# 行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

## 斜坡上有限振幅波之 Lagrangian 攝動近似解

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2611-E-009-002-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：國立交通大學土木工程學系

計畫主持人：張憲國

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 10 月 2 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 斜坡上有限振幅波之 Lagrangian 攝動近似解

## A Lagrangian solution for finite-amplitude waves over a sloping beach

計畫編號：NSC 91-2611-E-009-002

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：張憲國　　交通大學土木工程學系 副教授

一、中文摘要

本研究利用攝動展開技巧解析 Lagrangian 座標下均勻水深上規則前進重力波獲得五階解。本研究所得 Lagrangian 近似解的質點運動週波率包含二部份，一部份為隨深度增加而增加的 cosh 函數；另一部份為不隨空間中任何一個位置點而改變的常數，且發現 Lagrangian 近似解的質點運動週波率可轉換至 Eulerian 座標下固定點觀測波動的週波率。由解析結果可知，本研究的 Lagrangian 近似解可描述流體質點運動軌跡於波動一週期後，不會封閉而有微量前進的質量傳輸量，且可表現上層質點運動軌跡的位移範圍較下層者大的特性。

關鍵詞：Lagrangian 近似解、有限振幅波、攝動法

Abstract

A set of governing equations in Lagrangian form transformed is derived. The technique of Lindstedt-Poincaré perturbation method was used to obtain the approximations up to fifth-order for these nonlinear governing equations. The Lagrangian frequency of the present solution consists of two parts. One part is a function of depth and increases as the water depth increases. The other part is constant for all particles and equivalent with that of Stokes' wave theory of third-order. The present Lagrangian solution for the particle motion shows that the water particle has a drift displacement of second order, which decreases exponentially with water depth, after a period of time. The pressure of the present solution has zero value at the free surface and this exactly satisfies the dynamic boundary condition.

Keywords: Lagrangian solution, Finite-amplitude gravity waves, Perturbation method

二、緣由與目的

流體力學描述流體運動狀態的數學解析有 Lagrangian 方法和 Eulerian 方法兩種。Lagrangian 方法為觀測各個特定的流體質點，來描述該流體質點於其運動路徑上之運動行為；而 Eulerian 方法為在空間各個固定的位置上，描述流場之時空特性。　從數學的觀點，以 Eulerian 方法研究流體力學較 Lagrangian 方法簡易，故一般常採用 Eulerian 方法來探究流場的特性。因此，自 Stokes (1847)提出以 Eulerian 座標系統描述的波浪理論後，爾後有關波浪問題幾乎多採用 Eulerian 座標系統。然而，由於 Eulerian 方法為觀測空間中之固定位置，並不能方便的描述出各個流體質點於時空中的運動軌跡，若採用 Lagrangian 座標來描述前進重力波，可處理波動流場有污染源擴散的問題(如陳等人(1998))，及波浪於斜坡底床上造成波形的變形不對稱的問題(如 Biesel (1951)，陳(1997)，陳和黃(2000))。雖然 Lagrangian 方法的解析較採用 Eulerian 方法複雜，但 Lagrangian 方法具有可描述質點運動軌跡的優點，本研究嘗試以 Lagrangian 方法解析波動場中流體質點的運動路徑及其他 Eulerian 系統無法描述的一些特性。

雖然往昔學者已有應用 Lagrangian 方法解析斜坡波浪運動及黏滯性波動的研究，然而對於最基本的水平底床上的波動問題，除陳(1994)外，早期的研究僅為低階解，或甚至僅適用於深水情況，對於有限水深適用於波動非線性的高階解的解析技巧及對波動特性的描述尚沒有系統完整的探討。本研究乃針對有限水深水平底床上規則重力波的 Lagrangian 特性的問題，首先利用攝動展開技巧，解析 Lagrangian 系統的控制方程式至五階解。接著探討 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同觀點下，波浪週波率的關係，最後再探討流體質點在不同深度下水平位移的特性及質量傳輸速度。

## 三、結果與討論

### 3-1 波浪週波率

依 Longuet-Higgins (1986)提出於 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同系統下的關係為

$$\pm_L(0) = \pm_E - kU_M(0) \tag{1}$$

其中，$\pm_L(0)$ 和 $U_M(0)$ 分別為自由表面處流體質點的週波率和質量傳輸速度。

將本研究結果代入式(1)中，並令 $b = 0$ ，可得

$$\pm_E \equiv \pm_0 + \mu_2 + \mu_4 \tag{2a}$$

$$\mu_2 = \pm_0 k^2 a_0^2 \frac{2 + 7S^2}{4(1 - S)^2} \tag{2b}$$

$$\mu_4 = \pm_0 k^4 a_0^4 (4 + 32S - 116S^2 - 400S^3 - 71S^4 + 146S^5)/(32(1 - S)^5) \tag{2c}$$

