

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 期中進度報告

## 曲線齒圓柱型齒輪特性研究(1/3)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2212-E-009-032-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程研究所

計畫主持人：蔡忠杓

計畫參與人員：曾瑞堂、廖建雄、張志榮、趙立碁

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 5 月 31 日

## 一、中英文摘要

本專題研究計畫為三年期研究計畫之第一年(92年8月至93年7月)，係參照曲線齒圓柱型齒輪(Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth)實際的切削機構及直邊刀具，首先建立具有圓弧齒線(Curvilinear shaped)之假想齒條刀(Rack Cutter)的刀面數學模式，再應用齒輪原理及微分幾何的觀念，推導出曲線齒圓柱型齒輪的齒形幾何數學模式。通常此類型齒輪在較小齒數或壓力角較小的情況下，被創成齒面很容易產生齒形過切(Undercutting)現象，而造成齒根應力集中以及接觸齒面過小。因此，本計畫利用所建立之齒面數學模式，推導其齒面過切發生之條件式，計算求出曲線齒圓柱型齒輪齒面上的過切線，並探討在不同設計參數下齒面的過切狀況。此外，亦將進行曲線齒圓柱型齒輪的轉位(Profile-Shifted Modification)分析，探討齒輪之壓力角和齒數與轉位的關係。

**關鍵詞：**曲線齒圓柱型齒輪，齒形過切，齒輪轉位，齒輪啮合原理

### Abstract

This is the first year's research report of a three-year NSC research project. During the research process, an imaginary rack-cutter of circular-arc tooth profile and the practical generation mechanism had been considered, the tooth surface of cylindrical gears with curvilinear shaped teeth can be derived based on the theory of gearing and differential geometry. Usually, tooth undercutting will occur when the gears have small pressure angles or small teeth number, which consequently results in stress concentration near the tooth fillets. On the basis of the developed mathematical model of the tooth surface, the condition of tooth undercutting can be obtained and the undercutting line on the tooth surface can be calculated and plotted. Tooth undercutting and profile-shifted modification under various combinations of design parameters had been studied.

**Keywords:** Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth, tooth Undercutting, Profile-Shifted, Theory of Gear Meshing

## 二、前言

齒面未加修整之正齒輪組在啮合時為線接觸(Line Contact)，若齒輪組在裝配時存在有軸向偏差(Axial Misalignment)，則正齒輪啮合時將會發生齒緣接觸(Edge Contact)的現象，造成應力集中、運轉不平順。此外，螺旋齒輪之接觸線長度以漸近的方式遞增或遞減，在傳遞運動時較為平順，但是仍然無法避免裝配時因傳動軸向之偏差而產生齒緣接觸。為了克服齒緣接觸的現象，通常會使用隆齒修整(Crowning Modification)的方法，以改變齒輪接觸型式，由線接觸轉變為點接觸(Point Contact)，使得齒輪即使組裝時具有軸向偏差，仍然可使得其接觸點落於齒寬中央附近之位置。有關隆齒修整方面之研究：Litvin 等[1,2]於1988年利用具有五個自由度之切削機構切製具有隆齒之齒形。Tsay 等[3]於1990年提出將漸開線繞固定軸旋轉而推導出隆齒之理論齒面。張信良[4]於1996年以製造的觀點，應用滾齒機配合靠模板(Curved-Template Guide)，推導出隆齒之螺旋齒輪齒面數學模式。

由於具有螺旋角，使得螺旋齒輪可以較平順地傳遞動力，但具有螺旋角將使得螺旋齒輪傳動時，會產生軸向推力(Axial Thrust Force)，而且螺旋角越大，其軸向推力將越大，故在傳遞較大的扭力時，常用人字型齒輪(Herringbone Gears)代替螺旋齒輪，然而人字齒輪的製造需以左旋及右旋刨齒刀(Shaper Cutter)分別刨製左旋與右旋齒面，其製造時間將增長，而成本亦將提高。以刀盤(Face Mill-Cutter)切削曲線齒輪之齒形具有正齒輪隆齒修整之特性，可以有效避免齒緣接觸，而且其圓弧齒線之幾何特性，使得曲線齒輪在傳動時，具有人字型齒輪無軸向推力之優點，故曲線齒輪將可替代正齒輪或人字齒輪用以傳遞動力，而不致產生軸向推力。

國內外關於曲線齒圓柱型齒輪之研究十分有限，Liu[5]於1988年提出利用刀盤切削曲線齒圓柱型齒輪的製造方法，並探討曲線齒圓柱型齒輪之優點：(1)與相同齒面寬之正齒輪相比，其具有較高的彎曲強度及抗壓強度，故在傳遞相同的動力時，可使齒輪箱之尺寸縮小。(2)齒輪運轉過程中為多齒接觸，故齒輪啮合平順，噪音較低。(3)曲線齒有利於潤滑油殘留，故齒輪之潤滑良

好。(4)沒有軸向推力之產生。Dai 等[6]於1999年提出在滾齒刀軸上加裝一組飛刀來創成一對線接觸的曲線齒輪，而 Andrei 等[7]則於2002年提出與刀盤相似的切削刀具來製造曲線齒輪。

具有高負荷承載能力的齒輪乃是齒輪設計或製造者追求的目標，然而，關於曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式和齒面接觸分析(Tooth Contact Analysis)、接觸橢圓(Contact Ellipse)及應力分析等並未加以研究。另外，如何設計齒輪之齒形以避免齒緣接觸的問題亦限制了曲線齒圓柱型齒輪之實際應用。基於上述背景及目的，本研究計畫首先利用機構學原理、齒輪嚙合原理及微分幾何的觀念，先建構具有圓弧齒線之假想齒條刀，配合曲線齒圓柱型齒輪之切削機構，推導其所創成之曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式。接著，利用所推導之齒面數學模式進行曲線齒圓柱型齒輪之齒面過切分析與轉位分析，以提供刀具參數設計之參考。

