

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 時間域邊界元素法於二維多層次暫態波傳分析研究(II)

### Time domain BEM for two-dimensional multi-region problems of transient wave propagation (II)

計畫編號：NSC 89-2211-E-009-071

執行期限：89年8月1日至90年7月31日

主持人：劉俊秀 交通大學土木研究所

#### 一、中文摘要

本文旨在探討當分別改變剪力模數、包松比、 $\beta$ 值與領域形狀時，二維多層次時間域邊界元素法求解位移值和曳引力值的效率與精度。後續並針對本系列計畫一開始所定義的重要參數  $\beta$ ，作更進一步的瞭解。此部分乃藉由求解內部點之位移值和應力值所得到的結果，探討當  $\beta$  值及二維領域形狀改變時，對其解的精確度與穩定度之影響。

透過文中所舉的例子，我們得知改變由兩塊不同剪力模數、包松比所組成的非均質多層次領域，其位移與曳引力可由本文之方法來預測。另外，當內部點所在的位置不同時，其數值解精確度的情形；以及當領域形狀改變時，其數值解發散快慢的情形，皆可由  $\beta$  值大小來評估。此也意味以時間域邊界元素法求解彈動力問題時，並非單單增加元素數目即可得到較佳的數值結果。

**關鍵詞：**時間域邊界素法、非均質多層次、 $\beta$  值

#### Abstract

In this paper, we will present the numerical results, which are displacement and traction on boundary nodes, solving by 2-D time-domain multi-region BEM (Boundary Element Method) by changing shear modulus and Poisson's ratio

respectively. Also, we will investigate the important parameter  $\beta$  thoroughly. From the computed internal displacements and stresses at different internal locations and for two kinds of domain shapes, one will find the  $\beta$ -values and domain shapes are two important factors influencing the accuracy and stability of the BEM results.

Through various examples, the method presented in this paper could be used to predict displacement and traction in two-region nonhomogenous domain subjected to ramp-step loads. And, when the location of internal point changes or when the shape of domain differs, the accuracy and stability of these numerical results could be assessed by different  $\beta$ -values. This means that just simply increasing the numbers of elements may not give good results.

**Key words:** time-domain BEM, multi-region,  $\beta$ -value

#### 二、目的

本研究之目的為更進一步瞭解重要參數  $\beta$  值在二維時間域邊界元素法求解彈動力問題的過程中，對精確度與穩定度所產生的影響，並找出其適用之範圍。而透過次結構觀念，並引進力平衡與位移諧和於交界面上的關係，則可推導得用來計算多層次領域問題的時間域邊界方程式，如此一來即可針對由不同材料性質所組成的多層次領域作位移和曳引力的分析預測。吾人已藉由波傳的力學現象，證知本方法

(本文以 LC 方法為例)之數值結果令人滿意(詳見上年度之計畫)。而其應用,將於本文中透過分別改變材料的剪力模數和包松比來逐一探討之。

關於參數  $\beta$  : (1)其涉及內部點應力值和位移值之精確度;(2)對不同形狀之領域情形求解時,亦會造成數值發散快慢的不一;(3)當吾人作分析時,時階  $t$  之大小和元素數目  $N$ (亦即元素長度)的選取也與  $\beta$  有關。在本研究中對於內部點於領域中的位置不同時與之對應的  $\beta$  值大小應為何之兩者間關係有深入的探討。另外,也以梁尺寸分別為  $10 \times 10$  和  $10 \times 1$  的領域受一斜坡動力載重為例,對數值解發散快慢的情形作一剖析。由誤差百分比結果觀之,本研究將建議  $\beta$  值的使用範圍,換言之,若所選取的  $\beta$  在本研究建議的範圍內時,其位移、曳引力或內應力的數值結果將令吾人滿意。故找出  $\beta$  適用之範圍是本系列計畫最重要的目的之一。

### 三、結果與討論

首先,我們先建立分析的模型:一矩形桿件,如圖 1 所示,長與高的比值  $L/h=10$ ,左端為固定端,右端為自由端,固定端中間視為簡支承(Hinge),上下兩端為滾支承(Roller),且假設矩形桿上下表面為自由表面,如圖 2 所示。我們將矩形桿件切割成 13 個二次邊界元素,其中兩端各用一個元素,上下各 5 個元素,交界面用一個元素,如圖 3 所示,然後於右端施加一均勻斜坡載重,如圖 4 所示。我們將作如下的分析:

#### (1) 改變剪力模數 $G$ :

根據這樣一個矩形桿件,我們以左、右二塊為同一材質,剪力模數  $G$  為  $3.9\text{Pa}$ ,質量密度  $\rho$  為  $0.00078 \text{ kg/m}^3$ ,包松比  $\nu$  為  $0$ ,為一基準。接著改變靠近固定端那塊之材料,將剪力模數  $G$  放大為兩倍、五倍、

十倍,分別對圖 3 中之點號 3、5、11 的  $X$  方向位移進行分析比較。而曳引力之分析則取交界面上之一點點號 25,及固定端上之一點點號 24 做探討。

#### (2) 改變包松比 $\nu$ :

我們依舊以這樣一個矩形桿件,左、右二塊為同一材質,剪力模數  $G$  為  $3.9\text{Pa}$ ,質量密度  $\rho$  為  $0.00078 \text{ kg/m}^3$ ,包松比  $\nu$  為  $0$ ,為一基準。再來改變靠近自由端那塊之材料,將包松比  $\nu$  改為  $0.1$ 、 $0.2$ 、 $0.3$ ,分別對圖 3 中之點號 3、5、11 的  $X$  方向位移進行分析比較。而曳引力之分析則取交界面上之一點點號 25,及固定端上之一點點號 24 做探討。因包松比  $\nu$  會影響  $Y$  方向位移,故我們選定點號 11 之  $Y$  方向位移來探討其影響性。

