

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

智慧型運輸路網逐日動態性之理論分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2415-H-009-004-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：國立交通大學運輸科技與管理學系(所)

計畫主持人：卓訓榮

計畫參與人員：黃銘崇 林杜寰 藍健綸

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 12 月 6 日

目錄

一、中文摘要	1
二、英文摘要	2
三、前言	3
四、研究目的	4
五、文獻回顧	4
六、研究方法	5
七、研究成果與討論	11
八、自我評量	11
九、參考文獻	12

一、中文摘要

在智慧型運輸系統(Intelligent Transportation Systems, ITS)運作情境下，運輸資訊提供與用路人之間的互動行為是影響智慧型運輸系統能否發揮效能與效率的重要因素之一，因此，不論是實務上的交通營運管理分析或是學術上的理論性研究，如何描述與預測這個互動行為及其所對應產生的路網流量演變(evolution)便成爲一個很重要的課題。

本研究即是在智慧型運輸系統運作情境下，基於「追求最小旅行時間行為假設」，及過去研究中曾實際被觀察到通勤性用路人的「逐日學習與適應性的旅運決策行為假設(day-to-day learning and adaptive behavioral assumption)」，提出「路網流量逐日演變與運輸資訊提供的互動理論」，這個理論包含路徑流量演變(path flow dynamics)、預測最小旅行時間演變(predicted minimal travel time dynamics)與這兩者的互動關係。

「路徑流量演變理論」描述用路人在接收智慧型運輸系統提供充分的路徑資訊與預測最小旅行時間後，經由逐日學習與適應演變的行為假設，進而造成路徑流量的演變。「預測最小旅行時間演變」則說明智慧型運輸系統如何經由每日實際偵測的路徑流量，同樣以學習與適應的方式預測其每日的最小旅行時間。

此外，本研究以動態系統方法(dynamical system approach)構建這個理論的數學模式，由模式的穩態(steady state)分析發現，這個數學模式的均衡解(equilibrium solution)滿足 Wardrop 使用者均衡(user equilibrium)的原則。經由微分方程理論的基本定理(the fundamental theorem of differential equations)，本研究提出一個輔助定理(Lipschitz lemma)證明這個數學模式滿足微分方程的基本定理，進而確認其解的存在性與唯一性(existence and uniqueness)。本研究同時也應用 Lyapunov 穩定性定理(Lyapunov stability theorem)，證明這個數學模式的均衡解是漸進穩定的(asymptotic stable)。

關鍵詞：動態交通量指派、非均衡路網模式、Lyapunov 穩定性、動態系統、智慧型運輸系統

Abstract

The interaction between information provision and the corresponding response of users is an important feature to functionalize the effectiveness and efficiency of ITS operations. Therefore, the ability of predicting how the travel information predicted and provided by ITS influences the time trajectory of network flows is an essential issue both in the viewpoints of theoretical analysis and in that of traffic operational improvements.

This dissertation develops a new theory of day-to-day network dynamics capable of characterizing the inter-dependence between travel information provision and network evolution with the behavioral assumptions of minimal travel time seeking and daily learning and adaptive process under the scenario of ITS services. The structure of the proposed theory includes path flow dynamics, predicted minimal travel time dynamics, and their inter-relationships

Under the two behavioral assumptions mentioned above, the theory of path flow dynamics describes the mechanism of path flow evolution resulted from the provision of path information and predicted minimal travel time by ITS services. The theory of predicted minimal travel time specifies how the minimal travel time is predicted from the detected path volumes by ITS in a origin-destination pair standpoints.

In addition, the author constructs a mathematical model for the theory by using dynamical system approach. The steady state of the model satisfies the Wardrop's user equilibrium. The analysis of existence and uniqueness is also derived by the Lipschitz lemma and the fundamental theorem of differential equations. Finally, a strict Lyapunov function is established to give the asymptotic stability for the equilibrium solution of the proposed model in the sense of Lyapunov stable.

Key words: Dynamic traffic assignment, Non-equilibrium network modeling, Lyapunov stability, Dynamical system, Intelligent transportation systems.