### 三、研究方法與結果

本專題研究計畫為三年期之研究計畫，今年度為本研究計畫之第一年(92年8月至93年7月)。本研究計畫原規劃第一年之工作項目如下：(一)完成刀具設計及三維齒條刀數學模式之建立。(二)建立曲線齒圓柱型齒輪齒面之數學模式與齒形繪圖電腦軟體。(三)完成曲線齒圓柱型齒輪齒面過切條件式與電腦分析軟體。(四)完成曲線齒圓柱型齒輪之轉位分析軟體。

至目前為止，本研究計畫第一年已完成。茲簡述本研究計畫已完成和獲得之結果如下：

#### 創成原理

曲線齒圓柱型齒輪之切削機構如圖一所示，在切削的過程中齒胚係繞著 A-A 軸以  $\omega_g$  之角速度旋轉，刀盤則是繞著 B-B 軸以  $\omega_t$  之角速度旋轉，而  $r_F$  為刀盤半徑，其切削過程如下[5]：

(1) 齒胚以  $\omega_g$  之角速度順時針旋轉，刀盤以  $\omega_t$  之角速度順時針旋轉，並以  $r\omega_g$  向右平移，此過程將在齒胚上產生一個曲線

齒之齒間(Tooth Space)。

- (2) 齒間被創成完後，齒胚停止旋轉，進行分度，並預留齒隙(Backlash)量。
- (3) 刀盤在切削另一齒間時，刀盤以  $\omega_t$  之角速度順時針旋轉，並以  $r\omega_g$  向左平移(與圖一相反)，齒胚以  $\omega_g$  逆時針旋轉(與圖一相反)，此過程產生另一個齒間。
- (4) 齒胚停止旋轉，進行分度，以進行下一個齒之切削。
- (5) 重覆以上(1)~(4)步驟，直到所有齒形完成切削。

由以上曲線齒圓柱型齒輪之切削機構可發現，其刀盤結構複雜，而且刀盤上之刀刃安裝，調整及研磨修整較為麻煩，故切製曲線齒圓柱型齒輪需使用專用切削工具機，因而曲線齒之製造成本比一般正齒輪或螺旋齒輪高。上述曲線齒圓柱型齒輪之切削亦可利用假想齒條刀與曲線齒圓柱型齒輪之齒胚的相對運動關係加以模擬，如圖二所示。當齒胚以  $\omega_g$  之角速度順時針旋轉時，假想齒條刀則以  $r\omega_g$  的速度向左平移，其中  $r$  為齒輪之節圓半徑，且假想齒條刀為具有圓弧齒線之齒條刀，而非創成正齒輪或螺旋齒輪所使用之直齒線齒條刀。經由以上之創成關係，即可創成與假想齒條刀共軛之曲線齒圓柱型齒輪。

#### 假想齒條刀之刀面方程式

圖二顯示具圓弧齒線之假想齒條刀  $\Sigma_F$ ，其刀面寬之中央法向截面與創成漸開線齒輪之直邊刀具是一樣的，如圖三所示。

假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面寬中央法向截面主要由壓力角為  $\psi_n^{(F)}$  之直邊刀刃及中心位於  $C_F$  而半徑為  $\rho_F$  之圓弧所組成。其中直邊刀刃部分係用以創成齒輪之工作區的齒面，而圓弧部分則是以創成齒根圓角。假想齒條刀  $\Sigma_F$  之主要設計參數有  $a_F$ 、 $b_F$ 、 $M_n$ 、 $p_n$ 、 $l_F$ 、 $\psi_n^{(F)}$ 、 $\alpha_F$  及  $\rho_F$ 。

為了得到曲線齒輪左右齒面之數學模式，可將圓弧齒線假想齒條刀  $\Sigma_F$  之左右刀面  $\Sigma_{FL}$  及  $\Sigma_{FR}$  分別以數學模式表示之。假想齒條刀  $\Sigma_F$  之右刀面  $\Sigma_{FR}$  將創成曲線齒圓柱型齒輪之左齒面  $\Sigma_{IL}$ ，而假想齒條刀  $\Sigma_F$  之左刀面  $\Sigma_{FL}$  則用以創成曲線齒圓柱型齒輪之右齒面  $\Sigma_{IR}$ 。圖三顯示左右刀面互為對稱，假

想齒條刀  $\Sigma_F$  之左右刀面之直邊刀刃  $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$  可表示在座標系  $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$  如下：

$$\mathbf{R}_a^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_F \\ \pm(l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

在圖三中， $M_0^{(F)}$  點係創成齒面工作區之最低點，其座標可由設計參數  $a_F$  及  $b_F$  兩參數決定之， $l_F$  亦為假想齒條刀之刀面設計參數之一，表示由最低點  $M_0^{(F)}$  沿著直邊刀面至刀面上任意點  $M_1^{(F)}$  的距離。(1)式之“ $\pm$ ”號中，右刀面  $\Sigma_{FR}$  為“+”號而左刀面  $\Sigma_{FL}$  則為“-”號。圖四顯示假想齒條刀齒面寬之中央截面座標系  $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$  與曲線齒之齒條刀座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  之關係，其中圓弧曲線  $\widehat{ab}$  為直邊刀刃之切削路徑， $C_i^{(F)}$  表示切削刀盤之旋轉中心位置。當直線  $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$  繞切削刀盤之旋轉中心  $C_i^{(F)}$  運動時，即形成假想齒條刀  $\Sigma_F$  之左右刀面，將代表刀面之直線區間  $\overline{M_0^{(F)}M_1^{(F)}}$  的位置向量，由座標系  $S_a^{(F)}(X_a^{(F)}, Y_a^{(F)}, Z_a^{(F)})$  轉換至座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ，即可獲得齒條刀左右刀面之數學模式。此座標之轉換可用下列齊次座標轉換矩陣方程式 (Homogeneous Coordinate Transformation Matrix Equation) 求得：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = [M_{ca}] \mathbf{R}_a^{(F)} \quad (2)$$

