

行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

光子晶體結構之可行性探討

Feasibility Study of Photonic Crystal Structures

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫

計畫編號：NSC89 - 2215 - E - 009 - 085 -

執行期間：89年08月01日至90年07月31日

計畫主持人：謝太炯

共同主持人：

本成果報告包括以下應繳交之附件：

赴國外出差或研習心得報告一份

赴大陸地區出差或研習心得報告一份

出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份

國際合作研究計畫國外研究報告書一份

執行單位：國立交通大學電子物理系

中華民國 89年 08月 30日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號：NSC 89-2215-E-009-085-

執行期限：89 年 08 月 01 日至 90 年 07 月 31 日

主持人：謝太炯 tchsieh@cc.nctu.edu.tw

執行機構及單位名稱：交通大學電子物理系

計畫參與人員：陳科遠 freon.ep89g@NCTU.edu.tw

王玉璽 freepath.ep89g@NCTU.edu.tw

執行機構及單位名稱：交通大學電子物理系

一、中文摘要

理論探討光晶結構常用的方法有種三種：向量波展開 (vector-wave expansion method)、傳遞矩陣法 (transfer-matrix method)、有限差距時域法 FDTD 法 (finite-difference time-domain method)，而我們本階段工作所採用的方法是較常見的向量波展開，以求得各形式光晶的色散關係，與有限尺寸的穿透效率，如此對於設計光晶結構與模擬將有很大的助益。

微波的光晶實驗包含波長可調的微波源，寬頻放大器及二維光晶結構，製作在微波電路板上，目前已完成 3.5~6.4GHz 的微波源。

關鍵詞：光子晶體、光子能隙、

Abstract

In the literature, the mostly used methods to study the photonic bandgap (PB) structure are vector-wave expansion method, transfer-matrix method, and finite-difference time-domain method. In this work we exploit the vector-wave expansion method to investigate wave properties in the PB structures of the finite size, including the dispersive relation and the wave transmission coefficient. We have completed the calculations of the one-dimensional PB structures, the study of the two-dimensional structures is now on-going. These theoretical results are useful for designing the PB structures that will be used in the experimental work.

For PB experiments in the microwave domain, we have prepared the microwave source tunable in the 3.5 – 6.4 GHz. Other works are in the way, including a broad-band amplifier and the PB structure made on the high-frequency laminates.

Keywords: photonic bandgap, microwave tunable source

二、緣由與目的

本計畫即基於已知的文獻報導[1,2,3]，構想使用 YIG 微波振盪源[4]，在 10-20 GHz 或更高頻段產生頻率可調變波長的微波，並且經由薄膜電路 (microstrip circuit) 把微波送入介電常數成週期性、模擬光子能隙的佈列結構，並且配合理論分析，探討在各種光子晶體結構的電磁波動，如波傳導和排斥。我們試定位本計畫為前瞻性的探討，

理論工作以類似 Bloch 模式[5]分析光子能隙，尋找光子晶體的設計參數，進行如上構想的電磁波實驗，以了解光子晶體結構的性質，並在未來推演這些知識到半導體光子晶體的研究。

三、計劃執行的結果與討論

理論分析與初步結果：

我們採用 Bloch mode 將波與介質以 Fourier 級數展開，代入 Maxwell 方程式。

Maxwell 方程式考慮在介電係數呈 $V(\vec{r})$ 函數，為

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i \frac{\omega}{c} V(\vec{r}) \vec{E}$$

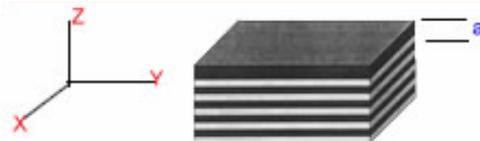
將以上四式稍加整理，可得

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} V(\vec{r}) \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{H}}{V(\vec{r})} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}$$