分析過程中,參數  $\beta$  定義如下:

$$s = \frac{c_1 \Delta t}{\beta}$$
 , 因為我們探討兩塊不同材質,所以壓力波速  $C_1$  不同,因此我們選用壓力波速  $C_1$  較小的值,代入參數  $s$  之公式中。在此則採用  $s=0.67$ 。

在改變剪力模數  $G$  方面, $G$  值越大,由  $E = 2G(1 + \nu)$  可知楊式模數  $E$  也相對變大,材質相對較剛硬,故  $X$  方向位移隨著  $G$  值增大而減小。另一方面, $G$  值亦影響壓力波速  $C_1$ ,因我們這例子選用包松比  $\nu$  為  $0$ ,所以壓力波速隨著  $G$  值做開方的變化,故當  $G$  值增大,壓力波速變快,造成波的週期變短,我們可由圖中明顯的看到此現象。再者,同樣  $G$  值增為原來兩倍,即圖中表示  $G1-1$  變化為  $G2-1$ ,與  $G5-1$  變化為  $G10-1$ ,兩組做比較,由圖 5~7 可以看出, $G1-1$  變化為  $G2-1$  這組位移減少量大於  $G5-1$  變化為  $G10-1$  這組數據,且週期變短的幅度亦比較大,由此現象的發現,我們可以說當  $G$  值增大到一定比例後,位移與週期的變化量即不再有明顯的變化。

圖 8 為改變  $G$ ,第 24 點、25 點之  $X$  方向曳引力比較圖,我們知道曳引力的範圍為  $0 \sim -2$ ,但在圖中我們發現  $G5-1$  與  $G10-1$  這兩組的數值已經超出此範圍,屬

於不合理的現象，推究其原因，我們發現我們所定義之  $s$  值在改變靠固定端那塊的  $G$  值時，雖然靠自由端那塊的  $s$  值為 0.67，但我們可推算得當  $G$  值變為原來的 5 倍、10 倍時， $s$  值已隨著增大。圖 9 中超出 0-2 範圍的數值明顯比點號 24 的圖 8 少，其原因為在求解時先求出交界面上點之值，再求出邊界上點之數值，所以在數值上累計的誤差較少。

對於改變靠自由端那塊的包松比  $\nu$ ，將包松比  $\nu$  原來為 0 改變為 0.1、0.2、0.3 的例子中，有關點號 3、5、11 的  $X$  方向位移，我們發現在  $s=0.67$  時，如圖 10-12 所示，改變  $\nu$  值同樣的影響楊式模數  $E$  與壓力波速  $C_1$ ，但由其二公式，如下所示：

$$E = 2G(1 + \epsilon) \quad \text{及} \quad C_1 = \sqrt{\frac{J + 2G}{\dots}}$$

我們可以得知，包松比  $\nu$  對楊式模數  $E$  與壓力波速  $C_1$  的影響較剪力模數  $G$  的影響來的小，故改變包松比  $\nu$ ，不論在位移變化量上或是週期減少的幅度上都來的較小。而  $\nu$  值的改變，因為是改變靠自由端那塊的性質，因此對點號 11 在位移上的變化比點號 3、5 來的明顯，但改變包松比  $\nu$ ，在  $X$  方向位移的變化上，較有一比例存在，而不似  $G$  值改變，當  $G$  值改變到一個比例後， $X$  方向位移的變化即不易明顯看出。

改變包松比  $\nu$ ， $Y$  方向會有位移產生，但  $\nu=0$  時依理論而言，不該有  $Y$  方向位移產生，由圖 13 所示， $\nu=0$  時位移介於 +0.005 -0.005 之間，其值皆相當小，我們可將之視為數值計算所產生的誤差。而隨著包松比  $\nu$  之增加， $Y$  方向位移也隨之增加。對於改變包松比  $\nu$  對曳引力產生的影響，其比較如圖 14 與圖 15 所示，由圖 14 我們可以看出，在尖峰值容易產生不準的現象，但其波形的趨勢與  $\nu=0$  相似。

簡單歸納出幾點結論如下：

- (1) 由結果我們可以知道，改變剪力模數  $G$  比改變包松比  $\nu$ ，對  $X$  方向位移的影響來的大，且在影響週期方面也較

大。而隨著  $G$  值或  $\nu$  值的變大， $X$  方向位移隨著減少，週期亦隨著變小。

- (2) 改變剪力模數  $G$ ，當  $G$  增大到一定倍數比例後， $X$  方向位移就不會有明顯的變化。而改變包松比  $\nu$ ，對於  $X$  方向位移，隨著包松比  $\nu$  之增加，其位移會呈一比例關係減少。
- (3) 在探討剪力模數  $G$  與包松比  $\nu$  之比較同時，要注意兩塊之  $s$  值最好能皆落於 0.5-0.75 之間，獲得之數值解較精確，但當兩塊性質差異太大時，易產生數值上的誤差。

接著我們將更進一步探討  $\beta$  適用的範圍為何？在上例中，我們觀察到數值誤差有隨時間增加的現象（位移尖峰值逐段降低），此誤差所造成 numerical damping 的現象原因可能是  $\Delta t$  過大之故（倘若  $\Delta t$  固定）。我們建立一 10 x 10 的梁，並切割成 20 和 40 個二次元素，如圖 16、17 所示，並同樣於右端施加一斜坡載重，如圖 18 所示。由於我們也將探討除了  $\beta$  外，另一影響數值發散快慢的形狀因素，所以我們再次把圖 1 的模型切成 22 和 44 個元素，如圖 19、20 所示。