其中

$$[M_{ca}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_F & \sin \theta_F & r_F(1 - \cos \theta_F) \\ 0 & -\sin \theta_F & \cos \theta_F & r_F \sin \theta_F \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若將(1)式代入(2)式，即可求得將假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面數學模式表示於座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  如下：

$$\mathbf{R}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} l_F \cos \psi_n^{(F)} - a_F \\ \pm(l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \cos \theta_F + r_F(1 - \cos \theta_F) \\ \mp(l_F \sin \psi_n^{(F)} + b_F - a_F \tan \psi_n^{(F)}) \sin \theta_F + r_F \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\theta_{Fl} \leq \theta_F \leq \theta_{Fu}; \theta_{Fl} = \sin^{-1}\left(\frac{-W}{2r_F}\right); \theta_{Fu} = \sin^{-1}\left(\frac{W}{2r_F}\right) \quad (4)$$

上式中  $r_F$  表示圓弧曲線  $\widehat{ab}$  之曲率半徑，亦

即切削刀盤之半徑， $W$  表示齒面寬， $\theta_F$  則為刀面之另一座標參數，其限制範圍如方程式(4)所示。假想齒條刀  $\Sigma_F$  刀面之法向量  $\mathbf{N}_c^{(F)}$  及單位法向量  $\mathbf{n}_c^{(F)}$  可利用下列方程式求得：

$$\mathbf{N}_c^{(F)} = \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial l_F} \times \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \quad (5)$$

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \frac{\mathbf{N}_c^{(F)}}{|\mathbf{N}_c^{(F)}|} \quad (6)$$

其中位置向量  $\mathbf{R}_c^{(F)}$  表示刀面  $\Sigma_F$  之數學模式，表示在座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ，而  $l_F$  及  $\theta_F$  為刀面之設計參數。根據方程式(3)、(5)及(6)式，假想齒條刀  $\Sigma_F$  之刀面單位法向量  $\mathbf{n}_c^{(F)}$  可表示如下：

$$\mathbf{n}_c^{(F)} = \begin{bmatrix} \pm \sin \psi_n^{(F)} \\ -\cos \psi_n^{(F)} \cos \theta_F \\ \cos \psi_n^{(F)} \sin \theta_F \end{bmatrix} \quad (7)$$

(3)式及(7)式之“ $\pm$ ”號中，上方符號表示  $\Sigma_F$  之右刀面  $\Sigma_{FR}$  而下方符號則表示  $\Sigma_F$  之左刀面  $\Sigma_{FL}$ 。

### 曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式

圖五顯示假想齒條刀  $\Sigma_F$  在創成曲線齒輪  $\Sigma_1$  之齒面與齒間時，座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 、 $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  及  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  之相對關係。在齒面創成的過程中，座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$  固聯於假想齒條刀，座標系  $S_h(X_h, Y_h, Z_h)$  為一參考座標系，而座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  則固聯於齒胚上，其中  $Z_1$  軸表示齒胚之旋轉軸。利用下列齊次座標轉換矩陣方程式，即可求得假想齒條刀  $\Sigma_F$  之軌跡方程式表示於座標系  $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$  如下：

$$\mathbf{R}_1^{(F)} = [M_{1c}] \mathbf{R}_c^{(F)} \quad (8)$$

其中

$$[M_{1c}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & r_1(\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & r_1(\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式中  $r_1$  表示小齒輪之節圓半徑， $\phi_1$  則表示在創成過程中齒胚之旋轉角。

當兩曲面經由直接接觸來傳遞運動時，主動件沿著傳遞線，也就是兩曲面之共同法線(Common Normal)來傳遞運動，在傳遞運動的過程中，兩個啮合之曲面必須保持

接觸，若兩曲面在公法線方向有相對速度，則兩曲面將彼此分離或嵌入對方曲面，因此，兩曲面之相對速度必定存在於兩嚙合曲面之共同切平面上，即兩曲面接觸點之共同法向量  $\mathbf{N}$  與兩曲面之相對速度  $\mathbf{V}^{(12)}$  之點乘積(Dot Product)必為零，亦即表示接觸點之共同法向量與相對速度互相垂直，故下列方程式必成立：

$$\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{V}_c^{(12)} = 0 \quad (9)$$

此關係式即為兩嚙合曲面之嚙合方程式(Equation of Meshing)。對於平行軸之運動傳遞，其相對速度  $\mathbf{V}^{(12)}$  可利用繞瞬時旋轉軸(Instantaneous Axis of Rotation)  $I$  點之運動求得，且兩曲面在接觸點之法向量必通過此瞬時旋轉軸。故對於平行軸之兩嚙合曲面，其嚙合方程式亦可利用下列關係求得：

$$\frac{X_c^{(F)} - x_c^{(F)}}{n_{cx}^{(F)}} = \frac{Y_c^{(F)} - y_c^{(F)}}{n_{cy}^{(F)}} = \frac{Z_c^{(F)} - z_c^{(F)}}{n_{cz}^{(F)}} \quad (10)$$