三、前言

在先進旅行者資訊系統運作環境下，「用路人的決策行為」、「管理者的控制策略」、「路網所呈現的效能」與「運輸資訊」之間存在互動的關係，管理者藉由交控設施蒐集路況資料(Traffic Data)，並據以「分析路網效能、評估控制策略、預測路網狀態及提供預測性運輸資訊」，用路人則依所獲得的運輸資訊及旅運經驗進行旅運決策，新的流量型態(Flow Pattern)再次呈現於路網，形成一個互為因果的動態關係。提供運輸資訊讓管理者與用路人能作更好的決策，也是先進旅行者資訊系統據以改善交通的主要運作機制，這個整體性架構可表示如圖 1。本研究的主題係著重於運輸資訊提供影響用路人旅運決策，進而使路網流量產生變化的影響關係，它是各種動態應用模式的共同基礎，例如動態收費、路徑導引、交通控制，應用模式除了必須包含管理者應用策略之外，也必須包含本研究的模化主題，使應用模式能描述交控策略與路網效能之間的互動變化過程。

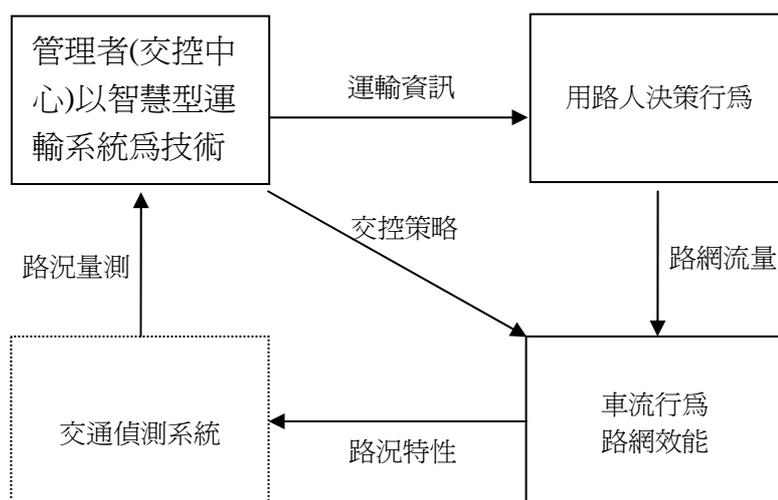


圖 1 在 ITS 運作環境中管理者、用路人與路網效能的互動架構示意圖

路網流量變化模式可依研究變數變化率的時間單位分為「每日(Day-to-day or Inter-day)變化模式」與「即時(Time-of-day or Intra-day)變化模式」，每日變化模式分析路網流量逐日變化的過程，適於作為 ITS 的規劃、評估及預測分析方法，即時變化模式若能輔以高速通訊傳輸技術則可應用於交通控制即時評估，或一般的離線(Off Line)評估及預測分析。

四、研究目的

本研究計畫的主要目的係提出「動態非均衡路網(Network Disequilibria Dynamics)」方法論構建「每日路網流量演變」模式，以改善傳統動態交通量指派方法僅能分析路網流量均衡狀態，並以解析方式證明解的存在性與唯一性，以及應用 Lyapunov 穩定性定理證明模式的均衡解釋漸進穩定的。

五、文獻回顧

本研究則以「每日路網流量演變」為主要課題，針對文獻中曾提出的「路徑流量變化率及預估旅行時間變化率」等觀念[Carey, 1980；Smith, 1984；Friesz et al.,1994]，應用「刺激-反應」函數發展更一般化的解析型方法論。有關動態路網流量變化的研究可分為解析型方法與模擬方法(Simulation-based Method)如[Astarita,1999；Chang et al.,1988；Hu et al.,1995、1997；Mahmassani et al.,1986、1990；Walting,1999b；Yang et al.,1996；Ziliaskopoulos et al.,1999]兩大類，解析型方法又可分為確定性模式(Deterministic)如[Friesz et al.,1994、1996；Smith, 1984]與隨機性模式(Stochastic)如[Ben-Akiva et al.,1991；Cascetta et al.,1991；Cantarella et al.,1995；Horowitz,1984；Walting,1999a]。模擬方法比較容易將較複雜的用路人決策行為納入分析，但對於模式的特性，如穩定性(Stability)等不易由基礎數學理論支持；而解析型方法僅能將主要的用路人決策行為合理簡化後據以構建模式，模式的性質可藉由基礎數學理論加以分析。還有另一部分研究著重於構建動態交通量指派(Dynamic Traffic Assignment)模式及其求解方法，如[Janson,1991；Merchant et al.,1978]求解滿足系統最適化(System Optimal，SO)模式；[Friesz et al.,1993]求解滿足動態使用者均衡(Dynamic User Equilibrium，DUE)模式；[Ran et al.,1993；Chen et al.,1998]求解滿足動態使用者最適化(Dynamic User Optimal，DUO)模式，此類研究可以求解滿足 SO/ DUE/ DUO 條件下的唯一解(Unique Solution)，其模式應用亦可求解在最適化交控策略下對均衡解的影響效果。相對的，路網流量演變模式則著重於分析路網流量隨時間的演變過程、均衡狀態及其穩定性，這類方法在構建模式時，並沒有設定必須滿足 SO/ DUE/ DUO 等條件，但經由均衡狀態解可以分析是否具備這些性質，顯然的路網流量演變模式可以提供更多的資訊(例如，路網流量隨時間的演變情形)予管理者，這也使其成為在智慧型運輸系統運作環境下，最重要的基礎分析方法之一。