其中，$S = 1/\cosh 2kh$ ，式(2)與 Fenton (1985)攝動展開 Stokes 波所得之五階週波率是相同的。由上面的導証可知，本研究所推導之 Lagrangian 系統任何一點流體質點的週波率皆可經由式(1)而轉換至 Eulerian 系統空間中任何一個位置點的週波率，且此空間中之週波率為一常數，不隨空間任何位置而有所不同，完全滿足 Eulerian 座標描述空間固定點波動的運動週期平均相同的結論。

### 3-2 波壓

在 Eulerian 系統求解過程，如 Stokes (1847)波浪理論，由於是對平均靜水位

進行泰勒展開，故波壓公式僅適用於平均靜水位以下的部份，至於平均靜水位以上部份，則以平均靜水位為基準線所得靜壓力來近似。但在 Lagrangian 系統求解過程有完全滿足自由表面邊界壓力為零的優點，故可求得在波峰時平均靜水位上的波壓。本研究結果顯示，由自由表面算起，位於波峰部份，其壓力低於靜水壓，而位於波谷部份，其壓力大於靜壓力，水中每一位置處的壓力值皆介於該時刻不同水位的靜水壓及平均靜水位的靜壓力之間。

## 3-3 流體質點運動軌跡

往昔描述流體質點的運動軌跡，常採用 Eulerian 解的速度，以平均位移量為中心，透過泰勒級數展開水平及垂直速度，然後再對時間積分獲得，但其結果僅限於運動位移不大的情形。根據 Lagrangian 與 Eulerian 系統分別從流體質點與空間中固定位置兩種不同觀點來描述波場的特性可知，Lagrangian 座標系統才能方便且正確的描述流體質點的運動軌跡。

本研究結果顯示，在自由表面處，運動軌跡的位移範圍較下層者大，且其 $x$、$y$ 位移範圍較相近，而在接近底部的地方，則軌跡較為扁平，即 $x$ 方向移動相對較 $y$ 方向移動為大。流體質點運動軌跡於波動一週期後，不會封閉，而有微量的前進。

## 3-4 質量傳輸速度

往昔求取質量傳輸速度的方法來自於二種觀念。其一以 Eulerian 觀念求質量傳輸速度，乃對平均靜水位處的 Eulerian 解的速度採用泰勒級數展開，求得近似的波浪表面處的流場速度，再對此近似的速度取一波浪週期平均值。另一為以 Lagrangian 觀念求質量傳輸速度，是先利用泰勒展開的方式，將 Eulerian 系統的解轉換至 Lagrangian 參數 $(a,b)$，再對其取一水粒子運動週期平均值。往昔方法不論採用 Eulerian 或 Lagrangian 觀點，皆採用 Eulerian 系統中的解來近似，故都需經過泰勒展開的過程，增加了求解的複雜性。本研究因直接解析 Lagrrangian 系統的控制方程式，於攝動解析結果中，偶數階部份會有一隨時間向前進的項，若將此項除以質點運動的時間，即可得質量傳輸速度，大大簡化了往昔求取需經由泰勒展開的複雜性。

若假設通過垂直的單位寬度平面的總質量通率為零，因此需將質量傳輸速度修正為

$$
\begin{aligned}
u^* = {} & U_{M2} - \frac{a_0^2 \pm_0}{2h} \coth kh + U_{M4} \\
& + a_0^4 k^2 \pm_0 (21\cosh kh + 9\cosh 3kh \\
& + 5\cosh 5kh + \cosh 7kh)/(256h\sinh^7 kh)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

式(3)等號右邊的第一項及第二項為二階近似解，此與 Longuet-Higgins (1953)解析非旋性前進波的質量傳輸速度結果一致，而第三項及第四項則為四階量的質量傳輸速度。圖 1 為以條件 $h/L = 0.2$ ， $H/L = 0.114$ 所計算的質量傳輸速度隨水深的分佈。圖 1 中實線為本近似解至四階的質量傳輸速度，虛線為本近似解至二階的質量傳輸速度。由式(3)可知，質量傳輸速度與振幅平方及四次方成正比，故波高越大，波浪的質量傳輸越顯著。由圖 1 中可知，質量傳輸速度在水面時最大，隨水深增加而逐漸減小並由正值轉為負值，在水底時達到最小值。圖 1 亦顯示，於自由表面處，四階解的質量傳輸量較二階解大，而隨水深增加而遞減的速度亦較二階解快，當考慮的波浪條件小時，此現象並不明顯，僅可於表面處看出四階解的質量傳輸量較二階解大，若考慮的波浪條件越大，則此現象越顯著，且四階解

