行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

使用 CAS 之微積分實驗教學之成效研究

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC93-2521-S-009-002-
執行期間：93 年 08 月 01 日至 94 年 07 月 31 日
執行單位：國立交通大學應用數學系(所)

計畫主持人：白啟光

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 94 年 10 月 31 日

使用CAS之微積分實驗教學之成效研究

國立交通大學應用數學系
白啟光

Abstract

Students encounter many cognitive difficulties with the limit concept. A number of research studies reveal that students often conceive of the notion $\lim_{x \to a} f(x)$ not as a static concept but as a dynamic process of getting close to a fixed value. The goal of this study is to investigate the effects of conceptual understanding of limit of a function with the aid of computer algebra system (CAS).

We seek to answers to the following questions.

1. How do the students construct their concept image of limit of a function by graphical, numerical and algebraic means ?
2. How do the students adopt visual way of reasoning and establish the connection between the visual representations and the algebraic representations ?
3. How do the students establish the transition between the informal concept definition in which limit of a function is seen as a never-ending process and the formal $\varepsilon - \delta$ definition ?

摘要

極限對多數學生而言，並不容易。特別是從極限的直覺概念跨到$\varepsilon - \delta$的形式概念是學生在微積分課程中最常遇到的困難及感到挫折處。學生常將$\lim_{x \to a} f(x)$詮釋成一串無窮盡的逼近程序而非一個概念所表示的數值。本研究的目的是要探查學生在電腦代數系統(CAS) 之輔助下如何建構函數極限的概念及融入電腦代數系統(CAS)於微積分教學能產生的效果與發揮的功能為何。

基於研究旨趣，有以下的待答問題：

1. 學生如何透過電腦代數系統(CAS)在數值、圖形及代數三方面的呈現，建立函數極限的概念印象(concept image)？
2. 學生如何利用圖形思考問題及如何建立圖形表徵和代數表徵之間的連結關係？
3. 學生如何建立非形式的極限觀念和$\varepsilon - \delta$定義的形式概念之間的轉換？

一、文獻探討

在國內，早在民國七十五年，國科會所提出的數學教育第一次學門規劃資料中，就已指出探討電腦在數學教育的應用，是數學教育研究的主要課題之一（王九逵，1986a）。雖有以科技融入微積分教學的研究（王九逵，1986b；1989；Law, C.K. & Shih, T. S.，1996），但關於此革新的教學情境下學習之「行」與「徑」則較少有系統的、深入的探究。

Orton, A. (1983a, 1983b)應用晤談的方法探究數學系學生對微積分的理解。研究發現學生能夠熟練地應用基本的微分及積分技巧，但卻對於根本的概念有基本的迷思。他提到極限對於真正瞭解積分和微分而言很重要，但一般在學校沒有較多的時間讓學生仔細思考極限，之後在微積分課程卻不斷地以不同的形式出現。他建議教學一開始應該以非形式、直覺的方式，假以時日再導入形式，並在學生受教的整個歷程中增強微積分基本的概念。他提出一些教學內容和方法上的建議，並提醒教師學生在代數運算上的困難必定會使得微積分的基本的概念難以理解。此外，電算器無法減輕代數操作所引起的問題；然而，電算器可提供微積分的數值方法。老師需要關照學生相對應之概念的重構。

Tall, D. ＆ Vinner, S. (1981)，將概念分為概念印象(concept image)和概念定義(concept definition)兩種。概念印象指的是關於該概念的整個認知結構，也就是個體看待概念的方式。概念定義則是為數學社群所理解與接受的。研究聚焦在學生所持有的非形式的極限觀念和由$\varepsilon-\delta$形式定義呈現的數學想法之間的關係，及學生所持有的典型的迷思概念或非形式概念。Tall (1978) 及 Tall ＆ Vinner (1981)探究學生學習極限的困難。他們發現學生的困難部分可能是由非正式定義與形式定義的轉換所引起。

Galindo, E.(1995)探索大學生處理數學訊息的喜愛模式，利用MPI(Presmeg’s Mathematical Process Instrument)量表將學生區分為視覺型與非視覺型。學生從：(1)使用繪圖器；(2)使用CAS：Mathematica；(3)不用科技；三種微積分課程(introductory differential calculus)擇一選修。比較這三組學生的學習成就，他提出：合適的使用科技，搭配具多重表徵能力的軟體，可以利益不同認知型態的學生，促進視覺型和非視覺型學生的概念理解。

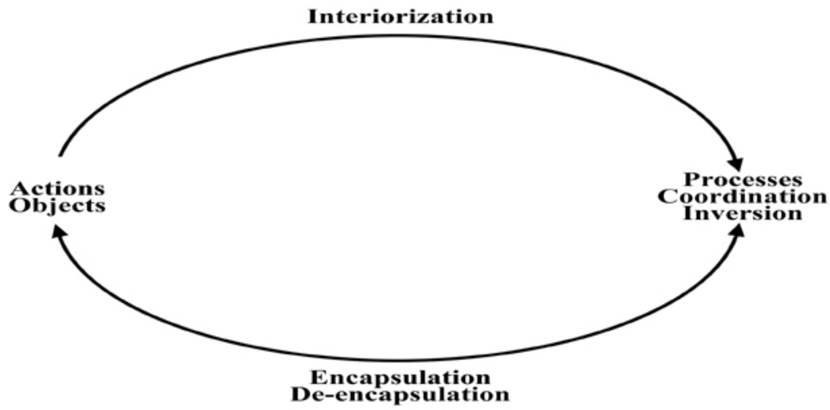
Porzio(1995)檢驗並比較三種不同微積分教學取向的效果。研究對象為 100 名大學生，分三組，一組使用傳統課程教學強調符號表徵的作用；一組與前者類似，但教學和作業強調藉由圖形繪圖器，使用符號與圖形表徵；另一組則以 Calculus ＆ Mathematica 教材進行教學，強調符號的、數值的、圖形的三種表徵的連結，且利用設計好的問題讓學生從解題過程中建立或增進不同表徵或概念和程序之間的連結。資料收集來自教室觀察，前、後測，及晤談。研究指出，利用 Calculus ＆ Mathematica 學習的學生比其他組較能使用並識別不同表徵，也較能

在不同表徵間作連結。他強調適當地使用科技作教學，不但可增強概念學習，也可增進多重表徵之間的連結。

然而，科技並非萬靈丹。Li, L. ＆ Tall, D. (1992) 利用程式設計(BASIC)的方式建構極限的概念。但實驗結果指出學生對極限的了解仍停留在一串無窮盡的逼近程序而沒有將極限概念化；以一逼近程序可能會是非正式定義與形式定義間轉換的阻礙。Monaghan, J., Sun, S., ＆ Tall, D. O. (1994)讓 9 位實驗組學生使用 CAS 軟體 Derive 建構極限概念。在考察學生回答 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+2}$ 問題時，其中 8 位學生不知道除了用 Derive 求該極限值之外的方法。19 位控制組（不用 Derive 組）的學生有 12 位知道將 $\frac{2x+3}{x+2}$ 分母分子同除以 x ，再利用 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 及極限法則來求該極限。同時，在解釋 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的意義時，所有控制組的學生都提出令人滿意的理論說明；但實驗組卻沒有一個能給出任何的理論解釋。雖然實驗組的課程也包括了概念性的活動，這些概念對學生而言仍然難以理解；學生學到的只是按鍵動作，並且像自動化的例行程序一般加以執行。

- Dubinsky, Ed.及其同僚 (Dubinsky，1991；Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas,，1996）從皮亞傑的反思抽象為基礎所發展出 APOS(Action-Process-Object-Schema)理論。

他們認為學習數學是心智過程與物件(mental process and object)的建構以及再建構，並且將這些組織成為基模(schema)（參考圖一）。



圖一、基模與其建構物（Dubinsky，1991）

行動(action)是一種轉換(transformation)，是個體對所知覺到的外在刺激所做的一種反應。這種轉換可能是身體反射或是從記憶中回憶某些適時的活動。

當一個行動一直重複，個體對其反思，行動就可能被內化 (interiorization) 成一個過程。亦即，我們已完成一個執行相同行動的內在建構物，但此時不一定需

要由外在刺激所引發。當個體建構一個過程，他便能描述，或甚至反轉過程中的步驟而無須真正執行這些步驟。

個體建構物件有兩種方式。一是當個體對作用在某特定過程的行動加以反思，察覺到將過程視爲一個整體，瞭解到轉換（不管是行動或是過程）可對其起作用，並且能夠真正建構這樣的轉換，我們便說個體已將這個過程重新建構成一個認知物件，亦即將這個過程經壓縮(encapsulation)成爲物件。第二種方式則是，個體對基模反思並且加以轉換，如上述步驟，此時便導致將該基模變成一個新的物件。物件可以被解壓縮而獲得其原來過程。對數學而言，個體可以在某個數學想法的過程和物件之間來來回回，是極重要的。基模則是一整個行動、過程和物件的集合，並與其它基模以某種方式連結一起，且與問題情境有關。

Dubinsky 等人以基因分解 (genetic decomposition) 來描述個體如何建構出這些行動、過程和物件以理解某個數學概念的心智模式。概念的基因分解可作爲教學設計以及分析學生學習的架構。某個特定概念的基因分解並非唯一，只是暫時性的，可由實徵性的研究加以修改、調整，再作爲下一輪教學實驗的設計架構。