六、研究方法

智慧型運輸系統(Intelligent Transportation Systems, ITS)可藉由提供交通資訊幫助用路人(Road Users)進行相關旅運決策，路網流量亦因而產生變化。本研究應用「動態非均衡路網(Network Disequilibria Dynamics)」的觀念，將先進旅行者資訊系統 (Advanced Traveler Information Systems, ATIS)經由提供預估旅行時間(Predicted Travel Time)予用路人，並影響其旅運決策，進而使路網流量產生變化的影響關係模式化，在時間維度上係分析每日的(Day-to-Day)變化性，例如每日尖峰時段(Peak Period)的私人通勤旅次。本研究的理論架構係以「用路人經由每日的旅運經驗，感受實際旅行時間與先進旅行者資訊系統所提供的預估旅行時間兩者的差異(刺激, Stimulus)，進而發生次日旅運決策是否改變(回應, Response)」為基礎，稱之為「刺激-反應」模式(Stimulus-Response Model)，反應項(Response Term)為「路徑流量(Path Flow) 的時間導數(Time Derivative)」，「實際旅行時間與先進旅行者資訊系統所提供的預估旅行時間的差異」為刺激項(Stimulus Term)，以及考量擁擠因素(Congestion Effects)的敏感度(Sensitivity)，共同組成用路人路徑流量的「刺激-反應」函數。本研究另一個主要研究變數為「預估旅行時間」，此為先進旅行者資訊系統提供用路人之運輸資訊，先進旅行者資訊系統在預測的機制中係以「實際發生的路徑流量與預測的旅次起迄需求(Origin-Destination Demand)的差異(刺激)」，作為「調整次日的預估旅行時間(反應)」之依據，因此，反應項為「ATIS 預估旅行時間」的時間導數，「實際發生的路徑流量與預測的旅次起迄需求的差異」為刺激項，以及適當的敏感度，組成先進旅行者資訊系統預估旅行時間的「刺激-反應」函數。提供預估旅行時間在於導引用路人在兼顧最少旅行時間的偏好下，使路網流量的分配能有一個共同的參考標準。

6.1 假設條件、變數定義與「刺激-反應」函數

本研究的主要假設條件在於「用路人的旅運決策行為」及「相關的函數性質」。首先，本研究以在 ITS 運作的環境下，具備私人運具的通勤性旅次為研究對象，用路人係以「每日」的實際旅運經驗及 ATIS 提供的運輸資訊作為旅運決策的評估依據，「實際旅運經驗」係指「實際的旅行時間(路徑旅行時間)」，其值則由所屬路段旅行成本函數(Link Cost Function)計算而得，「ATIS 提供的運輸資訊」則為 ATIS 所預測的「旅次起迄預估旅行時間」，ATIS 在預測「旅次起迄預估旅行時間」時係以實際的發生的路徑流量及預測的旅次起迄需求為影響因素，「實際的發生的路徑流量」即為用路人依「路徑流量變化率模式」之機制所產生