其中  $X_c^{(F)}$ 、 $Y_c^{(F)}$  及  $Z_c^{(F)}$  表示瞬時旋轉軸上任意一點的座標值表示在座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ； $x_c^{(F)}$ 、 $y_c^{(F)}$  及  $z_c^{(F)}$  表示刀面之瞬時接觸點的座標值表示在座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ ； $n_{cx}^{(F)}$ 、 $n_{cy}^{(F)}$  及  $n_{cz}^{(F)}$  則表示刀面此瞬時接觸點之單位法向量的三個分量，表示在座標系  $S_c^{(F)}(X_c^{(F)}, Y_c^{(F)}, Z_c^{(F)})$ 。將方程式(3)和(7)式代入(10)式，即可求得假想齒條刀  $\Sigma_F$  之左右刀面與被創成之曲線齒輪齒面的嚙合方程式如下：

$$f(l_F, \theta_F, \phi_1) = \pm [l_F - a_F(\cos \psi_n^{(F)} + \tan \psi_n^{(F)} \sin \psi_n^{(F)}) + b_F \sin \psi_n^{(F)}] \cos \theta_F + (r_F(1 - \cos \theta_F) - r_1 \phi_1) \sin \psi_n^{(F)} = 0 \quad (11)$$

方程式(11)中之“ $\pm$ ”號，上方符號表示  $\Sigma_F$  之右刀面  $\Sigma_{FR}$  與曲線齒輪之左齒面  $\Sigma_{1L}$  的嚙合方程式，而下方之符號則表示  $\Sigma_F$  之左刀面  $\Sigma_{FL}$  與曲線齒輪之右齒面  $\Sigma_{1R}$  的嚙合方程式。曲線齒輪左右齒面之定義如圖六所示。根據齒輪創成原理可知，齒輪之齒面數學模式是由假想齒條刀之軌跡方程式與嚙合方程式聯立而成。故將方程式(8)及(11)聯立即可定義出曲線齒圓柱型齒輪之左右齒面數學模式。

### 曲線齒圓柱型齒輪之電腦輔助繪圖

依據上一節所推導之曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式及電腦輔助繪圖程式，即可繪出其外形。假設曲線齒圓柱型齒輪主要設計參

數如表一所示，其中  $W_d$  表示曲線齒之齒面寬與刀盤直徑之比值。以三維網格之方式所描繪之曲線齒圓柱型齒輪的齒面形狀如圖七所示。由以上可知曲線齒圓柱型齒輪之幾何特性：(1)正齒輪為曲線齒圓柱型齒輪之特例，當切削刀盤半徑  $r_F$  趨近於無限大時，曲線齒圓柱型齒輪即變成正齒輪。(2)由於圓弧齒線之幾何特性，使得本研究之齒輪組在傳動時具有人字型齒輪無軸向推力的特性。(3)曲線齒之左右齒面不相同，一個齒面為凹曲面，另一個齒面則為凸曲面，而且齒面寬之中央齒厚較大而兩端之齒厚較小。

### 曲線齒圓柱型齒輪之齒形過切分析

以下將應用 Litvin[8]所提出之齒形過切分析方法，分析曲線齒圓柱型齒輪之過切線分佈情形。由微分幾何之定義可知，若曲面上之一點，其切向量不存在或切向量大小等於零，則此點稱為奇異點。一般齒輪之齒面為規則曲面，即齒面上不存在奇異點，若齒面上出現奇異點，即表示齒面發生過切現象。若以齒條刀之刀面  $\Sigma_F$  創成曲線齒圓柱型齒輪之齒面  $\Sigma_1$ ，在齒面之創成過程中，齒條刀之刀面  $\Sigma_F$  與被創成之齒面  $\Sigma_1$  的瞬時接觸點，其位置向量在任意一固定座標系觀察時，兩者之位置向量應相等。將  $\Sigma_F$  與  $\Sigma_1$  瞬時接觸點表示於固定座標系  $S_f(X_f, Y_f, Z_f)$ ，則下式必成立：

$$\mathbf{R}_f^{(F)} = \mathbf{R}_f^{(1)} \quad (12)$$

上式對時間微分可得：

$$\mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}_r^{(F)} = \mathbf{V}_r^{(1)} + \mathbf{V}_r^{(1)} \quad (13)$$

經移項整理後可得：

$$\mathbf{V}_r^{(1)} = \mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}_r^{(F)} - \mathbf{V}_r^{(1)} = \mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}^{(F1)} \quad (14)$$

方程式(13)及(14)中之下標  $r$  表示接觸點隨著刀具或齒面之運動速度，下標  $r$  表示接觸點沿刀具或齒面之切向速度。從奇異點之定義可知，當  $\mathbf{V}_r^{(1)} = 0$  時，齒面上將產生奇異點，即齒面會發生過切現象，故齒面發生過切之必要條件可表示如下：

$$\mathbf{V}_r^{(F)} + \mathbf{V}^{(F1)} = 0 \quad (15)$$

茲將嚙合方程式對時間之微分，如下所示：

$$\frac{d}{dt} f(l_F, \theta_F, \phi_1) = 0 \quad (16)$$

方程式(15)配合上式即可在齒條刀之

刀面上定義出一限制曲線，而此限制曲線即為創成齒面產生齒形過切現象之過切線。當刀面上的點位於限制曲線上或超過限制曲線，則這些刀面上之點將在齒面創成時造成齒面之過切。

由(15)式及(16)式可分別改寫成下列兩式：

$$\frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial l_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} = -\mathbf{V}_c^{(F1)} \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l_F} \frac{dl_F}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta_F} \frac{d\theta_F}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \quad (18)$$

方程式(17)中之 $\mathbf{R}_c^{(F)}$ 表示刀面方程式表示於座標系 $S_c(X_c, Y_c, Z_c)$ ， $\mathbf{V}_c^{(F1)}$ 則表示刀面 $\Sigma_F$ 上的瞬間接觸點相對於齒面 $\Sigma_1$ 上的瞬間接觸點之相對速度。方程式(17)及(18)可以下列矩陣方程式表示之：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} \\ \frac{\partial f}{\partial l_F} & \frac{\partial f}{\partial \theta_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dl_F}{dt} \\ \frac{d\theta_F}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{xc}^{(F1)} \\ -V_{yc}^{(F1)} \\ -V_{zc}^{(F1)} \\ -\frac{\partial f}{\partial \phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{bmatrix} \quad (19)$$

