub> (10 <sup>2</sup> N·cm)		1.1207					

表二 簡支梁挫屈彎矩  $M_B$  的收斂分

斷面 3 : (w14×159,L=300(in),BC3)

P/P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> /M <sub>CR</sub>					
		m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
10 <sup>-6</sup>	3	0.9854	0.9854	0.9854	0.9854	0.9854	0.9854
	10	0.9295	0.9295	0.9295	0.9295	0.9295	0.9295
	30	0.9240	0.9240	0.9240	0.9240	0.9240	0.9240
	50	0.9235	0.9235	0.9235	0.9235	0.9235	0.9235
	70	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234
	90	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234	0.9234
	100	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233	0.9233
0.9	3	0.0521	0.0522	0.0534	0.0534	0.0534	0.0534
	10	0.0511	0.0509	0.0510	0.0510	0.0510	0.0510
	30	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508
	50	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508
	70	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508
	90	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508
	100	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508	0.0508
P <sub>CR</sub> (10 <sup>6</sup> lb)		6.0424					
M <sub>CR</sub> (10 <sup>7</sup> in-lb)		8.2313					

表三 懸臂梁挫屈彎矩  $M_B$  的收斂分析

斷面 1 : Ellipse(a:b=10,a=2.5(cm),L=25(cm),Warping restraint ,ST)

P/ P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> / M <sub>CR</sub>					
		m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
10 <sup>-6</sup>	3	1.0115	1.0078	1.0078	1.0078	1.0078	1.0078
	10	1.0078	1.0072	1.0072	1.0072	1.0072	1.0072
	30	1.0072	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071
	50	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071
	70	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071
	90	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071
	100	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071	1.0071
0.9	3	0.3357	0.3357	0.3357	0.3357	0.3357	0.3357
	10	0.3357	0.3357	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
	30	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
	50	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
	70	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
	90	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
	100	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356	0.3356
P <sub>CR</sub> (N)		1.2112					
M <sub>CR</sub> (10 <sup>1</sup> N·cm)		5.4305					



表四 懸臂梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析

斷面 3 : (w14 × 159, L=300(in), Warping restraint, ST)

P/ P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> / M <sub>CR</sub>					
		m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
10 <sup>-6</sup>	3	0.8544	0.8544	0.8544	0.8544	0.8544	0.8544
	10	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491	0.8491
	30	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486
	50	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486
	70	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486
	90	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486
	100	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486	0.8486
0.9	3	0.3394	0.3350	0.3351	0.3352	0.3352	0.3352
	10	0.3373	0.3369	0.3370	0.3370	0.3370	0.3370
	30	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371
	50	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371
	70	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371
	90	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371
	100	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371	0.3371
P <sub>CR</sub> (10 <sup>5</sup> lb)		5.9470					
M <sub>CR</sub> (10 <sup>7</sup> in - lb)		2.4390					

表五 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析

斷面 1 : Ellipse(a:b=10,a=2.5(cm),L=25(cm))

P/P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> /M <sub>CR</sub>			
		BC1	BC2	BC3	BC4
10 <sup>-6</sup>	3	0.9195	0.9953	0.9902	0.8823
	10	0.9191	0.9948	0.9882	0.8804
	30	0.9190	0.9948	0.9880	0.8802
	50	0.9190	0.9948	0.9880	0.8802
	70	0.9190	0.9948	0.9880	0.8802
	90	0.9190	0.9948	0.9880	0.8802
	100	0.9190	0.9948	0.9880	0.8802
0.9	3	0.2877	0.3113	0.2957	0.2635
	10	0.2877	0.3113	0.2959	0.2636
	30	0.2878	0.3113	0.2959	0.2636
	50	0.2878	0.3113	0.2959	0.2636
	70	0.2878	0.3113	0.2959	0.2636
	90	0.2878	0.3113	0.2959	0.2636
	100	0.2878	0.3113	0.2959	0.2636
P <sub>CR</sub> (10 <sup>1</sup> N)		0.4845	0.4845	1.9379	1.9379
M <sub>CR</sub> (10 <sup>2</sup> N·cm)		0.6245	0.5447	1.1207	1.2550

表六 簡支梁挫屈彎矩 $M_B$ 的收斂分析

斷面 3 : (W14×159,L=300(in))

P/P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> /M <sub>CR</sub>			
		BC1	BC2	BC3	BC4
10 <sup>-6</sup>	3	1.2909	1.3214	0.9854	0.8351
	10	1.2518	1.2808	0.9295	0.7833
	30	1.2478	1.2773	0.9240	0.7789
	50	1.2475	1.2770	0.9235	0.7786
	70	1.2474	1.2769	0.9234	0.7785
	90	1.2474	1.2769	0.9234	0.7784
	100	1.2474	1.2768	0.9233	0.7784
0.9	3	0.2821	0.2546	0.0534	0.0170
	10	0.2807	0.2534	0.0510	0.0164
	30	0.2805	0.2533	0.0508	0.0164
	50	0.2805	0.2533	0.0508	0.0164
	70	0.2805	0.2533	0.0508	0.0164
	90	0.2805	0.2533	0.0508	0.0164
	100	0.2805	0.2533	0.0508	0.0164
P <sub>CR</sub> (10 <sup>6</sup> lb)		2.3788	2.3788	6.0424	6.0424
M <sub>CR</sub> (10 <sup>7</sup> in - lb)		4.5864	2.8228	8.2313	6.5042

表七 懸臂梁挫屈彎矩  $M_B$  的收斂分析

斷面 1 : Ellipse(a:b=10:1,a=2.5(cm),L=25(cm))

P/P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> /M <sub>CR</sub>					
		Warping restraint			Warping free		
		QT-1	QT-2	ST	QT-1	QT-2	ST
10 <sup>-6</sup>	3	0.9950	1.0345	1.0078	0.9949	1.0048	0.9983
	10	0.9950	1.0346	1.0072	0.9949	1.0048	0.9977
	30	0.9950	1.0346	1.0071	0.9949	1.0049	0.9977
	50	0.9950	1.0346	1.0071	0.9949	1.0049	0.9977
	70	0.9950	1.0346	1.0071	0.9949	1.0049	0.9977
	90	0.9950	1.0346	1.0071	0.9949	1.0049	0.9977
	100	0.9950	1.0346	1.0071	0.9949	1.0049	0.9977
0.9	3	0.3126	0.4753	0.3357	0.3126	0.4494	0.3271
	10	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
	30	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
	50	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
	70	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
	90	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
	100	0.3126	0.4753	0.3356	0.3126	0.4495	0.3271
P <sub>CR</sub> (N)		1.2113	1.2112	1.2112	1.2112	1.2112	1.2112
M <sub>CR</sub> (10 <sup>1</sup> N·cm)		2.7153	2.7153	5.4305	2.7153 <sup>+</sup>	2.7153 <sup>+</sup>	5.4305 <sup>+</sup>

+ Warping free 的 M<sub>CR</sub> 是取 Warping restraint 的挫屈負荷

表八 懸臂梁挫屈彎矩  $M_B$  的收斂分析

斷面 3 : (W14×159,L=300(in))

P/P <sub>CR</sub>	N	M <sub>B</sub> /M <sub>CR</sub>					
		Warping restraint			Warping free		
		QT-1	QT-2	ST	QT-1	QT-2	ST
10 <sup>-6</sup>	3	1.2842	0.9120	0.8544	1.2523	0.7736	0.7809
	10	1.2806	0.9104	0.8491	1.2486	0.7721	0.7751
	30	1.2803	0.9102	0.8486	1.2483	0.7720	0.7746
	50	1.2802	0.9102	0.8486	1.2483	0.7720	0.7746
	70	1.2802	0.9102	0.8486	1.2483	0.7720	0.7746
	90	1.2802	0.9102	0.8486	1.2483	0.7720	0.7746
	100	1.2802	0.9102	0.8486	1.2482	0.7720	0.7746
0.9	3	0.2966	0.5536	0.3352	0.2871	0.4001	0.3328
	10	0.2969	0.5541	0.3370	0.2874	0.4001	0.3346
	30	0.2970	0.5541	0.3371	0.2874	0.4001	0.3347
	50	0.2970	0.5542	0.3371	0.2875	0.4001	0.3347
	70	0.2970	0.5542	0.3371	0.2875	0.4001	0.3347
	90	0.2970	0.5542	0.3371	0.2875	0.4001	0.3347
	100	0.2970	0.5542	0.3371	0.2875	0.4001	0.3347
P <sub>CR</sub> (10 <sup>5</sup> lb)		5.9470	5.9470	5.9470	5.9470	5.9470	5.9470
M <sub>CR</sub> (10 <sup>7</sup> in - lb)		1.2195	1.2195	2.4390	1.2195 <sup>+</sup>	1.2195 <sup>+</sup>	2.4390 <sup>+</sup>

+ Warping free 的 M<sub>CR</sub> 是取 Warping restraint 的挫屈負荷

表九(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$

斷面 5 : W10×100, L=762(cm)

P/ $P_{CR}$	N	$M_B / M_{CR}$					
		Warping restraint			Warping free		
		QT-1	QT-2	ST	QT-1	QT-2	ST
$10^{-6}$	80	1.2188	0.9053	0.8610	1.2147	0.8318	0.8349
0.9	80	0.3103	0.5235	0.3458	0.3092	0.4341	0.3326
$M_{CR} (10^8 \text{ N} \cdot \text{cm})$		0.5323					

表九(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$

斷面 5 : W10×100, L=762(cm)

P/ $P_{CR}$	N	$M_B / M_{CR}$					
		Warping restraint			Warping free		
		QT-1	QT-2	ST	QT-1	QT-2	ST
$10^{-6}$	80	1.2138	0.9054	0.8581	1.2099	0.8319	0.8330
0.9	80	0.3090	0.5241	0.3434	0.3079	0.4336	0.3297
$M_{CR} (10^8 \text{ N} \cdot \text{cm})$		0.5323					

表十(a) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面 , BC1 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9190	0.9311	0.9010	0.9099
0.1	0.8709	0.8827	0.8542	0.8630
0.2	0.8202	0.8316	0.8047	0.8135
0.3	0.7664	0.7773	0.7522	0.7607
0.4	0.7087	0.7191	0.6959	0.7041
0.5	0.6463	0.6560	0.6348	0.6426
0.6	0.5774	0.5863	0.5674	0.5747
0.7	0.4995	0.5073	0.4910	0.4975
0.8	0.4074	0.4139	0.4006	0.4062
0.9	0.2878	0.2925	0.2831	0.2871
0.98	0.1286	0.1307	0.1265	0.1284
$P_{CR}$ (N)	4.8448	0.3721	1.2112	0.0930
$M_{CR}$ ( $10^1$ N·cm)	6.2445	0.4853	3.0846	0.2384

表十(b) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面 , BC2 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9948	0.9994	0.9950	0.9995
0.1	0.9426	0.9472	0.9432	0.9479
0.2	0.8877	0.8922	0.8887	0.8934
0.3	0.8294	0.8337	0.8307	0.8355
0.4	0.7670	0.7711	0.7685	0.7733
0.5	0.6994	0.7033	0.7011	0.7057
0.6	0.6248	0.6284	0.6266	0.6310
0.7	0.5405	0.5437	0.5423	0.5463
0.8	0.4408	0.4435	0.4424	0.4459
0.9	0.3113	0.3133	0.3126	0.3152
0.98	0.1391	0.1400	0.1397	0.1409
$P_{CR}$ (N)	4.8448	0.3721	1.2112	0.0930
$M_{CR}$ ( $10^1$ N·cm)	5.4467	0.4210	2.7153	0.2096