一維週期結構

在簡單的一維的週期結構下，如圖：



將介電係數以 Fourier 級數展開

$$V(\vec{r}) = V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U(n) e^{inGz}$$

$$U(n) := \frac{1}{a} \left(\int_0^{a\chi} \epsilon_a e^{-i \cdot n \cdot G \cdot z} dz + \int_{a\chi}^a \epsilon_b e^{-i \cdot n \cdot G \cdot z} dz \right)$$

其中 ϵ_a 與 ϵ_b 為介電係數， χ 為兩介電質厚度的比值， G

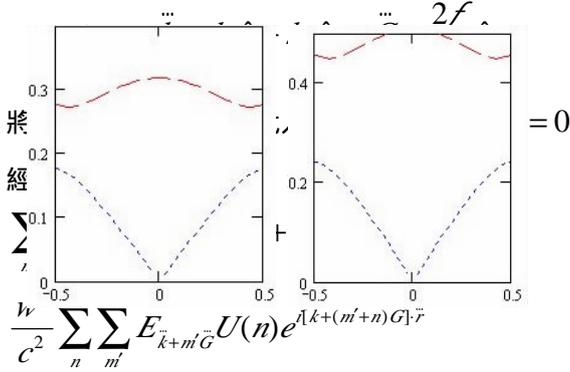
為使 $V(z) = V(z + na)$ ，故 $G = \frac{2f}{a}$ 。

我們先討論單純的 TE 與 TM mode：

一維 TE mode：

假設此 TE 波的行進方向位於 y-z 平面的某一方向，而電場方向則平行 x 方向(垂直入射方向)

$$\text{令 } \ddot{E}(\vec{r}) = \hat{x} \sum_m E_{\vec{k}+m\vec{G}} e^{i(\vec{k}+m\vec{G})\cdot\vec{r}}$$



左式的 $m=2$ 之項，對應右式的 $m'+n=2$
即 $(m',n)=..(2,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(0,2)$ 、 $(-1,3)$ 、 $(-2,4)$
可表示成

$$E_{\vec{k}+2\vec{G}} \left(|\vec{k} + 2\vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} \bar{V} \right) - \frac{w^2}{c^2} \{ .. + E_{\vec{k}+\vec{G}} U(1) + E_{\vec{k}} U(2) + E_{\vec{k}-\vec{G}} U(3) + E_{\vec{k}+3\vec{G}} U(-1) + ... \} = 0$$

理，可規納出許多齊次關係式，而為了使 $E_{\vec{k}+m\vec{G}}$ 不全為零(non-trivial solution)，其係數矩陣必須為零，(如附件一)

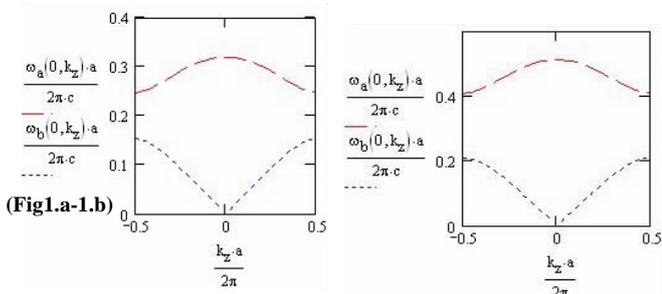
經過計算與略掉次要效應的項，可以簡化成：

$$\begin{bmatrix} k_y^2 + (k_z + G)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} U(0) & -U(1) \frac{\omega^2}{c^2} & 0 \\ -U(-1) \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} U(0) & -U(1) \frac{\omega^2}{c^2} \\ 0 & -U(-1) \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + (k_z - G)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} U(0) \end{bmatrix} = 0$$

，即可求得 (k) 的色散關係：

下圖 Fig.1a 是在 $d_1=13$ 之厚度=0.5a、 $d_2=1$ 之厚度=0.5a；(x、y 方向無限大且均勻)垂直入射的 TE mode 分析。明顯的，可以在 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.15-0.25$ 中間，出現光子能隙(虛數的 wave vector)，波無法在此波段傳播。