方程式(19)存在唯一解之充要條件為方程式(19)之擴增矩陣(Augmented Matrix)的秩(Rank)為二，亦即下列方程式必須同時滿足。

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \\ f_{l_F} & f_{\theta_F} & -f_{\phi_1} \frac{d\phi_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial x_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{xc}^{(F1)} \\ \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial y_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{yc}^{(F1)} \\ \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial l_F} & \frac{\partial z_c^{(F)}}{\partial \theta_F} & -V_{zc}^{(F1)} \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

上式中之方程式(23)即為嚙合方程式，綜合方程式(20)至(23)式，可求得齒面 $\Sigma_1$ 上奇異點之充分條件為包含三個未知數 $l_F$ ， $\theta_F$ 和 $\phi_1$ 之下列兩式所組成之非線性方程組：

$$F(l_F, \theta_F, \phi_1) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (24)$$

$$f(l_F, \theta_F, \phi_1) = 0 \quad (25)$$

聯立方程組(24)式及(25)式中具有三個未知數，其求解方法為將 $\theta_F$ 視為已知而給定一數值以求解一組對應之 $l_F$ 和 $\phi_1$ ，然後再將 $\theta_F$ 給以一增量，再求解另一組對應之 $l_F$ 和 $\phi_1$ ，如此即可解得刀具上創成齒面奇異點之限制曲線。

茲舉表一所示之曲線齒圓柱型齒輪設計參數為例，根據方程式(24)及(25)所組成之方程式以探討齒輪組之過切情形。表二與表三顯示曲線齒左右齒面在不同的設計參數下，當齒面出現奇異點時，齒輪 $Z_1$ 截面位置與齒面參數 $l_F$ 之關係。其中 $l_{FL}$ 表示曲線齒左齒面 $\Sigma_{1L}$ 之齒面參數， $l_{FR}$ 表示曲線齒右齒面 $\Sigma_{1R}$ 之齒面參數。由於曲線齒之齒面寬兩側是對稱的，所以在齒面寬之兩側其奇異點發生處之 $l_F$ 值亦是對稱的，故表二與表三只列出齒面寬其中一側之奇異點發生處。如表二第二欄所示，改變齒輪之壓力角為14.5度時，在此設計條件下，曲線齒左齒面 $\Sigma_{1L}$ 在齒面寬中央法向截面(即 $Z_1=0.0\text{mm}$ 處)所對應奇異點發生處之 $l_F$ 值為1.544mm。若設計用以創成齒面之刀面工作區範圍等於 $0.0\text{mm} \leq l_F \leq 5.93\text{mm}$ ，其中 $l_F=0.0\text{mm}$ 為創成齒面上漸開線之起點，而 $l_F=5.93\text{mm}$ 則為創成漸開線之終點(亦即齒頂)；若奇異點發生處之 $l_F$ 值落在刀面工作區範圍內，即表示齒面發生過切現象。由表二之第二欄中可知，當 $Z_1=0.0\text{mm}$ 時，齒輪在設計參數 $l_F=1.544\text{mm}$ 處會發生過切。

由表二與表三之分析結果可發現，越接近齒面寬中央截面處，齒面越容易發生過切現象，亦即表示中央截面之齒面過切較嚴重。由於曲線齒之左右齒面不相同，其左右

齒面發生奇異點之 $l_F$ 值亦不相同，但越靠近齒面中央之截面處，則左右齒面發生奇異點之 $l_F$ 值越相近，如表二及表三所示。

另外，由表二及表三可知，齒面在不同的壓力角設計條件下，其齒面過切情形亦不同，齒面壓力角越大時，曲線齒之齒面越不容易發生過切現象。表三最後兩欄表示刀盤半徑等於30公尺之下的分析結果，當刀盤半徑很大時，曲線齒趨近於正齒輪。由表三最後兩欄所顯示之過切特性與正齒輪是一致的，即左右齒面呈現對稱形態而其左右齒面之過切狀態也相同，而且整個齒面在任何一截面的過切現象也相同，由此亦可驗證本研究所推導之曲線齒圓柱型齒輪之齒面數學模式及分析模式之正確性。

### 曲線齒圓柱型齒輪之轉位分析

曲線齒圓柱型齒輪在較小齒數或具有較小壓力角時，齒面寬中央附近容易發生較嚴重的過切現象，因而減弱其齒根強度。為了避免小齒數或較小壓力角之曲線齒圓柱型齒輪發生過切，曲線齒可利用齒刀轉位切削的方式，以避免被創成之曲線齒的齒面過切發生，本節將探討過切與轉位係數之關係。

如圖八所示，在切削標準曲線齒時，齒條刀之基準節線即 $Y_a^{(F)}$ 軸與齒輪節圓相切於I點，亦即 $Y_a^{(F)}$ 軸與 $Y_c^{(F)}$ 軸是重合的。若齒條刀之基準節線 $Y_a^{(F)}$ 軸往遠離齒輪旋轉中心之方向平移 $xM_n$ 量，則稱為正轉位量，其中 $x$ 為轉位係數， $M_n$ 為齒輪模數，而以這種方式所切削之齒輪即為正轉位齒輪。利用以上推導曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式之方法，亦可推導出包含轉位係數 $x$ 之刀面方程式及其齒面方程式。

齒面上發生奇異點之充分條件式(24)及(25)式若包含轉位係數 $x$ ，則(24)式及(25)式將含有四個未知數： $l_F$ ， $\theta_F$ ， $\phi_1$ 和 $x$ 。由齒面過切分析可知道，齒面寬中央截面之齒面是最容易發生過切的地方，若能避免齒面寬中央截面之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切現象。在求解過程若選定齒面參數 $\theta_F=0.0$ 度，即表示在探討齒面中央截面位置之過切情形；若設定 $l_F=0.0\text{mm}$ ，則表示探討奇異點恰發生於齒