表十(c) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面 , BC3 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9880	0.9837	0.9887	0.9843
0.1	0.9318	0.9296	0.9341	0.9326
0.2	0.8733	0.8730	0.8770	0.8781
0.3	0.8120	0.8133	0.8169	0.8204
0.4	0.7472	0.7500	0.7532	0.7585
0.5	0.6780	0.6819	0.6846	0.6915
0.6	0.6027	0.6074	0.6098	0.6177
0.7	0.5188	0.5239	0.5258	0.5343
0.8	0.4210	0.4260	0.4275	0.4357
0.9	0.2959	0.3000	0.3010	0.3076
0.98	0.1317	0.1337	0.1342	0.1374
$P_{CR}$ ( $10^1$ N)	1.9379	0.1488	0.4845	0.0372
$M_{CR}$ ( $10^2$ N·cm)	1.1207	0.0871	0.5536	0.0428

表十(d) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面 , BC4 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.8802	0.8806	0.8745	0.8719
0.1	0.8301	0.8321	0.8262	0.8261
0.2	0.7779	0.7814	0.7757	0.7778
0.3	0.7233	0.7280	0.7226	0.7267
0.4	0.6657	0.6713	0.6662	0.6719
0.5	0.6040	0.6103	0.6056	0.6125
0.6	0.5369	0.5437	0.5393	0.5472
0.7	0.4622	0.4689	0.4651	0.4732
0.8	0.3751	0.3813	0.3781	0.3859
0.9	0.2636	0.2685	0.2662	0.2725
0.98	0.1173	0.1197	0.1187	0.1217
$P_{CR}$ ( $10^1$ N)	1.9379	0.1488	0.4845	0.0372
$M_{CR}$ ( $10^2$ N·cm)	1.2550	0.0970	0.6256	0.0483



表十一(a) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( W 斷面,  $L=300(\text{in})$ , BC1 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2475	1.2215	1.1836	1.2016	1.0283
0.1	1.1446	1.1208	1.0954	1.1084	0.9662
0.2	1.0427	1.0210	1.0069	1.0154	0.9021
0.3	0.9414	0.9220	0.9178	0.9223	0.8356
0.4	0.8403	0.8232	0.8274	0.8285	0.7661
0.5	0.7387	0.7240	0.7350	0.7334	0.6926
0.6	0.6355	0.6232	0.6393	0.6355	0.6134
0.7	0.5287	0.5188	0.5380	0.5329	0.5260
0.8	0.4141	0.4068	0.4266	0.4209	0.4253
0.9	0.2805	0.2759	0.2927	0.2877	0.2978
0.98	0.1211	0.1192	0.1277	0.1251	0.1321
$P_{CR}$ ( $10^6 \text{ lb}$ )	2.3788	1.1512	0.6583	0.3689	0.0531
$M_{CR}$ ( $10^7 \text{ in-lb}$ )	4.5864	1.9430	1.2657	0.5436	0.0918

表十一(b) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( W 斷面,  $L=600(\text{in})$ , BC1 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2456	1.2251	1.1599	1.1877	1.0088
0.1	1.1481	1.1285	1.0769	1.1003	0.9502
0.2	1.0509	1.0323	0.9930	1.0124	0.8894
0.3	0.9535	0.9362	0.9080	0.9237	0.8260
0.4	0.8555	0.8397	0.8212	0.8336	0.7593
0.5	0.7560	0.7420	0.7318	0.7412	0.6881
0.6	0.6539	0.6418	0.6385	0.6454	0.6110
0.7	0.5471	0.5371	0.5390	0.5437	0.5254
0.8	0.4310	0.4234	0.4287	0.4315	0.4259
0.9	0.2936	0.2887	0.2950	0.2963	0.2990
0.98	0.1274	0.1253	0.1290	0.1294	0.1329
$P_{CR}$ ( $10^5 \text{ lb}$ )	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}$ ( $10^7 \text{ in-lb}$ )	1.6073	0.6015	0.5417	0.2076	0.0376

表十二(a) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( W 斷面, L=300(in), BC2 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2770	1.2476	1.2178	1.2277	1.0520
0.1	1.1605	1.1232	1.1258	1.1268	0.9856
0.2	1.0462	1.0020	1.0336	1.0268	0.9176
0.3	0.9339	0.8839	0.9407	0.9273	0.8475
0.4	0.8234	0.7690	0.8467	0.8279	0.7746
0.5	0.7142	0.6568	0.7507	0.7278	0.6979
0.6	0.6055	0.5470	0.6516	0.6262	0.6160
0.7	0.4956	0.4386	0.5471	0.5209	0.5264
0.8	0.3814	0.3292	0.4326	0.4079	0.4240
0.9	0.2533	0.2122	0.2959	0.2762	0.2957
0.98	0.1075	0.0874	0.1288	0.1191	0.1308
$P_{CR}$ ( $10^6$ lb)	2.3788	1.1512	0.6583	0.3689	0.0531
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	2.8228	1.0532	0.9547	0.3653	0.0662

表十二(b) 簡支梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( W 斷面, L=600(in), BC2 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2806	1.2505	1.2193	1.2290	1.0523
0.1	1.1795	1.1468	1.1326	1.1386	0.9907
0.2	1.0785	1.0441	1.0448	1.0475	0.9270
0.3	0.9773	0.9419	0.9556	0.9554	0.8604
0.4	0.8756	0.8401	0.8644	0.8618	0.7905
0.5	0.7725	0.7377	0.7704	0.7659	0.7160
0.6	0.6669	0.6339	0.6722	0.6663	0.6353
0.7	0.5567	0.5266	0.5673	0.5607	0.5459
0.8	0.4374	0.4118	0.4511	0.4444	0.4421
0.9	0.2971	0.2784	0.3103	0.3047	0.3101
0.98	0.1285	0.1199	0.1356	0.1329	0.1378
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	1.2195	0.4093	0.4557	0.1660	0.0311

表十三(a) 簡支梁之挫屈彎  $M_B$  ( W 斷面, L=300(in), BC3 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.9235	0.9165	0.9161	0.9162	0.9391
0.1	0.7896	0.7747	0.7870	0.7805	0.8432
0.2	0.6643	0.6434	0.6653	0.6538	0.7506
0.3	0.5480	0.5229	0.5513	0.5366	0.6613
0.4	0.4408	0.4135	0.4453	0.4291	0.5750
0.5	0.3431	0.3154	0.3477	0.3314	0.4915
0.6	0.2550	0.2289	0.2588	0.2438	0.4103
0.7	0.1768	0.1541	0.1792	0.1667	0.3304
0.8	0.1087	0.0911	0.1093	0.1002	0.2499
0.9	0.0508	0.0403	0.0499	0.0449	0.1629
0.98	0.0120	0.0085	0.0106	0.0090	0.0680
$P_{CR}$ ( $10^6$ lb)	6.0424	3.1770	1.9813	1.0845	0.2124
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	8.2313	3.4871	2.2716	0.9757	0.1648

表十三(b) 簡支梁之挫屈彎  $M_B$  ( W 斷面, L=600(in), BC3 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.9240	0.9191	0.9099	0.9141	0.9418
0.1	0.7996	0.7857	0.7898	0.7894	0.8558
0.2	0.6816	0.6609	0.6748	0.6711	0.7715
0.3	0.5703	0.5450	0.5653	0.5594	0.6888
0.4	0.4660	0.4382	0.4618	0.4548	0.6074
0.5	0.3689	0.3407	0.3648	0.3576	0.5269
0.6	0.2792	0.2527	0.2748	0.2682	0.4468
0.7	0.1973	0.1744	0.1925	0.1871	0.3659
0.8	0.1235	0.1061	0.1187	0.1149	0.2817
0.9	0.0582	0.0480	0.0544	0.0523	0.1872
0.98	0.0130	0.0094	0.0130	0.0101	0.0794
$P_{CR}$ ( $10^6$ lb)	1.5106	0.7943	0.4953	0.2711	0.0531
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	2.8846	1.0796	0.9721	0.3726	0.0675

表十四(a) 簡支梁之挫屈彎  $M_B$  ( W 斷面, L=300(in), BC4 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.7786	0.7790	0.7808	0.7806	0.8609
0.1	0.6501	0.6240	0.6699	0.6570	0.7688
0.2	0.5313	0.4818	0.5650	0.5423	0.6800
0.3	0.4226	0.3528	0.4667	0.4371	0.5946
0.4	0.3247	0.2367	0.3755	0.3417	0.5126
0.5	0.2380	0.1308	0.2917	0.2567	0.4337
0.6	0.1632	0.0000	0.2157	0.1824	0.3578
0.7	0.1007	0.0000	0.1481	0.1193	0.2841
0.8	0.0514	0.0000	0.0894	0.0677	0.2113
0.9	0.0164	0.0000	0.0402	0.0279	0.1350
0.98	0.0000	0.0000	0.0082	0.0050	0.0553
$P_{CR}$ ( $10^6$ lb)	6.0424	3.1770	1.9813	1.0845	0.2124
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	6.5042	2.4268	2.1998	0.8417	0.1526

表十四(b) 簡支梁之挫屈彎  $M_B$  ( W 斷面, L=600(in), BC4 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.7792	0.7796	0.7789	0.7790	0.8449
0.1	0.6739	0.6600	0.6775	0.6738	0.7683
0.2	0.5738	0.5485	0.5798	0.5734	0.6930
0.3	0.4792	0.4458	0.4864	0.4782	0.6189
0.4	0.3905	0.3521	0.3977	0.3888	0.5458
0.5	0.3080	0.2679	0.3143	0.3055	0.4736
0.6	0.2321	0.1934	0.2368	0.2289	0.4016
0.7	0.1631	0.1291	0.1658	0.1594	0.3288
0.8	0.1013	0.0753	0.1021	0.0976	0.2530
0.9	0.0472	0.0323	0.0467	0.0443	0.1681
0.98	0.0097	0.0058	0.0120	0.0084	0.0713
$P_{CR}$ ( $10^6$ lb)	1.5106	0.7943	0.4953	0.2711	0.0531
$M_{CR}$ ( $10^7$ in-lb)	2.8099	0.9430	1.0500	0.3825	0.0716

表十五(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WR,QT-1 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9950	0.9995	0.9950	0.9995
0.1	0.9432	0.9479	0.9434	0.9481
0.2	0.8887	0.8934	0.8889	0.8937
0.3	0.8307	0.8355	0.8310	0.8359
0.4	0.7685	0.7733	0.7689	0.7738
0.5	0.7011	0.7057	0.7015	0.7063
0.6	0.6266	0.6310	0.6270	0.6317
0.7	0.5423	0.5463	0.5427	0.5470
0.8	0.4424	0.4459	0.4429	0.4466
0.9	0.3126	0.3152	0.3130	0.3157
0.98	0.1397	0.1409	0.1399	0.1412
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}$ ( $10^1$ N·cm)	2.7153	0.2096	1.3566	0.1047

表十五(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WF,QT-1 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9949	0.9994	0.9950	0.9995
0.1	0.9432	0.9478	0.9434	0.9481
0.2	0.8886	0.8933	0.8889	0.8937
0.3	0.8306	0.8354	0.8310	0.8359
0.4	0.7685	0.7732	0.7689	0.7738
0.5	0.7010	0.7056	0.7015	0.7063
0.6	0.6266	0.6309	0.6270	0.6317
0.7	0.5422	0.5463	0.5427	0.5470
0.8	0.4424	0.4459	0.4429	0.4465
0.9	0.3126	0.3152	0.3130	0.3157
0.98	0.1397	0.1409	0.1399	0.1412
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}^+$ ( $10^1$ N·cm)	2.7153	0.2096	1.3566	0.1047

