行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

斜坡上有限振幅波之 Lagrangian 攝動近似解(II)—
Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC92-2611-E-009-001-
執行期間：92 年 08 月 01 日至 93 年 07 月 31 日
執行單位：國立交通大學土木工程學系

計畫主持人：張憲國

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 93 年 8 月 17 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

斜坡上有限振幅波之 Lagrangian 攝動近似解(II)－Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換

Two-way transformations between the Lagrangian and Eulerian solutions for gravity waves in water of uniform depth

計畫編號：NSC 92-2611-E-009-001

執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：張憲國　交通大學土木工程學系 副教授

一、中文摘要

本研究探討有限水深水平底床上規則重力波 Eulerian 解與 Lagrangian 解之間的轉換關係，在相同攝動參數的選定下，本研究探討劉和張(2003)Lagrangian 五階解與 Fenton (1985)Eulerian 五階解之間的轉換方法及結果。直到目前為止，三階以上的 Eulerian 解尚無法轉換至相同階數的 Lagrangian 解，主要的關鍵在於 Lagrangian 的週波率是隨深度增加而增加，而非一常數，在經過週波率的修正後，本研究首先解決高階 Eulerian 解無法轉換至 Lagrangian 解的問題，接著應用陳(1996)將 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解的轉換技術，驗證劉和張(2003)所提出 Lagrangian 五階解是可以轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解。本研究提供若 Lagrangian 解或 Eulerian 解為已知條件下，轉換成另外一解的轉換方法。

關鍵詞：Lagrangian-Eulerian 近似解轉換、有限振幅波、攝動法

Abstract

The present project introduces two-way transformations between Eulerian and Lagrangian solutions for gravity waves propagating on an uniform depth. The Eulerian and Lagrangian fifth-order approximations with the same perturbation parameter (Liou & Chang, 2003) are used to examine the possibility. Up to now, it is known that the Eulerian solution of Stokes waves up to the third order can not be transformed into the corresponding Lagrangian solution (Wiegel, 1964). A key to unlock this problem is to recongnize the fact that the Lagrangian frequency is not constant with water depth (Liou & Chang, 2003). With this correction, two-way transformations between the Lagrangian and Eulerian solution are shown to be possible.

Keywords: Lagrangian-Eulerian Transformation, Finite-amplitude gravity waves, Perturbation method

二、緣由與目的

水平底床上波浪理論是個古典的問題。Airy (1845)略去波浪的非線性量，提出微小振幅波理論。Stokes (1847)利用攝動解析的技術，解析等水深有限振幅波的問題。爾後有關波浪問題幾乎多採用 Eulerian 座標系統，至今，理論解析部份已推展到五階解(如 Skjelbreia 和 Hendrickson (1960)，Fenton (1985))；而在 Lagrangian 系統方面，由於 Lagrangian 方法描述波浪問題的控制方程式皆為非線性，理論解析較為困難，而早期之研究結果，其流體質點的運動皆為旋轉性，與理想流體的非旋轉性的基本假設互相矛盾，且由於未對週波率進行攝動展開，故無法表現不同深度下質點運動的週波率隨深度增加而增加的特性(如 von Gerstner (1802)，Rankine (1863)，Miche (1944))。陳(1994)在 Lagrangian 系統中，求得非旋轉性重力波動場至三階解。陳(1994)的解析結果與往昔最大的不同，在於其滿足了理想流體非旋轉的特性，且因考慮了週波率的攝動展開，而可表現出週波率於不同深度下的變化特性。劉和張

(2003)利用 Eulerian 解的特性做為限制條件，推導出三種不同形式的 Lagrangian 五階解。劉和張(2003)所推導之 Lagrangian 系統流體質點的週波率皆可轉換至 Eulerian 系統空間中任何一個位置點的週波率，且此空間中之週波率為一常數不隨空間任何位置而有所不同。此隱含劉和張(2003)之 Lagrangian 解，如波形、波壓等，可完全轉換至 Eulerian 解。