面上漸開線起點位置。經過以上參數之設定，根據方程式(24)及(25)即可解出齒數或壓力角與轉位係數 $x$ 之關係。在探討曲線齒之齒面轉位特性時，以上之參數設定(即 $\theta_F=0.0$ 度和 $l_F=0.0\text{mm}$ )所造成的齒數與轉位係數之關係將與正齒輪之情形相似。

為了避免過切，在不同的齒面壓力角之下，齒數與轉位係數必須適當選取，經分析結果其關係如圖九所示，其縱軸表示轉位係數，橫軸表示齒數。圖中三條過切界線與橫軸之交點大約分別為12.3齒，18.5齒及34齒，亦即表示曲線齒之齒面壓力角分別為25度，20度及14.5度時，曲線齒之齒面其中央截面不發生過切的最小齒數分別為13齒，19齒及34齒。為了避免曲線齒之齒面產生過切，曲線齒之轉位係數的選擇，應在過切界線之右側範圍中適當地選取之。

### 範例

有一曲線齒圓柱型齒輪其創成刀具之壓力角為20度，模數 $M_n=3.0\text{mm}$ ，刀具齒根等於 $1M_n$ ，刀具齒頂等於 $1.25M_n$ ，刀具齒頂圓弧半徑等於 $0.25M_n$ ，曲線齒之齒數為10齒。依據本文所推導之曲線齒面數學模式和電腦圖學繪圖法，則所創成之曲線齒圓柱型齒輪，如圖十所示，由此圖可看出齒輪在齒根部份已有明顯的過切現象。根據圖九可知在齒數為10齒，壓力角為20度下，齒面若要避免過切則所需要選取之轉位係數為0.5。

圖十一即表示齒數為10齒，壓力角為20度，轉位係數取0.5時之轉位曲線齒圓柱型齒輪之電腦繪圖；由該圖顯示可知利用轉位切削方式確實可避免齒面之過切現象發生，但需注意的是正轉位將使得齒頂變尖，此現象在曲線齒之齒面寬兩側之齒頂更加嚴重。

### 四、結論及計畫成果自評

本研究已完成曲線齒圓柱型齒輪齒面數學模式之推導，並應用電腦輔助繪圖程式，描繪出曲線齒圓柱型齒輪之實體模型。曲線齒之左右齒面不相同，而且齒面寬之中央齒厚較大而兩端之齒厚較小。圓弧曲線之齒輪齒面上，越接近齒面寬中央截面處，齒面越容易發生過切現象，若能避免齒面寬中

央截面之齒面發生過切，則齒面其他位置將不會發生過切。為了避免曲線齒圓柱型齒輪的過切，本研究亦探討曲線齒輪之壓力角和齒數與轉位的關係。

由於曲線齒圓柱型齒輪具有高強度，本研究之曲線齒圓柱型齒輪，其左右齒面分別由不同的刀盤半徑所創成，因此，其齒形將具有隆齒之特性，故此曲線齒圓柱型齒輪組之接觸狀況是呈現點接觸而非線接觸，這也是本研究的創新處，由於此創新之製造方式，曲線齒圓柱型齒輪組在具有軸向裝配誤差之狀況下，才不會產生齒緣接觸現象，這是對曲線齒在應用上之一大改進。因此，所發展之曲線齒圓柱型齒輪組對於裝配誤差不敏感，且不會發生齒緣接觸的現象等優點，非常適合用於精密機械之傳動。

## 五、參考文獻

- [1] Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., "Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis-Part 1: Basic Concepts, Generation of the Pinion Tooth Surface by a Plane," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, pp. 337-342, 1988.
- [2] Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., "Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis-Part 2: Generation of the Pinion Tooth Surface by a Surface of Revolution," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 110, pp. 343-347, 1988.
- [3] Tsay, C. B., Sheu, W. L., and Wu, C. H., "Spur Gears with Crowned Teeth," Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 11, No. 2, pp. 121-133, 1990.
- [4] 張信良，「電腦數控滾齒機之齒輪滾削模擬」，國立交通大學，博士論文，新竹，台灣，1996年六月。
- [5] Liu, S. T., "Curvilinear Cylindrical Gears," Gear Technology, May/ June, pp. 8-12, 1988.
- [6] Dai, Y., Ariga, Y. and Nagata, S., "Study on A Cylindrical Gear with Curved Tooth Traces," Tenth World Congress on The

Theory of Machine and Mechanisms, 6, pp.2337-2342, 1999.

- [7] Andrei, L., Andrei, G., Epureanu, A., Oancea, N., and Walton, D., "Numerical Simulation and Generation of Curved Face Width Gears," International Journal of Machine Tools & Manufacture, 42, pp. 1-6, 2002.
- [8] Litvin, F. L., Gear Geometry and Applied Theory, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994
- [9] Litvin, F. L., Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, Washington D. C. 1989.