+ Warming free的  $M_{CR}$  是取Warming restraint的挫屈負荷

表十六(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WR,QT-2 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	1.0346	1.0363	1.0196	1.0181
0.1	1.0110	1.0126	0.9958	0.9943
0.2	0.9840	0.9856	0.9686	0.9670
0.3	0.9525	0.9540	0.9370	0.9353
0.4	0.9152	0.9166	0.8994	0.8976
0.5	0.8698	0.8710	0.8537	0.8518
0.6	0.8128	0.8139	0.7966	0.7946
0.7	0.7384	0.7393	0.7224	0.7203
0.8	0.6351	0.6359	0.6199	0.6179
0.9	0.4753	0.4758	0.4626	0.4609
0.98	0.2231	0.2234	0.2166	0.2157
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}$ ( $10^1$ N·cm)	2.7153	0.2096	1.3566	0.1047

表十六(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WF,QT-2 )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	1.0049	1.0004	1.0050	1.0005
0.1	0.9807	0.9761	0.9809	0.9763
0.2	0.9530	0.9482	0.9533	0.9486
0.3	0.9209	0.9159	0.9213	0.9165
0.4	0.8829	0.8778	0.8834	0.8784
0.5	0.8369	0.8316	0.8374	0.8323
0.6	0.7797	0.7743	0.7802	0.7749
0.7	0.7055	0.7002	0.7060	0.7008
0.8	0.6041	0.5990	0.6045	0.5995
0.9	0.4495	0.4453	0.4497	0.4457
0.98	0.2099	0.2078	0.2100	0.2079
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}^+$ ( $10^1$ N·cm)	2.7153	0.2096	1.3566	0.1047

+ Warping free的  $M_{CR}$  是取Warping restraint的挫屈負荷

表十七(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WR,ST )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	1.0071	1.0041	1.0055	1.0015
0.1	0.9701	0.9745	0.9605	0.9656
0.2	0.9197	0.9272	0.9095	0.9157
0.3	0.8644	0.8729	0.8543	0.8611
0.4	0.8039	0.8129	0.7943	0.8014
0.5	0.7371	0.7462	0.7282	0.7354
0.6	0.6623	0.6711	0.6541	0.6612
0.7	0.5761	0.5844	0.5689	0.5756
0.8	0.4725	0.4798	0.4665	0.4724
0.9	0.3356	0.3412	0.3313	0.3358
0.98	0.1507	0.1532	0.1487	0.1508
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}$ ( $10^1$ N·cm)	5.4305	0.4191	2.7132	0.2093

表十七(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  ( 橢圓斷面,WF,ST )

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$			
	L=25cm		L=50cm	
	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm	a:b=10 a=2.5cm	a:b=30 a=3cm
$10^{-6}$	0.9977	1.0038	0.9957	1.0006
0.1	0.9515	0.9566	0.9497	0.9538
0.2	0.9005	0.9060	0.8990	0.9034
0.3	0.8456	0.8513	0.8442	0.8490
0.4	0.7859	0.7917	0.7847	0.7898
0.5	0.7202	0.7261	0.7191	0.7244
0.6	0.6467	0.6524	0.6458	0.6510
0.7	0.5622	0.5676	0.5615	0.5665
0.8	0.4608	0.4656	0.4602	0.4647
0.9	0.3271	0.3308	0.3267	0.3302
0.98	0.1468	0.1485	0.1466	0.1482
$P_{CR}$ (N)	1.2112	0.0930	0.3028	0.0233
$M_{CR}^+$ ( $10^1$ N·cm)	5.4305	0.4191	2.7132	0.2093

+ Warping free的  $M_{CR}$  是取Warping restraint的挫屈負荷

表十八(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,QT-1,L=300(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2804	1.2503	1.2192	1.2289	1.0522
0.1	1.1791	1.1466	1.1323	1.1384	0.9907
0.2	1.0779	1.0438	1.0444	1.0472	0.9269
0.3	0.9767	0.9417	0.9551	0.9552	0.8604
0.4	0.8750	0.8398	0.8639	0.8616	0.7904
0.5	0.7719	0.7375	0.7699	0.7656	0.7159
0.6	0.6664	0.6337	0.6718	0.6661	0.6353
0.7	0.5563	0.5264	0.5670	0.5605	0.5459
0.8	0.4371	0.4117	0.4508	0.4443	0.4421
0.9	0.2970	0.2783	0.3102	0.3047	0.3101
0.98	0.1285	0.1199	0.1356	0.1329	0.1378
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}$ ( $10^7$ in - lb)	1.2195	0.4093	0.4557	0.1660	0.0311

表十八(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,QT-1,L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2815	1.2511	1.2196	1.2293	1.0523
0.1	1.1858	1.1577	1.1342	1.1421	0.9922
0.2	1.0894	1.0637	1.0475	1.0537	0.9296
0.3	0.9921	0.9689	0.9593	0.9640	0.8642
0.4	0.8933	0.8727	0.8689	0.8721	0.7950
0.5	0.7922	0.7744	0.7754	0.7774	0.7212
0.6	0.6875	0.6726	0.6774	0.6784	0.6409
0.7	0.5770	0.5650	0.5726	0.5727	0.5515
0.8	0.4559	0.4469	0.4559	0.4554	0.4473
0.9	0.3115	0.3058	0.3141	0.3133	0.3142
0.98	0.1354	0.1331	0.1375	0.1370	0.1398
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}$ ( $10^6$ in - lb)	5.8328	1.8710	2.2505	0.8078	0.1527



表十九(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,QT-2,L=300(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.9101	0.9481	0.9069	0.9248	1.0702
0.1	0.8866	0.9196	0.8876	0.9039	1.0495
0.2	0.8621	0.8904	0.8669	0.8818	1.0263
0.3	0.8363	0.8601	0.8444	0.8582	0.9998
0.4	0.8090	0.8285	0.8195	0.8325	0.9687
0.5	0.7794	0.7948	0.7910	0.8037	0.9309
0.6	0.7461	0.7580	0.7567	0.7699	0.8828
0.7	0.7062	0.7154	0.7122	0.7273	0.8180
0.8	0.6520	0.6599	0.6467	0.6659	0.7226
0.9	0.5541	0.5645	0.5256	0.5514	0.5604
0.98	0.3101	0.3251	0.2702	0.2923	0.2727
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}$ ( $10^7$ in - lb)	1.2195	0.4093	0.4557	0.1660	0.0311

表十九(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,QT-2,L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.8728	0.9093	0.8768	0.8867	1.0118
0.1	0.8530	0.8883	0.8582	0.8678	0.9913
0.2	0.8319	0.8662	0.8380	0.8474	0.9681
0.3	0.8092	0.8426	0.8158	0.8251	0.9414
0.4	0.7844	0.8170	0.7908	0.8002	0.9097
0.5	0.7565	0.7884	0.7617	0.7715	0.8711
0.6	0.7237	0.7551	0.7261	0.7368	0.8219
0.7	0.6822	0.7134	0.6793	0.6916	0.7560
0.8	0.6227	0.6538	0.6101	0.6250	0.6608
0.9	0.5127	0.5430	0.4857	0.5033	0.5047
0.98	0.2688	0.2893	0.2427	0.2554	0.2416
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}$ ( $10^6$ in - lb)	5.8328	1.8710	2.2505	0.8078	0.1527

表二十(a) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,ST,L=300(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.8483	0.8654	0.8611	0.8642	0.9721
0.1	0.8168	0.8278	0.8359	0.8358	0.9448
0.2	0.7832	0.7882	0.8082	0.8050	0.9124
0.3	0.7469	0.7461	0.7770	0.7711	0.8733
0.4	0.7069	0.7006	0.7411	0.7328	0.8259
0.5	0.6618	0.6505	0.6980	0.6883	0.7681
0.6	0.6091	0.5937	0.6442	0.6346	0.6981
0.7	0.5446	0.5267	0.5745	0.5670	0.6128
0.8	0.4602	0.4423	0.4807	0.4772	0.5061
0.9	0.3371	0.3230	0.3462	0.3465	0.3613
0.98	0.1548	0.1486	0.1563	0.1577	0.1627
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}$ ( $10^7$ in - lb)	2.4390	0.8185	0.9114	0.3320	0.0622

表二十(b) 懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WR,ST,L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.8357	0.8544	0.8517	0.8522	0.9602
0.1	0.8104	0.8264	0.8295	0.8285	0.9379
0.2	0.7829	0.7961	0.8049	0.8025	0.9087
0.3	0.7525	0.7627	0.7768	0.7732	0.8700
0.4	0.7180	0.7252	0.7434	0.7389	0.8200
0.5	0.6774	0.6817	0.7017	0.6973	0.7585
0.6	0.6275	0.6293	0.6472	0.6444	0.6851
0.7	0.5626	0.5632	0.5743	0.5744	0.5979
0.8	0.4739	0.4748	0.4764	0.4795	0.4913
0.9	0.3431	0.3453	0.3396	0.3440	0.3493
0.98	0.1553	0.1573	0.1521	0.1548	0.1568
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}$ ( $10^7$ in - lb)	1.1666	0.3742	0.4501	0.1616	0.0305

表二十一(a)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面, WF, QT-1, L=300(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2484	1.1655	1.2147	1.2140	1.0456
0.1	1.1486	1.0652	1.1280	1.1241	0.9844
0.2	1.0491	0.9663	1.0403	1.0338	0.9210
0.3	0.9498	0.8685	0.9513	0.9426	0.8549
0.4	0.8501	0.7716	0.8604	0.8500	0.7853
0.5	0.7494	0.6748	0.7667	0.7551	0.7113
0.6	0.6464	0.5774	0.6689	0.6568	0.6311
0.7	0.5392	0.4775	0.5646	0.5526	0.5422
0.8	0.4234	0.3716	0.4489	0.4379	0.4392
0.9	0.2875	0.2500	0.3088	0.3003	0.3081
0.98	0.1243	0.1073	0.1350	0.1309	0.1369
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}^+$ ( $10^7$ in - lb)	1.2195	0.4093	0.4557	0.1660	0.0311

+ Warping free 的  $M_{CR}$  是取 Warping restraint 的挫屈負荷

表二十一(b)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面, WF, QT-1, L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	1.2770	1.2374	1.2191	1.2273	1.0514
0.1	1.1815	1.1446	1.1336	1.1402	0.9914
0.2	1.0854	1.0514	1.0470	1.0520	0.9289
0.3	0.9883	0.9574	0.9588	0.9623	0.8635
0.4	0.8898	0.8622	0.8684	0.8706	0.7944
0.5	0.7891	0.7648	0.7750	0.7760	0.7206
0.6	0.6848	0.6641	0.6771	0.6771	0.6404
0.7	0.5747	0.5578	0.5723	0.5716	0.5510
0.8	0.4541	0.4412	0.4557	0.4545	0.4470
0.9	0.3102	0.3018	0.3139	0.3127	0.3140
0.98	0.1348	0.1314	0.1374	0.1367	0.1397
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}^+$ ( $10^6$ in - lb)	5.8328	1.8710	2.2505	0.8078	0.1527

+ Warping free 的  $M_{CR}$  是取 Warping restraint 的挫屈負荷

表二十二(a)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面, WF, QT-2, L=300(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.7720	0.7379	0.8308	0.8113	0.9393
0.1	0.7487	0.7101	0.8110	0.7901	0.9169
0.2	0.7244	0.6813	0.7896	0.7675	0.8919
0.3	0.6985	0.6513	0.7661	0.7430	0.8633
0.4	0.6706	0.6196	0.7397	0.7158	0.8300
0.5	0.6398	0.5855	0.7091	0.6849	0.7899
0.6	0.6042	0.5476	0.6719	0.6481	0.7400
0.7	0.5607	0.5031	0.6235	0.6012	0.6749
0.8	0.5010	0.4453	0.5536	0.5346	0.5839
0.9	0.4000	0.3534	0.4334	0.4208	0.4405
0.98	0.2031	0.1803	0.2128	0.2086	0.2084
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}^+$ ( $10^7$ in - lb)	1.2195	0.4093	0.4557	0.1660	0.0311