往昔學者研究波浪 Lagrangian 解與 Eulerian 解轉換有 Longuet-Higgins (1953)利用泰勒展開的方式，將 Eulerian 速度解轉換至 Lagrangian 速度解，並對其取時間平均，以求得質量傳輸速度，但僅能對二階 Eulerian 速度解進行轉換，而求得二階的質量傳輸速度，在進行第三階 Eulerian 速度解的轉換時，會產生隨時間成長的不合理 Lagrangian 三階速度解。陳(1996)探討 Eulerian 三階解與 Lagrangian 三階解間的轉換關係，並首先提出 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解的方式，結果顯示，Eulerian 解在第三階無法轉換至 Lagrangian 解，會產生不合理的時間項，而 Lagrangian 三階解可成功轉換至 Eulerian 三階解。

雖然往昔學者已有探討 Eulerian 與 Lagrangian 系統間轉換的相關研究，然而對於三階 Eulerian 解，尚無法成功轉換至合理的 Lagrangian 解。本文乃針對有限水深水平底床上規則重力波的問題，在相同攝動參數的考慮下，首先應用陳(1996)將 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解的轉換技術，驗證劉和張(2003)所提出 Lagrangian 五階解是否可以轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解，接著解決高階 Eulerian 解無法轉換至 Lagrangian 解的問題。

三、結果與討論

3-1 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解

由劉和張(2003)可知，透過 Longuet-Higgins (1986)提出波浪週波率於 Lagrangian 與 Eulerian 兩種不同系統的關係

$$\sigma_L = \sigma_E - kU_M \quad (1)$$

其中 σ_L 為 Lagrangian 週波率，σ_E 為 Eulerian 週波率，U_M 為質量傳輸速度。式(1)表示 Lagrangian 系統的週波率可與 Eulerian 系統的週波率的關係，且劉和張(2003)經轉換而得與 Fenton (1985)的 Stokes 波之五階週波率是相同的。

陳(1996)透過連續泰勒展開的方式將 Lagrangian 解成功轉換至 Eulerian 解。本研究應用陳(1996)提出的轉換技術，驗證劉和張(2003)的 Lagrangian 五階解是否可轉換至相同攝動參數 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解。令 Lagrangian 系統與 Eulerian 系統之位相關係及高程關係分別表示為

$$\theta_L = \theta_E + \xi \quad (2a)$$

$$Z_L = Z_E - \zeta \quad (2b)$$

其中 $\theta_L = ka - \sigma_L t$ 為 Lagrangian 位相函數，$\theta_E = kx - \sigma_E t$ 為 Eulerian 位相函數，$Z_L = k(b+h)$ 為 Lagrangian 高程，$Z_E = k(h+y)$ 為 Eulerian 高程，h 為平均水位。今將流速勢中，θ_L 的函數和 Z_L 的函數，分別在 θ_E 處和 Z_E 處展開泰勒級數，透過連續的泰勒展開，並收集相同的階量至第五階，即可將 Lagrangian 系統中的五階流速勢轉換至 Eulerian 系統中，將轉換結果與 Fenton (1985)的解析結果比較，如發現轉換結果比 Fenton (1985)原文在偶數階部份多了一項時間常數項，這是因為本研究是以固定座標處理前進波，而 Fenton (1985)是在移動座標下處理，然此項在穩動運動座標(steady motion)下將會消失。

劉和張(2003)所推導出 Lagrangian 系統中之五階壓力，如同流速勢的轉換，可將 Lagrangian 系統中的五階壓力轉換至 Eulerian 系統中。

若將 Lagrangian 系統流體質點運動軌跡的垂直分量，其中 θ_L 的函數經泰勒級數展開在 θ_E 處，再取 $b=0$，即可得到 Eulerian 的水位表示式，透過連續的泰勒展開，在收集相同的階量至第五階後，即可將 Lagrangian 系統中的五階水位轉換至 Eulerian 系統中，且與 Fenton (1985)攝動展開 Stokes 波所得之五階波形是相同的。

至此，劉和張(2003)中週波率、波壓及波形的 Lagrangian 五階解和依照劉和張(2003)的攝動解析技術所導出的 Lagrangian 五階流速勢皆可完全轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解。

3-2 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解

往昔學者在進行 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解時，皆如同 Longuet-Higgins (1953)一般，利用泰勒展開的方式，將

Eulerian 速度解的 x 展開在 a， y 展開在 b，以得到 Lagrangian 速度解，但此種轉換方式僅能對二階 Eulerian 速度解進行轉換，而在三階由於會產生隨時間成長的不合理 Lagrangian 解，故至目前為止均無法成功轉換出 Lagrangian 三階或以上的結果。由式(1)可知，Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，為了能轉換出合理的 Lagrangian 解，於是本研究在考慮週波率的影響因素下，首先提出對週波率進行轉換的概念，故除了將 Eulerian 速度解的 x 展開在 a， y 展開在 b 外，亦同時將 σ_E 轉換至 σ_L。