我們將對圖 16 領域內不同內部點作  $\beta=0.05$  和 0.5 的分析，從圖 21 所示，除了  $x=9.9$  時數值會惡化外，其餘  $x=9.5, 9.7, 9.8, 10$ （亦即邊界點）時數值皆優越、準確。又從圖 22 所示， $x=5, 6, 7, 8$  時數值亦非常良好，但在  $x=8.9, 9$  時，精確度變壞。透過其它一連串  $\beta$  於 0.05 到 0.5 之間的分析，我們得知：若內部點位於靠近邊界的距離小於  $\frac{3}{2}s$  時，精確度將

會變差。故若吾人選擇較小的  $\beta$  值與使用較多的元素（亦即元素長度變小），將可非常準確地預測所有的內部點位移或應力，如圖 21、23、24 所示。然而，選取較小的  $\beta$  值，對於圖 1 的領域而言，不管是切成如圖 19、20 所示那般，卻都會造成數值提早發散，如圖 25、26 所示，而這樣的情形在對圖 16 和 17 的領域作分析時是看不到的。因此我們得知：較小的  $\beta$  將較快

造成數值發散，其原因可能是時階過多之故因而使誤差變大，除此，領域形狀的不同也會影響發散之快慢。最後，我們由圖 27 來看 numerical damping 的現象，從圖中，我們得知較大的 $\beta$ 會有此情形。

故我們認為  $\beta$  值可取介於 0.05 或更小值到 0.5 之間來計算內部值或多層次領域的問題；先前計畫建議的 0.5 到 0.75 同樣可用來計算邊界值，以求數值的精確跟穩定。

#### 四、計畫成果自評

本計畫除了獲得重要之成果外，參與研究人員亦獲得寶貴之訓練。值得在未來對於相關之領域作更深入的發展。

#### 五、參考文獻

1. G.D.Manolis and D.E.Beskos (1988), "Boundary Element Methods in Elastodynamics", Unwin-Hyman, London.
2. W.J.Mansur, "A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method", Ph.D.Thesis, Southampton University, 1983.
3. J.D.ACHENBACH (1980), "Wave Propagation in Elastic Solids", The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Illinois.
4. 王忠成, "推導高階時間域邊界元素法求解二維暫態應力波", 國立交通大學土木工程研究所博士論文, 1996.
5. 賴進益, "二維時間域邊界元素法：內應力之求解與元素切割方式之探討", 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 1998.
6. P. K. Banerjee, "Boundary element methods in engineering", McGraw-Hill, New York, 1994.
7. J. H. Kane, "Boundary element analysis in engineering continuum mechanics", Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1994.
8. A. S. M. Israil and P. K. Banerjee, "Two-dimensional transient wave propagation problems by time-domain BEM", International Journal of Solids and Structures, Vol.26, pp851-864, 1990.

9. C. C. Spyarakos and H. Antes, "Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: a comparative study", Comput. Struct., Vol.24, pp529-535, 1986.
10. A. S. M. Israil and P. K. Banerjee, "Advanced time-domain formulation of BEM for two-dimensional transient elastodynamics", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.29, pp1421-1440, 1990.
11. A. S. M. Israil and P. K. Banerjee, "Interior stress calculations in 2-D time-domain transient BEM analysis", International Journal of Solids and Structures, Vol.27, pp915-927, 1991.
12. C. Wang and H. Takemiya, "Analytical elements of time domain BEM for two-dimensional scalar wave problems", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.33, pp737-1754, 1992.
13. C. C. Wang, H. C. Wang and G. S. Liou. "Quadratic time domain BEM formulation for 2D elastodynamic transient analysis", International Journal of Solids and Structures, Vol.34, pp129-151, 1997.
14. C. C. Wang, H. C. Wang and G. S. Liou, "Two-dimensional elastodynamic transient analysis by QL time domain BEM formulation", International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.39, pp951-985, 1996.

#### 六、附圖：

附圖 1~27 示於以下幾頁中。

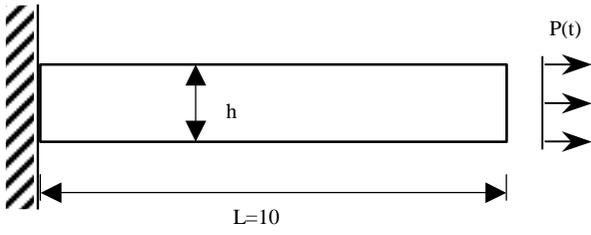


圖 1 一長 L 高 h 之矩形桿自由端受一動力 P(t)