+ Warming free 的  $M_{CR}$  是取 Warming restraint 的挫屈負荷

表二十二(b)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面, WF, QT-2, L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.8047	0.8035	0.8397	0.8312	0.9485
0.1	0.7848	0.7823	0.8208	0.8118	0.9270
0.2	0.7634	0.7598	0.8001	0.7909	0.9025
0.3	0.7401	0.7355	0.7772	0.7677	0.8744
0.4	0.7143	0.7087	0.7512	0.7416	0.8411
0.5	0.6847	0.6782	0.7207	0.7112	0.8009
0.6	0.6495	0.6421	0.6833	0.6741	0.7503
0.7	0.6045	0.5962	0.6341	0.6257	0.6839
0.8	0.5401	0.5313	0.5623	0.5555	0.5908
0.9	0.4279	0.4198	0.4386	0.4345	0.4444
0.98	0.2130	0.2090	0.2141	0.2129	0.2095
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}^+$ ( $10^6$ in - lb)	5.8328	1.8710	2.2505	0.8078	0.1527

+ Warming free 的  $M_{CR}$  是取 Warming restraint 的挫屈負荷

表二十三(a)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WF,ST,L=300(in))

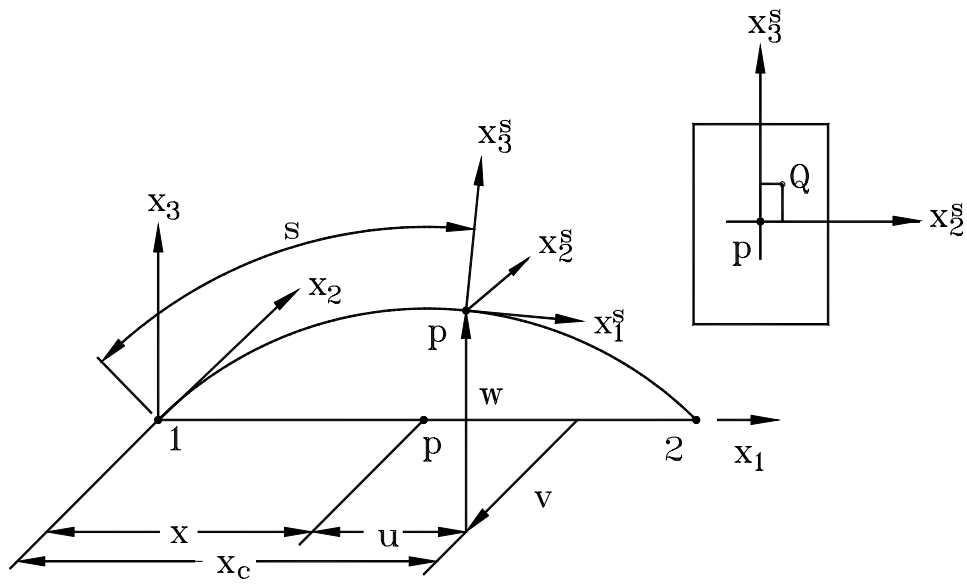
P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.7743	0.7403	0.8338	0.8152	0.9548
0.1	0.7499	0.7114	0.8132	0.7932	0.9361
0.2	0.7242	0.6816	0.7906	0.7696	0.9106
0.3	0.6968	0.6506	0.7652	0.7437	0.8731
0.4	0.6671	0.6179	0.7350	0.7143	0.8210
0.5	0.6334	0.5825	0.6966	0.6788	0.7560
0.6	0.5929	0.5426	0.6440	0.6323	0.6796
0.7	0.5392	0.4942	0.5705	0.5670	0.5903
0.8	0.4602	0.4280	0.4706	0.4733	0.4830
0.9	0.3347	0.3208	0.3330	0.3376	0.3420
0.98	0.1509	0.1486	0.1483	0.1509	0.1531
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	5.9470	2.8781	1.6458	0.9223	0.1328
$M_{CR}^+$ ( $10^7$ in - lb)	2.4390	0.8185	0.9114	0.3320	0.0622

+ Warming free 的  $M_{CR}$  是取 Warming restraint 的挫屈負荷

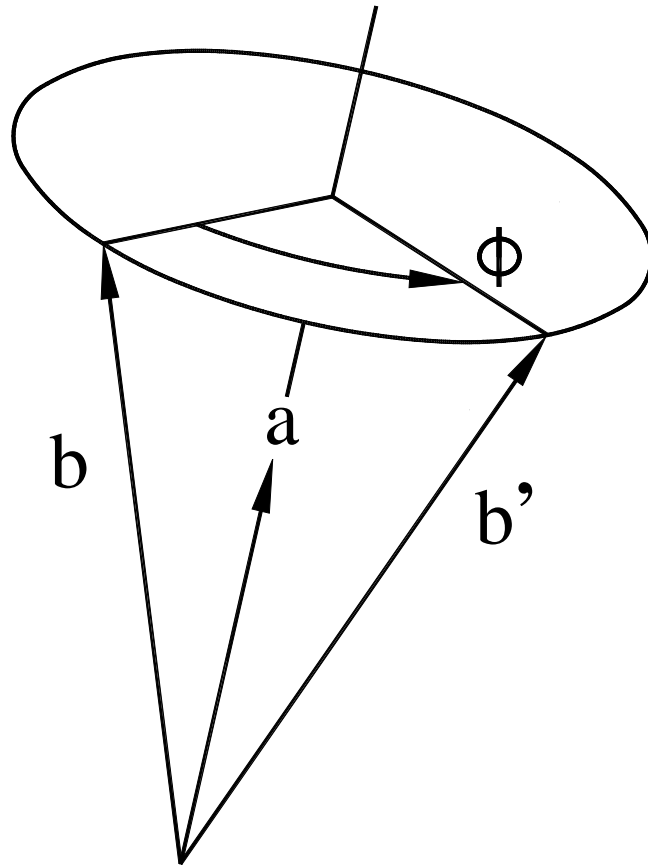
表二十三(b)懸臂梁之挫屈彎矩  $M_B$  (W 斷面,WF,ST,L=600(in))

P/ $P_{CR}$	$M_B / M_{CR}$				
	W14 × 159	W14 × 90	W10 × 100	W10 × 60	W10 × 30
$10^{-6}$	0.8068	0.8069	0.8408	0.8335	0.9557
0.1	0.7855	0.7848	0.8209	0.8132	0.9371
0.2	0.7625	0.7612	0.7989	0.7910	0.9079
0.3	0.7373	0.7354	0.7735	0.7659	0.8631
0.4	0.7083	0.7063	0.7425	0.7357	0.8056
0.5	0.6733	0.6715	0.7016	0.6970	0.7388
0.6	0.6271	0.6264	0.6450	0.6436	0.6628
0.7	0.5615	0.5632	0.5675	0.5690	0.5752
0.8	0.4673	0.4713	0.4657	0.4685	0.4705
0.9	0.3317	0.3365	0.3284	0.3310	0.3332
0.98	0.1477	0.1504	0.1460	0.1473	0.1492
$P_{CR}$ ( $10^5$ lb)	1.4867	0.7195	0.4114	0.2306	0.0332
$M_{CR}^+$ ( $10^7$ in - lb)	1.1666	0.3742	0.4501	0.1616	0.0305

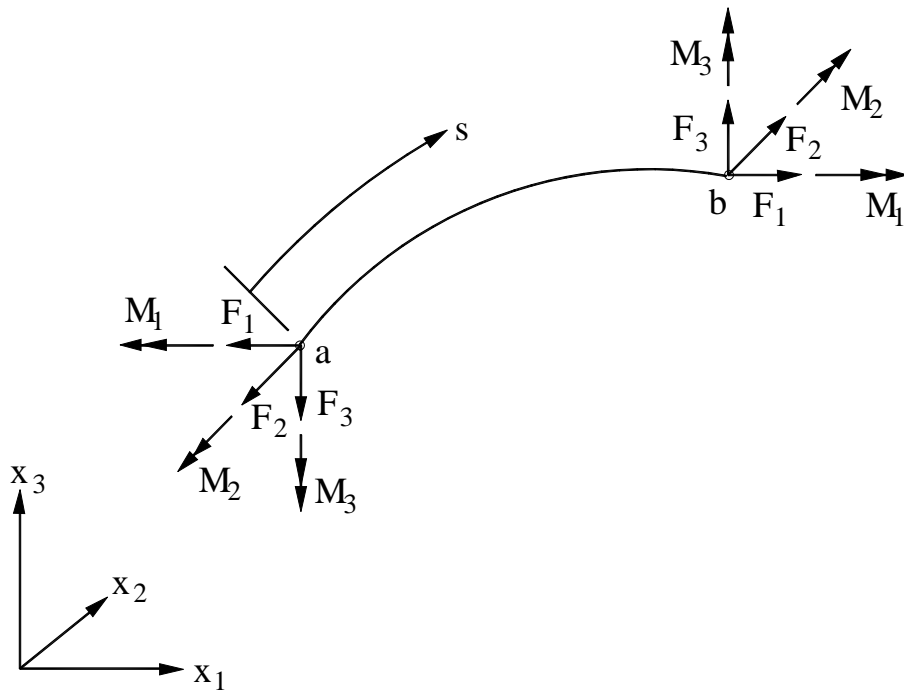
+ Warming free 的  $M_{CR}$  是取 Warming restraint 的挫屈負荷