Dubinsky 及其所屬之數學教育研究團體 RUMEC 中的成員利用 APOS 理論配合基因分解(genetic decomposition)，對於學生如何建構微積分課程中的一些重要概念做了深入的探討。他們指出以 APOS 的理論架構所做出的基因分解不僅可以作爲自身理解數學概念的架構，也可作爲分析學生如何建構概念的基礎。他們以 C^4L (Calculus, Concept, Compute, and Cooperative Learning)實驗課進行微積分教學，以 ACE(**C**omputer **A**ctivities，**C**lassroom task without computers followed by disscussion ，**E**xercise) 教學環(teaching cycle)。在前八至九週的時間施行五個由作者設計電腦活動課程單元，讓學生使用數學程式語言(ISETL)，借由寫程式建構探究數學概念。以三至五人小組合作學習的方式從事解題活動，一同討論電腦和解題活動所得到的結果。

Cottrill,等人(1996)是利用 APOS 理論提出極限 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的基因分解如下：

1. 選定某一靠近 a 的點或甚至 a 點，計算這個點的函數值。
2. 選定在某些點，這些點愈來愈靠近 a ，計算這些點的函數值。
3. 建構一個調和的基模如下：
   (a) 將步驟 2 的行動內化以建構一個 x 趨近於 a 的 domain process；
   (b) 建構一個 y 趨近於 L 的 range process；
   (c) 藉由 f 將 (a)、(b) 調和。即，由 x 趨近於 a 的 process 透過 f 取值而獲得 y 趨近於 L 的逼近程序。
4. 對極限執行行動，例如合成函數的極限。以這種方式，步驟 3 的基模被壓縮成爲一個物件。

5. 將步驟 3(c)重新以區間和不等式，即引入符號 $0 < |x - a| < \delta$ ，

$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ 的方式，加以建構。

6. 應用量詞化(quantification)基模將步驟 5 重新建構，以獲得一個極限的形式定義。
7. 將 $\varepsilon - \delta$ 完整概念應用到特定的情境。

他們利用此基因分解並利用此基因分解以晤談方式探查學生建構極限 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的概念。研究結果中反駁 Li, L. ＆ Tall, D. (1992)所提出“ 逼近程序可能會是非正式定義與形式定義間轉換的阻礙”一說。他們指出學生對於極限概念的學習障礙或困難，可能是來自對於動態逼近程序沒有精確地了解以致於無法應用量詞化(quantification)基模將逼近程序重新建構，以獲得一個極限的形式定義。

我們認爲以 APOS 理論配合 ACE 學習環可能是有效地使用電腦代數系統(CAS)幫助學生建構極限概念之可行辦法。

二、研究方法

實驗情境

以本校大一微積分實驗班學生爲研究對象。教學方式採 ACE 教學環模式(ACE teaching cycle)，以電腦實驗活動(**A**ctivity)爲引導，再進行課堂討論(**C**lassroom discussion)，最後指定習題給學生演練(**E**xercise)。

電腦實驗活動是在電腦室中實施，使用研究者設計的「微積分實驗教材」(problem based modules)，讓學生兩人一組，共用一套電腦設備，透過網路取得教材，利用數學軟體 Maple，進行合作學習。實驗活動時間爲兩節課，學生在以問題爲中心的活動中，自行操作，探索，討論，透過解題活動建構的微積分之概念，並在課後將解題的推論過程和結果以書面報告的方式繳交；書面報告的評分強調解題之過程及說明而非程式執行出之結論。實驗活動進行中，除了研究者之外，還有兩位研究生助教巡視其間；當學生遇到問題或障礙，不管是電腦、指令、或是題意不清，或是數學本身的問題都可適時提問，研究者或助教會予以協助。若是學生數學知識欠缺的問題，通常會先給予提示而非直接給答案，讓學生有思考學習的空間。

而課堂討論則是以電腦實驗活動中的問題爲引導，參考指定的微積分課本(Calculus --- Early Transcendentals, Stewart 5e)，以 Maple 編寫教材以投影幕呈現以講述搭配板演方式進行。教材方面強調觀念之視覺化展示或動態呈現以輔助學生學習；並將此教材放於教學網頁上，供學生做課後複習之參考。研究者常在課

堂中適時提出問題，一方面評估學生的學習狀況，或適時澄清可能有的迷思概念，一方面也藉此解題過程，增進師生互動。

此外，每星期另有一小時的習題課，由學生分組上台演練指定之習題。

相關活動設計

將 Cottrill,等人(1996)所提出極限 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 定義的基因分解修改如下：

1. 選定在某些點，這些點愈來愈靠近 a ，計算這些點的函數值。
2. 利用步驟 1 中的數值建極限的動態逼近程序“$x \to a,\ \ f(x) \to L$”。
3. 了解極限的非形式定義，即，We can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a。
4. 將步驟 3 重新以區間和不等式，即引入符號 $0 < |x-a| < \delta$ ，$|f(x)-L| < \varepsilon$ 的方式，加以建構。
5. 應用量詞化(quantification)基模將步驟 3 重新建構，以獲得一個極限的形式定義。
6. 將 $\varepsilon - \delta$ 形式定義應用到特定的情境。

根據以上的基因分解計設下列學習活動：

(1). 電腦實驗活動（附件一）

讓學生利用數值及圖形的觀察、探索及分析，討論下列四個極限問題：

$$\text{(i)}\lim_{x \to 0}\frac{\sin(x)}{x}\ ，\text{(ii)}\lim_{x \to 0} x\sin(\frac{1}{x})\ ，\text{(iii)}\lim_{x \to 0}\frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\ ，及\ \text{(iv)}\lim_{x \to 0}\sin(\frac{\pi}{x})$$

借由活動引導學生了解極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ 的動態逼近程序及建立非形式的極限觀念和 $\varepsilon - \delta$ 定義的形式概念之間的轉換。引導之步驟如下：

(a). 計算並觀察在一些越來越靠近 a 點的函數值。

(b). 由(a)猜測極限值或猜測極限不存在。了解極限 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 的動態逼近程序(approximation)。

(c). 引入誤差及距離的概念，給定誤差之後，適當的選取 x 範圍，使得範圍內的 x 所對應的函數值與所猜測的極限的距離在給定的誤差範圍之內。

(d). 對於不同的誤差利用繪圖視窗的調整及觀察，了解課本及課堂上所述 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 之非形式定義，即，We can make the values of

$f(x)$ arbitrarily close to L by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a。

(e). 了解 $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ 之非形式定義，解決問題 (iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 。

(f). 借由步驟(d)、(e)的反思，內化 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的極限概念成爲一個物件 (object)；進一步探討問題 (iv) $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ 之複雜的極限問題。

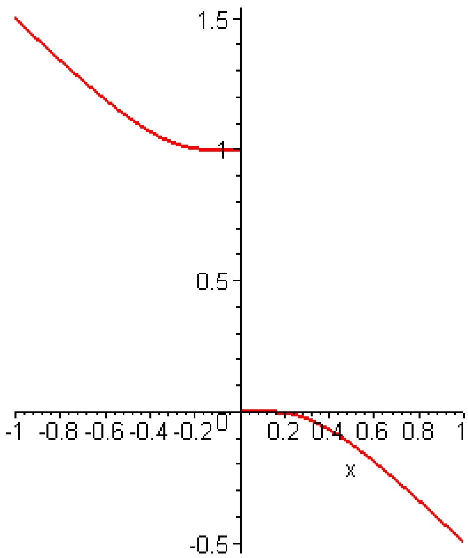
(2). 成效評量問卷（附件二）

問卷的設計除了針對實驗活動所要傳達之極限概念外做考察，並對於使用 CAS 繪圖時可能產生之迷失概念及如何解讀 CAS 產生之圖形等議題提問。藉此提醒學生要認識工具的限制性並正確使用工具，而這些都需要足夠的數學知識才能辦到。

極限概念的部分，包含了一些問題其目的是評估學生是否能深入地了解 $\varepsilon-\delta$ 形式定義而將完整的概念應用到特定的情境。如：

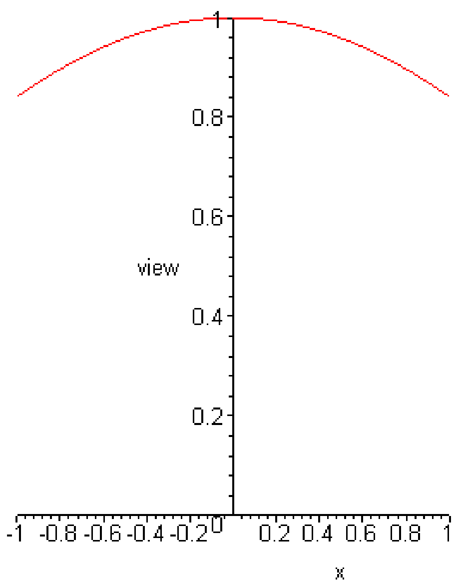
(a) Do you think the statement 「If $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists , then we can find a distance d so that $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$ whenever $0<|x_1|<d$ and $0<|x_2|<d$. 」is true ? Give a reason to your answer.

(b) Here is a Maple plot of $y=\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$. Based on the graph and your answer to (a), do you think $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ exists ? Give a reason to your answer.



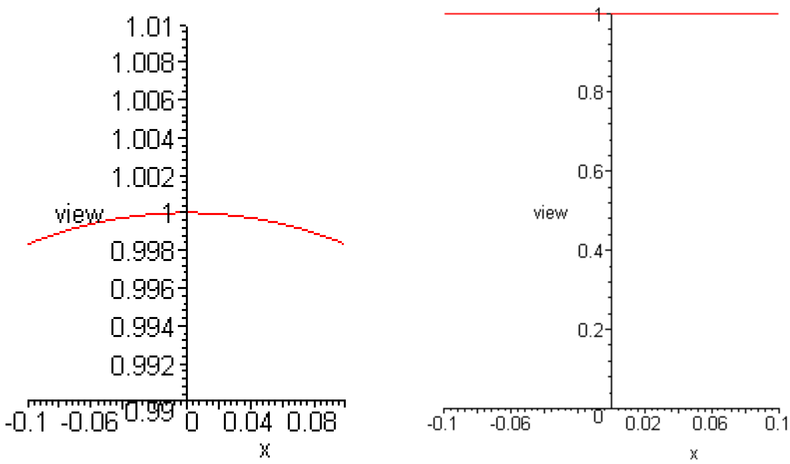
使用 CAS 繪圖時可能產生之迷失的部分的問題，如：

1. (a) Here is a Maple plot of $y=\dfrac{\sin(x)}{x}$ with viewing rectangle $[-1,\ 1]\times[0,\ 1]$。Does the graph of $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ actually pass through the point $(0,\ 1)$？ Explain briefly.