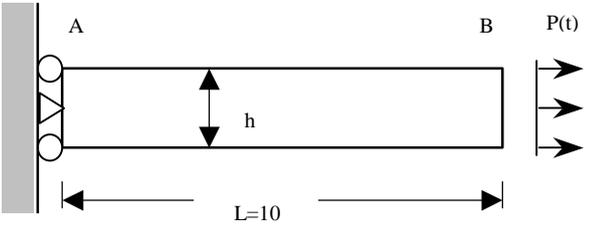


圖 2 矩形桿之固定端簡化後之模式

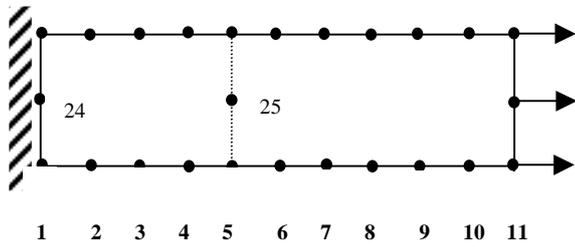


圖 3 一矩形桿切割成 13 個元素之示意圖與點號標示

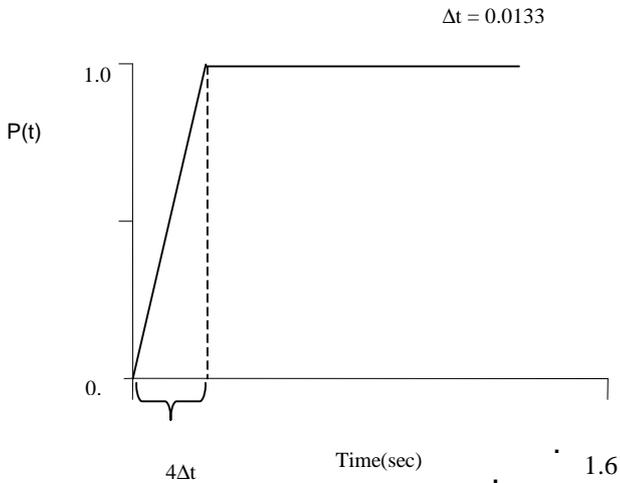


圖 4 一均勻之斜坡載重 (Load1) , P(t) 之形式

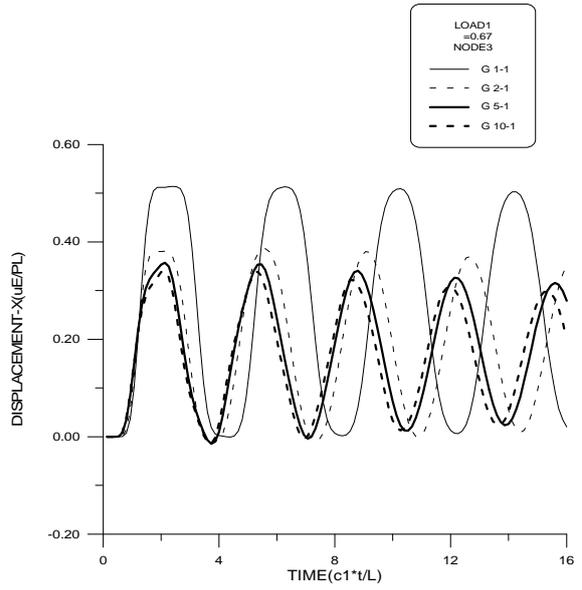


圖 5 改變 G, 第 3 點(0.2L)之 x 方向位移比較圖

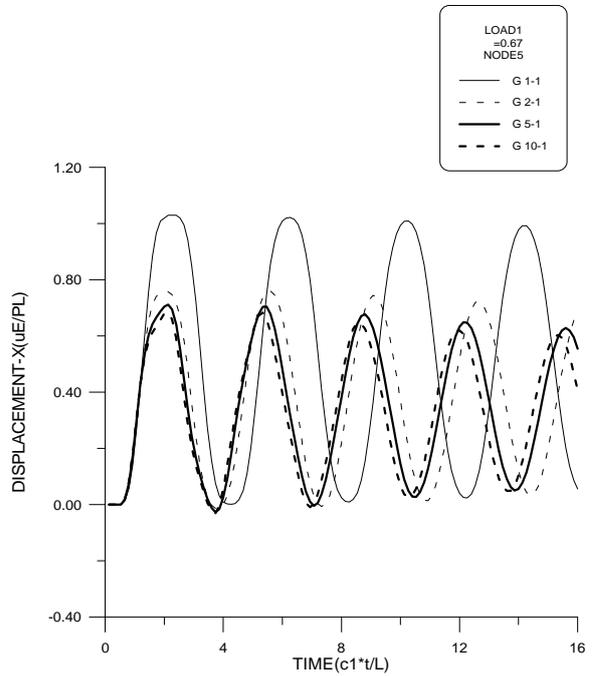


圖 6 改變 G, 第 5 點(0.4L)之 x 方向位移比較圖

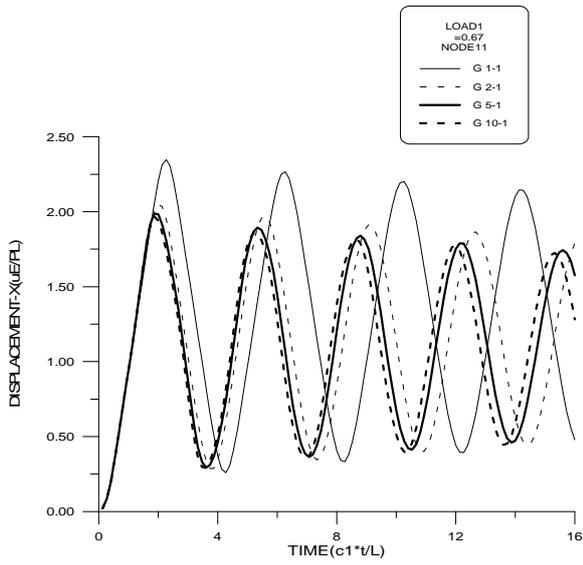