考慮於時間 t 時，位於 (x,y) 位置的流體質點，是由 $t=0$ 時，位於 (a,b) 位置的流體質點流來的。因此，對同一流體質點，其速度於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中應相同，依照攝動理論，將 x 展開在 a，將 y 展開在 b，收集相同的 ε，即可得各階 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統的關係。

由於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，透過式(1)及三角函數公式，並將其中差異量造成的函數展開成 MacLaurin 級數的形式，在位相進行轉換時會產生高階量，即

$$U_1(a,b,t)=U_{1(1)}+U_{1(3)}+U_{1(5)}+\Lambda \quad (3a)$$

$$V_1(a,b,t)=V_{1(1)}+V_{1(3)}+V_{1(5)}+\Lambda \quad (3b)$$

式(3a)及式(3b)中，下方的括號代表階量，其中第二項的三階量及第三項的五階量將合併至三階及五階的轉換過程中，今取出第一項，即可得到第一階的轉換結果。

如同第一階對位相進行轉換一般，並將其中差異量造成的函數展開成級數的形式，可得

$$U_2(a,b,t)=U_{2(2)}+U_{2(4)}+\Lambda \quad (4a)$$

$$V_2(a,b,t)=V_{2(2)}+V_{2(4)}+\Lambda \quad (4b)$$

式(4a)及式(4b)中第二項的四階量將合併至四階的轉換過程中，今取出第二階量則可得到 Lagrangian 系統中第二階的質點運動速度，對質點運動速度進行積分，即可求得 Lagrangian 系統中第二階的運動軌跡。

由劉和張(2003)可知，於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的平均水位不同，故將 Eulerian 系統轉換至 Lagrangian 系統時，需進行水位修正，於是依照劉和張(2003)的攝動展開技術，攝動展開 Lagrangian 系統中連續方程式 $J=1$，並將轉換所得的 Lagrangian 解代入攝動展開式中，故在滿足連續方程式下，y_2 應進行修正，往昔學者並未做此修正，故無法滿足 Lagrangian 系統中最基本的連續方程式。

如同前二階一般，對位相進行轉換，可得

$$U_3(a,b,t)=U_{3(3)}+U_{1(3)}+U_{3(5)}+\Lambda \quad (5a)$$

$$V_3(a,b,t)=V_{3(3)}+V_{1(3)}+V_{3(5)}+\Lambda \quad (5b)$$

往昔學者在轉換三階解時，於質點運動速度會產生不合理的時間項，主要是因為沒有對週波率進行轉換，本文對週波率進行轉換後，會產生如式(5a)的 $U_{1(3)}$ 和式(5b)的 $V_{1(3)}$，此二項可消去不合理的時間項。

與 Longuet-Higgins (1953)之轉換方法比較，本文能成功轉換的處理關鍵有三。一為質點的 Lagrangian 週波率與空間點 Eulerian 週波率不同。第二為 Lagrangian 解在偶數階需經質量守恆條件有垂直修正量。第三為積分質量速度至軌跡時，需經二項式展開 $1/\sigma_L$ 之高階量。

3-3 結論

針對有限振幅波於水平底床上的波動問題，本文探討 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同描述方式間的轉換關係。在相同攝動參數才可以比較的原則下，本文採用劉和張(2003)的 Lagrangian 五階解和 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解做為轉換的標準，這兩組不同描述方式的解皆是使用相同攝動參數為 $kH/2$。

經由劉和張(2003)可知，Lagrangian 系統的週波率可轉換至 Eulerian 系統的週波率。本研究利用陳(1996)的轉換技術，將 Lagrangian 的位相及高程，透過泰勒級數，連續展開在 Eulerian 的位相及高程，經由轉換結果可知，因 Lagrangian 系統是以固定座標處理前進波，透過轉換後，較 Fenton (1985)在移動座標下處理的結果於偶數階部份多一項時間常數項，而此項在穩定運動座標下將會消失。如同流速勢的轉換，在垂直方向流體質點運動軌跡的應用下，