的路徑流量變數，「預測的旅次起迄需求」則由假設已知的各時區旅次起迄需求函數估計。

「相關的函數性質」的假設則有「路段旅行成本函數為該路段流量的平滑、單調函數(Smooth and Monotone Function)」，路徑旅行時間則由所屬路段旅行時間加總而得。在討論旅次起迄需求函數之前，必須先說明本研究雖以每日的變化為討論主題，意即每日尖峰時段的總計(Aggregate)變化為分析內容，但為了進一步分析尖峰時段內因出發時間移轉的影響效果，本研究將尖峰時段細分為若干個時區，所有的變數或變量均定義在「時區」上，所以「旅次起迄需求函數」係指在該時區內的旅次起迄需求，並假設其為「該時區該旅次起迄預估旅行時間」及「相鄰時區該旅次起迄預估旅行時間」的平滑、單調函數，此議隱含假設移轉效果只發生在相鄰時區，這個假設並不失其一般性也不難放鬆。限於篇幅，本段摘要說明主要的變數定義及其表示符號。

- t 時區的指標， $t = \{1, 2, \dots, \bar{t}\}$ ；
- t_d 每日的時間指標；
- w 旅次起迄的指標， $w = \{1, 2, \dots, \bar{W}\}$ ，所有旅次起迄對的集合為 W ， $|W| = \bar{W}$ ；
- p 路徑的指標， $p = \{1, 2, \dots, \bar{P}\}$ ，所有路徑的集合為 P ， $|P| = \bar{P}$ ；
- P_w 所有屬於旅次起迄 w 的路徑所形成的集合；
- $h_p^t(t_d)$ t 時區第 t_d 日路徑 p 的流量；
- $f_a^t(t_d)$ t 時區第 t_d 日路段 a 的流量， $f_a^t(t_d) = \sum_p \delta_{ap} h_p^t(t_d)$ ，路段 a 屬於路徑 p 則 $\delta_{ap} = 1$ 否則為 0；
- $c_a(\cdot)$ 路段 a 的成本函數，則在 t 時區第 t_d 日路段 a 的旅行時間為 $c_a^t(f_a^t(t_d))$ ；
- $\hat{c}_p^t(t_d)$ t 時區第 t_d 日路徑 p 的旅行時間， $\hat{c}_p^t(t_d) = \sum_a \delta_{ap} c_a^t(f_a^t(t_d))$ ；
- $\tilde{c}_w^t(t_d)$ ATIS 在 t 時區第 t_d 日旅次起迄 w 的預估旅行時間；
- $T_w^t(\cdot)$ t 時區旅次起迄 w 的需求函數；

「刺激-反應」函數係由刺激項、反應項及敏感度共同組成[Gazis et al., 1961; May, 1990]，其一般式如式 (1)，

$$\text{反應項} = \text{function}(\text{敏感度}, \text{刺激項}) \quad (1)$$

在本研究的「用路人的旅運決策行為」假設下，用路人因每日實際的旅運經驗，感受到「實際的旅行時間」與 ATIS 所預測的「旅次起迄預估旅行時間」之間的差異，此為刺激項之形成，並進而改變次日旅運決策，造成路網流量的變化，此為反應項。敏感度則用以描述用路人對刺激項的反應程度，例如在不同擁擠狀態下，用路人對刺激項的反應程度可能不同，本研究假設「用路人路徑決策的敏感度與擁擠狀態為正相關(Positive Correlated)」。ATIS 在預測「旅次起迄預估旅行時間」時，比較由每日交控設施所偵知的「實際發生路徑流量」及「預測

的旅次起迄需求」之間的差異，此為刺激項，隨而調整次日的「旅次起迄預估旅行時間」，此為反應項。至於對應的敏感度，本研究假設其隨時區不同而有不同的敏感度，在相同時區內敏感度為常數，此假設意味著「本研究認為尖、離峰的時區，其敏感度不同，接近尖峰時區的敏感度較大，反之則較小」。

經由以上的分析，本研究提出的兩種「刺激-反應」函數的一般式可以表示如式（2）與式（3），

$$\text{路徑流量變化} = \text{function}(\text{敏感度}, \text{實際旅行時間與預估旅行時間的差異}) \quad (2)$$

$$\text{預估旅行時間的變化} = \text{function}(\text{敏感度}, \text{實際路徑流量與預測需求的差異}) \quad (3)$$