圖 7 改變 G，第 11 點(1.0L)之 x 方向位移比較圖

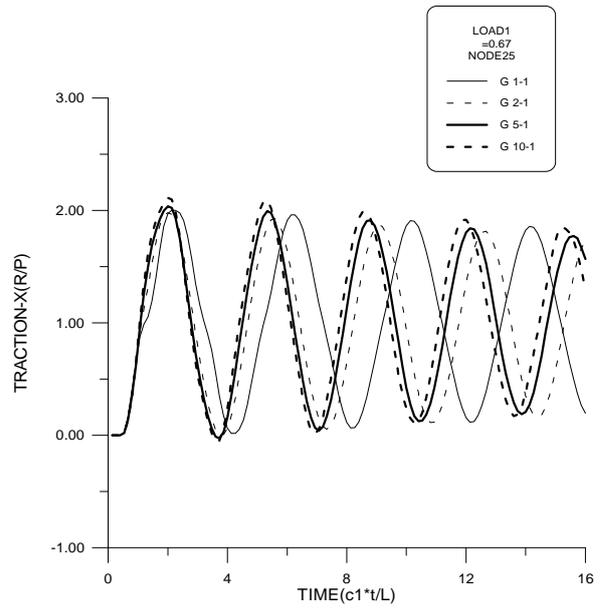


圖 9 改變 G，第 25 點(交界面中點)之 x 方向曳引力比較圖

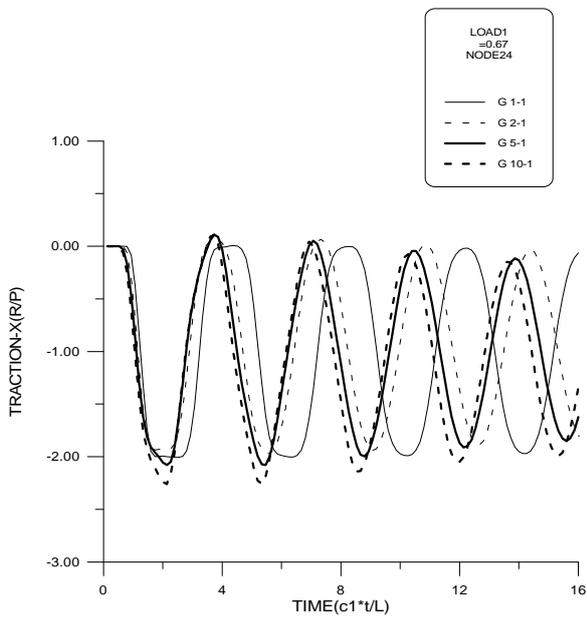


圖 8 改變 G，第 24 點(固端中點)之 x 方向曳引力比較圖

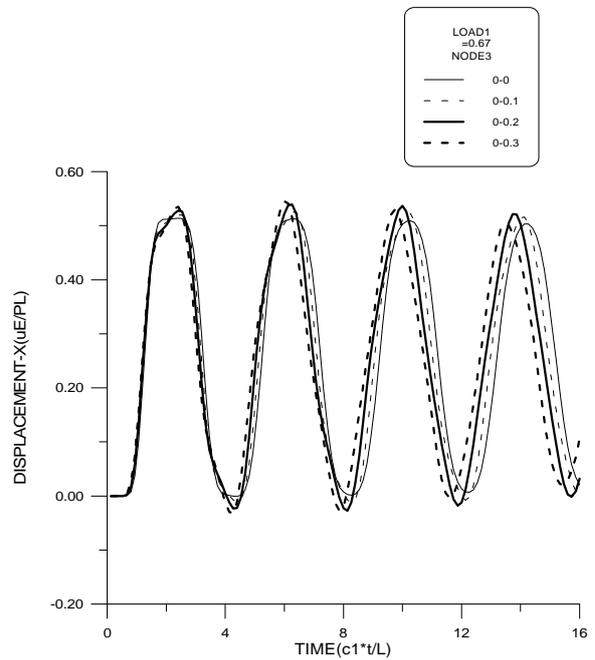


圖 10 改變 G，第 3 點(0.2L)之 x 方向位移比較圖

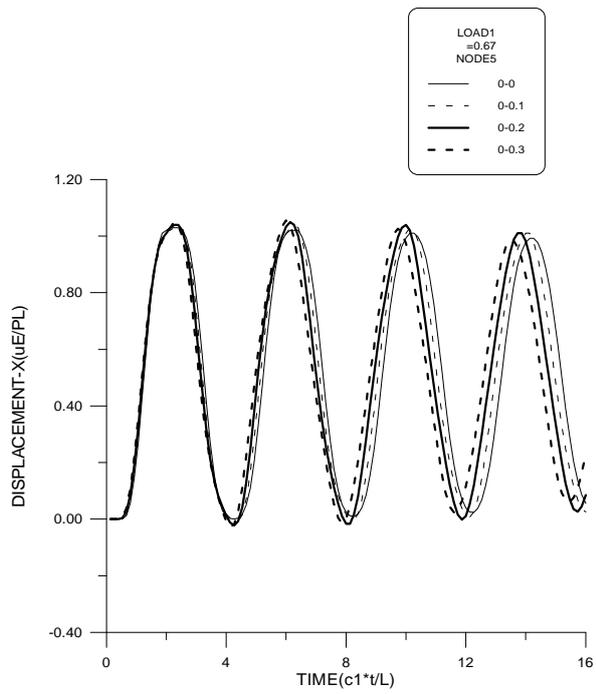


圖 11 改變  $\gamma$ ，第 5 點(0.4L)之 x 方向位移比較圖

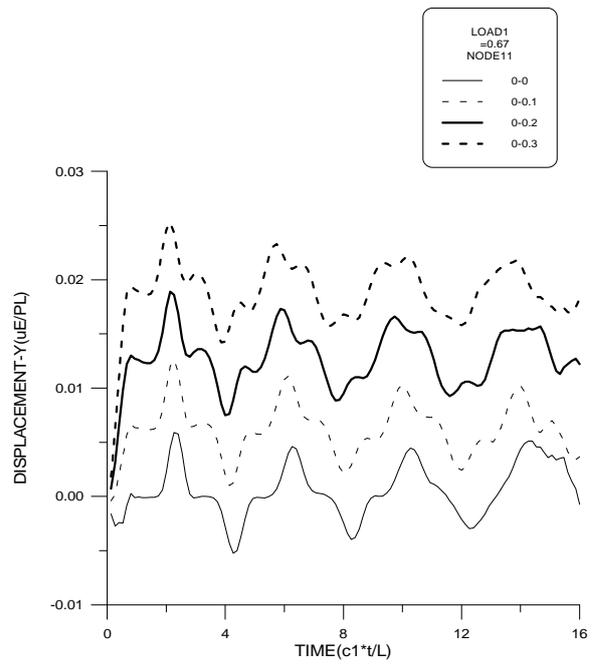