下圖 Fig.1b 是在 $d_1=13$ 之厚度=0.2a、 $d_2=1$ 之厚度=0.8a；(x、y 方向無限大且均勻)垂直入射的 TE mode 分析。明顯的，可以在 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.20-0.40$ 中間，出現光子能隙(虛數的 wave vector)，波無法在此波段傳播。



(Fig-2a-2b)

上圖 Fig.2a 與 2b 是在相同狀況下，夾 z 軸 30° 入射的 E mode 分析。明顯的，在 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.177-0.27$ 與 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.242-0.45$ 中間，出現光子能隙(虛數的 wave vector)，波無法在此波段傳播。

一維 TM mode：

假設此 TM 波的行進方向位於 y-z 平面的某一方向，而磁場方向則平行 x 方向(垂直入射方向)

$$\text{令 } \ddot{H}(\vec{r}) = \hat{x} \sum_m H_{\vec{k}+m\vec{G}} e^{i(\vec{k}+m\vec{G})\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{1}{V(\vec{r})} = \frac{1}{V(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) e^{inGz}$$

$$C(n) := \frac{1}{a} \left(\int_0^{a\chi} \frac{1}{\epsilon_a} e^{-i\cdot n\cdot G\cdot z} dz + \int_{a\chi}^a \frac{1}{\epsilon_b} e^{-i\cdot n\cdot G\cdot z} dz \right)$$

$$\text{where } \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} ; \vec{G} = \frac{2f}{a} \hat{z}$$

$$\text{將 } \ddot{H}(\vec{r}) \text{ 與 } \frac{1}{V(\vec{r})} \text{ 之式代入 } \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \ddot{H}}{V(\vec{r})} \right) = \frac{w^2}{c^2} \ddot{H}$$

經過整理之後可以得到：

$$\frac{w^2}{c^2} \sum_m H_{\vec{k}+m\vec{G}} e^{i(\vec{k}+m\vec{G})\cdot\vec{r}} = \sum_n \sum_{m'} H_{\vec{k}+m'\vec{G}} C(n) \{ |\vec{k} + m\vec{G}|^2 + \vec{k} \cdot (m' + n)\vec{G} \} e^{i(\vec{k}+(m'+n)\vec{G})\cdot\vec{r}}$$

左式的 $m=2$ 之項，對應右式的 $m'+n=2$

即 $(m',n)=..(2,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(0,2)$ 、 $(-1,3)$ 、 $(-2,4)$

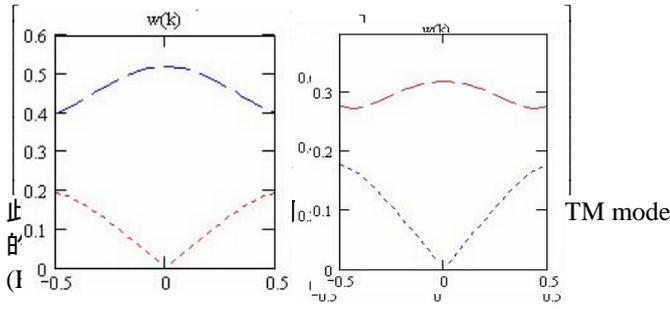
可表示成

$$\begin{aligned} & ... + H_{\vec{k}+2\vec{G}} \left\{ C_0 \left[|\vec{k} + 2\vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} \right] + \right. \\ & H_{\vec{k}+\vec{G}} C(1) \left\{ |\vec{k} + \vec{G}|^2 + G(k_z + G) \right\} + \\ & H_{\vec{k}} C(2) \left\{ |\vec{k}|^2 + 2Gk_z \right\} + \\ & H_{\vec{k}-\vec{G}} C(3) \left\{ |\vec{k} - \vec{G}|^2 + 3G(k_z - G) \right\} + \\ & \left. H_{\vec{k}-2\vec{G}} U(-4) \left\{ |\vec{k} - 2\vec{G}|^2 + 4G(k_z - 2G) \right\} \right\} = 0 \end{aligned}$$