旨在了解學生是否察覺到「受限於電腦繪圖原理而導致圖形的失真」這件事。

解讀圖形的部分，對於學生是否了解不同的視窗選取圖形將會有極不同的呈現及能否正確地解讀圖形。，如：取 y 的範圍在 0.99 到 1.01 之間與 y 的範圍在 0 到 1 之間，前者圖形爲曲線，後者像是一條直線，並了解爲何如此，而其所傳答之訊息爲何。



(3). CAS 習題

利用 CAS 能以符號而非數值的方式處理方程式的特性，如：求方程式的代數解，處理不必要的計算，省去學生因為代數運算上的困難而影響概念的理解。指定課本 p.123 的 CAS 習題：

(a). For the limit $\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3$. Use a graph to find a value of δ that corresponds to $\varepsilon=0.4$.

(b). By using a computer algebra system to solve the equations $x^2+x+1=3+\varepsilon$, find the largest possible value of δ that works for any given $\varepsilon>0$.

(c). Put $\varepsilon=0.4$ in your answer to part (b) and compare with your answer to part (a).

其目的在於探查學生是否能建立極限定義的圖形表徵與代數表徵之間的連結。

資料收集

1. 電腦實驗活動的記錄：在電腦教室中觀察學生在數學實驗中之合作解題過程；除了一面作現場筆記，將選取二至三組的標的學生，利用「易錄大師」(影像錄製軟體）記錄學生在合作解題時操作 worksheets 的電腦畫面及討論情形。
2. 習題課記錄：由研究生助理觀察學生解題過程，一面作現場筆記，一面將實況作全程錄影，隨後即轉錄作成腳本。
3. 學生作業：搜集學生繳交之書面作業，包括實驗活動的書面報告，指定繳交之習題。
4. 成效評量問卷：針對實驗活動之內容編寫學習成效評量問卷，搭建適當的學習鷹架，將大問題化為適當的小問題，讓學生在此特別安排好的解題的過程中逐漸建構知識。我們也可藉由學生評量問卷的填寫探究其解

題思考的歷程。

5. 晤談資料：對學生的晤談，主要以診斷性的晤談方式進行。晤談過程同時以錄音筆錄下對話，事後將錄音轉錄成文字檔以利分析之用。

資料分析

從訊息加工處理的觀點進行質性的研究分析（Stewart & Atkin，1982；邱守榕，1992）。根據概念的基因分解，針對設計的解題思考活動項目逐一識別其中的數學內容：

學生在解題過程中觀察到什麼（文字、解析式、圖形、圖表）？識別出什麼？探索什麼？如何探索？分析什麼？如何進行分析？解說什麼？如何解釋？

學生解題過程中所運用的知識及其表徵有待識別。數學知識的表徵在此可區分為語意知識及非語意知識，其中語意知識包括命題性知識和步驟性知識（Silver，1987）。先將語意知識建構成語意網路，即其表徵，再據以解析其中的影像知識、情節知識和隱藏性知識等，評估各項知識的地位、相互聯繫的邏輯性以及欠缺時（隱藏性知識）所造成的迷思概念等。特將藉此釐清影像表徵在數學學習中可發揮的作用。

在分析的技術層面上，則是先將收集到的資料一再解讀，以概念的基因分解為分析藍本，加以詮釋及編碼，再將不同來源的資料一再比對，以達資料的三角校正。同時透過恆常比較的方式確認資料的發現，即，將收集資料進行分析後寫下暫時性的研究發現，不斷將此發現與新的資料進行相似性的比較工作以確認研究發現的穩定性。

三、觀察與研究發現

這部份是以診斷性晤談的資料的節錄，對於學生建構極限概念的歷程加以描述。

這組學生從晤談前之了解，B 學生因為 Lab 活動作業繳交之前忙著準備化學考試，作業大部分都是 A 學生完成的。

T：或者我這樣講好了，你現在坐在電腦面前，ok，那我都沒有給你 hint 或什麼，我就只有，好你們自己去做，譬如說 $\frac{\sin x}{x}$ 或我隨便給你另外一個函數，好你們自己去玩玩看，ㄜ…你覺得它極限存不存在？你會做什麼事？

B：畫圖。

T：畫圖，O.K.，還有ㄌㄟ？

A：ㄜ，差不多啊，就是畫圖阿，然後跑一些數值看一下。

T：跑一些數值…

A：嗯。

T：你會去從數值先看還是先從圖形上去看？

A：不一定啊，都會看一看做參考啊！然後也會拉近看。

T：拉近看？

相較於 B 學生只從函數圖形的大貌去觀察極限，A 學生對極限問題的考慮方式較多元化，懂得利用數值、圖形及利用 CAS 的功能將圖形拉近（zoom in）做參照觀察。

T：O.K.，所以…，以 Lab 的第一題（$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$），第一題你做的(d)、(e)還有(f)，你畫了三個圖，對不對？

A：嗯。

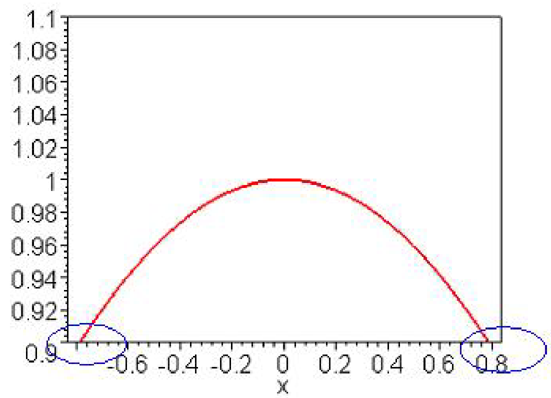
T：所以說說這畫三個圖在幹嘛？

A：就是拉近看。

T：拉近看，ㄜ…你怎麼拉近看，你怎麼個“拉近”法？你的“拉近”的程序是怎麼樣做的？就這一題好了，譬如說這個問題要求 $f(x)$ 跟它的極限的誤差是小於 0.1。

A：喔！我是會先調整這個 view 嘛！然後再去看他的線最後會落在這附近…這裡 x 軸上那附近嘛(下圖藍色圈)！然後調整這邊 x 的值(下圖藍色圈)去看。

```
> L:=1:
  plot(f(x),x=-0.8..0.8,thickness=2,view=L-0.1..L+0.1,axes=boxed);
```



T：你有沒有想過這個動作，實際上它的數學意義在做什麼？

A：就是減少 ε，就是誤差越來越小，然後看能不能繼續找的到可以對應的 δ 距離。

A 學生對於給定之誤差，如何適當的選取 x 範圍，使得範圍內的 x 所對應

的函數值與所猜測的極限的距離在給定的誤差範圍之內之行動十分熟悉；並且能反思行動而內化成一個過程。能掌握非形式定義之語意表徵及圖形表徵。

T：好。現在你可不可以用一個數學式子來表示這件事呢？
T：譬如說我們就以這個問題

By zooming in the graph of $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ on the limit point further, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensure that $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ ($x\neq 0$) is close to the limit you get in (c) within 0.01 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.

來說說看。

A： $f(x)$ 與 L 的距離要小於 ε 。

🕮 A 在紙寫下 $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$

T：我這邊沒有看到 ε 啊！？
A：喔，那就是 0.1 啊！

🕮 改成 $\left|f(x)-L\right|<0.1$

A：找 x… 嗯，就是 x 跟 a 的距離要小於一個值，那使得所有的函數值都在那個誤差 0.1 之內，然後我就是，我那天就是大概這樣觀察差不多是 0.7 左右，因爲是比 0.8 小一點，那小多少我就不管，就猜 0.7 阿，至少 0.7 以內都會符合這個條件。

🕮 B 寫下 $\left|x-a\right|<0.7$

T：可是這個地方，你寫 $\left|x-a\right|<0.7$ ， x 可不可以等於 a 呢？

A：ㄜ…其實不行。
T：爲什麼不行？
A：因爲…可能這個函數在 a 的點可能沒有定義或者是它的函數值是其他的東西。
T：ok，所以這種情形它的極限存在不存在？
A：還是存在啊！

🕮 A 改寫成 $0<\left|x-a\right|<0.7$

A 學生能掌握非形式定義之圖形表徵及代數表徵之連結；並且了解極限

$\lim_{x\to a} f(x)$的存在與否和函數在 a 點之定義無關。

T：你們現在覺得什麼叫做⋯ㄜ⋯ $\lim_{x\to a} f(x)$ 它的極限是 L 這是什麼意思？

B：就是 $f(x)$它要越來越靠近 L，要有多靠近就可以有多靠近。

A：嗯。

T：好，現在你們能不能告訴我，剛剛你說「要有多靠近就有多靠近」那這句話到底是什麼意思？

A：ㄜ⋯定義就是，如果有人給一個誤差ε嘛，那我要找到一個⋯這個x與a的距離大概要有多近就有多近，然後⋯怎麼講，然後你可以再讓x跟a的距離大概小於⋯一個，找出一個值小於δ的時候，就可以讓我們的極限在誤差ε的範圍之內這樣。

相較於 B 學生似是而非的解釋，A 學生對極限的非形式概念，即，We can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L by taking x to be sufficiently close to a (on either side of a) but not equal to a，與$\delta-\varepsilon$形式概念產生連結。

接下來與研究者與 A 學生討論他的 CAS 作業中不清楚的地方。作業中的問題是課本 p.123 的 CAS exercise ：

(a). For the limit $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$. Use a graph to find a value of δ that corresponds to $\varepsilon = 0.4$.

