

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

滿足 H-infinity 性能之低階穩健控制器設計

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2213-E-009-059-

執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

執行單位：國立交通大學電機與控制工程學系

計畫主持人：鄧清政

共同主持人：李慶鴻

報告類型：精簡報告

報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 21 日

滿足 H_{∞} 性能之低階穩健控制器設計

Low Order Robust Controller Design Based on H_{∞} Performance

計畫編號：NSC 91-2213-E-009-059

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：鄧清政 國立交通大學電機與控制工程學系

E-mail: ccteng@cn.nctu.edu.tw

共同主持人：李慶鴻 元智大學電機工程學系

E-mail: chlee@saturn.yzu.edu.tw

中文摘要：本計畫考慮一具有雜訊輸入，並在各輸入輸出點考慮適當的權函數之單輸入單輸出單位回授控制系統，對此提出一簡單的低階穩健控制器設計流程，並將設計完成之低階穩健控制器，利用各項穩健規格與一般穩健理論所設計出來之最佳化穩健控制器做性能上的比較，以期望達到與最佳化穩健控制器相近的性能表現，則此低階控制器便能輕易實現，以達到實用的目的。在我們所做的模擬中，發現所得到的低階穩健控制器無論是在頻域或是時域的性能上，雖說無法保證表現一定比 H_{∞} 最佳化控制器好，但也相去不遠。如此也提供了一個使穩健控制器邁向更實用化的思考方向。

關鍵字： H_{∞} 控制器、穩健控制、控制器降階

Abstract: In this project, we have developed a low-order robust controller design procedure using numerical methods for single-input, single-output linear time-invariable (LTI) systems with disturbances. The object is to decrease the gap between the robust controller theory and applications. In general, the disadvantage of controllers design method based on H_{∞} -theory is high order. The high-order property makes controller realization hard. Thus, we here got a low-order controller with similar performances comparison with H_{∞} optimal controllers. We used The Control System Toolbox, μ -Analysis and Synthesis Toolbox, and SIMULINK in MATLAB to analyze many kinds of controllers' performances in frequency domain and time domain. And, then we tried to show that we have the chance to replace the H_{∞} optimal controllers by low-order robust controllers. For case studies, we really got information showing that the performances of low-order controllers' are similar to the H_{∞} optimal controllers'.

Keywords: H_{∞} controller, robust control, controller reduction

二、緣由與目的

在穩健控制理論中，過去雖然提出了許多理論架構完整的 H_{∞} 最佳控制器設計方法[1-19]。然而利用這些方法所合成出來的穩健控制器皆具有呈現高階的特性。這個特性對於要將這些高階的穩健控制器實現成實際電路時，會有較為不利

的影響[19]。因而有控制器降階(Controller reduction)之發展，在現有的控制器降階法均有其弊病，降階之控制器容易造成閉迴路系統之不穩定現象[19]。因此，本計畫即是要設計出一低階穩健控制器，在相同的穩健性能條件下使其控制特性能達到與這些合成高階控制器相仿的期望。如此一來，我們便可以將最佳化穩健控制器向更為實用化的目標推進。

本計畫重點即是在於決定一低階控制器，使其在整個控制系統中達到穩健穩定性且符合所需之穩健最佳化條件。根據古典控制理論的觀念，控制器的設計首先必須考慮的條件就是系統的穩定性問題，當系統求得穩定後再要求控制器使受控系統性能達到我們所要求的性能規格，這個設計流程與我們設計低階穩健控制器的設計目標其實是不謀而合的。因此，我們選定了具有三個待定係數的低階控制器，並依據穩健控制理論中的穩定性分析方法，將所有符合穩定條件的控制器參數的範圍利用數值方法決定出來。此穩定範圍的決定方式，在 O. N. Kiselev 與 B. T. Polyak 所發表的論文[18]提出了以 D-decomposition 來決定此穩定範圍的方法。此法在數學演算架構雖然嚴謹，但其應用於三個以上的待定參數空間時，推導過程卻顯繁雜而不實用，此即為本計畫之動機。以下先對問題作一簡單介紹：

【 H_∞ 穩健控制問題】

一般來說， H_∞ 最佳控制問題即是設計一內部穩定化(internally stabilizing)之迴授控制器，使得閉迴路系統轉移函數之 H_∞ 範數(H_∞ -norm)為最小[6,10]。其中內部穩定為必要條件，其說明如下：考慮一個具有雜訊輸入的標準回饋系統架構如圖 1 所示。