同理，可規納出許多齊次關係式，而為了使 $H_{\vec{k}+m\vec{G}}$

不全為零，其係數矩陣必須為零，(如附件二)

再經過一些計算與合理忽略下，係數矩陣可以簡化成

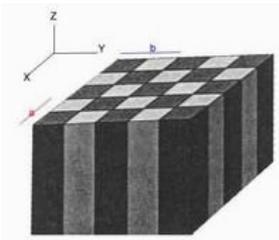


(Fig-4a, 4b)

Fig.3a 與 3b 是在 $\epsilon = 13$ 之厚度=0.5a, $\epsilon = 1$ 之厚度=0.5a; 垂直入射與夾 z 軸 30 度的 TM mode 分析。明顯的, 在 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.20 \sim 0.40$ 與 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.33 \sim 0.39$ 中間出現光子能隙; 而 Fig.4a 與 4b 是在 $\epsilon = 13$ 之厚度=0.2 a, $\epsilon = 1$ 之厚度=0.8 a; 垂直入射與夾 z 軸 30 度的 TM mode 分析。明顯的, 在 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.37 \sim 0.45$ 與 $\frac{\tilde{S}a}{2fc} = 0.44 \sim 0.465$ 中間出現光子能隙。

二維的週期結構:

在簡單的一維對稱的週期結構下, 如圖:



二維 TE mode:

在二維週期性結構中, 我們定義 $V(x, y, z) = V(x, y)$ 且其在 x 軸方向具有空間週期=a, 在 y 軸方向具有週期=b, 使得 $V(x + p \cdot a, y + q \cdot b) = V(x, y)$ 。令波行進的方向為 x、y 向, 故令 $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$

令 $\vec{G} = M \cdot \vec{G}_x + N \cdot \vec{G}_y$ (M,N 表任意整數)

$$\vec{G}_x = \frac{2\pi}{a} \hat{x} ; \vec{G}_y = \frac{2\pi}{b} \hat{y}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{z} \sum_{\vec{G}} E_{\vec{k}+\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \hat{z} \sum_p \sum_q E_{\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y} e^{i(\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y) \cdot \vec{r}}$$

$$V(\vec{r}) = V(x, y) = \sum_m \sum_n U(m, n) e^{imG_x x} e^{inG_y y}$$

$$\text{where } U(m, n) = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a V(x, y) e^{-imG_x x} e^{-inG_y y} dx dy$$

以上圖單純的兩種介電質所組成的週期結構為例, 二維 Fourier 展開的係數為

$$\frac{1}{ab} \left[\int_0^b \int_0^a \epsilon_a e^{-i(mG_x x + nG_y y)} dx dy \right] + \frac{1}{ab} \left[\int_0^b \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \epsilon_b e^{-i(mG_x x + nG_y y)} dx dy \right] \dots$$

$$+ \frac{1}{ab} \left[\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{3b}{2}} \int_0^a \epsilon_b e^{-i(mG_x x + nG_y y)} dx dy \right] + \frac{1}{ab} \left[\int_{\frac{b}{2}}^{\frac{3b}{2}} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \epsilon_a e^{-i(mG_x x + nG_y y)} dx dy \right]$$

將以上所有的展開式代入 $\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} V(\vec{r}) \vec{E} = 0$

可得到

$$\{(k_x + pG_x)^2 + (k_y + G_y)^2\} \sum_p \sum_q E_{\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y} e^{i(\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y) \cdot \vec{r}}$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q E_{\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y} U(m, n) e^{i(\vec{k}+(p+m)\vec{G}_x+(q+n)\vec{G}_y) \cdot \vec{r}}$$

如同計算一維的方法, 可得一個最簡化的 9x9 矩陣, (如附件三)

如同在一維時的工作, 求此係數矩陣行列式=0 之解, 即可求得 $\tilde{S}(k_x, k_y)$ 之色散關係。

二維 TM mode:

同理, 我們亦可將 TM mode 的磁場展開成

$$\vec{H}(\vec{r}) = \hat{z} \sum_{\vec{G}} E_{\vec{k}+\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G}) \cdot \vec{r}} = \hat{z} \sum_p \sum_q E_{\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y} e^{i(\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y) \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{1}{V(\vec{r})} = \frac{1}{V(x, y)} = \sum_m \sum_n C(m, n) e^{imG_x x} e^{inG_y y}$$

$$\text{定義 } C(m, n) = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a \frac{1}{V(x, y)} e^{-imG_x x} e^{-inG_y y} dx dy$$

$$\text{將 } \vec{H}(\vec{r}) \text{ 與 } \frac{1}{V(\vec{r})} \text{ 之式代入 } \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{H}}{V(\vec{r})} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H}$$

經過整理之後可以得到:

$$\sum_{\vec{G}} \frac{\omega^2}{c^2} H_{\vec{k}+\vec{G}} e^{i(\vec{k}+\vec{G}) \cdot \vec{r}}$$

$$= \sum_{\vec{G}} \sum_{\vec{G}'} H_{\vec{k}+\vec{G}} C(\vec{G}') (\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G} + \vec{G}') e^{i(\vec{k}+\vec{G}) \cdot \vec{r}}$$

或者

$$\frac{w^2}{c^2} \sum_p \sum_q H_{\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y} e^{i(\vec{k}+p\vec{G}_x+q\vec{G}_y)\cdot\vec{r}}$$

$$= \sum_m \sum_n \sum_{p'} \sum_{q'} H_{\vec{k}+p'\vec{G}_x+q'\vec{G}_y} C(m,n) e^{i(\vec{k}+(p'+m)\vec{G}_x+(q'+n)\vec{G}_y)\cdot\vec{r}}$$

經過整理可得到一個最簡化的 9X9 的係數矩陣，求此係數矩陣行列式=0 之解，即可求得 $\vec{S}(k_x, k_y)$ 之色散關係。

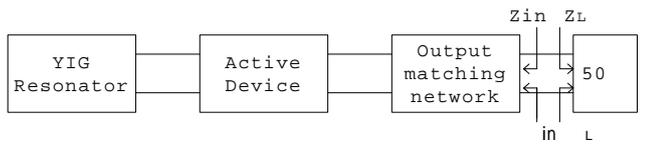
實驗部份：

製作寬頻可調的振盪源，運用於光子晶體實驗的頻率可調振盪器。

我們使用的是 YIG 頻率可調振盪器，可線性調變 3.5GHz ~ 6.4 GHz，共振腔具有高的 Q 值，及低的相位雜訊。

電路設計方法：

可調振盪器之結構如下

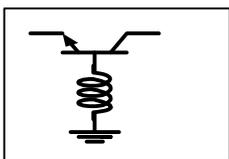


振盪條件: $\tilde{A}_{in} * \tilde{A}_L = 1$

即: $Z_{in} + Z_L = 0$; $R_{in} + R_L = 0$;
 $X_{in} + X_L = 0$.

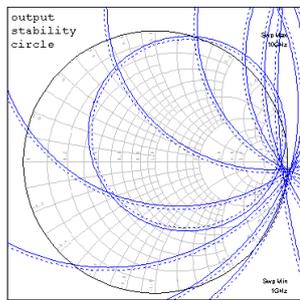
$R_L = 50 \Omega$ 振盪條件: $R_{in} < -50 \Omega$, $X_{in} = 0$
 當調動外加磁場 H_0 時, YIG 共振頻率 f_0 跟著變動, 觀察 Z_{in} 符合 $R_{in} < -50 \Omega$, $X_{in} = 0$ 的範圍即可振盪範圍。

主動電路部分提供一個訊號放大的作用, 電路結構:

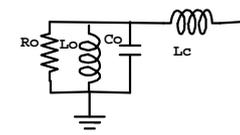


針對欲設計的頻帶選用適當的電晶體, 我們使用 AT41400(BJT)、NE71300(FET), 在電晶體的基極加上電感作為正回授, 使在特定頻率產生振盪。

以穩定圓方法設計電晶體輸出負載, 負載匹配在穩定圓所界限的不穩定區內。AT41400(BJT) 之穩定圓隨頻率作有規律的變化, 如圖, 適合設計在 3-7GHz 的振盪。



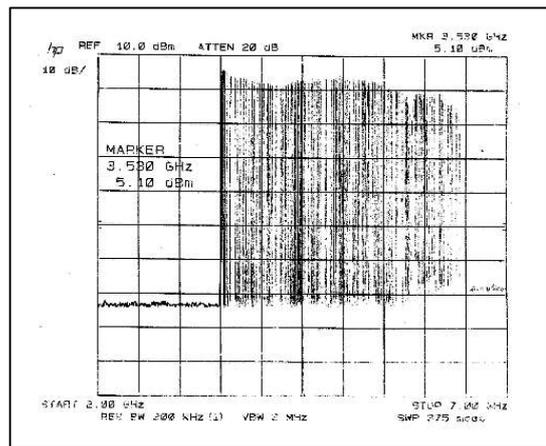
共振腔等效電路: YIG 為鐵磁性材料, 在磁場作用下有如下等效電路:



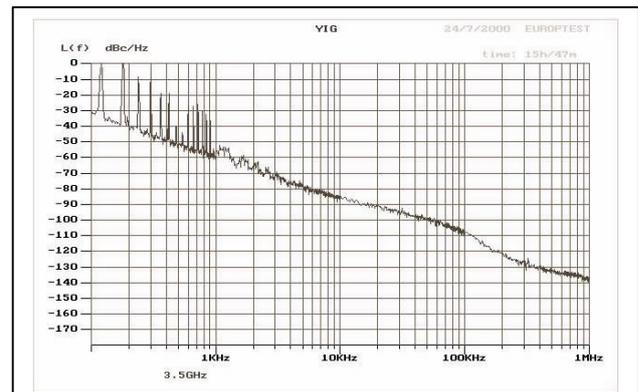
$R_o = \mu_0 V K^2 W_m Q_u$
 $L_o = R_o / Q_u W_o$
 $C_o = 1 / L_o W_o^2$
 L_c 為 couple YIG 振盪訊號的線圈所寄生的電感效應, 約 0.5nH

μ_0 為 本質磁導係數 $4\pi * 10^{-9}$ (H/cm);
 V 為 YIG 晶體體積 (我們使用半徑 $r = 0.018 * 2.54$ cm);
 $K = 1/d$ (d 為 couple 線圈直徑 0.1cm);
 $W_m = 2\delta f_m$; $f_m = \tilde{\alpha} 4\delta Ms$;
 $4\delta Ms$ 為 saturaton magnetization = 1780G ;
 $\tilde{\alpha}$ 為 gymagnetic ratio = 2.8MHz/G ;
 Q_u 為 YIG unloaded Q = $(H_0 - 4\delta Ms/3) / \Delta H = (f_0 - f_m/3) / \Delta H$;
 ΔH 為 YIG 磁場對功率的半功率線寬 = 0.2G ;
 $W_o = 2\delta f_0$; $f_0 = \tilde{\alpha} H_0$; H_0 為外加磁場。

目前已將電路實現在陶瓷板上, 製作出 3.5~6.4 GHz 的振盪器。見圖:



Phase noise 可運接近 100kHz offset 時 110dBc/Hz



目前目標是希望改良精進製作技術使可於 Roger 軟質基板上製作出較大頻帶的電路, 如此可以在實驗室內完成整個電路的製作, 並改進 phase noise 使達到工業水準。