(b). By using a computer algebra system to solve the equations $x^2+x+1=3+\varepsilon$, find the largest possible value of δ that works for any given $\varepsilon > 0$.

(c). Put $\varepsilon = 0.4$ in your answer to part (b) and compare with your answer to part (a). ）

T：你怎麼樣去取到 (b) 所要的最大的δ？你能不能告訴我說，爲什麼這個題目我要解這個方程式？你爲什麼解了這個方程式之後，就可以決定最大的δ可以選多少？

A：喔，就是⋯它是解出x的話，它是x會介於這個樣子，那我們就可以給一個⋯譬如 1 嘛，丟進去就可以找出x真正的值是多少，然後⋯

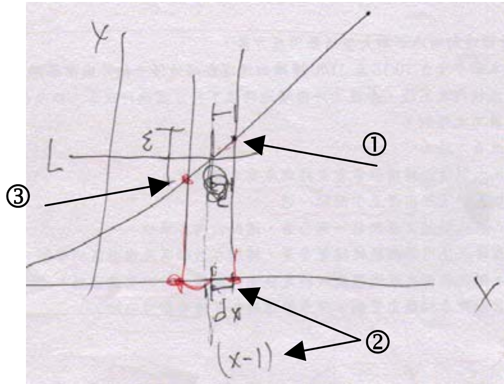
T：什麼意思？

A：ㄜ⋯就是⋯

T：你要不要畫個圖來解釋一下。

A：喔喔，它的圖是長這個樣子啦，然後⋯這這這個點附近的話，那個ε，那我們⋯

T：ε在哪裡啊？
A：ㄟ✓，哈哈，好，ε是這樣嘛ε，然後這是 d，那我們⋯
T：你的L在哪？
A：L大概是這裡吧！
T：嗯。
A：L，然後⋯就是⋯



T：所以爲什麼要解⋯解這個不等式 $x^2+x+1=3+\varepsilon$ ？
A：解的話就是可以算出⋯
T：他算了什麼東西，在圖形，你圖上算哪裡？
A：ㄜ⋯這個點(下圖箭頭①)吧！
T：對，這個點(上圖箭頭①)的x值。
A：對，這個點的x值，這個點的x值。
T：ok。
A：然後這個點(上圖箭頭①)的x值跟這個點的距離就是$x-1$(上圖箭頭②)，所以δ就是$x-1$。
T：爲什麼呢？爲什麼只算這邊，爲什麼不用算這裡(上圖箭頭③)？
A：ㄜ⋯
T：你這樣子只有一邊啊，不是嗎？只有$x>a$的地方啊，那$x<a$你都不看了喔？
A：因爲這一邊(上圖箭頭②)比較短啊！
T：喔~~~，所以一般的程序應該怎麼做，你需要⋯你需要解這個點(上圖箭頭③)，是不是，對不對？
A：對。
T：你要不要解這個點(上圖箭頭③)？
A：應該要檢查，就解出來做檢查。
T：怎麼解？
A：解$x^2+x+1=3-\varepsilon$。
T：可是如果你不確定這件事情的時候你就應該要算兩邊啊！
A：ㄜ⋯老師我後面好像有算兩邊せ⋯
T：嗯⋯對，這個也是有趣的事情，你⋯你懂 part (c)這個問題的意思嗎？

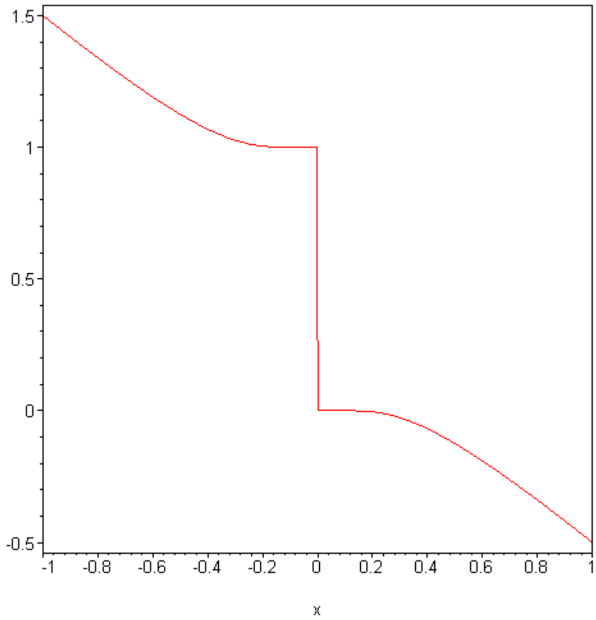
A：嗯，所以我後來有算兩邊啊！

🕮 A 學生指 part (c)的回答

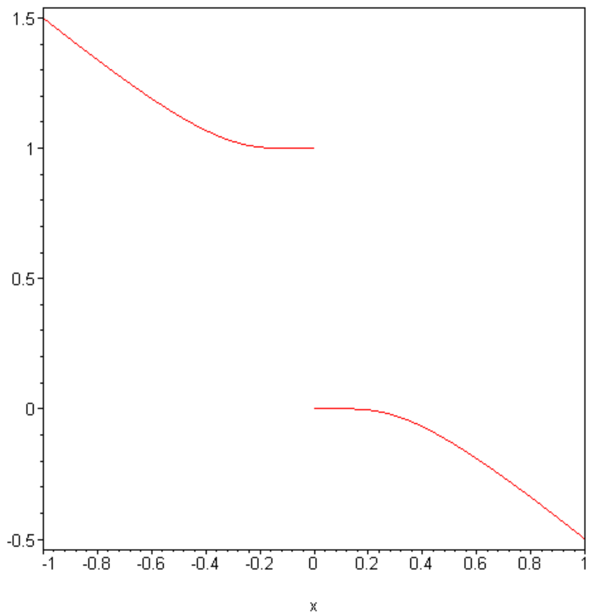
T：可是 … 問題是你爲什麼要重算一次呢？你 part (b)這邊算出來這個δ，它是對什麼樣子的ε會對？
A：任何ε。
T：對啊，現在ε是等於 0.4。
A：嗯。
T：那你需要再算一遍嗎？
A：沒有，因爲它是算出來…因爲書上寫到觀察跟我之前猜的，在(a)裡猜的有什麼關係，所以我就再用代公式把那個值算出來，然後我這一次就有兩邊算，然後取比較小的。
T：喔~~所以你的程序上已經反過來了嘛，是不是？
A：對啊！
T：你應該把 0.4 帶進去看，如果算出來的值是比你(a)裡猜的 0.09 還要來得小的話，那表示什麼？
A：我一開始猜的可能就…還不夠小這樣，或者是我選錯點這樣。

A學生能成功地將極限的$\varepsilon-\delta$形式定義與活動中的視窗圖形做連結轉換，對於$\varepsilon-\delta$形式定義的圖形表徵及代數表徵有一定的了解。但該生對於 part(c)的回答有可能是對題目本身的語意不清楚，但也有可能是尚未建構$\varepsilon-\delta$形式定義爲一物件，不了解問題(b)中的δ實際上是一個ε的函數。

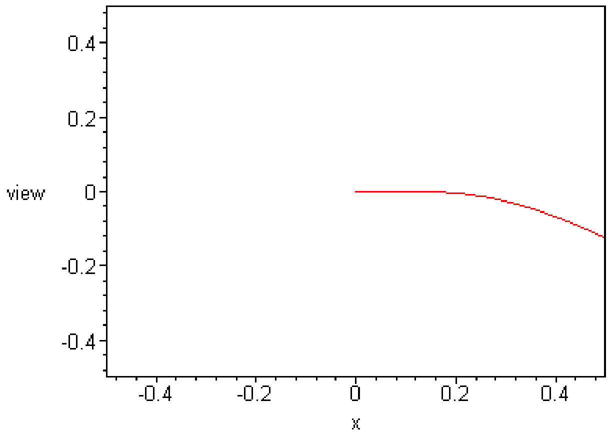
這組學生 Lab 作業第三題（$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$）的回答十分有趣。作業中意識到 Maple 所繪出的函數圖形失真（如下圖），



並利用指令繪出正確的圖形如下：



然而對於解讀下圖（作業中學生所繪）



學生在作業中的回答如下：

> **僅限於當 x 為正數時, 只要 x 與 0 的距離在 約 0.5 之內的時候，$\dfrac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ $(x \neq 0)$ 的值與極限值的差距就在 0.5 之內**
>
> **似乎是可以支持 (b) 裡的敘述**

📖 (b)裡的敘述指由觀察靠近 0 點的正數的函數值猜測極限應為 0。

T：你這一句話的意思是 x 是負的時候做不到，還是你沒做到？
A：應該是做不到吧，因為負值的話，它就大於 1，然後誤差就超過 0.5 啦！
T：你給了一個很有趣的結論是說：由於極限只有一個，你在這邊想的極限是什麼？

📖 作業中學生又經由在觀察靠近 0 點的負數的函數值及 zooming in 的圖形猜測極限應為 1。最後做了下面的結論：

> **就可以看出 h(x) 在 x 的值從數線的兩邊接近 0 的時會會有不同的終端數值.**
>
> **但由於極限只能有一個，因此一開始假設 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 有極限是錯誤的,**
>
> **$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ 沒有極限.**