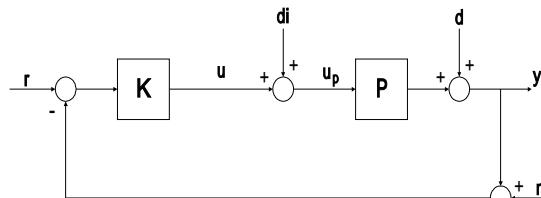


圖 1：標準回饋架構

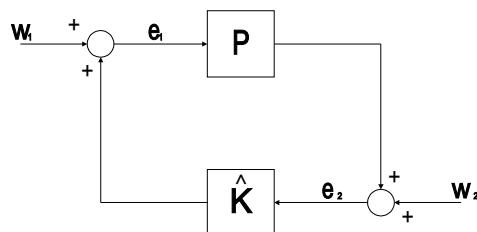


圖 2：內部穩定分析方塊圖

若我們將上述標準架構中的符號重新定義成

$$\hat{K} := -K.$$

並將 r, n, d, d_i 轉換成 w_1 及 w_2 ，控制器 \hat{K} 及受控體 P 的輸入端訊號則分別定義成 e_1 及 e_2 如此，標準回饋架構可被重新表示成圖 2。

定義 1：根據圖 2 若由訊號 (w_1, w_2) 至 (e_1, e_2) 之系統轉移矩陣

$$\begin{bmatrix} I & -\hat{K} \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - \hat{K}P)^{-1} & \hat{K}(I - P\hat{K})^{-1} \\ P(I - \hat{K}P)^{-1} & (I - P\hat{K})^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

屬於 RH_∞ 則此系統為內部穩定[6,10]。

緊接著在滿足內部穩定的條件下，我們採用 K. Glover 及 J. C. Doyle 在 1989

年所發表的 H_∞ 穩健控制器 [12,13]，其主要先將系統轉換成一般化系統（如圖 3），並表示成以下型態

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad (2)$$

利用求解兩組 Riccati 方程式，進而獲得 H_∞ 穩健控制器。在此我們使用 MATLAB 中的 hinfsyn 指令來求解 H_∞ 控制器（有關控制器的整個演算法可參考文獻 [12,13]）。

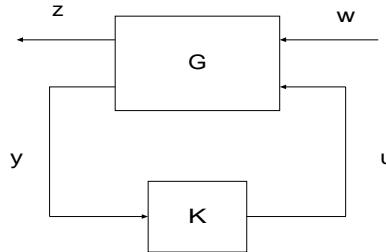


圖 3:一般化系統連接圖

然而所獲得的控制器雖有穩健之特性，卻具有高階的特性。而這個特性在實際應用上較不易實現。倘若採用控制器降階法，在現有的方法與理論上均有其弊病，其所得到降階之控制器容易造成閉迴路系統之不穩定現象（見文獻 [19] 第 574 頁）。因此在本計畫中，我們的目的即是要找到一低階控制器其滿足系統穩健之需求而達到控制器降階之目的。在穩健控制理論中控制器所遵循的最佳化條件相當多，決定因素必須以實際需求來考慮，在此所考慮的控制系統為雜訊干擾對系統的影響，故我們選取的最佳化條件為—由雜訊輸入端至系統輸出端間轉移函數矩陣之 H_∞ -Norm 的最小化。也就是

$$F(K, G) = \frac{\|W_1(s)S(s)\|}{\|W_2(s)T(s)\|_\infty} \leq \gamma \quad (3)$$

其中 $W_1(s), W_2(s)$ 為給定之加權函數， $S(s), T(s)$ 分別為靈敏度函數(Sensitivity)與補靈敏度函數(Complementary sensitivity)[6,18]。

三、研究方法、進行步驟

因此，我們接著便是要做控制器最佳化的動作了。在穩健控制理論中穩健控制器所遵循的最佳化條件相當多，決定因素必須以實際需求來考慮，在此所考慮的控制系統為雜訊干擾對系統的影響，故我們選取的最佳化條件為—由雜訊輸入端至系統輸出端間轉移函數矩陣之 H_∞ -Norm 的最小化。我們利用電腦強大的運算能力，將先前我們求出符合系統穩定之控制器參數範圍的各組參數數值帶入此最佳化條件中，並取符合最佳化條件最小值之該組參數做為我們所要的最佳化控制器參數。如此，便完成我們的低階穩健控制器設計。最後，我們利用 MATLAB 軟體做模擬分析與比較，以確定我們對低階穩健控制器所希望達到的預期效果。

因為我們設計低階穩健控制器，最主要的目的是要替代高階穩健控制器在整個系統中的地位。因此，在設計的整個過程中，系統除控制器本身外的其他客觀條件，如系統架構、各干擾訊號的權函數形式等，必須被設定成相同。示意圖如圖 4 所示，