圖一 元素座標與元素截面座標

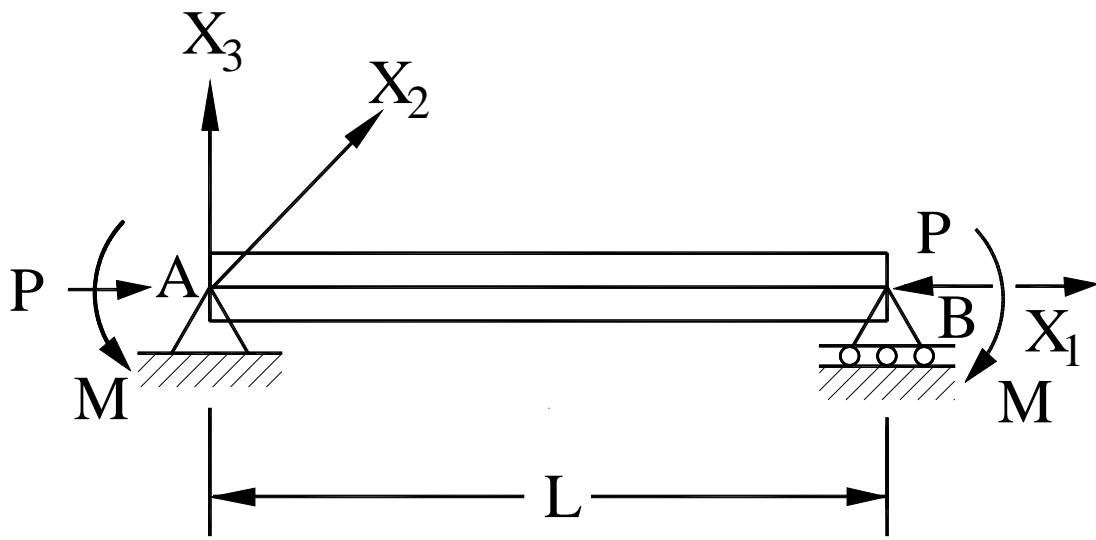


圖二 旋轉向量

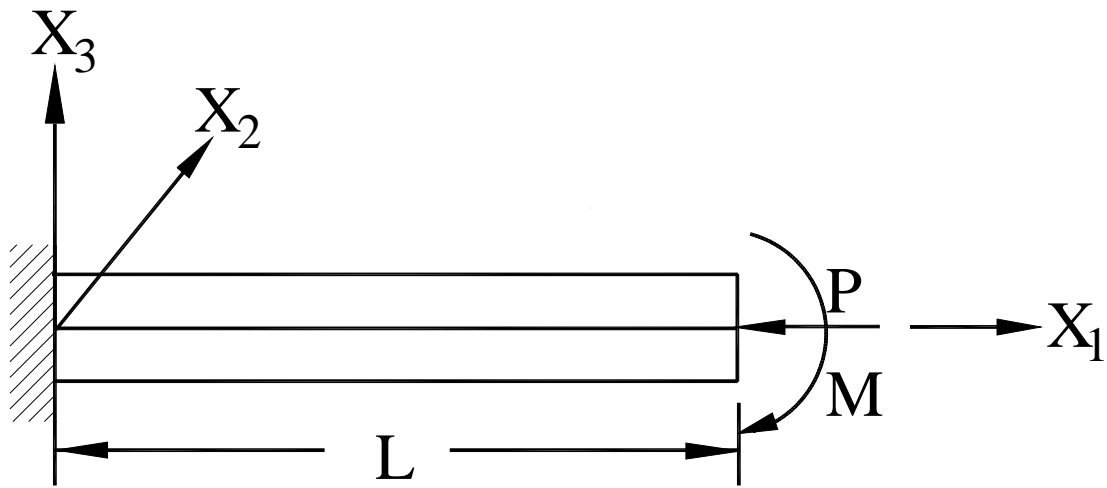


圖三 作用於元素中任一小段的端點負荷

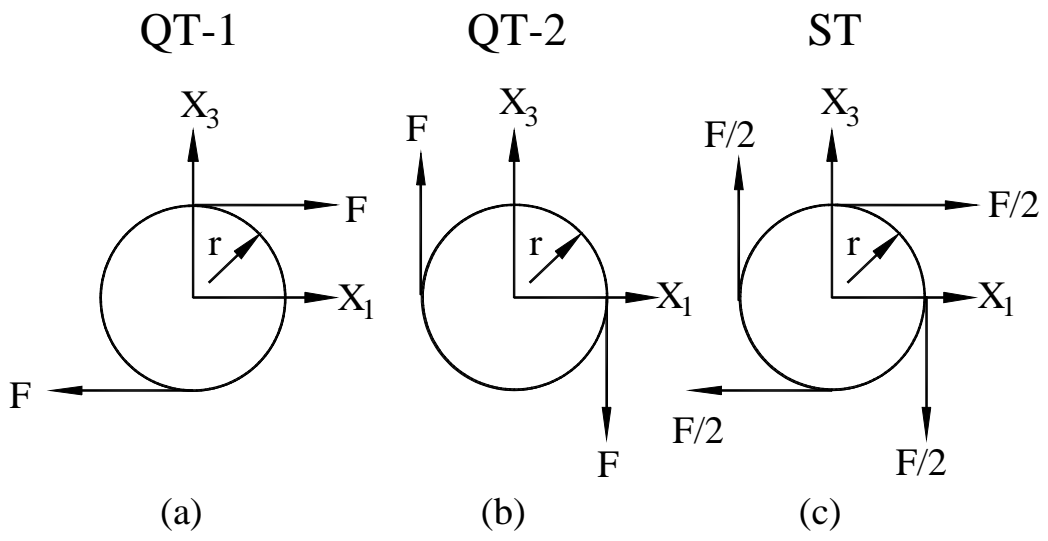




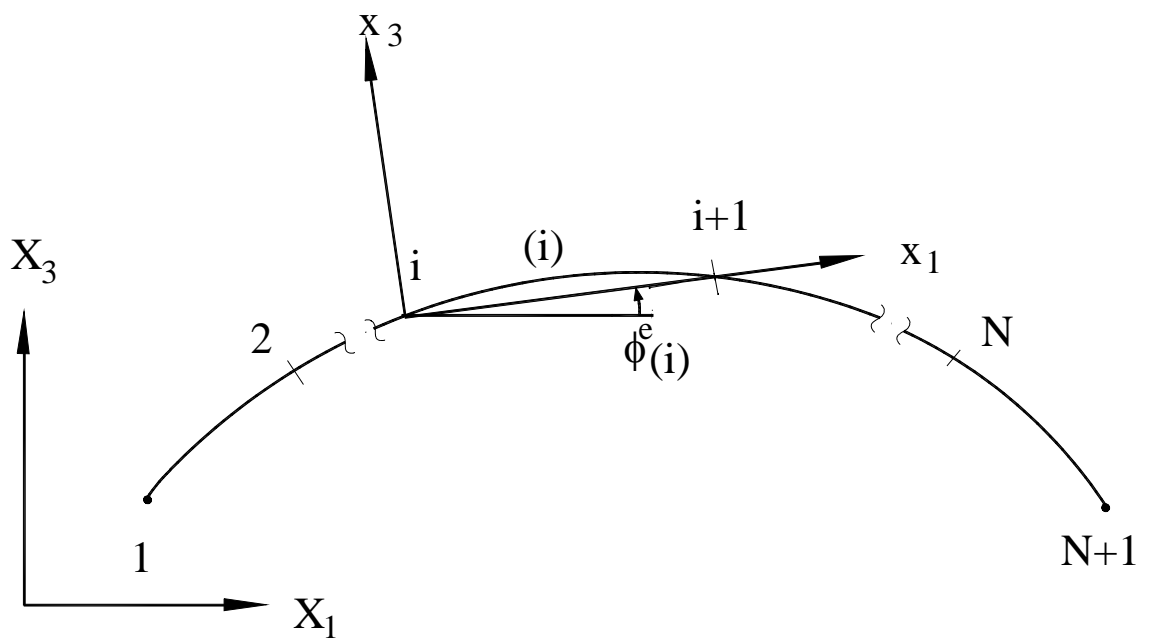
圖四 簡支梁兩端承受彎矩及軸力之結構圖



圖五 懸臂梁兩端承受彎矩及軸力之結構圖



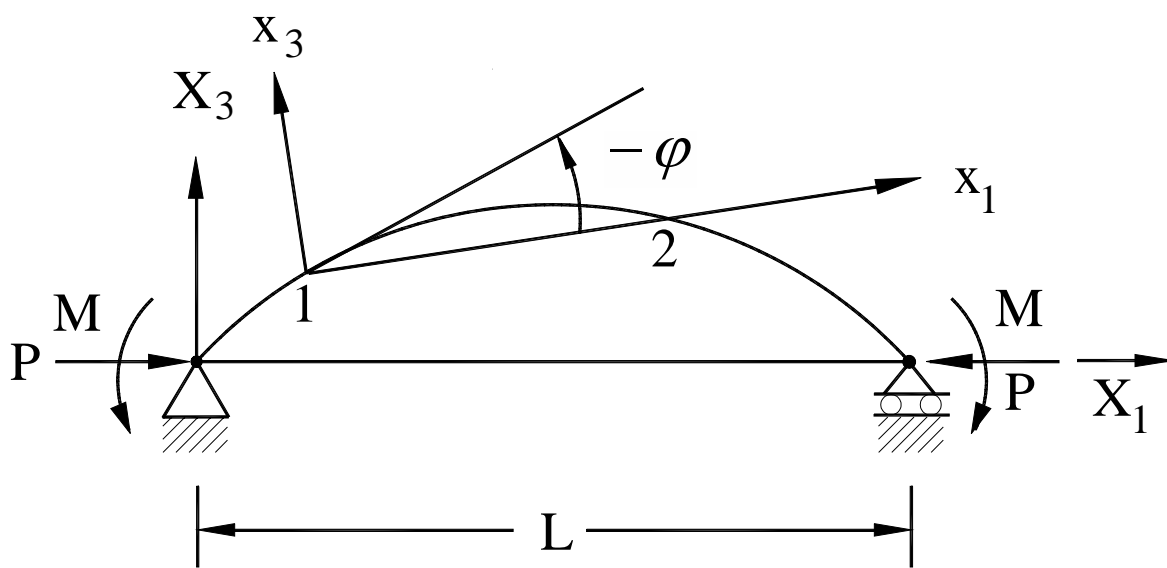
圖六 QT-1、QT-2、ST 型彎矩示意圖



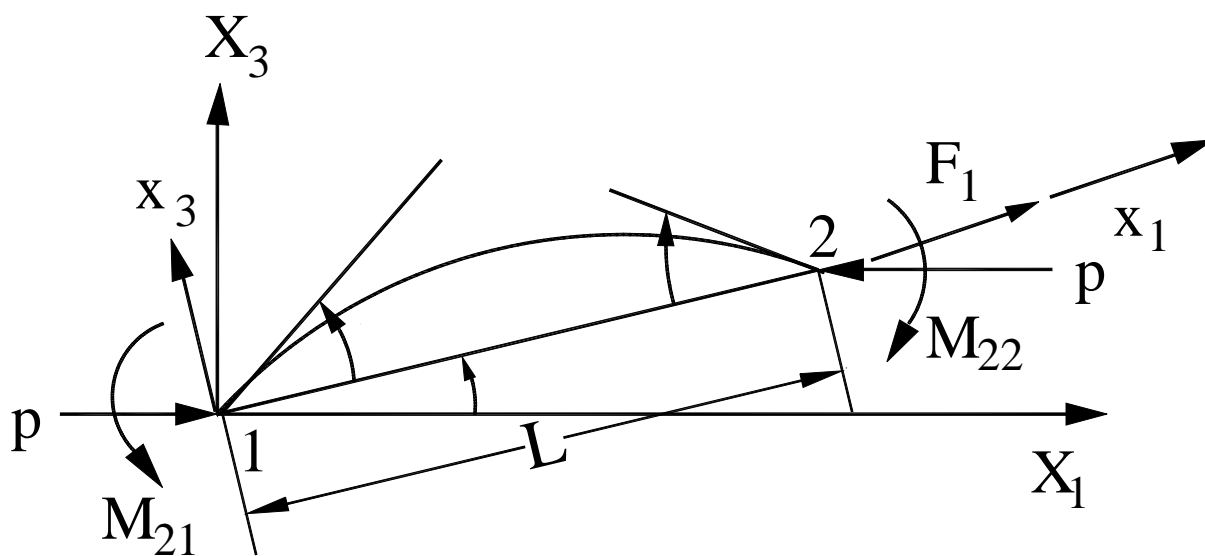
(i): the ith element

i : the ith node

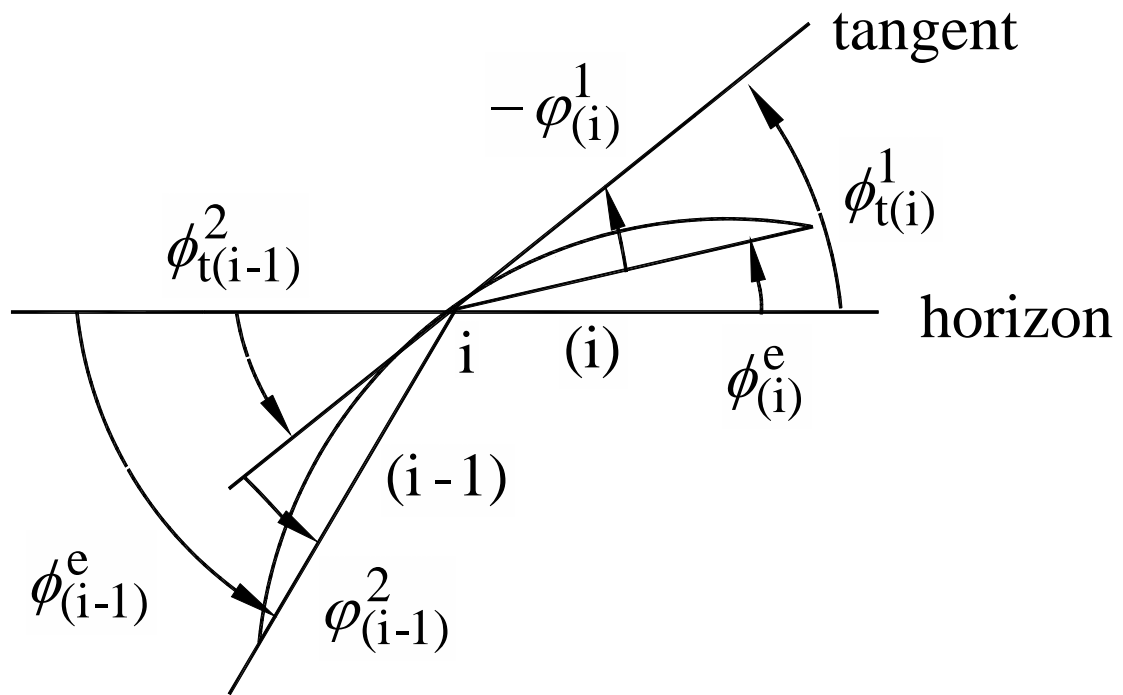
圖七 梁之有限元素分割



圖八 簡支梁之主要平衡路徑圖

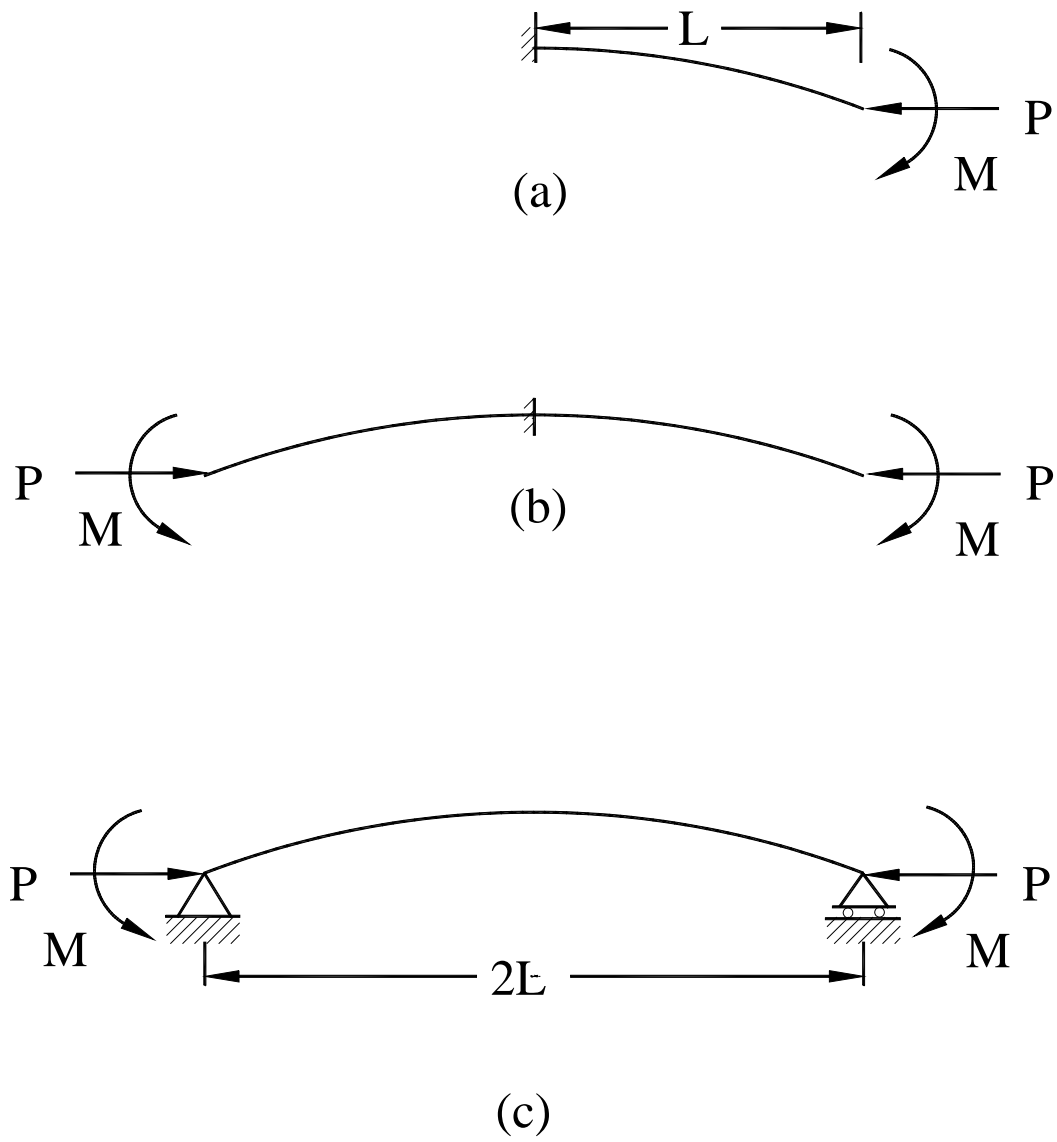


圖九 梁元素在主要平衡路徑之自由體圖



$i$  : the  $i$ th node  
 $(i)$  : the  $i$ th element

圖十 梁元素之角度放大示意圖



圖十一 懸臂梁之主要平衡路徑示意圖



附錄 A 簡支梁受軸向拉力時之主要平衡路徑

如圖八所示之簡支梁所受的軸力為軸向拉力時，推導的方式和 3.2 節一樣，在此僅列出部分重要的方程式並做簡單的說明。與(3.2.11)式對應之主要平衡路徑之統御方程式需改成

$$\frac{EI_y}{S^2} \frac{d^4 w}{d\zeta^4} - P \cos \phi^e \frac{d^2 w}{d\zeta^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

其中 P 需取正值。

(A.1)式的通解可為

$$w(\zeta) = \mathbf{N}^t(\zeta) \mathbf{q}^0 \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{N}^t(\zeta) = \{ \sinh a\zeta \quad \cosh a\zeta \quad \zeta \quad 1 \} \quad (\text{A.3})$$

其中  $\mathbf{q}^0$  和 a 的表示與 (3.2.14)及(3.2.15)式相同。

(A.2)中  $\mathbf{q}^0$  和端點曲率間的關係可表示成

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{T} \mathbf{k} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{T} = \frac{S^2}{2a^2} \begin{bmatrix} 1/\sinh \frac{a}{2} & -1/\sinh \frac{a}{2} \\ -1/\cosh \frac{a}{2} & -1/\cosh \frac{a}{2} \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

其中  $\mathbf{k}$  和(3.2.21)一樣。

與(3.2.24)對應之方程式需改成

$$\sin \phi^e = \frac{EI_y}{Pl} (\kappa_1 - \kappa_2) \quad (\text{A.6})$$

與(3.2.32)式對應之方程式需改成

$$\kappa = \frac{M}{EI_y} \frac{\cosh a\zeta}{\cosh a/2} \quad (\text{A.7})$$

與(3.2.37)式對應之方程式需改成

$$k_\phi = \frac{-EI_y}{Pl \cos \phi^e} \quad (\text{A.8})$$

## 附錄 B 懸臂梁之主要平衡路徑

圖五之懸臂梁的主要平衡路徑，可由一等效簡支梁的主要平衡路徑求得。

如圖十一(a)所示為一長度為  $L$  之懸臂梁之主要平衡路徑的示意圖，圖十一(b)所示為兩個長度為  $L$  的懸臂梁之主要平衡路徑的示意圖，圖十一(b)左右對稱，且右半部和圖十一(a)相同，圖十一(c)和圖十一(b)為等效結構，兩者有相同的變形，反力和內力。所以將一長度  $2L$  的簡支梁等分成  $2N$  個梁元素，利用 3.2 節的方法求得其主要平衡路徑，然後再取其右半部之節點，即可當作長度為  $L$ ，等分成  $N$  個元素的懸臂梁之主要平衡路徑。

附錄 C 擾動後的元素座標及節點旋轉參數