6.2 路徑流量變化率模式

本節以式（2）之一般式構建每日路徑流量變化率模式，顯然的反應項與刺激項的時間延遲(Time Lag)為一日，所以在 t 時區第 t_d 日路徑 p 的路徑流量變化率可表示為 $dh_p^t(t_d)/dt_d$ ，此為本模式的反應項。對應的刺激項「實際旅行時間與預估旅行時間的差異」則可表示為 $\hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d)$ ，敏感度則必須將擁擠程度納入考量，本研究將敏感度表示為路徑流量的線性函數如式（4），

$$\text{敏感度} = \text{function}(\text{路徑流量}) = \alpha h_p^t(t_d) \quad (4)$$

則在 t 時區第 t_d 日路徑 p 的路徑流量變化率模式的一般式如式（5），

$$dh_p^t(t_d)/dt_d = \text{function}(\alpha h_p^t(t_d), \hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d)) \quad (5)$$

當 $\hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d) > 0$ 時表示路徑 p 在 t 時區第 t_d 日的實際旅行時間大於預估旅行時間，本研究假設用路人將會改變旅運決策，因此，路徑 p 在 t 時區第 t_d+1 日的流量會減少，意即變化率為負值，反之流量將增加，變化率為正值。藉由此假設之分析，式（5） $dh_p^t(t_d)/dt_d$ 與 $\hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d)$ 的函數關係為負相關，意即刺激項經由敏感度的轉換後，應對反應項產生負向的影響效果，因此敏感度參數 α 應為負值，且敏感度的意義為「當刺激項發生單位變化量時，反應項因而所產生的變化量」，未利於後續分析內容之表達，本研究對於 t 時區第 t_d 日路徑 p 的路徑流量變化率模式表示如式（6），

$$\frac{dh_p^t(t_d)}{dt_d} = \alpha h_p^t(t_d) \times (\hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d)) \quad (6)$$

其中，

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\sup_{\forall w, p \in P_w, t, t_d} |\hat{c}_p^t(t_d) - \tilde{c}_w^t(t_d)|} \quad (7)$$

不等式 (7) 可維持 $h_p^t(t_d)$ 的非負性，然而若參數 α 經由實際資料校估，因實際現象不會產生負流量，則其值必然會滿足不等式 (7)。

6.3 ATIS 預估旅行時間變化率模式

本節以式 (3) 之一般式構建 ATIS 預估旅行時間變化率模式，同樣的反應項與刺激項的時間延遲為一日，則在 t 時區第 t_d 日旅次起迄 w 的預估旅行時間變化率可表示為 $d\tilde{c}_w^t(t_d)/dt_d$ ，此為反應項。對應的刺激項「實際發生的路徑流量與預測的旅次起迄需求之間的差異」則可表示為 $T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d)$ ，其中 $T_w^t(t_d)$ 為在 t 時區第 t_d 日旅次起迄對 w 的預測需求，此需求可表示為「該時區旅次起迄 w 預估旅行時間」及「相鄰時區旅次起迄 w 預估旅行時間」的平滑、單調函數，本研究假設為線性函數如式 (8)

$$T_w^t(t_d) = D_w^t + \theta_w^t \tilde{c}_w^t(t_d) + \sum_{t'} \theta_w^{t'} \tilde{c}_w^{t'}(t_d) \quad (8)$$

敏感度必須隨時區不同而改變，在相同時區內敏感度則為常數，本研究將此敏感度表示如式 (9)

$$\text{敏感度} = \beta^t \quad (9)$$

則在 t 時區第 t_d 日旅次起迄 w 的預估旅行時間模式的一般式如式 (10)，

$$\frac{d\tilde{c}_w^t(t_d)}{dt_d} = \text{function}\left(\beta^t, T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d)\right) \quad (10)$$

當 $T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d) > 0$ 時表示旅次起迄 w 在 t 時區第 t_d 日 ATIS 預測的旅次起迄需求大於實際發生的路徑流量，此為產生超額需求 (Excess Demand，如 [Carey, 1980 ; Friesz et al., 1994])，表示旅運需求尚未完全顯示於實際的路網流量，因此，ATIS 預測實際的路網流量將會增加，致使旅次起迄 w 在 t 時區第 t_d+1 日的預估旅行時間會增加，意即變化率為正值，反之預估旅行時間將減小，變化率為負值。經此分析，式 (10) $d\tilde{c}_w^t(t_d)/dt_d$ 與 $T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d)$ 的函數關係為正相關，意即刺激項經由敏感度的轉換後，應對反應項產生正向的影響效果，因此