圖 13 改變  $\gamma$ ，第 11 點(1.0L)之 y 方向位移比較圖

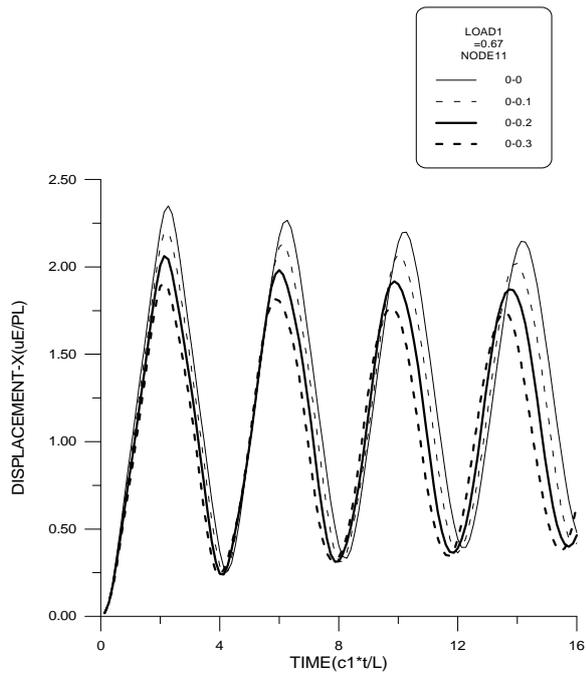


圖 12 改變  $\gamma$ ，第 11 點(1.0L)之 x 方向位移比較圖

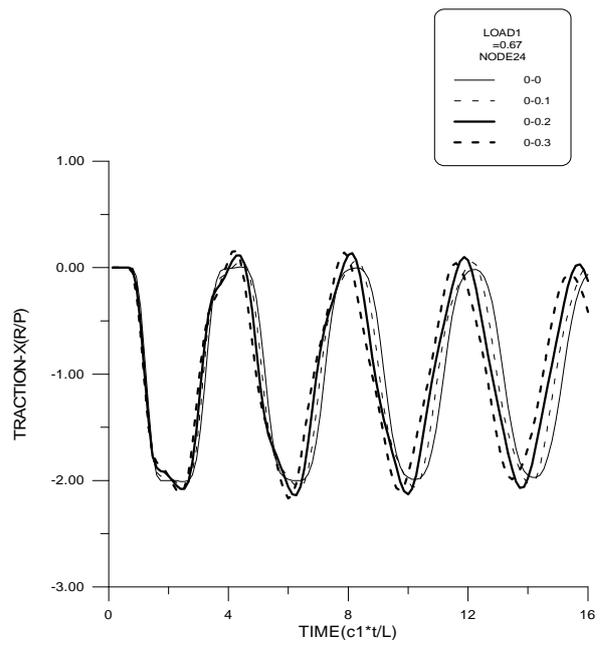


圖 14 改變  $\gamma$ ，第 24 點(固端中點)之 x 方向曳引力比較圖

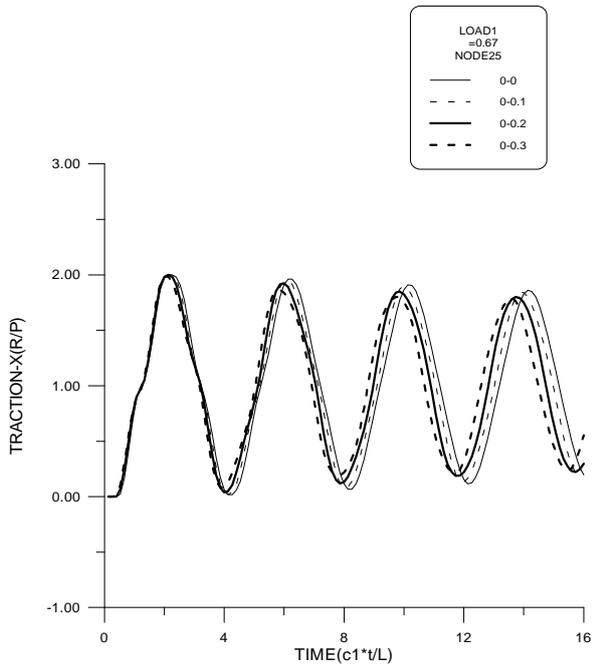


圖 15 改變  $\alpha$ ，第 25 點(界面中點)之 x 方向曳引力比較圖

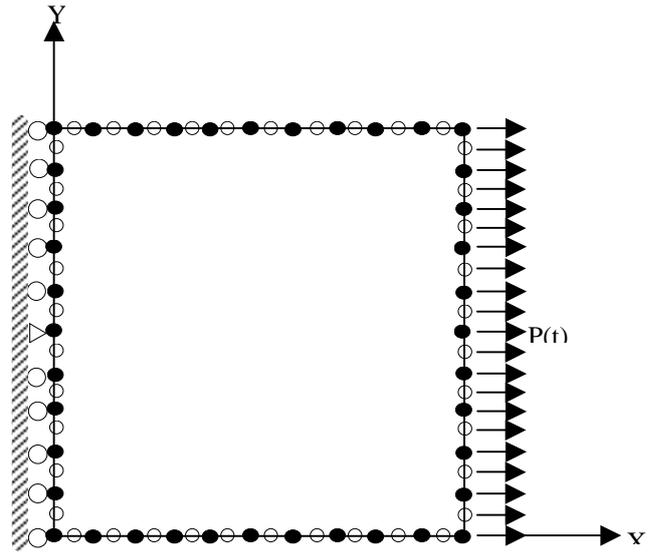


圖 17 10x10 領域，40 個邊界元素

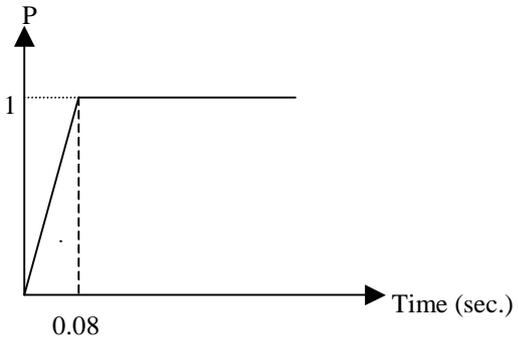


圖 18 斜坡載重之形式 (2)