在本推導中所有的向量都是表示成擾動前之元素座標  $x_i$  的分量。令  $\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0$  表示擾動前之元素節點 1 及 2 的位置向量， ${}^0\mathbf{e}_{ij}^s$  表示擾動前節點  $j$  之元素斷面座標軸  $x_{ij}^s$  的單位向量， $\boldsymbol{\theta}_j^0$  為擾動前節點  $j$  的旋轉參數向量， $\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0$  及  $\boldsymbol{\theta}_j^0, {}^0\mathbf{e}_{ij}^s (j=1,2 \quad i=1,2,3)$  可表示成

$$\mathbf{r}_1^0 = \{0, 0, 0\} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{r}_2^0 = \{\ell, 0, 0\} \quad (\text{C.2})$$

$$\boldsymbol{\theta}_j^0 = \{0, \theta_{2j}^0, 0\} \quad (\text{C.3})$$

$${}^0\mathbf{e}_{1j}^s = \{c_j, 0, -s_j\} \quad (\text{C.4})$$

$${}^0\mathbf{e}_{2j}^s = \{0, 1, 0\} \quad (\text{C.5})$$

$${}^0\mathbf{e}_{1j}^s = \{s_j, 0, c_j\} \quad (\text{C.6})$$

其中

$$c_j = \cos \varphi_{2j}^0 \quad s_j = \sin \varphi_{2j}^0 = \theta_{2j}^0$$

當元素節點  $j (j=1,2)$  受到擾動位移

$$\mathbf{u}_j = \{u_j, v_j, w_j\} \quad (\text{C.7})$$

作用時，其位置向量可表示成

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{u}_j \quad (\text{C.8})$$

擾動後之元素座標  $\bar{x}_1$  軸的單位向量可表示成

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\| \quad (\text{C.9})$$

若取到擾動量的一次項，則(C.9)式可表示成

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \left\{ 1, \frac{\Delta v}{\ell}, \frac{\Delta w}{\ell} \right\} \quad (\text{C.10})$$

其中  $\Delta v = v_2 - v_1, \Delta w = w_2 - w_1, \ell$  為擾動前元素的弦長。

當元素節點  $j$  ( $j=1,2$ ) 之斷面座標受到擾動旋轉向量

$$\boldsymbol{\varphi}_j = \{ \phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j} \} \quad (\text{C.11})$$

作用後，若取到擾動量的一次項則其座標軸  $x_{1j}^s, x_{2j}^s$  的單位向量可表示成

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1j}^s &= {}^0\mathbf{e}_{1j}^s + \boldsymbol{\varphi}_j \times {}^0\mathbf{e}_{1j}^s \\ &= \{ c_j - s_j \phi_{2j}, c_j \phi_{3j} + s_j \phi_{1j}, -s_j - c_j \phi_{2j} \} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2j}^s &= {}^0\mathbf{e}_{2j}^s + \boldsymbol{\varphi}_j \times {}^0\mathbf{e}_{2j}^s \\ &= \{ -\phi_{3j}, 1, \phi_{1j} \} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

本研究用文獻[21]中的方法決定擾動後的元素座標軸  $\bar{x}_2$ 、 $\bar{x}_3$  的單位向量及節點參數

向量  $\boldsymbol{\theta}_j = \{ \theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j} \}$ ，並說明如下