A：是…，因爲我是想說如果極限存在那他就只有一個值啊，所以不可能…如果同時等於兩個的話，是不是就矛盾。

T：你看看前面兩個問題中所做的事情，我們還特別在問題上面強調你要兩邊都取到嘛！

A：嗯。

T：對不對，所以你在這裡就分開看了，x是正的和x是負的是分開看的嘛！

A：嗯。

T：ok，所以在那個時候腦子裡頭一定有一個很特定的想法，…讓你去只去看一邊啊！

A：嗯。

T：所以你在那個時候想的是左右極限嗎？

A：ㄜ…有點類似啦！

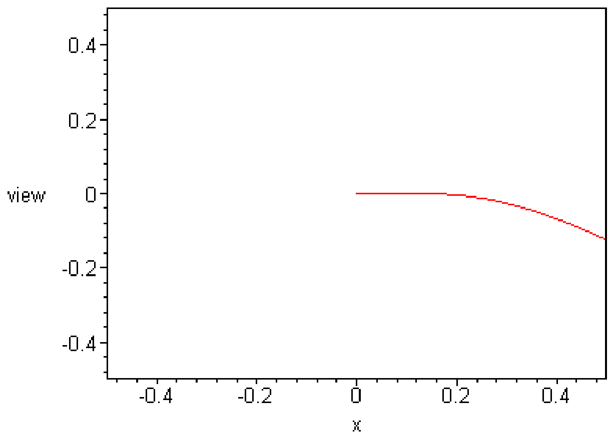
T：有點類似，所以你們高中時候有上過…左右極限嗎？

A：ㄜ…有。

T：有，ok。所以…所以在這地方你會把左右極限的這個 idea 放進來？

A：嗯。

T：以極限定義來看的話，這個…這個圖告訴你什麼？



A：因爲那個極限的定義它是所有符合這個條件，那包括 0 的兩邊，正負值都有，所以左邊右邊的應該都要符合這個…都可以帶進去才對，但是這邊的話左邊的值他帶進去可能就超過上面那地方就不在圖上了，所以就不符合這個了。

T：不行，所以這個圖形告訴你說你沒有辦法做到這件事情。沒有辦法做到這件事情的話，它的結論是什麼？

A：就是極限不存在。

T：是嗎？是嗎？你現在是猜極限是 0 喔，對不對？

A：嗯。

T：ok，所以如果這個函數極限是 0 的話，那麼不管我要求他靠近 0，在那樣的誤差範圍之內，我都能做到…。

A：對。

T：你的這個圖，表示說函數值不會在 0 的兩邊都靠近你猜測的極限 --- 0 嘛，對不對？
A：對，因為 0.5 的誤差就不對了嘛！
T：所以它只能告訴你一件事情是什麼？
A：極限不是 0。

由於 A 學生在高中極限概念的學習經驗，使得學生相信若要判別極限存在與否，左右極限相不相等是唯一法則；而忽略了 $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ 和視窗形關係的進一步觀察及此項觀察所連結之 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 定義中所縕含的等價關係。更具體的說，學生無法了解極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的存在所應有的直觀性質：a 點附近的函數值彼此之間應該很靠近。

T：作業中數值會提供你什麼？
A：參考判斷啊！
T：嗯嗯，譬如說你什麼時候會需要數值去做參考判斷。
A：就是如果你沒有這種程式可以幫你畫圖的話，可以就是用代數計算的，比較容易觀察吧
T：如果你要帶數值的話，你會怎麼樣去選你的點，帶值進去看，你會帶什麼樣子的點？
A：因為我蠻懶的，大概就 0.1，0.01，…然後這樣下去。
T：所以你的策略是：就算 $\frac{1}{10^n}$ ，對不對？能算幾個就算幾個，去做觀察，ㄚ你(B 同學)呢？
B：差不多吧！
T：差不多，ok。那我現在想要問一個問題就是說剛剛 A 選了一個數列嘛，對不對？
A：嗯。
T：是 $\frac{1}{10^n}$ 嘛，就是說你可以算 $\frac{1}{10},\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^3},\frac{1}{10^4},\cdots$，對不對？好，那你們高中也有學過，$\frac{1}{10^n}$ 它是一個等比數列，對不對？那你也應該知道這個等比數列會趨近於 0。所以你(A 同學)剛剛會這樣試的原因是 …？你的想法是什麼？
A：所以 x 會越來越靠近 0，那 $f(x)$ 的值會顯現出來應該要靠近他的極限。ㄜ…差不多就是這樣吧！

T：如果以現在這個函數（$\dfrac{\sin(x)}{x}$）來講我要考慮趨近於 0 的極限，ok，那麼如果我給你一個數列，它趨近於 0，那麼…嗯…如果這個函數極限存在的話，那麼這個函數在這些數列的取值，是不是一定會趨近於 L，你覺得呢？

A：嗯。

T：你懂我的意思嗎？也就是說如果 $\lim_{x\to 0} f(x)=L$，而 $a_n \to 0$，那麼 $f(a_n)$ 是不是一定會趨近於 L？

A：應該會是正確的吧！

T：ok，ㄜ…你們大概解釋一下為什麼？

A：那…因為那個如果極限存在的話，那我們這個如果 a_n 越來越趨近於 0，那就是 δ 越來越小，所以它可以對應的誤差 ε 也會越來越小。

A 學生似乎沒有把數列視為函數，而考慮函數與數列合成時的極限概念無法與自身已建立的函數極限概念做連結。但也有可能是無法對合成函數的極限執行行動，將已建立的函數極限概念程序壓縮成為一個物件。

T：還記得這個嗎？

📖 Lab quiz 的 2(a)題：

Do you think the statement「If $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists , then we can find a distance d so that $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$ whenever $0<|x_1|<d$ and $0<|x_2|<d$. 」is true ? Give a reason to your answer.

A：嗯。

T：這個問題是說，你是不是可以在這個 a 點的附近 … 是不是可以找到一個小的距離 d，… a 附近小的範圍，使得這個範圍裡頭所有的 x … 的函數值，彼此之間的距離都小到 $\dfrac{1}{2}$ 之內；就是說你兩個兩個比的話，它們了不起差 $\dfrac{1}{2}$ 啦！

A：嗯。

T：那這件事情你現在的了解是怎麼樣？

T：你在這邊（指 A 生在 Lab quiz 中的做答）寫說：「因為 limit 存在，所以只要適當的選取 d，就能使 $f(x)$ 跟 $f(y)$ 的距離小於 $\dfrac{1}{2}$」這個好像沒有講嘛，…，

跟題目中這一句話一模一樣，對不對？

A：對啊！

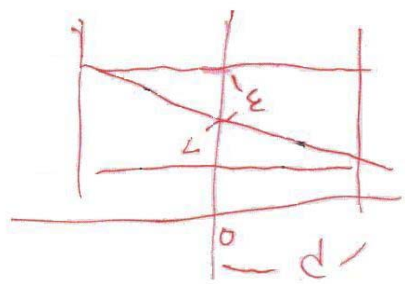
T：因爲你總要告訴我一個選 d 的方法嘛！

A：嗯。

T：所以你在這邊，好吧，我們就假設它的極限是 L 好了，因爲他總要有一個數嘛，它極限存在總要是一個數嘛，就叫它 L 沒有關係。我們剛剛講說，如果它極限存在的話，就表示我的誤差不管怎麼給，我都可以辦到是函數值跟極限值之間的誤差是小於我剛剛的要求，是不是？

T：好，所以假設這個 d 呢，是相對應於 $f(x)$ 跟 L 的距離是小於 ε 的話，那麼…能不能畫一下？

🕮 A 學生在紙上畫出下面的圖



T：ok，那所以你覺得這個…這個範圍裡頭隨便取兩個點，他們兩個的差了不起是多少？

A：2ε，這樣最大是 2ε。

T：那我要求 $f(x_1)$ 跟 $f(x_2)$，也就是說這邊隨便在我取的這個範圍裡頭選兩個 x，它的函數值差的絕對值要小於 $\frac{1}{2}$ 的話，那你一開始的誤差應該要選多大？

A：$\frac{1}{4}$。

T：對 。

T：因爲函數極限存在，那麼你要求函數值跟極限值間的誤差要小於 $\frac{1}{4}$，你做得到做不到？

A：嗯…做得到啊！

T：ok~~，你既然做得到，那麼你選出來那個 d，你利用誤差要小於 $\frac{1}{4}$ 選出來那個 d，是不是就可以讓你辦到在這個範圍裡頭的任兩個 x，也就是 $0<|x|<d$，

它的函數值差的絕對值一定會小於 2 倍的那個剛剛給的誤差就是$\frac{1}{2}$了，對不對？

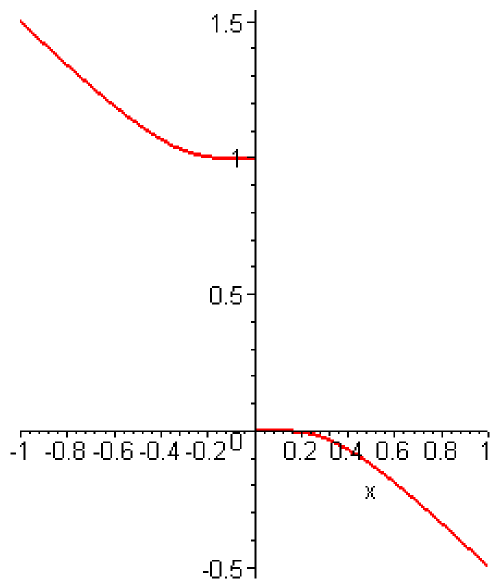
A：嗯。

A 學生似乎可以將$\varepsilon-\delta$概念應用到特定的情境。

T：所以你懂了這件事情了嗎？這是在說 … 直觀上來講，如果一個函數當 x 趨近於 a 時極限存在的話，a 點附近的 x，ok，夠靠近 a 的 x，彼此之間的函數值都要很靠近。