四、計畫成果自評

理論探討是採用傅利業級數展開, 產生一個相當龐大的矩陣, 我們藉由 MathCAD 的數學輔助軟體求解這些矩陣的 $\vec{S}(k)$, 但要描述二維結構, 至少要 9X9 的矩陣, 若推廣到三維結構, 至少需要 27x27 的係數矩陣, 解此矩陣的本徵值實是繁複, 遑論其他含有雜質或者是具有缺陷的非完美週期結構, 若是依然採用傅利業展開去描述, 相當費時費力。目前的色散關係計算是視結構為無窮大尺寸, 實際的光晶結構之尺寸是有限, 在有限尺寸的計算顯然須探討邊界條件的效應, 以求得正確的穿透係數。也

由於採用 Fourier 展開的方法複雜，對於二維以上的光晶結構式子龐大(參考附件一，二，三)，欲求得嚴格解仍尚待改進，所以我們目前還在找尋其他更快更簡便的方法，以計算光子晶體的結構特性。

由於分析及設計的工作未能在本工作期間同時完成，在光晶結構的製作受到影響，故尚未進行微波實驗。

本計畫執行之缺失為理論研究的人力不足，這在後續的研究工作必須加強。

五、參考文獻

- [1] E.Y.Ablonovitch, et al.: Photonic band structure: the face-centered-cubic case Phys. Rev. Lett., Vol.63, No.18, 1905-1953 (1989)
- [2] A. Mekis, et al.: High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides, Phys.Rev.Lett., Vol.77, No.18, 3787-3790 (1996)
- [3] S.Y. Lin, et al.: Experimental demonstration of guiding and bending of electro-magnetic waves in a photonic crystal, Science Vol.282, 274-276 (1998)
- [4] G.Gonzalez: Microwave transistor amplifiers, 422-424 , Prentice Hall(1997)
- [5] C. Kittel: Introduction to solid state physics, 5th-Ed., 190-195, John Wiley (1976)
- [6] John. D. Joannopoulos: Photonic Crystals, Molding the Flow of Light, Princeton University Press (1995)
- [7] 蔡雅芝, “ 光子晶體內能隙的形成及其性質 ” (1998 博士論文, 清華大學物理所)
- [8] D. Labilloy, ”Quantitative Measurement of Transmission, Reflection, and Diffraction of Two-Dimensional Photonic Band Gap Structures at Near-Infrared Wavelengths ” , Vol 79, No.21, Nov, 1997
- [9] P.M.Ollivier, ”Microwave YIG-Tuned Transistor Oscillator Amplifier Design : Application to C band”, IEEE J.Solid-State Circuit, vol.SC-7,pp54-60, Feb .,1972
- [10] J.C.Papp & Y.Y.Koyano ,”An 8-18 GHz YIG-Tuned FET Oscillator ”, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol.MTT-28, no.7 JULY 1980
- [11] Robert D. ”Existence of a photonic band gap in two dimension”, Appl. Phys. Let. Vol 61, No 4, July 1992
- [12] K.M.Ho, ”Existence of a Photonic Gap in Periodic Dielectric Structures”, Phys. Rev. Let. Vol 65, No 25, Dec., 1990.
- [13] Thomas S.: ”Spontaneous Emission in Two Dimensional Photonic Crystal Microcavities”, IEEE Journal of Quantum Electron. Vol 36, No 4, Apr 2000.
- [14] M.Plihal and A.A.Maradudin, “Photonic band structure of two-dimensional system: The tri-angular lattice”, Phys. Rev. B, Vol 44, No 16, Oct. 1991.

附件一(一維 TE mode)

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

where $\mathbf{X} =$

$$(E_{\vec{k}+2\vec{G}}, E_{\vec{k}+1\vec{G}}, E_{\vec{k}}, E_{\vec{k}-\vec{G}}, E_{\vec{k}-2\vec{G}})^T$$

為了使 \mathbf{X} 不全為零，故 $|\mathbf{A}| = 0$

$$\begin{vmatrix} k_y^2 + (k_z + 2G)^2 - U(0) \frac{\omega^2}{c^2} & -U(1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(3) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(3) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \\ -U(-1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + (k_z + G)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot U(0) & -U(1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(3) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \\ -U(-2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot U(0) & -U(1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \\ -U(-3) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + (k_z - G)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot U(0) & -U(1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \\ -U(-4) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-3) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-2) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & -U(-1) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} & k_y^2 + (k_z - 2G)^2 - U(0) \cdot \frac{\omega^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