令旋轉向量  $\boldsymbol{\theta}_{nj}$  為文獻[26]中(2.4.8)式中  $\boldsymbol{\theta}_n$  在節點  $j$  之節點值，由  $\boldsymbol{\theta}_n$  的定義可得

$$\sin \theta_{nj} \mathbf{n}_j = \bar{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{e}_{1j}^s \quad (\text{C.14})$$

將(C.10)、(C.12)式代入(C.14)式且保留到擾動量的一次項可得

$$\mathbf{n}_j = \left\{ -\frac{\Delta v}{\ell} s_j, s_j + c_j \phi_{2j} + \frac{\Delta w}{\ell} c_j, c_j \phi_{3j} + s_j \phi_{1j} - \frac{\Delta v}{\ell} c_j \right\} / s_j \quad (\text{C.15})$$

擾動後元素座標軸  $\bar{x}_2$ 、 $\bar{x}_3$  的單位向量  $\bar{\mathbf{e}}_2$ 、 $\bar{\mathbf{e}}_3$  可由以下步驟決定：

將旋轉向量  $-\boldsymbol{\theta}_{nj}$  作用在  $\mathbf{e}_{ij}^s$  上，使其旋轉到  $\mathbf{e}_{ij}^{s'}$ ，此  $\mathbf{e}_{1j}^{s'}$  和  $\bar{\mathbf{e}}_1$  重合， $\mathbf{e}_{2j}^{s'}$  與  $\mathbf{e}_{3j}^{s'}$  和  $\bar{\mathbf{e}}_1$  垂直。由(2.3.1)式並保留到擾動量的一次項可得

$$\mathbf{e}_{2j}^{s'} = \left\{ -\frac{\Delta v}{\ell}, 1 + s_j c_j \left( \frac{\Delta w}{\ell} + \phi_{2j} \right), \phi_{1j} - \frac{1}{2} s_j \left( \phi_{3j} - \frac{\Delta v}{\ell} \right) \right\} \quad (\text{C.16})$$

元素座標軸  $\bar{x}_2$  的單位向量可表示成

$$\bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{e}_{22}^{s'} + \mathbf{e}_{21}^{s'}}{\left\| \mathbf{e}_{22}^{s'} + \mathbf{e}_{21}^{s'} \right\|} \quad (\text{C.17})$$

若取到擾動量的一次項則  $\bar{\mathbf{e}}_2$  可表示成

$$\mathbf{e}_2 = \left\{ -\frac{\Delta v}{\ell}, 1 + \frac{1}{2}s_1c_1\left(\frac{\Delta w}{\ell} + \phi_{21}\right) + \frac{1}{2}s_2c_2\left(\frac{\Delta w}{\ell} + \phi_{22}\right), \right. \\ \left. \frac{1}{2}(\phi_{11} + \phi_{12}) - \frac{1}{4}s_1\left(\phi_{31} - \frac{\Delta v}{\ell}\right) - \frac{1}{4}s_2\left(\phi_{32} - \frac{\Delta v}{\ell}\right) \right\} \quad (\text{C.18})$$

$\bar{\mathbf{e}}_3$  可表示成

$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 \times \bar{\mathbf{e}}_2 \\ = \left\{ -\frac{\Delta w}{\ell}, -\frac{1}{2}(\phi_{11} + \phi_{12}) - \frac{1}{4}\frac{\Delta v}{\ell}(s_1 + s_2) + \frac{1}{4}(s_1\phi_{31} + s_2\phi_{32}), \right. \\ \left. 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta w}{\ell}(c_1s_1 + c_2s_2) + \frac{1}{2}(c_1s_1\phi_{21} + c_2s_2\phi_{22}) \right\} \quad (\text{C.19})$$

擾動後的旋轉參數  $\theta_{1j}$  可表示成

$$\sin \theta_{1j} = \bar{\mathbf{e}}_2 \times \mathbf{e}_{2j}' \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \quad (\text{C.20})$$

若取到擾動量的一次項則  $\theta_{1j}$  ( $j=1,2$ ) 可表示成

$$\theta_{11} = -\frac{1}{4\ell}(s_1 - s_2)v_1 + \left(\frac{1}{2}\right)\phi_{11} + \left(-\frac{1}{4}s_1\right)\phi_{31} \\ + \frac{1}{4\ell}(s_1 - s_2)v_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\phi_{12} + \left(\frac{1}{4}s_2\right)\phi_{32} \quad (\text{C.21})$$

$$\theta_{12} = \frac{1}{4\ell}(s_1 - s_2)v_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\phi_{11} + \left(\frac{1}{4}s_1\right)\phi_{31} \\ - \frac{1}{4\ell}(s_1 - s_2)v_2 + \left(\frac{1}{2}\right)\phi_{12} + \left(-\frac{1}{4}s_2\right)\phi_{32} \quad (\text{C.22})$$

$\theta_{2j}$  和  $\theta_{3j}$  可表示如下

$$\theta_{ij} = \sin \theta_{nj} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad (\text{C.23})$$

若保留到擾動量的一次項則  $\theta_{ij}$  ( $i=2,3$ )、( $j=1,2$ ) 可表示成

$$\theta_{21} = s_1 + \frac{\Delta w}{\ell}\left(c_1 + \frac{1}{2}c_1s_1^2 + \frac{1}{2}c_2s_1s_2\right) \\ + \phi_{21}\left(c_1 + \frac{1}{2}c_1s_1^2\right) + \frac{1}{2}c_2s_1s_2\phi_{22} \quad (\text{C.24})$$

$$\theta_{22} = s_2 + \frac{\Delta w}{\ell}\left(c_2 + \frac{1}{2}c_2s_2^2 + \frac{1}{2}c_1s_1s_2\right) \\ + \frac{1}{2}c_1s_1s_2\phi_{21} + \phi_{22}\left(c_2 + \frac{1}{2}c_2s_2^2\right) \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned}
\theta_{31} = & \left( \frac{c_1}{\ell} + \frac{s_1^2}{4\ell} + \frac{s_1 s_2}{4\ell} \right) v_1 + \left( \frac{1}{2} s_1 \right) \phi_{11} + \left( c_1 + \frac{s_1^2}{4} \right) \phi_{31} \\
& - \left( \frac{c_1}{\ell} + \frac{s_1^2}{4\ell} + \frac{s_1 s_2}{4\ell} \right) v_2 + \left( -\frac{1}{2} s_1 \right) \phi_{12} + \left( \frac{s_1 s_2}{4} \right) \phi_{32}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{32} = & \left( \frac{c_2}{\ell} + \frac{s_2^2}{4\ell} + \frac{s_1 s_2}{4\ell} \right) v_1 + \left( -\frac{1}{2} s_2 \right) \phi_{11} + \left( \frac{s_1 s_2}{4} \right) \phi_{31} \\
& - \left( \frac{c_2}{\ell} + \frac{s_2^2}{4\ell} + \frac{s_1 s_2}{4\ell} \right) v_2 + \left( \frac{1}{2} s_2 \right) \phi_{12} + \left( c_2 + \frac{s_2^2}{4} \right) \phi_{32}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

## 附錄 D 梁元素的節點內力

本附錄中的推導是在擾動後的元素座標  $\bar{x}_i$  中推導，但為了式子的簡明，本附錄在推

導的過程中將變數  $(\bar{\quad})$  用  $(\quad)$  代替。

所以由(3.3.6)及(2.6.1)式並取到擾動量的一次項可得

$$M_1 = M_1^\theta - M_2^\theta \theta_3 + M_3^\theta \theta_2^0 \quad (\text{D.1})$$

$$M_2 = M_2^\theta \quad (\text{D.2})$$

$$M_3 = -M_1^\theta \theta_2^0 / 2 + M_3^\theta \quad (\text{D.3})$$

其中  $M_i^\theta (i=1,2,3)$  為廣義力矩，在(2.6.22)~(2.6.24)式中已有定義。

令

$$\eta = 1 + \varepsilon_0 \quad (\text{D.4})$$

則(2.6.25)式中的雙力矩可以表示成

$$B^\theta = C_1 \eta \theta_{1,ss} \quad (\text{D.5})$$

由(2.6.20)式，梁截面在  $x_2$  方向的合力可以表示成

$$F_2 = -M_{3,s}^\theta + F_1 \theta_3 + \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_{2,s}^0 \quad (\text{D.6})$$

因  $F_2$  僅取到擾動量的一次項，所以(D.6)式中之  $F_1$  式採用擾動前的  $F_1$ 。

由(2.4.5)、(3.3.6)、(2.6.22)式及(2.6.25)式的微分式，可將  $M_1^\theta$  表示成

$$M_1^\theta = E \varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + C (\theta_{1,s} + \frac{1}{2} \theta_{2,s}^0 \theta_3 - \frac{1}{2} \theta_2^0 \theta_{3,s}) - C_1 \eta \theta_{1,sss} \quad (\text{D.7})$$

由(2.4.5)、(3.3.6)及(2.6.23)式，可將  $M_2^\theta$  表示成

$$M_2^\theta = EI_y \theta_{2,s}^0 \quad (\text{D.8})$$

由(2.4.5)、(3.3.6)及(2.6.24)式，可將  $M_3^\theta$  表示成

$$M_3^\theta = E [I_z \eta v_{,ss} + (I_y - I_z) \theta_1 \theta_{2,s}^0] - \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_2^0 \quad (\text{D.9})$$

將(D.9)式微分可得



$$M_{3,s}^{\theta} = E[I_z \eta v_{,sss} + (\theta_{1,s} \theta_{2,s}^0 + \theta_1 \theta_{2,ss}^0)(I_y - I_z)] - \frac{1}{2} C \theta_{1,ss} \theta_2^0 - \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_{2,s}^0 \quad (D.10)$$

將(D.7)~(D.9)式代入(D.1)~(D.3)式可得

$$M_1 = E \varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + C(\theta_{1,s} + \frac{1}{2} \theta_{2,s}^0 v_{,s} - \frac{1}{2} \theta_2^0 v_{,ss}) - C_1 \eta \theta_{1,sss} - v_{,s} M_2 + \theta_2^0 E[I_z \eta v_{,ss} + \theta_1 \theta_{2,s}^0 (I_y - I_z)] - \frac{1}{2} C \theta_{1,s} (\theta_{2,s}^0)^2 \quad (D.11)$$

$$M_3 = -\frac{1}{2} \theta_2^0 [E \varepsilon_0 I_p \theta_{1,s} + C(\theta_{1,s} + \frac{1}{2} \theta_{2,s}^0 v_{,s} - \frac{1}{2} \theta_2^0 v_{,ss}) - C_1 \eta \theta_{1,sss}] + E[I_z \eta v_{,ss} + \theta_1 \theta_{2,s}^0 (I_y - I_z)] - \frac{1}{2} C \theta_{1,s} \theta_2^0 \quad (D.12)$$

將(D.6)式代入(D.10)式可得

$$F_2 = -E[I_z \eta v_{,sss} + (\theta_{1,s} \theta_{2,s}^0 + \theta_1 \theta_{2,ss}^0)(I_y - I_z)] + \frac{1}{2} C \theta_{1,ss} \theta_2^0 + C \theta_{1,s} \theta_{2,s}^0 + F_1 v_{,s} \quad (D.13)$$

將(3.3.53)及(3.3.54)式代入(D.11)、(D.12)、(D.13)及(D.5)式中，並取 $\zeta = \zeta_j$  ( $j=1, 2$ )