A：ㄜ…現在懂了。

T：所以那你怎麼利用這件事情去解釋 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$ 不存在呢？



A：就是如果讓你選兩邊，這樣子一個範圍時，這樣子的話，那…ㄜ…然後…，要先選一個ε，如果…如果我猜它是極限值是中間值 0.5 的話。

T：No，No，No…你現在看喔，因爲我就不知道它極限值存不存在，爲什麼我們要講這東西，是因爲他根本就不需要極限值這個東西出現

A：恩

T：它直接從這個點附近的函數值來看，是不是，那我問你剛剛才用了ε寫嘛，對不對，也就是我不管給你多小的距離，我是不是可以找到一個 d，ok，在這個…這個 0 點附近，使得你在這個範圍裡頭的任兩個函數值呢，它的差的絕對值都小於你剛剛要求的那個數，我辦得到辦不到？

A：ㄜ…ok，我大概稍微…，所以這邊是這兩個兩邊的距離至少是 1，所以它的

誤差沒有辦法小於 0.5

T：所以如果你要判斷它極限存不存在的時候，你應該去觀察，你要靠近那個點附近的值，因爲你不知道極限是什麼嘛，你怎麼知道誰要靠近誰，這樣懂我意思嗎？

A：大概懂啦！

經過引導 A 學生認知了「若極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 a 點附近的函數值彼此之間應該很靠近」。然而，在極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在的情形，A 學生仍嘗試利用，對某一特定的實數 L， $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ 這件事來解釋 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在。可見 A 學生似乎無法應用量詞化(quantification)基模（for all L）將之前的概念印象「極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，即，當 x 夠靠近 a 時其函數值應很靠近一固定值」重新建構。

接下來的晤談是針對 lab 活動的第四題 $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ 做討論。企圖了解 A 學生是否已建立了「若極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 a 點附近的函數值彼此之間應該很靠近」之概念印象。

T：這是一個很有趣的問題，我蠻訝異的，你們是唯一的一組，算了除了 $\frac{\pi}{2^n}$ 之外其他的值的。

T：所以你從你計算了，這個…這個問題上面，你發現了 $\frac{\pi}{2^n}$ 的值全部都是 0，對不對？

A：對。

T：所以你在這個地方（學生的 lab 作業）說，「從表格來看，似乎通過 0 之水平線，但很顯然並非如此」，ok，但是它未通過(0, 0)嘛，對不對？

A：嗯。

T：「但很顯然並非如此」你這句話是什麼意思？

A：就是因爲這個圖就畫出來，電腦跑出來就是上下一直跳啊！

T：所以你就要嘗試去算其他點的值，所以你算了 $\frac{\pi}{3^n}$ ，對不對？

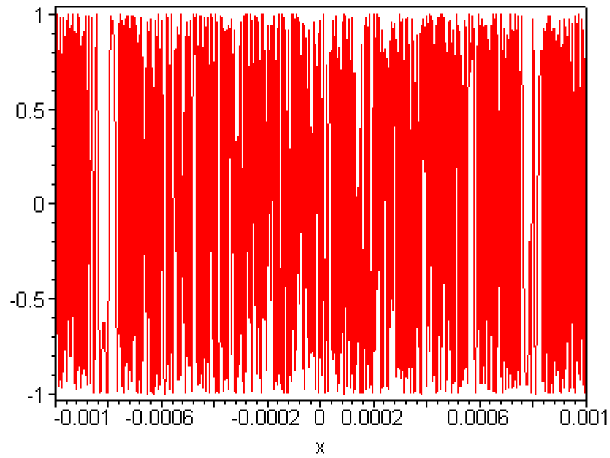
A：嗯。

T：好，算出來的值 … 結果呢？

A：他一直上下跳啊！

T：它一直上下跳⋯，嗯。那你從圖形上面也驗證了這件事，⋯ 你是不斷的縮小 0 附近的範圍，對不對？

📖學生 lab 作業的回答如下：

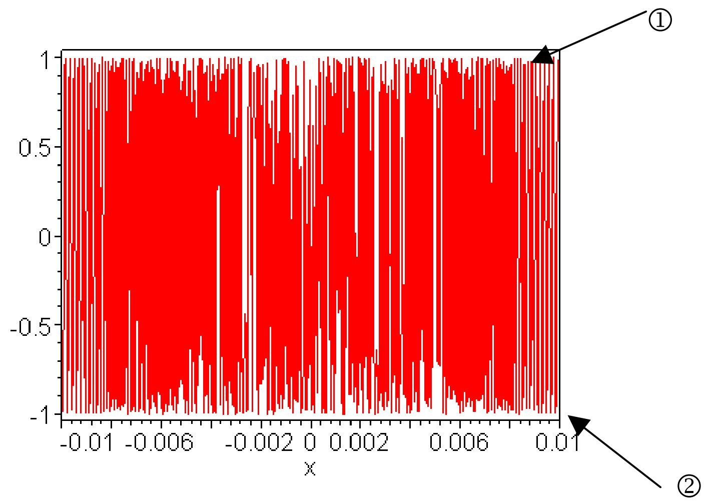


就以上的放大圖中所顯示,即使 x 越來越靠近 0, k(x) 之值還是一直在正負一之間來回擺盪,

所以推斷 $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ 不存在

T：我也看到他上下跳，可是為什麼上下跳，它極限就不存在？$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 也上下跳啊！

A：因為它就沒有辦法符合這邊這個條件，就是他附近的值可能剛好一個在這邊(下圖箭頭①)，一個在這邊(下圖箭頭②)然後距離就是 ⋯ㄟ ⋯ 1。



T：所以⋯？

A：所以它的誤差值就沒有辦法取小於 $\frac{1}{2}$，然後就不能要有多靠近就有多靠近。

T：所以你想說：不管怎麼縮小定義域，總會找到波峰和波谷對不對？

A：對。

T：你有沒有辦法從這個函數上去驗證這件事情？

A：就是可能還是要從這邊個式子來看吧！

T：對，你會怎麼看？

A：ㄜ…

T：波峰的地方其實是什麼？以這個函數來講的話，它的函數值是什麼？

A：1。

T：所以你必須要找 x ，使得 $\sin(\frac{\pi}{x})$ 的值是 1 嘛，對不對？

A：嗯。

T：所以是不是要做什麼事情？

A：解…

T：對，解什麼式子？

A：解…就是 $\sin(\frac{\pi}{x}) = 1$ 。

＊＊＊＊＊　A&B 計算中解出 $x = \frac{2}{4k+1}$ ＊＊＊＊＊

T：ok，good，所以有很多個，對不對？

A：嗯。

T：我們剛剛的重點是什麼？我不管怎麼調我的 …，不管怎麼選 d，這個 d 不管有多小，我是不是永遠可以找到 k ，使得 $\frac{2}{4k+1}$ 會比那個還要 d 來得小？

A：嗯，可以。

A 學生已建立了「若極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 a 點附近的函數值彼此之間應該很靠近」之概念印象。但無法應用量詞化(quantification)基模將之建構成完整的極限概念。

四、結論

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 是一個非常複雜的概念，坊間的教課書常在給出正式或非正式的定義之後，輕描淡寫地加上一句，大致而言(roughly speaking)：當 x 愈來愈靠近 a，但不等於 a 時， $f(x)$ 愈來愈靠近 L。這句話給學生一個十分鮮明活潑的圖像，產生了所謂的極限概念的動態逼近程序。Li, L. ＆ Tall, D. (1992)曾提出“ 逼近程序可能會是非正式定義與形式定義間轉換的阻礙”一說。研究者認爲引出這個動態逼近程序的數學概念，即，對任何數列 a_n 趨近於 a， $f(a_n) \to L$ ，

十分複雜。是實上，對於動態逼近程序的了解缺乏量詞中「for all」的意義及概念，多數學生仍以有限次的程序（或行動）來解釋極限概念，缺乏完整的「量詞基模(quantification schema)」才是極限$\lim_{x \to a} f(x) = L$非正式定義與形式定義間轉換的阻礙。

利用 CAS 強大的繪圖功能，Lab 活動中有效地提供了$\varepsilon - \delta$視窗的反覆練習的確有益於學生對極限$\varepsilon - \delta$形式定義語意表徵及符號表徵的了解；而且提供學生較多的視覺經驗及圖形表徵和代數表徵之間轉換的練習，對於圖形表徵和代數表徵之間的連結有所幫助。然而，對於複雜如$\lim_{x \to a} f(x)$的極限概念仍須要更多的引導才能讓學生反思成爲一物件，甚至壓縮產生成一完整的基模。至於 CAS 數值計算的部分，在極限存在的情形，由於計算出的函數值明顯地趨近某一固定的數值，所以學生易於判斷極限存在而猜出極限值。但在極限不存在的情形，學生往往不會尋找其他的數值或者是有效的數值計算，或由於習慣，學生往往沒有善用軟體的強大數值計算功能。以$\sin\frac{\pi}{x}$爲例：學生看到函數在$\frac{1}{2^n}$的取值都爲 0，即便它們在圖形上讀出函數行爲應該不斷的上下振動，但卻沒有再取其他的數值做計算來和函數圖形做比較，甚至以爲$\sin\frac{\pi}{x}$的圖形即爲$\sin(\pi x)$函數圖形的壓縮而認爲極限應該爲 0。