可求得 與 k 之間的關係式。

附件二(一維 TM mode)

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\text{where } \mathbf{X} = (H_{\vec{k}+2\vec{G}}, H_{\vec{k}+1\vec{G}}, H_{\vec{k}}, H_{\vec{k}-\vec{G}}, H_{\vec{k}-2\vec{G}})^T$$

為了使 \mathbf{X} 不全為零，故 $|\mathbf{A}| = 0$ ，即

$$\begin{vmatrix} C_0 |\vec{k} + 2\vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} & C_1 (\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} + 2\vec{G}) & C_2 \vec{k} \cdot (\vec{k} + 2\vec{G}) & C_3 (\vec{k} - \vec{G}) \cdot (\vec{k} + 2\vec{G}) & C_4 (\vec{k} - 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} + 2\vec{G}) \\ C_{-1} (\vec{k} + 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G}) & C_0 |\vec{k} + \vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} & C_1 \vec{k} \cdot (\vec{k} + \vec{G}) & C_2 (\vec{k} - \vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G}) & C_3 (\vec{k} - 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G}) \\ C_{-1} (\vec{k} + 2\vec{G}) \cdot \vec{k} & C_1 (\vec{k} + \vec{G}) \cdot \vec{k} & C_0 |\vec{k}|^2 - \frac{w^2}{c^2} & C_1 (\vec{k} - \vec{G}) \cdot \vec{k} & C_2 (\vec{k} - 2\vec{G}) \cdot \vec{k} \\ C_{-2} (\vec{k} + 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} - \vec{G}) & C_{-2} (\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} - \vec{G}) & C_{-1} \vec{k} \cdot (\vec{k} - \vec{G}) & C_0 |\vec{k} - \vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} & C_1 (\vec{k} - 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} - \vec{G}) \\ C_{-3} (\vec{k} + 2\vec{G}) \cdot (\vec{k} - 2\vec{G}) & C_{-3} (\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} - 2\vec{G}) & C_{-2} \vec{k} \cdot (\vec{k} - 2\vec{G}) & C_{-1} (\vec{k} - \vec{G}) \cdot (\vec{k} - 2\vec{G}) & C_0 |\vec{k} - \vec{G}|^2 - \frac{w^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0$$

可求得 與 k 之間的關係式。

附件三(二維 TE mode)

$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{0}$ 且定義 $E_{p,q} \equiv E_{k+pG_x+qG_y}$

where $\mathbf{X} = (E_{1,1}, E_{1,0}, E_{1,-1}, E_{0,1}, E_{0,0}, E_{0,-1}, E_{-1,1}, E_{-1,0}, E_{-1,-1})^T$

$$\begin{bmatrix} \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x + G_x)^2 - (k_y + G_y)^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x + G_x)^2 - k_y^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x + G_x)^2 - (k_y - G_y)^2 & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,1) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - k_x^2 - (k_y + G_y)^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,1) & 0 \\ \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x + k_y)^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,1) \\ 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - k_x^2 - (k_y - G_y)^2 & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(1,0) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,1) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x - G_x)^2 - (k_y + G_y)^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,0) - (k_x + G_x)^2 - k_y^2 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,-1) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,0) & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(-1,1) & 0 & \frac{\mu^2}{\epsilon^2} U(0,-1) - (k_x - G_x)^2 - (k_y - G_y)^2 \end{bmatrix}$$

為了使 \mathbf{X} 不全為零，故 $|\mathbf{A}| = 0$

其中 $U(m,n)$ 與 G_x 與 G_y 均為已知，
故理論上可求得 與 k 之間的關係式，
但由於此式過於煩雜，故未得算出其結果。