其中 $\zeta_1 = -0.5, \zeta_2 = 0.5$ ，可得在元素座標上梁元素在節點 $j$  ( $j=1, 2$ )的節點內力。

$$F_{2j} = \{-E[I_z \eta \mathbf{N}_{v,sss}^t(\zeta_j) + (\theta_{2,s}^0(\zeta_j) \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j) + \theta_{2,ss}^0(\zeta_j) \mathbf{N}_1^t(\zeta_j))(I_y - I_z)] + \frac{1}{2} C \theta_2^0(\zeta_j) \mathbf{N}_{1,ss}^t(\zeta_j) + C \theta_{2,s}^0(\zeta_j) \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j) + F_1 \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_j)\} \mathbf{q} = \mathbf{N}_{F_2}^t(\zeta_j) \mathbf{q} \quad (D.14)$$

$$M_{1j} = \{E \varepsilon_0 I_p \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j) + C[\mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j) + \frac{1}{2} \theta_{2,s}^0(\zeta_j) \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_j) - \frac{1}{2} \theta_2^0(\zeta_j) \mathbf{N}_{v,ss}^t(\zeta_j)] - C_1 \eta \mathbf{N}_{1,sss}^t(\zeta_j) - M_2 \mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_j) + \theta_2^0(\zeta_j) E[I_z \eta \mathbf{N}_{v,ss}^t(\zeta_j) + \theta_{2,s}^0(\zeta_j)(I_y - I_z) \mathbf{N}_1^t(\zeta_j)] - \frac{1}{2} C (\theta_2^0(\zeta_j))^2 \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j)\} \mathbf{q} = \mathbf{N}_{M_1}^t(\zeta_j) \mathbf{q} \quad (D.15)$$

$$\begin{aligned}
M_{3j} = & \left\{ -\frac{1}{2}\theta_{2,2}^0(\zeta_j)[E\varepsilon_0 I_p \mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j) + C(\mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j)) \right. \\
& + \frac{1}{2}\theta_{2,s}^0(\zeta_j)\mathbf{N}_{v,s}^t(\zeta_j) - \frac{1}{2}\theta_{2,ss}^0(\zeta_j)\mathbf{N}_{v,ss}^t(\zeta_j)) \\
& - C_1\eta\mathbf{N}_{1,sss}^t(\zeta_j)] + E[I_z\eta\mathbf{N}_{v,ss}^t(\zeta_j) + \theta_{2,s}^0(\zeta_j)(I_y - I_z)\mathbf{N}_1^t(\zeta_j)] \\
& \left. - \frac{1}{2}C\theta_{2,2}^0(\zeta_j)\mathbf{N}_{1,s}^t(\zeta_j)\right\}\mathbf{q} = \mathbf{N}_{M3}^t(\zeta_j)\mathbf{q}
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$B_j^\theta = C_1\eta\mathbf{N}_{1,ss}^t(\zeta_j)\mathbf{q} = \mathbf{N}_B^t(\zeta_j)\mathbf{q} \tag{D.17}$$

由(D.14)~(D.17)式，並用  $\bar{F}_{2j}, \bar{M}_{1j}, \bar{M}_{3j}$  取代  $F_{2j}, M_{1j}, M_{3j}$  可得

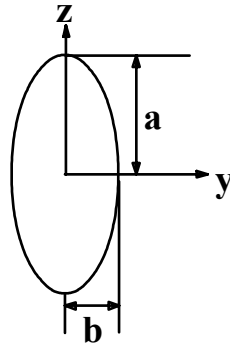
$$\bar{\mathbf{F}}_e = \mathbf{N}_F \mathbf{q} \tag{D.18}$$

其中  $\bar{\mathbf{F}}_e$  在(3.3.71)式中已定義

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_F = & \left\{ -\mathbf{N}_{F2}^t(\zeta_1) \quad -\mathbf{N}_{M1}^t(\zeta_1) \quad -\mathbf{N}_{M3}^t(\zeta_1) \quad -\mathbf{N}_B^t(\zeta_1) \right. \\
& \left. \mathbf{N}_{F2}^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_{M1}^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_{M3}^t(\zeta_2) \quad \mathbf{N}_B^t(\zeta_2) \right\}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

附錄 E 橢圓及 W 型鋼之斷面常數

A. 橢圓斷面



翹曲函數：

$$\omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy$$

$$I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b \quad (\text{E.1})$$

$$I_z = \frac{1}{4} \pi a b^3 \quad (\text{E.2})$$

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (\text{E.3})$$

$$A_{\omega\omega} = \frac{\pi a^3 b^3}{24} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \quad (\text{E.4})$$

$$\Omega_{yz} = \frac{\pi a^3 b^3}{24} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) \quad (\text{E.5})$$

本研究中分析的橢圓斷面有兩種，一為  $a:b=10:1$ ，另一為  $a:b=30:1$  的比例。利用上述所整理(E.1)~(E.5)式，將兩種橢圓之斷面尺寸及常數列表如下

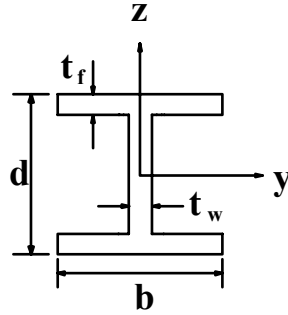
a : b	10 : 1	30 : 1
a(cm)	2.5	3.0
b(cm)	0.25	0.1
A(cm <sup>2</sup> )	1.9635	0.942478
I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	3.06796	2.120575
I <sub>z</sub> (10 <sup>-2</sup> cm <sup>4</sup> )	3.06796	0.23562
J(10 <sup>-1</sup> cm <sup>4</sup> )	1.21503	0.09414
A <sub>ωω</sub> (10 <sup>-2</sup> cm <sup>6</sup> )	3.07048	0.35186
Ω <sub>yz</sub> (10 <sup>-2</sup> cm <sup>6</sup> )	3.13251	0.35265
α(10 <sup>-2</sup> )	1.0	0.11111
β(10 <sup>-2</sup> )	1.98019	0.22197
γ	0.505416	0.747525

註：

$$\alpha = \frac{I_z}{I_y}, \beta = \frac{GJ}{EI_y}, \gamma = \frac{EA_{\omega\omega}}{GJ}$$

$$E = 10000 \text{ N/cm}^2 \quad G = 5000 \text{ N/cm}^2$$

## B. W 型鋼斷面



翹曲函數：

*top flange*

$$-\omega = y(z - d + t_f) \quad \text{for} \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ 0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

*web*

$$\omega = yz \quad \text{for} \begin{cases} -0.5t_w \leq y \leq 0.5t_w \\ -0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

*bottom flange*

$$\omega = -y(z + d - t_f) \quad \text{for} \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5d \leq z \leq -0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

$$\Omega_{yz} = \frac{b^3 h^2 t_f}{24} - \frac{b^3 t_f^3}{72} + \frac{(h - t_f)^3 t_w^3}{144}$$

(E.6)

其中  $h = d - t_f$

本研究中所分析的 W 型鋼斷面有五種，斷面的常數除了  $\Omega_{yz}$  (見 (E.6) 式)，其餘皆是參考 AISC 所出版 Manual of Steel Construction [27]，將五種型鋼的斷面尺寸及常數列表如下

型鋼斷面	W14x159	W14x90	W10x100	W10x60	W10x30
d(in)	14.98	14.02	11.1	10.22	10.47
b(in)	15.565	14.52	10.34	10.08	5.81
$t_f$ (in)	1.19	0.71	1.12	0.68	0.51
$t_w$ (in)	0.745	0.44	0.68	0.37	0.3
A(in <sup>2</sup> )	46.7	26.5	29.4	17.6	8.84
$I_y(10^3 \text{in}^4)$	1.9	0.999	0.623	0.341	0.170
$I_z(10^3 \text{in}^4)$	0.748	0.362	0.207	0.116	0.0167
J(in <sup>4</sup> )	19.8	4.06	10.9	2.48	0.62
$A_{\omega\omega}(10^4 \text{in}^6)$	3.56	1.6	0.515	0.264	0.0414
$\Omega_{yz}(10^4 \text{in}^6)$	3.5462	1.6027	0.5115	0.2636	0.0413
$\alpha$	0.3937	0.3624	0.3323	0.3402	0.0982
$\beta(10^{-2})$	0.4025	0.1570	0.6757	0.2809	0.1409
$\gamma(10^4)$	0.4655	1.0204	0.1223	0.2756	0.1729

註： $\alpha = \frac{I_z}{I_y}, \beta = \frac{GJ}{EI_y}, \gamma = \frac{EA_{\omega\omega}}{GJ}$

$E = 29000 \text{ksi} \quad G = 11200 \text{ksi}$

### 附錄 F 簡支梁及懸臂梁的挫屈軸力

如圖四所示之簡支梁在軸向壓力 P 作用時，造成側向挫屈的軸力可表式成[28]

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2} \quad (\text{F.1})$$

其中  $I_{\min}$  為  $I_y$  和  $I_z$  中較小者

如圖五所示之懸臂梁在軸向壓力 P 作用時，造成側向挫屈的軸力可表示成[28]

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4L^2} \quad (\text{F.2})$$

其中  $I_{\min}$  為  $I_y$  和  $I_z$  中較小者

固端梁在軸向壓力 P 作用時，造成側向挫屈的軸力可表式成[28]

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{L^2} \quad (\text{F.3})$$

其中  $I_{\min}$  為  $I_y$  和  $I_z$  中較小者

附錄 G 簡支梁及懸臂梁之線性挫屈彎矩

當懸臂梁固定端的截面為抑制翹曲時，若其自由端受到 QT 或 ST 型的彎矩作用時，其線性挫屈彎矩的古典解為[29]

QT 型彎矩

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{2l} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{1 + \gamma\pi^2/4l^2} \quad (G.1)$$

ST 型彎矩

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{1 + \gamma\pi^2/4l^2} \quad (G.2)$$

其中

$$\alpha = \frac{I_z}{I_y}, \beta = \frac{GJ}{EI_y}, \gamma = \frac{C_1}{GJ} \quad (G.3)$$

當簡支梁受到均勻彎矩(QT 型或 ST 型)作用時，其線性挫屈彎矩為[30]

$$M_{cr} = \frac{\pi EI_y}{k_b l} \sqrt{\alpha\beta} \sqrt{1 + \gamma\pi^2/(k_t l)^2} \quad (G.4)$$

而  $k_b, k_t$  二常數分別代表(3.3.84)式的不同邊界條件，如下表：

$k_b$	$k_t$	邊界條件	
0.883	0.492	$M_{3,1}^g = M_{31(1)}^g = 0$ $\beta_{,1}^\theta = \beta_{1(1)}^\theta = 0$	$M_{3,N+1}^g = M_{32(N)}^g = 0$ $\beta_{,N+1}^\theta = \beta_{2(N)}^\theta = 0$
1.000	1.000	$M_{3,1}^g = M_{31(1)}^g = 0$ $B_{,1}^\theta = B_{1(1)}^\theta = 0$	$M_{3,N+1}^g = M_{32(N)}^g = 0$ $B_{,N+1}^\theta = B_{2(N)}^\theta = 0$
0.492	0.492	$\phi_{3,1}^g = \phi_{31(1)}^g = 0$ $\beta_{,1}^\theta = \beta_{1(1)}^\theta = 0$	$\phi_{3,N+1}^g = \phi_{32(N)}^g = 0$ $\beta_{,N+1}^\theta = \beta_{2(N)}^\theta = 0$
0.434	1.000	$\phi_{3,1}^g = \phi_{31(1)}^g = 0$ $B_{,1}^\theta = B_{1(1)}^\theta = 0$	$\phi_{3,N+1}^g = \phi_{32(N)}^g = 0$ $B_{,N+1}^\theta = B_{2(N)}^\theta = 0$

其中  $\alpha, \beta$  及  $\gamma$  已在(G.3)式中定義。