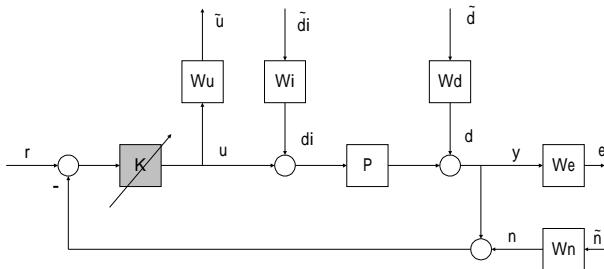


圖 4: 具低階穩健控制器之系統架構

其中 $K \in \{ k + \frac{a}{s}, \frac{k}{s+a}, \frac{ks+a}{s+b}, \frac{k}{s^2+as+b}, K \}$ ，且是可依需求調整。

控制器參數空間中的系統穩定區域

定義 3.1: 定義控制器參數空間 Q

$$Q = \{(a, k) \mid a, k \in \mathfrak{R}^+ \} \text{ 或 } Q = \{(a, b, k) \mid a, b, k \in \mathfrak{R}^+ \}$$

其中 a, b, k 表控制器參數。為求合理性我們使 $a < l_1, b < l_2, k < l_3$ 且 l_1, l_2, l_3 為選定之正實數。

定義 3.2: 定義控制器參數空間中符合系統穩定的區域 \hat{Q}

$$\hat{Q} = \{(\hat{a}c\hat{k}) \text{ or } (\hat{a}c\hat{k}c\hat{k}) \mid \forall (\hat{a}c\hat{k}) \hat{c} (\hat{a}c\hat{k}c\hat{k})\}$$

$\ni \text{在 } \mathbb{C}^n \text{ 中 } \forall (\hat{a}c\hat{k}) \hat{c} (\hat{a}c\hat{k}c\hat{k}) \subseteq Q\}$

最佳化過程

在 H_∞ 控制問題中，我們為了能夠以統一的架構來解決不同類型的問題，我們會將問題轉換成圖 1 之回授系統。在此， $w \in R^m$ 表示外界干擾、感測器雜訊等由外部加入到控制系統中的輸入， $z \in R^p$ 其表示控制誤差或控制輸入、控制輸出等根據控制而想要變小的訊號。所以可以根據下面的推導獲得 w 與 z 之間的轉移函數 G_{∞} ：

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u = Ky \quad (5)$$

將(5)式代入(4)式中可得

$$z = G_w w$$

$$G_{\text{res}} := G_{11} + G_{12} K (I - G_{22} K)^{-1} G_{21} \quad (6)$$

而我們對於此系統的控制目的，是要將外部輸入 w ，儘量抑制控制量 z ，因此轉移函數 G_{zw} 的大小就成為我們設計控制器最重要的衡量標準了。至於 G_{zw} 大小如何來描述，本計畫是使用 H_∞ -norm 來表示。

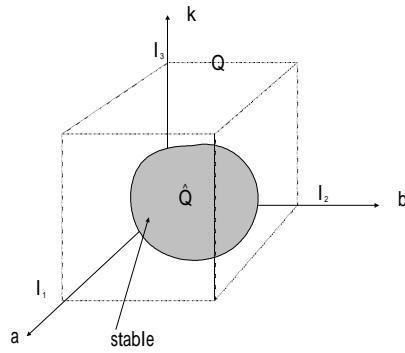


圖 5: Q 及 \hat{Q} 示意圖

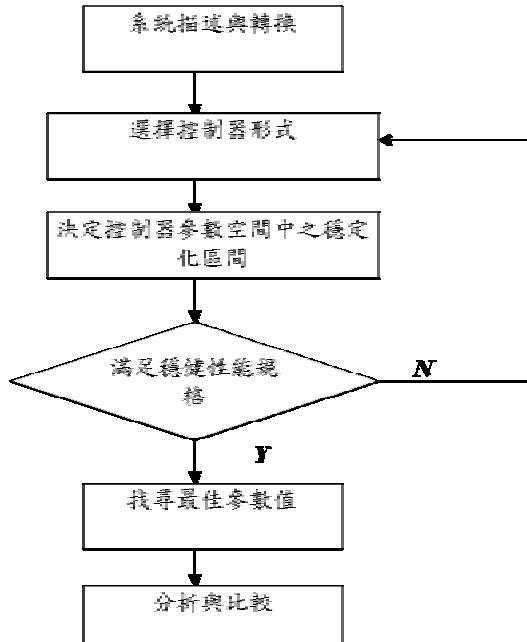


圖 6: 低階穩健控制器設計流程

最後，我們將利用電腦的運算能力，將上述所求出所有落於 \hat{Q} 中的數值代回 $\|G_{zw}\|_\infty$ 並找出符合 $\min\|G_{zw}\|_\infty$ 的該組控制器參數數值，做為我們最後的最佳化控制器參數。完成我們要的低階穩健控制器的設計步驟。上述方法可簡述如圖 6。

