

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

正則擬多邊形的研究

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2115-M-009-017-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立交通大學應用數學系

計畫主持人：翁志文

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93年9月1日

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號：NSC 92-2115-M-009-017-

執行期限：92年8月1日至93年7月31日

主持人：翁志文 國立交通大學應用數學系
weng@math.nctu.edu.tw

93年8月31日

一、中文摘要

令 Γ 是直徑 $D \geq 3$ 價位 k 的正則擬多邊形，其中相交參數 $a_1 > 0, c_2 > 1$ 。令 θ_1 為 Γ 第二大的特徵值。在此計畫我們得到

$$\theta_1 \leq \frac{k - a_1 - c_2}{c_2 - 1}.$$

我們還證明以下 (i)–(iii) 是等價的: (i) 上式等號成立; (ii) Γ 對於 θ_1 是 Q -多項式; (iii) Γ 是對偶極圖或漢彌敦圖。這個結果與 Paul Terwilliger 合作將發表於 European Journal of Combinatorics.

關鍵詞：擬多邊形; 距離正則圖; Q -多項式; 對偶極圖; 漢彌敦圖。

Abstract Let Γ denote a near polygon distance-regular graph with diameter $d \geq 3$, valency k and intersection numbers $a_1 > 0, c_2 > 1$. Let θ_1 denote the second largest eigenvalue of Γ . We show

$$\theta_1 \leq \frac{k - a_1 - c_2}{c_2 - 1}.$$

We show the following (i)–(iii) are equivalent. (i) Equality is attained above; (ii) Γ is Q -polynomial with respect to θ_1 ; (iii) Γ is a dual polar graph or a Hamming graph.

Keywords: near polygon, distance-regular graph, Q -polynomial, dual polar graph, Hamming graph.

二、緣由與目的

令 Γ 是一個直徑 D 及相交參數 a_i, b_i, c_i ($0 \leq i \leq D$) 的距離正則圖。假設 Γ 上最大黨(直線)的點數都是 $a_1 + 2$ ，我們又假設如對任意直線 ℓ 與任一點 x 的距離 $\partial(\ell, x)$ 小於 D 時，必唯一存在一 ℓ 上的點 y 滿足 $\partial(\ell, x) = \partial(y, x)$ ，則我們稱 Γ 是一個正則擬多邊形。如果 Γ 對 $\partial(\ell, x) = D$ 時也有以上性質，則 Γ 稱是一正則擬 $2D$ 邊形。如果 Γ 對 $\partial(\ell, x) = D$

時，所有 ℓ 上的點 y 都滿足 $\partial(\ell, x) = \partial(y, x)$ ，則稱 Γ 是一正則擬 $2D + 1$ 邊形。[2] 中得到關於正則擬 $2D$ 邊形的重要結果： $D \leq 3$ 、 $a_1 = 0$ 、 $c_2 = 1$ 或 $c_3 = c_2^2 - c_2 + 1$ 。可惜[1, p206] 指出這結果的證明中，有一個小地方的討論是錯誤的。本計畫以解決上面問題為動機，並希望對正則擬 $2D + 1$ 邊形也能得到類似結果。

三、結果與討論

我們的結果並沒完全解決上述問題，但得到一個對更廣泛的正則擬多邊形也適用的不等式。當這個不等式等號成立時，我們可以完全決定這個圖。摹仿我們的方法，可能足以刻畫正則 $2D$ 邊形。根據 [1] 的 Proposition 4.4.6(i)，我們有以下稱為 Hoffman bound 的不等式：

$$\theta_D \geq -\frac{k}{a_1 + 1},$$

其中等號成立 若且唯若 Γ 是一正則擬 $2D$ 邊形。此處 θ_D 是 Γ 的最小的特徵值。由於這個結果與我們的結果的相似性，兩者如何結合互相利用，啟發一些想像空間，將來可往此方向再努力。

四、計劃成果自評

此計畫雖得到一具體結論，此結果也已被 European Journal of Combinatorics 接受，但對正則擬多邊形 Γ 的完全刻畫還有一些努力空間。

五、參考文獻

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989
- [2] A. E. Brouwer, H.A. Wilbrink, The structure of near polygons with quads, Geom. Dedicata 14:145-176, 1983