數學上的定義通常以蘊含（implication）的方法來描述。導致學生忽略了定義其中所包含的等價的關係，例如：$\lim_{x \to a} f(x) \neq L$的定義。更困難的是極限$\lim_{x \to a} f(x)$的存在性問題。由於高中談論到極限時，大多只強調「左右極限相等則極限存在」這件事，使得學生產生了若要判別極限存在與否，左右極限相不相等是唯一法則；而忽略了左右極限的存在性討論，甚至以爲左右極限必然存在。也因此忽略了對於極限$\lim_{x \to a} f(x)$的存在所應有的性質；以直觀的語言來說即，a 點附近的函數值彼此之間應該很靠近。

研究者認爲應將極限 $\lim_{x \to a} f(x) = L$的基因分解修改如下：

1. 選定某些點，這些點愈來愈靠近a ，計算這些點的函數值。
2. 利用步驟 1 中的數值建構直觀的動態逼近行動“$x \to a,\ \ f(x) \to L$”。
3. 應用量詞化(quantification)基模將步驟 2 重新建構，以獲得一個 domain 的動態逼近程序。
4. 給定誤差ε ，找出一個$\varepsilon - \delta$視窗。
5. 利用步驟 4 建構極限的一個 range 的動態逼近程序，即，We can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L by taking x to be sufficiently close to a (on either

side of a) but not equal to a。

6. 將步驟 5 重新以區間和不等式，即引入符號 $0<|x-a|<\delta$ ，$|f(x)-L|<\varepsilon$ 的方式，加以建構。
7. 對極限的一個 range 的動態逼近程序執行行動，例如合成函數的極限。以這種方式，步驟 6 的基模被壓縮成爲一個物件。
8. 應用量詞化(quantification)基模將步驟 7 重新建構，以獲得一個極限的 $\varepsilon-\delta$ 形式定義。
9. 將 $\varepsilon-\delta$ 形式定義應用到特定的情境。
10. 利用 $\varepsilon-\delta$ 形式定義建構極限的動態逼近定義，即，對任何數列 a_n 趨近於 a，$f(a_n)\to L$ 。
11. 調合極限的 $\varepsilon-\delta$ 形式定義與動態逼近定義。

在做電腦輔助教學時，應提醒學生唯有在具有足夠的數學能力之下才能有效的解讀資訊並利用軟體解決問題。在電腦活動中，學生往往會尋求指令去解決所面對的數學問題而不知道解決問題的關鍵並不在於指令，而是在於自身的數學知識及解決問題的能力。同時也應提醒學生電腦軟體能夠提供許多數值的、代數的圖形的訊息，讓學生得到一些推論或推測，但無法提供證明。就某種角度而言，也告訴學生數學證明的重要性，以引發學生數學證明的動機。

最後，對於有意要利用 CAS 實驗活動做輔助教學的建議：

・確定活動目的。
・活動中要求學生要有正確的態度。
　大膽動手，仔細觀察；大膽假設，小心求證。
・對於學生的作業要及回饋。
・活動之內容必需與課堂討論做密切的銜接。
・進行活動之教室最好要能做到讓學生
　Using computer faces *away* from the instructor.
　Listening to lecture faces *away* from computer.

五、參考文獻

王九逵（1986a）電腦與數學。數學教育學門規劃資料。台北：國科會科教處。

王九逵（1986b）電腦與數學教育。科學發展月刊，第十四卷第五期，頁 505-508。

王九逵（1989）數學教育與電腦協調計畫總結報告之一：論數學實驗。科學發展月刊，第十七卷第四期，頁 365-369。

邱守榕（1990）「數學教育合作研究計劃」第二階段的重點規劃。科學發展月刊，第十八卷，第二期，頁 137-149。

邱守榕（1992）關於數學學習研究。科學發展月刊：第二十卷第五期，頁 571-584。

邱守榕等(1996) 數學教育學門資源整合規劃資料。台北：國科會科教處。

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II.* In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1 - 32.Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. ＆ Schwingendorf, K. E.(2001). The development of the students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior,* 16(4), 399-431.

Cottrill, J., Dubinsky, Ed., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior,15*(2), 167-192.

Davis, Robert, ＆ Vinner, Shlomo (1986). The notion of limit：Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of mathematical behavior,* 5, 281-303.

Douglas, R. G. (Ed.).(1986). *Toward a Lean and Lively Calculus*, MAA Notes No. 6.

Dubinsky, E.（1991）Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall（ed.）*Advanced Mathematical Thinking*（pp95-126）. Kluwer.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. G. (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33* (pp. 31 -45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 3-25.

Hosack, J.(1988) Computer algebra system. In D.A. Smith, et al., (Eds.).*Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, MAA Notes No. 9.

Leinbach, C.(1991). *The Laboratory Approach to Teaching Calculus*. MAA Notes No. 20.

Li, L. ＆ Tall, D. (1992). Constructing different concept images of sequence and limits by programming. In *Proceedings of the 17th annual conference of the International Group for the* Psychology of ***Mathematics Education,*** (Vol.2, pp.41-48).Japan.

Linn, M. C., Ribet, K. A. ＆ Schoenfeld, A. H. (1989). Calculus and computers：Toward a curriculum for the 1990's. ***The report of a conference on calculus and computers held at the University of California at Berkeley***, August 24-27.

Miao, L.C.(1992). A Study of Concept Development of Calculus. *Proceedings of NSC, Part D*, 2(1), 1-26.

Monaghan, J., Sun, S., ＆ Tall, D. O. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. In J. P. da Ponte ＆ J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th annual conference of the International Group for the* Psychology of ***Mathematics Education***(Vol.3, pp.279-286). Lisbon, Portugal：Program committee.

Orton, A. (1983a). Students' Understanding of Differentiation. *Education Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Orton, A. (1983b). Students' Understanding of Integration. *Education Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition. ***Journal for Research in Mathematics Education***, 22(2), 151-156.

Porzio, D. T.(1995).***Effects of differing technological approaches on students' use of numerical, graphical and symbolic representations and their understanding of calculus.*** ERIC Document Reproduction Service No.ED391665.

Schoenfeld, A. H. (1990). Grapher：A case study in educational technology, research, and development. In A. diSessa, M. Gardner, J. Greeno, F. Reif, A. Schoenfeld, ＆ E. Stage (Eds.), ***Toward a scientific practice of science education***(pp. 281-300). Hillsdale, NJ：Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Education Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Solow, A.E. (Ed.).(1994).*Preparing for a New Calculus: Conference Proceedings*, MAA Notes No. 36.

Steen, L. (Ed.).(1987). *Calculus for a New Century: A Pump Not a Filter*, MAA notes No. 8.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function Journal for Research in Mathematics Education, 31(3), 258-276.

Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. ***Mathematics Teaching, 82,*** 44-49.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151- 169.

Tall, D.(1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers.

Tall, D., Smith, D. and Piez, C. (2001). Technology and Calculus. In preparation for *Research in Technology in Teaching and Learning Mathematics*.

Vinner, S. ＆ Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept：An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 341-367.

附件一、電腦實驗活動

Exploring limits

Here we investigate limits of some interesting functions by graphs and numerical data.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

(a). Execute the following commands to define the function $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ and to create a table that gives the numerical values of $f(x)$ for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10 and for $x = -\frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10.

```
[> f:=x->sin(x)/x;
 > N:=10:
   M:=matrix(N+1,4,(Row,Col)->0):
   M[1,1]:='x': M[1,2]:='f(x)': M[1,3]:='x': M[1,4]:='f(x)':
   for i from 1 to N
   do
   x1:=1/2^i:  x2:= -1/2^i:
   M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(f(x1)):
   M[i+1,3]:=evalf(x2):  M[i+1,4]:=evalf(f(x2)):
   od:
   eval(M);
```

(b). Notice that the column that gives the values of $f(x)$ for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10 is identical with the column that gives the values of $f(x)$ for $x = -\frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10. Can you explain why ?

[

(c). On the basis of the data in (a) , do you think $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

[

Fill in the limit you get above to get a graph of $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

```
[> L:=???:
   plot(f(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

(d). According to the graph above, can you determine how close to 0 (from either sides of 0) x has to be to ensure that $\frac{\sin(x)}{x}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (c) within 0.5 . (Note that f is not defined at $x = 0$.) If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.

[

(e). By zooming in the graph of $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ on the limit point, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensure that $\frac{\sin(x)}{x}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (c) within 0.1 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.

```
[>plot(f(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxe
d);
```

(f). By zooming in the graph of $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ on the limit point further, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensure that $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (c) within 0.01 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.

```
[>
plot(f(x),x=???..???,thickness=2,view=???..???,axes=boxed
);
```

(g). Do the graphical experiments in (d), (e) and (f) confirm your answer

in (b) ? Give a reason to your answer.
[

2. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a). Execute the following commands to define the function

$g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ and to create a table that gives the numerical values of $g(x)$

for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, ..., 15.