敏感度參數 β^t 應為正值，則在 t 時區第 t_d 日旅次起迄 w 的 ATIS 預估旅行時間變化率模式可如式 (11)，

$$\frac{d\tilde{c}_w^t(t_d)}{dt_d} = \beta^t \times \left(T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d) \right) \quad (11)$$

其中，

$$0 < \beta^t \leq \frac{1}{\sup_{\forall w, t, t_d} \left| T_w^t(t_d) - \sum_{p \in P_w} h_p^t(t_d) \right|} \quad (12)$$

不等式 (12) 可維持 $\tilde{c}_w^t(t_d)$ 的非負性。

6.4 「刺激-反應」模式的均衡狀態分析

在進入均衡狀態分析之前，首先以本研究的符號及變數說明 Wardrop's 使用者均衡，其意義係指當路網流量達到「沒有使用者能因改變路徑，而使旅行時間減少」之狀態[Wardrop,1952]，以本研究的符號變數(省略每日之時間指標， td)可表示如式 (13) 與式 (14)，

$$\begin{cases} \bar{h}_p^t > 0 \rightarrow \hat{c}_p^t = \bar{c}_w^t \\ \hat{c}_p^t > \bar{c}_w^t \rightarrow \bar{h}_p^t = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$T_w^t = \sum_{p \in P_w} h_p^t \quad (14)$$

式 (13) 與式 (14) 必須在所有時區、在同一旅次起迄的所有路徑都同時成立。其中， \bar{h}_p^t 與 \bar{c}_w^t 分別表示均衡狀態下在時區 t 旅次起迄 w 中的路徑 p 的流量及旅次起迄 w 的旅行時間。

動態系統的均衡狀態意謂著變化率等於零，因此路徑流量變化率模式及 ATIS 預估旅行時間變化率模式的均衡狀態，可由式 (6) 與式 (11) 等於零的情況下，分別得到式(15)至式(17)之關係式，

$$h_p^t > 0 \rightarrow \hat{c}_p^t = \tilde{c}_w^t \quad \text{或} \quad h_p^t < 0 \rightarrow \hat{c}_p^t = \tilde{c}_w^t \quad (15)$$

$$\hat{c}_p^t > \tilde{c}_w^t \rightarrow h_p^t = 0 \quad \text{或} \quad \hat{c}_p^t < \tilde{c}_w^t \rightarrow h_p^t = 0 \quad (16)$$

$$T_w^t = \sum_{p \in P_w} h_p^t \quad (17)$$

其中，模式有非負流量的限制機制，所以不會產生式(15)的第二種情況，式(16)的第二種情況與模式假設用路人偏好旅行時間較短路徑之機制矛盾，因此，由式(15)與式(16)的第一種情況，可知本研究所提出的「刺激-反應」模式，其均

衡狀態滿足 Wardrop's 使用者均衡。

6.5 Lyapunov 穩定性定理

在敘述 Lyapunov 的穩定性定理之前，首先說明 Lyapunov Function 之定義，

定義. [Alligood et al., 1997] 令 \bar{v} 是某動態系統的均衡狀態，當某函數 $L: R^n \rightarrow R$ 在 \bar{v} 的鄰域 N_e (Neighborhood) 滿足條件(a)、(b)，則稱函數 $L: R^n \rightarrow R$ 為 \bar{v} 的 Lyapunov function。

$$(a) L(\bar{v})=0 \text{ 且 } L(v)>0 \quad \forall v \neq \bar{v} \in N_e.$$

$$(b) \dot{L}(v) \leq 0 \quad \forall v \in N_e.$$

若某函數 $L: R^n \rightarrow R$ 滿足條件(c)，則稱函數 $L: R^n \rightarrow R$ 為 \bar{v} 的 Strict Lyapunov function。

$$(c) \dot{L}(v) < 0 \quad \forall v \neq \bar{v} \in N_e.$$

依據 Lyapunov 的穩定性定理，(定理之證明可參考 Hirsch et al., 1974 或 Perko,1996)，

定理. [Alligood et al., 1997] 令 \bar{v} 是 $\dot{v} = f(v)$ 的均衡狀態，若存在一個 \bar{v} 的 Lyapunov Function，則 \bar{v} 是穩定的(Stable)。若存在一個 \bar{v} 的 Strict Lyapunov Function，則 \bar{v} 是漸進穩定的(Asymptotically Stable)。