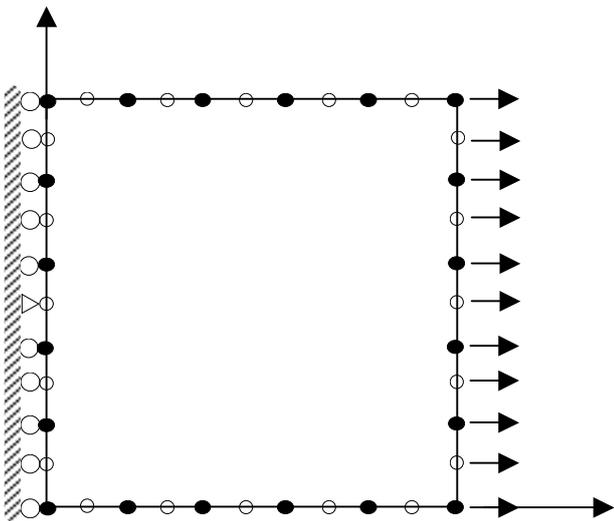


圖 16 10x10 領域，20 個邊界元素

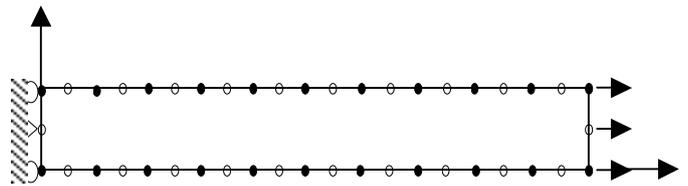


圖 19 10x1 領域，22 個邊界元素

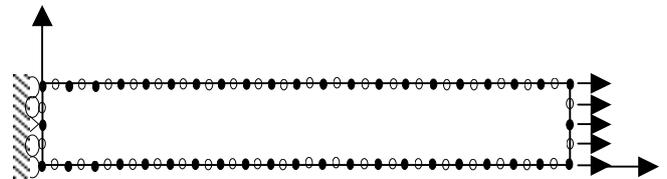


圖 20 10x1 領域，44 個邊界元素

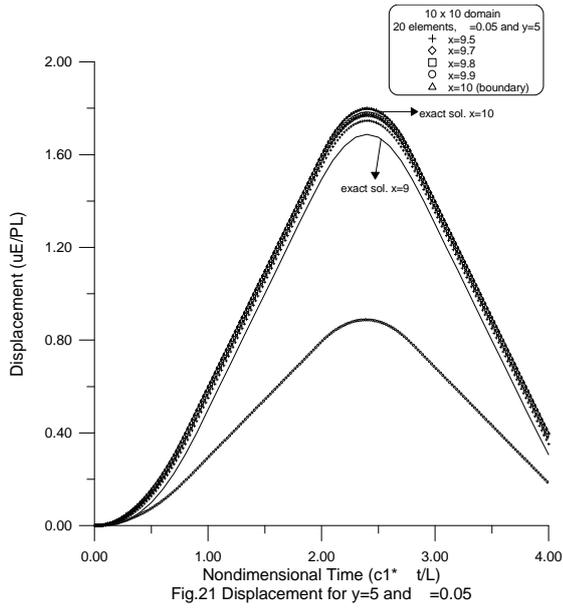


Fig.21 Displacement for  $y=5$  and  $\beta=0.05$

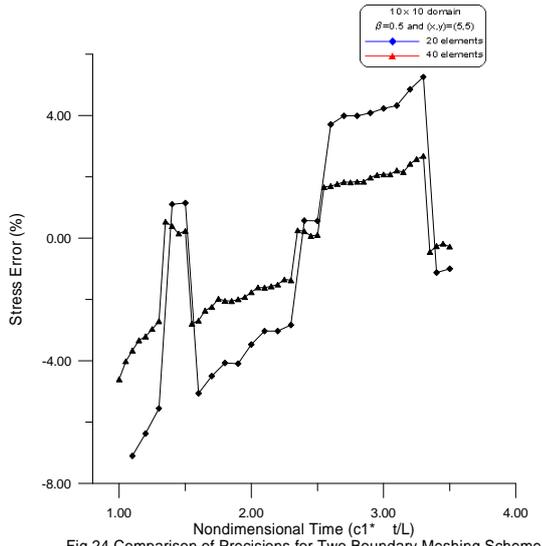


Fig.24 Comparison of Precisions for Two Boundary Meshing Scheme