劉和張(2003)的 Lagrangian 五階壓力解可完全轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階壓力解。若將劉和張(2003)垂直方向流體質點運動軌跡的位相函數，連續泰勒展開在 Eulerian 的位相，並取 $b=0$，則可轉換出 Eulerian 系統中的水位，而此水位與 Fenton (1985)的 Eulerian 五階波形水位一致。透過週波率、流速勢、波壓及水位的轉換結果可知，劉和張(2003)的 Lagrangian 五階解可轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解。

由 Longuet-Higgins (1986) 可知，Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，於是本文考慮週波率的影響，除了將 Eulerian 速度中的 (x,y) 展開在 (a,b) 外，亦將 σ_E 轉換至 σ_L，經由週波率的轉換，在進行三階以上轉換時，會合併低階解在進行週波率轉換時產生的高階量，這些項可消去三階以上 Eulerian 速度解轉換至 Lagrangian 速度解所產生不合理的時間項。由劉和張(2003)可知，Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的平均水位並不相同，於是在進行偶數階轉換時，為了滿足 Lagrangian 系統中連續方程式，轉換所得的 Lagrangian 偶數階解需進行修正。另外，由於考慮週波率的影響，故在三階以上，透過積分求取 Lagrangian 系統中流體質點運動軌跡時，亦需考慮低階解對高階結果的影響量。經由本文的轉換技術，可將 Fenton (1985)的 Eulerian 五階速度解轉換至 Lagrangian 系統中，並透過積分求得 Lagrangian 系統中流體質點運動軌跡，而此運動軌跡經由比對，與劉和張(2003)的 Lagrangian 五階解一致，故 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解可轉換至劉和張(2003) 的 Lagrangian 五階解。透過本研究探討的結果可知，描述等水深非旋轉性前進重力波的 Lagrangian 及 Eulerian 解，在本文轉換技術的應用下，二者是可互相轉換的。

四、計畫成果自評

本研究探討有限水深水平底床上規則重力波 Eulerian 解與 Lagrangian 解之間的轉換關係。經由結果之比較，認為研究內容已達到原計畫之預期成果，且具有高度之應用價值。本研究已發表於第 26 屆海洋工程研討會。

五、參考文獻

[1] 陳陽益(1994)"等深水中非旋轉性的自由表面前進重力波之 Lagrangian 方式的攝動解析"，第十六屆海洋工程研討會論文集，A1 頁-A29 頁。

[2] 陳陽益(1996)"非旋轉性前進波的 Eulerian 與 Lagrangian 解間的轉換性"，第十八屆海洋工程研討會論文集，第 1-13 頁。

[3] 劉勁成、張憲國(2003)"等水深有限振幅波之 Lagrangian 五階攝動近似解"，第二十五屆海洋工程研討會論文集，89 頁-96 頁。

[4] Airy, G. B. (1845) Tides and waves. Encyc Metrop Art, Vol. 192, pp. 241-396.

[5] Fenton, J. D. (1985) “A Fifth-order Stokes Theory for Steady Waves,” *J. Waterway Port Coastal Ocean Engng. ASCE,* Vol. 111, No. 2, pp. 216-234.

[6] Gerstner, F. J. (1802) Theorie der wellen. Abh k böhm Ges Wiss.

[7] Longuet-Higgins, M. S. (1953) “Mass Transport in Water Waves,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* Vol. A 245, pp. 535-581.

[8] Longuet-Higgins, M. S. (1986) “Eulerian and Lagrangian Aspects of Surface Waves,” *J. Fluid Mech*. Vol. 173, pp. 683-707.

[9] Miche, R. (1944) Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante forme limite de la houle lors de son déferlement. Application aux digues maritimes. Ann Pontes Chaussées Vol. 114, pp. 25-78, 131-164, 270-292, 369-406.

[10] Rankine, W. J. M. (1863) “On the exact form of waves near the surface of deep water,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A Vol. 153, pp. 127-138.

[11] Stokes, G. G. (1847) “On the theory of oscillatory waves,” *Trans. Cam. Philos. Soc.* Vol. 8, pp. 441-473.

[12] Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. (1960) “Fifth order gravity wave theory,” *Proc. 7th Coastal Eng. Conf., ASCE,* pp. 184-196.

[13] Wiegel, R. L. (1964) Oceanographical engineering. Prentice Hall, New Jersey.