表一 曲線齒圓柱型齒輪主要設計參數

設計參數	曲線齒輪
齒數	18
模數	3mm/齒
壓力角	$20^{\circ}$
齒面寬	30mm
刀盤半徑	30mm( $W_d = 0.5$ )

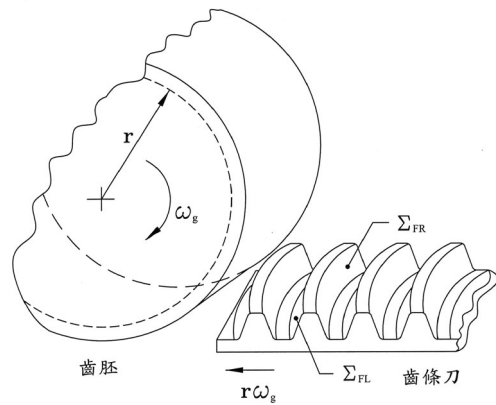
表二 曲線齒在不同設計參數下奇異點發生之位置 單位：mm

參數 截面	$\psi_n^{(F)} = 14.5^{\circ}$ $r_F = 30\text{mm}$		$\psi_n^{(F)} = 20^{\circ}$ $r_F = 30\text{mm}$	
	$l_{FL}$	$l_{FR}$	$l_{FL}$	$l_{FR}$
$Z_1$				
-15.00	0.933	1.073	-0.856	-0.833
-14.00	1.033	1.148	-0.708	-0.679
-13.00	1.119	1.214	-0.577	-0.546
-12.00	1.194	1.271	-0.462	-0.432
-11.00	1.258	1.320	-0.361	-0.334
-10.00	1.314	1.363	-0.272	-0.248
-9.00	1.362	1.400	-0.195	-0.175
-8.00	1.403	1.433	-0.128	-0.112
-7.00	1.438	1.460	-0.071	-0.058
-6.00	1.467	1.483	-0.023	-0.013
-5.00	1.491	1.502	0.016	0.023
-4.00	1.511	1.517	0.048	0.052
-3.00	1.525	1.529	0.073	0.075
-2.00	1.536	1.537	0.090	0.091
-1.00	1.542	1.542	0.100	0.101
0.00	1.544	1.544	0.104	0.104

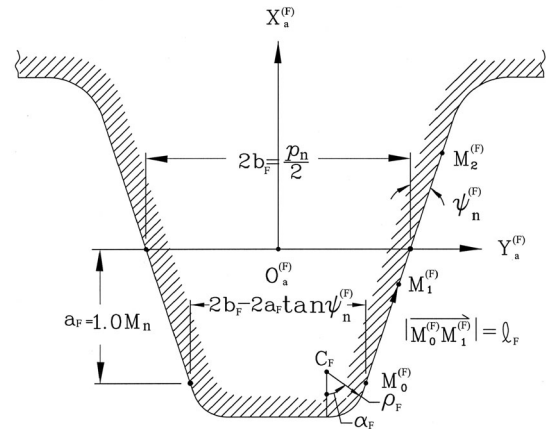


表三 曲線齒在不同設計參數下奇異點發生之位置 單位：mm

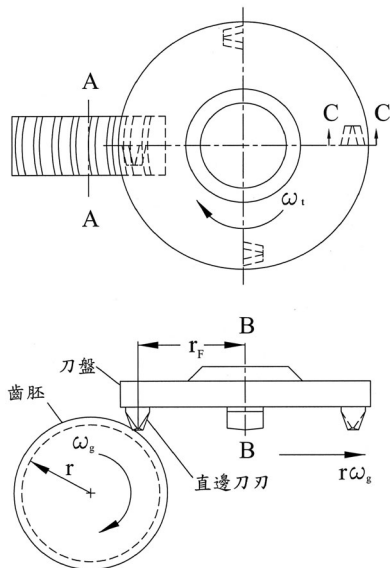
參數 截面	$\psi_n^{(F)}=25^\circ$ $r_F=30\text{ mm}$		$\psi_n^{(F)}=20^\circ$ $r_F=30\text{ mm}$	
	$l_{FL}$	$l_{FR}$	$l_{FL}$	$l_{FR}$
-15.0	-2.844	-3.294	0.104	0.104
-14.0	-2.672	-3.009	0.104	0.104
-13.0	-2.516	-2.770	0.104	0.104
-12.0	-2.378	-2.568	0.104	0.104
-11.0	-2.254	-2.397	0.104	0.104
-10.0	-2.144	-2.251	0.104	0.104
-9.0	-2.047	-2.126	0.104	0.104
-8.0	-1.963	-2.020	0.104	0.104
-7.0	-1.889	-1.930	0.104	0.104
-6.0	-1.827	-1.856	0.104	0.104
-5.0	-1.775	-1.794	0.104	0.104
-4.0	-1.734	-1.745	0.104	0.104
-3.0	-1.701	-1.708	0.104	0.104
-2.0	-1.679	-1.681	0.104	0.104
-1.0	-1.665	-1.666	0.104	0.104
0.0	-1.661	-1.661	0.104	0.104



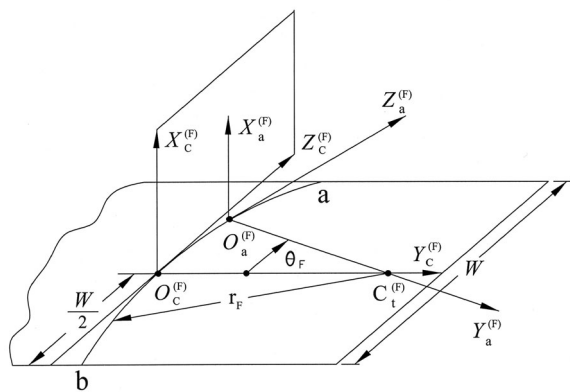
圖二 假想齒條刀創成曲線齒圓柱型齒輪之運動關係



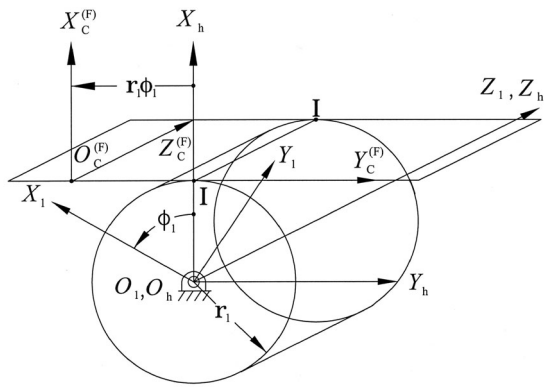
圖三 假想齒條刀  $\Sigma_F$  刀面寬之中央法向截面(圖一截面 C-C)