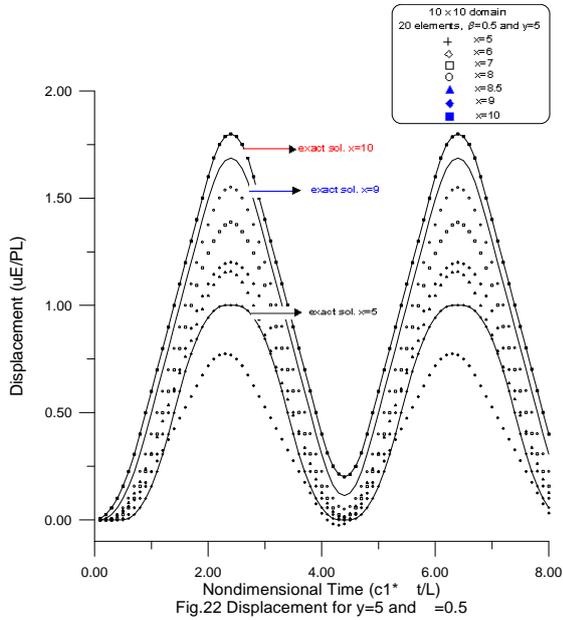


Fig.22 Displacement for  $y=5$  and  $\beta=0.5$

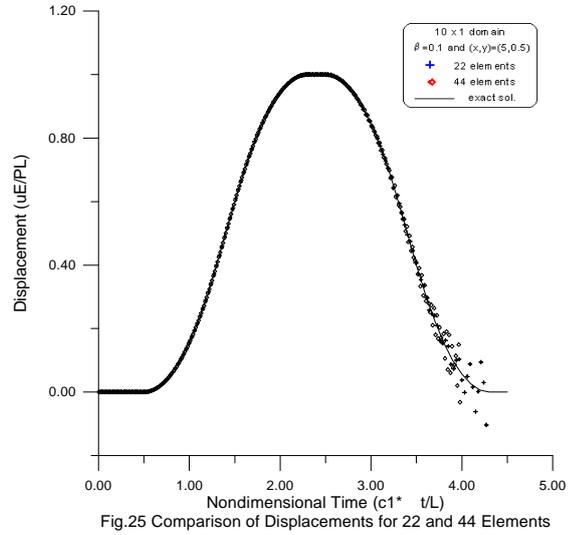


Fig.25 Comparison of Displacements for 22 and 44 Elements

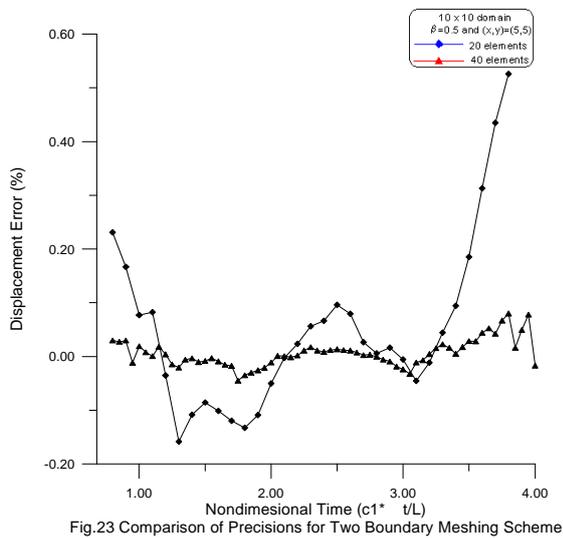


Fig.23 Comparison of Precisions for Two Boundary Meshing Scheme

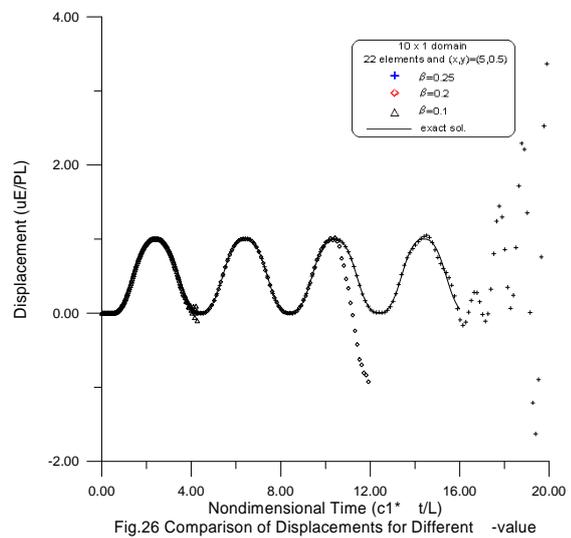


Fig.26 Comparison of Displacements for Different  $\beta$ -value