```
[> g:=x->x*sin(1/x);
  N:=15:
  M:=matrix(N+1,2,(Row,Col)->0):
  M[1,1]:='x': M[1,2]:='f(x)':
  for i from 1 to N
  do
  x1:=1/2^i:
  M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(g(x1)):
  od:
  eval(M);
```

(b). On the basis of the data in (a), do you think $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ exists ? If so, guess the limit. Give a reason to your answer.
[

Fill in the limit you get above to get a graph of $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

```
[> L:=???:
  plot(g(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

(c). According to the graph above, can you determine how close to 0 (from either sides of 0) x has to be to ensure that $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.5 . (Note that g is not defined at

$x = 0$.) If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.
[

(d). By zooming in the graph of $\mathrm{g}(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on the limit point, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensure that $\frac{\sin(x)}{x}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.1 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.
[> `plot(g(x),x=???..???,view=???..???,axes=boxed);`

(e). By zooming in the graph of $\mathrm{g}(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on the limit point further, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensure that $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.01 ? If so, find a distance that measures the closeness of x to 0.
[> `plot(g(x),x=???..???,view=???..???,axes=boxed);`

(f). Do the graphical experiments in (c), (d) and (e) confirm your answer in (b) ? Give reasons to your answer.
[

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

(a). Execute the following commands to define the function $\mathrm{h}(x) = \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ to create a table that gives the numerical values of $\mathrm{h}(x)$

for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10.

```
[> h:=x->1/(1-3^(1/x));
 > N:=10:
   M:=matrix(N+1,2,(Row,Col)->0):
   M[1,1]:='x': M[1,2]:='f(x)':
   for i from 1 to N
   do
   x1:=1/2^i:  x2:= -1/2^i:
   M[i+1,1]:=evalf(x1):  M[i+1,2]:=evalf(h(x1)):
   od:
   eval(M);
```

(b). On the basis of the data in (a) , do you think $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

[

Fill in the limit you get above to get a graph of $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. (You may find it weird, think carefully about what it really means.)

```
[> L:=???:
   plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

(c). According to the graph above, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensures that $\frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.5 . (Note that g is not defined at $x = 0$.) Does your answer support your answer in (b) ? Why ?

[

(d). Create another table that gives the numerical values of $h(x)$ for

$x = -\frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10.

[>

(e). On the basis of the data in (d) , do you think $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ exists ? If so, what is the limit ? Give a reason to your answer.

[

Fill in the limit you get above to get another graph of $h(x) = \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

```
[> L:=???:
  plot(h(x),x=-1..1,view=L-0.5..L+0.5,axes=boxed);
```

(f). According to the graph above, can you determining how close to 0 (from either sides of 0) does x have to be to ensures that $\frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$ ($x \neq 0$) is close to the limit you get in (b) within 0.5 . (Note that g is not defined at $x = 0$.) Does your answer support your answer in (d) ? Why ?

[

(g). With all the investigation above, what can you conclude about the existence of $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\left(\frac{1}{x}\right)}}$? Why ?

4. $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

(a). Define the function $k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ and create a table that gives the numerical values of f(x) for $x = \frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10 and for $x = -\frac{1}{2^n}$, $n = 1$, 2, 3 ..., 10.

[>

(b). On the basis of the data in (a) and (b), do you think $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ exists ? Give reasons to your answers.

[

Here is a graph of $k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$:

```
[> plot(sin(Pi/x),x=-1..1,view=-1..1,axes=boxed);
```

(c). By zooming in the graph above properly if necessary, can you confirm your answer in (b) ? If so, explain why ? If not, do more calculations and plot more graphs to investigate $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ until you can confirm your answer.

[>

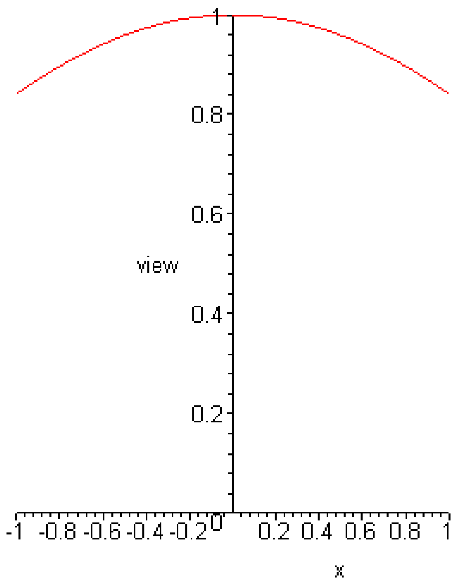
[>

附件二、成效評量問卷

1. (a) Here is a Maple plot of $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$ with viewing rectangle $[-1, 1] \times [0, 1]$。

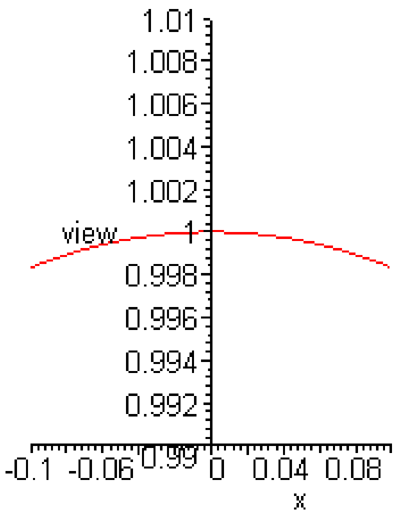
   Does the graph of $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ actually pass through the point $(0, 1)$?

   Explain briefly.

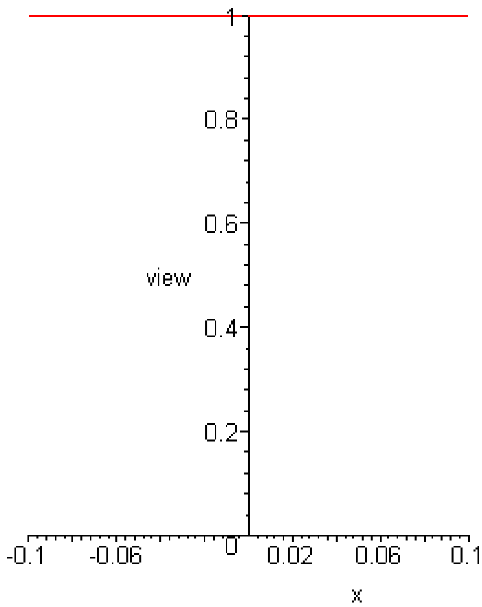


   (b) The Maple plot of $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$ with viewing rectangle $[-0.1, 0.1] \times [0.99, 1.01]$

   is shown below. What can you say from the graph ?

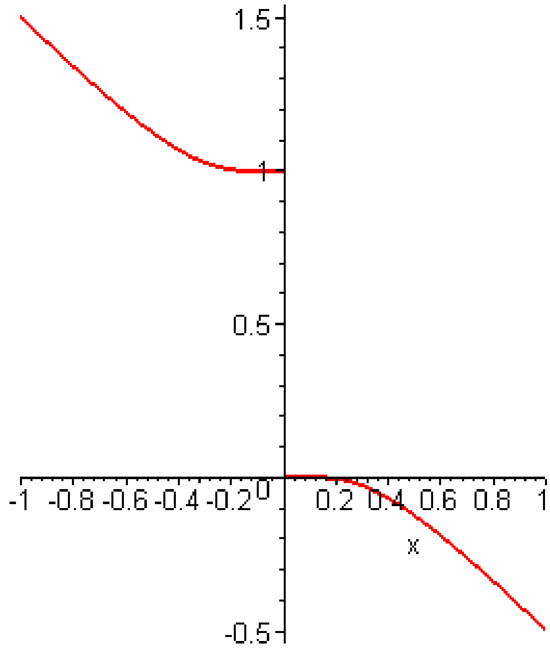


(c) The Maple plot of $y = \frac{\sin(x)}{x}$ with viewing rectangle $[-0.1, 0.1]\times[0, 1]$, is shown below. Explain why the graph looks so much like a straight line and what does this say about $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. Give a reason to your answer.



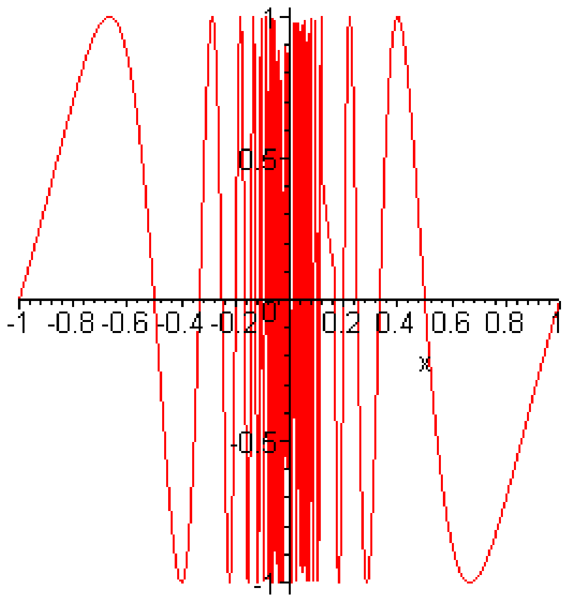
2. (a) Do you think the statement 「If $\lim_{x \to 0} f(x)$ exists , then we can find a distance d so that $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ whenever $0 < |x_1| < d$ and $0 < |x_2| < d$. 」 is true ? Give a reason to your answer.

(b) Here is a Maple plot of $y = \frac{1}{1 - 3^{\frac{1}{x}}}$. Based on the graph and your answer to (a), do you think $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - 3^{\frac{1}{x}}}$ exists ? Give a reason to your answer.



3. Here are values of $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ for $x = \frac{1}{2^n}$ where $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ and the graph of $f(x)$ for $x \in [-1,1]$.

x	$f(x)$
0.5000000000	0.
0.2500000000	0.
0.1250000000	0.
0.06250000000	0.
0.03125000000	0.
0.01562500000	0.
0.007812500000	0.
0.003906250000	0.
0.001953125000	0.
0.0009765625000	0.



(a) Does the table contradict to the graph ? Give a reason to your answer.

(b) What can you say about the behavior of $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

(c). What can you say about $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$? Give a reason to your answer.

4. Suppose that $\lim_{x\to 3} f(x)=4$ and $\lim_{x\to 3} g(x)=-1$.

(a) Does it exists a positive number *d* such that $f(x)>2$ whenever $0<|x-3|<d$? Explain briefly.

(b) Does there exists a positive number *d* such that $f(x)>2$ whenever $|x-3|<d$? Explain briefly.

(c) Does it exists a positive number *d* such that $|f(x)+g(x)-3|<1$ whenever $0<|x-3|<d$? Explain briefly.