我們不難理解「若以 Lyapunov 穩定性定理證明某一動態系統穩定性的基本邏輯為，先找到可能的函數 L ，再證明函數 L 在均衡狀態的鄰域內滿足 Lyapunov Function 之定義」。依據上述定理，本研究提出「刺激-反應」模式(6)與(11)之穩定性定理，如下述定理。

定理. 令 $(\bar{h}, \bar{c}) = (\bar{h}_1^1, \bar{h}_2^1, \dots, \bar{h}_p^1, \bar{c}_1^1, \bar{c}_2^1, \dots, \bar{c}_w^1, \dots, \bar{h}_1^i, \bar{h}_2^i, \dots, \bar{h}_p^i, \bar{c}_1^i, \bar{c}_2^i, \dots, \bar{c}_w^i)$ 是動態系統(6)與(11)的均衡狀態，則 (\bar{h}, \bar{c}) 是漸進穩定的。

6.6 模式解的存在性與唯一性

應用微分方程式基本定理(Fundamental Theory of Differential Equations)可以證明本研究所構建模式解的存在性與唯一性，其關鍵在於找到模式變化率場的 Lipschitz 常數[Hirsch et al., 1974 或 Perko,1996]。

七、研究成果與討論

本研究之具體成果有下列 2 點：

1. 以「動態非均衡路網(Network Disequilibria Dynamics)」方法論構建「每日路網流量演變」模式。
2. 以解析方式證明模式解的存在性與唯一性(限於篇幅詳細證明請參考文獻 Cho and Hwang, 2004a, 2004b; Hwang 2004)，並應用 Lyapunov 穩定性定理證明均衡解的穩定性(限於篇幅詳細證明請參考文獻 Cho and Hwang, 2004a, 2004b; Hwang 2004)。

本研究所構建之模式具有以下之擴充性：

1. 路徑流量變化率模式可考量其他行為模式，例如：具門檻效應之決策行為，在此行為架設下模式解的解析性質是否還存在，均衡解的意義為何？是否仍具有穩定性？這些討論應是後續非常值得繼續進行的研究課題。
2. 本研究係以連續型動態系統構建模式，後續研究應可以離散型(discrete-time)動態系統建模式，並進行解的解析分析。

八、自我評量

本研究成果(Cho and Hwang, 2004a, 2004b)發表於國際數學性期刊(Mathematical and Computer Modelling)與智慧型運輸系統期刊(IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems)，此兩個期刊均為 SCI 期刊，因此，可視為本研究計畫成果得到國際學術研究領域的初步肯定。