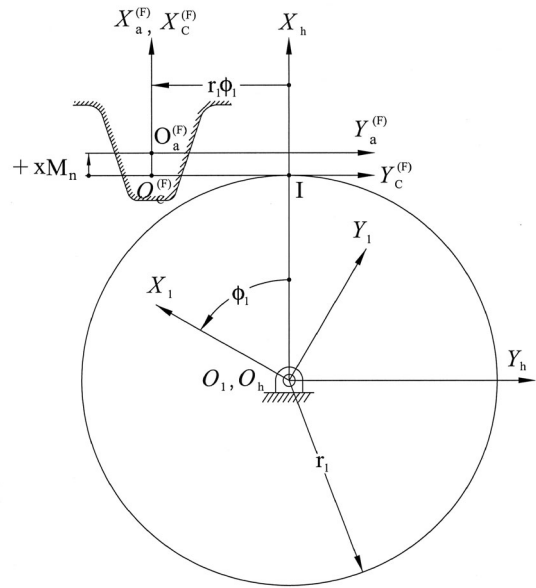
圖一 曲線齒圓柱型齒輪之切削方法



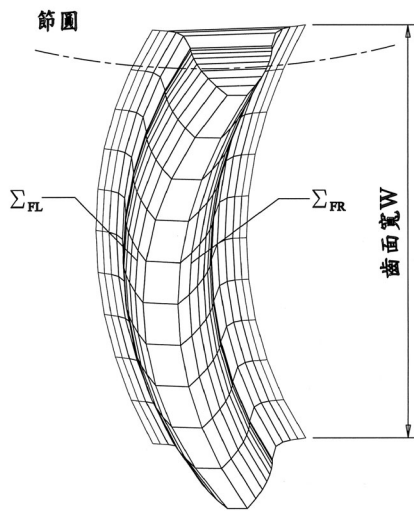
圖四 模擬假想齒條刀刀面之座標系  $S_c$  與  $S_a$  的關係



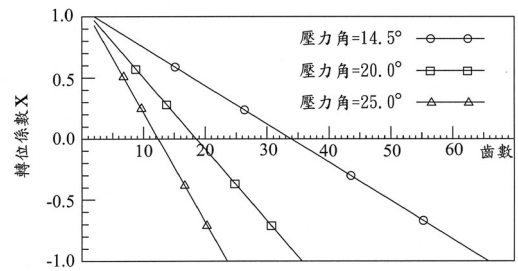
圖五 假想齒條刀  $\Sigma_F$  創成齒輪  $\Sigma_1$  之創成機構示意圖



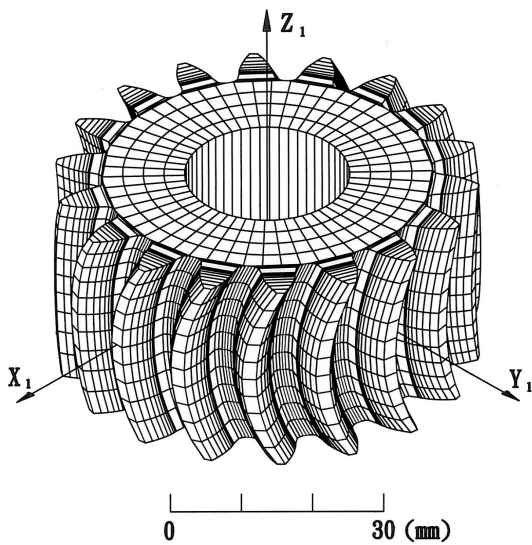
圖八 齒輪轉位切削示意圖



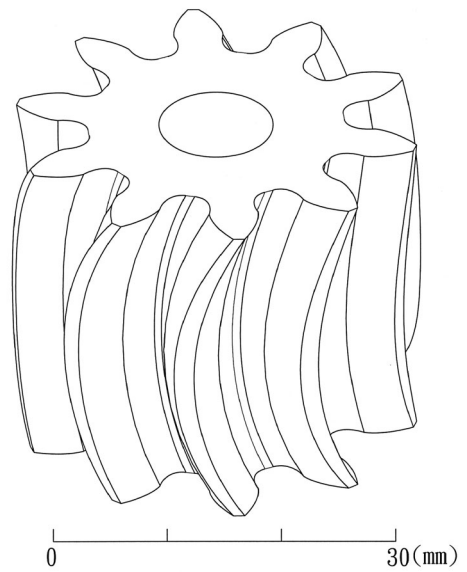
圖六 曲線齒左右齒面示意圖



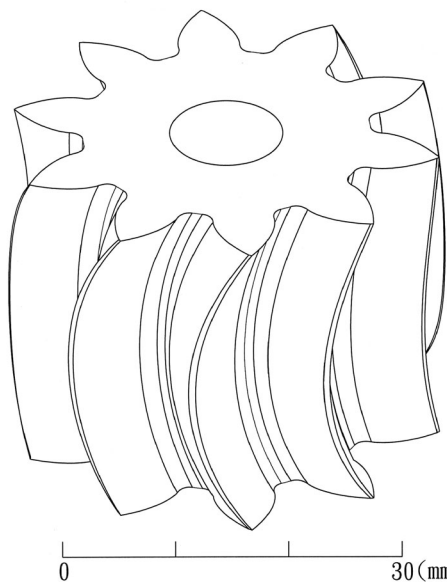
圖九 齒面無過切現象下齒輪轉位係數與壓力角及齒數之關係



圖七 曲線齒圓柱型齒輪之電腦繪圖



圖十 發生過切之曲線齒圓柱型齒輪



圖十一 具有正轉位之曲線齒圓柱型齒輪