四、模擬與結果

考慮系統

$$P(s) = \frac{5(s+1.4)}{(s-1)(s+2)}, \quad W_e = \frac{2}{s+2}, \quad W_u = \frac{s+1}{s+10}.$$

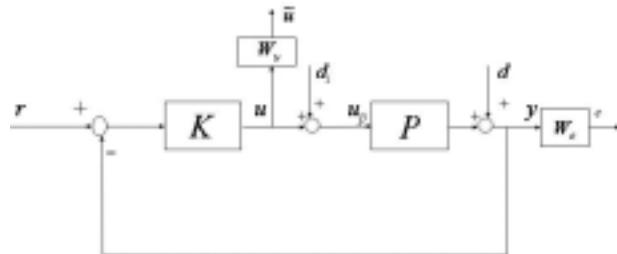


圖 7: 系統方塊圖.

其高階控制器結果為($\gamma=0.7610$)

$$K_h = \frac{5266.1(s + 1.4703)(s + 3.1256)(s + 10)}{(s + 2)(s + 1.4)(s + 7.5)(s + 6923.6)}$$

所選擇的低階控制器型態為

$$K_l = \frac{ks + b}{s + a}.$$

最後得到

$$K_l = \frac{0.75848s + 3.94760}{s + 2.46783},$$

與 $\gamma^* = 0.7917$ 。在結果中我們得到不管在時域或是頻域，所得之低階控制器，均能滿足需求，達成目的。

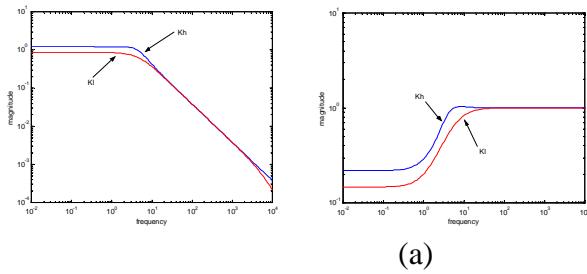


圖 8: 頻域比較圖 K_h and K_l (a) $T(s)$ (b) $S(s)$.

表 1: 時域比較

	K_h	K_l
上升時間	0.3	0.3
安定時間	1.5	1.5
穩態值	1.2	1.22
超出值	3.3%	3.4

參考文獻

- [1] A. E. Barabanov and O. N. Granichin, "Optimal Controller for A Linear Plant with Bounded Noise," *Automation and Remote Control*, Vol. 5, pp.39-46, 1984.
- [2] B. R. Barmish, "New tools for robustness analysis," Plenary Session, *Proceedings Conference on Decision and Control*, Georgia, 1988.
- [3] S. Boyd and C. H. Barrat, *Linear Controller Design Limits of Performance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
- [4] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya, "Robust stability under structured and unstructured perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 10, pp. 1100-1108, 1990.
- [5] J. C. Doyle, "Analysis of Feedback System with Unstructured Uncertainty," *Proceeding of IEE-D*, Vol. 29, No. 6, pp. 242-250, 1982.
- [6] J. C. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Mac-well/Macmillan, New York, 1992.
- [7] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, 1989.
- [8] J. C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs and μ ," *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, England, pp. 1227-1232, 1991.
- [9] J. C. Doyle, J. Wall, and G. Stein, "Performance and robustness analysis for structured uncertainty," in *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp. 629-636, 1982.
- [10] B. Francis and J. C. Doyle, "Linear control with an H_∞ optimality criterion," *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 25, No. 4, pp. 815-844, 1987.
- [11] C. Galarza and Sanchez-Peña R., "Robust approximation and control," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 16, No. 5, 1996.
- [12] K. Glover and J. C. Doyle, "State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm

bound and relations to risk sensitivity," *System and Control Letter*, No. 11, 1988.

- [13] K. Glover and J. C. Doyle, "A state space approach to H_∞ optimal control," in *Three Decades of Mathematical Systems Theory: A Collection of Surveys at the Occasion of the 50th Birthday of Jan C. Willems*, H. Nijmeijer and J. M. Schumacher (Eds.), Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 135, 1989.
- [14] P. J. Goddard and K. Glover, "Controller approximation: approaches for preserving H_∞ performance," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 43, No. 7, pp. 858-871, 1998.
- [15] M. Green and D. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [16] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and M. A. Rotea, " H_∞ -optimal control with state-feedback," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-33, pp. 786-788.
- [17] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, K. Zhou, "Robust stabilization and H_∞ -optimal control," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 35, No. 3, pp. 356-361, 1990.
- [18] O. N. Kiselev and B. T. Polyak, "Design of low-order controllers by the H_∞ and maximal-robustness performance indices," *Automation and Remote Control*, Vol. 60, No. 3, 1999.
- [19] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.