九、參考文獻

- Alligood, K. T., Sauser, T. D., and Yorke, J. A., *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- Astarita, V., Adamo, V., Cantarella, G. E., and Cascetta, E., "A Doubly Dynamic Traffic Assignment Model for Planning Applications," in: A. Ceder, ed., *Proc. of 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp.373-386, 1999.
- Ben-Akiva, M., de Palma, A., and Kaysi, I., "Dynamic network models and driver information systems," *Transportation Research Part A*, Vol. 25, pp.251-266, 1991.
- Chang, G. L. and Mahmassani, H. S., "Travel time prediction and departure time adjustment behavior dynamics in a congested traffic system," *Transportation Research Part B*, Vol. 22, pp.217-232, 1988.
- Chen, H. K. and Hsueh, C. F., "A model and an algorithm for the dynamic user-optimal route choice problem," *Transportation Research Part B*, Vol. 32, pp.219-234, 1998.
- Cho, H.-J. and Hwang, M.-C., "Day-to-day vehicular flow dynamics in intelligent transportation network", *Mathematical and Computer Modelling* (Accepted), 2004a.
- Cho, H.-J. and Hwang, M.-C., "A stimulus-response model of day-to-day network dynamics", *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* (Accepted), 2004b.
- Carey, M., "Stability of competitive regional trade with monotone demand/supply functions," *Journal of Regional Science*, Vol. 20, pp.489-501, 1980.
- Cascetta, E. and Cantarella, G. E., "A day-to-day and within day dynamic stochastic assignment model," *Transportation Research Part A*, Vol. 25, pp.277-291, 1991.
- Cantarella, G. E. and Cascetta, E., "Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory," *Transportation Science*, Vol. 29, pp.305-329, 1995.
- Friesz, T. L., Bernstein, D., Smith, T. E., Tobin, R. L., and Wie, B. W., "A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem," *Operations Research*, Vol. 41, pp.179-191, 1993.
- Friesz, T. L., Bernstein, D., Mehta, N. J., Tobin, R. L., and Ganjalizadeh, S., "Day-to-day dynamic network disequilibria and idealized traveler information systems," *Operations Research*, Vol. 42, pp.1120-1136, 1994.
- Friesz, T. L., Bernstein, D., and Stough, R., "Dynamic systems, variational inequalities and control theoretic models for predicting time-varying urban network flows," *Transportation Science*, Vol. 30, pp.14-31, 1996.
- Gazis, D. C., Herman, R., and Rothery, W. R., "Nonlinear Follow-the-Leader Models of Traffic Flow," *Operations Research*, Vol. 9, pp.545-567, 1961.
- Hwang, M.-C., "Day-to-day Network Flow Evolution under Intelligent Transportation Systems," Ph. D. dissertation, National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan, Republic of China, April 2004.
- Hu, T. Y. and Mahmassani, H. S., "Evolution of Network Flows under Real-Time Information: A Day-to-Day Dynamic Simulation-Assignment Framework," *Transport. Research Record* 1493, pp.46-56, 1995.
- Hu, T. Y. and Mahmassani, H. S., "Evolution of Network Flows Under Real-Time Information and Responsive Signal Control Systems," *Transportation Research Part C*, Vol. 5, pp.51-69, 1997.
- Horowitz, J. L., "The stability of stochastic equilibrium in a two link transportation network," *Transportation Research Part C*, Vol. 18, pp.13-28, 1984.
- Hirsch, M. W. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- Janson, B. N., "Dynamic traffic assignment for urban road networks," *Transportation Research Part B*, Vol. 25, pp.143-161, 1991.
- May, A. D., *Traffic Flow Fundamentals*, Prentice-Hall, 1990.
- Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L., "A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems," *Transportation Science*, Vol. 12, pp.183-199, 1978.
- Mahmassani, H. S., Chang, G. L., and Herman, R., "Individual decisions and collective effects in a

- simulated traffic system," *Transportation Science*, Vol. 20, pp.258-271, 1986.
- Mahmassani, H. S., "Dynamic models of commuter behavior : experimental investigation and application to the analysis of planned traffic disruptions," *Transportation Research Part A*, Vol. 24, pp.465-484, 1990.
- Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1996.
- Ran, B., Boyce, D., and LeBlanc, L., "Toward a new class of instantaneous dynamic user-optimal traffic assignment models," *Operations Research*, Vol. 41, pp.192-202, 1993.
- Smith, M.J., "The stability of a dynamic model of traffic assignment - an application of a method of Lyapunov," *Transportation Science*, Vol. 18, pp.245-252, 1984.
- Watling, D., "Stability of the stochastic equilibrium assignment problem : a dynamical systems approach," *Transportation Research Part B*, Vol. 33, pp.281-312, 1999a.
- Watling, D., "A stochastic process model of day-to-day traffic assignment and information," in: Emmerink, R. and Nijkamp, P. ed., *Behavioural and Network Impacts of Driver Information Systems*, Ashgate Publishing Ltd., pp.115-139, 1999b.
- Wardrop, J. G., "Some theoretical aspects of road traffic research," *Proceedings of the Institute of Civil Engineers Part II*, pp.325-378, 1952.
- Yang, Q. and Koutsopoulos, H. N., "A microscopic traffic simulator for evaluation of dynamic traffic management systems," *Transportation Research Part C*, Vol. 4, pp.113-129, 1996.
- Ziliaskopoulos, A. K. and Rao, L., "A simultaneous route and departure time choice equilibrium model on dynamic networks," *International Transactions in Operational Research*, Vol. 6, pp.21-37, 1999.