於底部的 $ku^*/\sigma_0$ 較二階解小，並非落於同一數值，此與流體質點於自由表面處，五階解位移的距離較三階解者長的結果一致，而圖中二階解與四階解相交位置的深度即表示五階解位移的距離與三階解者相同，在此深度之上五階解位移的距離較三階解者長，在此深度之下，則五階解位移的距離較三階解者短，此現象將隨著波浪條件的增大而越顯著。

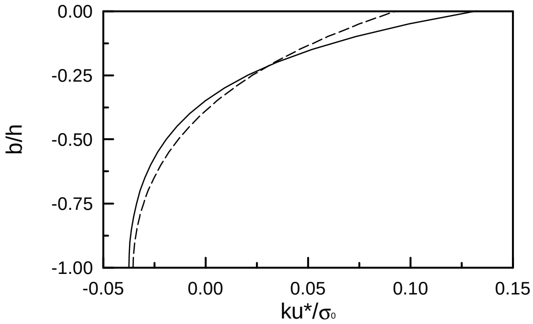


圖 1 質量傳輸速度分佈（$h/L=0.2,\quad H/L=0.114$）

3-5 結論

本研究利用 Lagrangian 方法優於描述質點運動的特點，探討有限振幅波於水平底上的波動傳統問題。本文使用的攝動技巧主要因假設質點的運動週波率包括水深的函數，才能獲得合理的五階解，甚至可延伸至更高階。本研究根據 Fenton (1985)的數值檢驗方法，確認本近似解的係數是完全正確的。本研究所推導之 Lagrangian 系統流體質點的週波率皆可轉換至 Eulerian 系統空間中任何一個位置點的週波率，且此空間中之週波率為一常數不隨空間任何位置而有所不同。此週波率常數部份的修正量與 Stokes 波 Eulerian 解是完全相同的。另外質點運動的 Lagrangian 週波率還包含水深函數的部份，此部份顯示質點運動在表面進行一個週期的時間比在底部質點運動一個週期的時間長。而此週波率的高階修正，在本文的 Lagrangian 攝動近似解的奇數階才存在，而在偶數階解則無週波率修正量。

本研究的 Lagrangian 近似解能在自由表面任何一點完全滿足表面邊界條件，即波動在自由表面的壓力為大氣壓力，而從自由表面以下的波動壓呈現雙曲線 cosh 函數隨水深遞減。比較 Eulerian 波壓解在表面不為大氣壓力且不能計算水面上的波動壓力，本研究的波壓解能符合實際物理現象。至於質點運動軌跡方面，本文可表現不同深度下，流體質點運動軌跡的大小及形狀並不完全相同，且流體質點運動軌跡於波動一週期後，不會封閉，而有微量的前進。此質量傳輸速度在水面時最大，隨水深增加而遞減至水底時達到最小值。本五階解的質量傳輸速度包括在二階量及四階量上，此二階量與往昔學者利用 Eulerian 解推導結果相同，但四階量的部份則是往昔的 Eulerian 解無法求得，亦是本研究解析首先獲得。本研究的質量傳輸速度顯示在表面高階的傳輸速度較低階者快，但在底部高階的質量傳輸速度反而比低階者慢。

## 四、計畫成果自評

本研究利用 Lagrangian 方法優於描述質點運動的特點，探討有限振幅波於水平底上的波動傳統問題。經由結果之比較，認為研究內容已達到原計畫之預期成果，且具有高度之應用價值。本研究已發表於第 25 屆海洋工程研討會。

## 五、參考文獻


[1] 陳陽益(1994)"等深水中非旋轉性的自由表面前進重力波之 Lagrangian 方式的攝動解析"，第十六屆海洋工程研討會論文集，A1 頁-A29 頁。

[2] 陳陽益(1997)"平緩坡度底床上前進的表面波"，第十九屆海洋工程研討會論文集，112 頁-121 頁。

[3] 陳陽益、許弘莒、許志宏(1998)"海潮流軌跡之數理推測與實測"，第二十屆海洋工程研討會論文集，71 頁-79 頁。

[4] 陳陽益、黃啟暘(2000)"Lagrangian 方式下緩坡底床上之前進波"，第二十二屆海洋工程研討會論文集，79 頁-88 頁。

[5] Biesel, F. (1951) “Study of Propagation in Water of Gradually Varying Depth,” In *Gravity Waves.* U.S. Nat’l. Bureau of Standards, Circular 521, pp. 243-253.

[6] Fenton, J. D. (1985) “A Fifth-order Stokes Theory for Steady Waves,” *J. Waterway Port Coastal Ocean Engng. ASCE,* Vol. 111, No. 2, pp. 216-234.

[7] Longuet-Higgins, M. S. (1953) “Mass Transport in Water Waves,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* Vol. A 245, pp. 535-581.

[8] Longuet-Higgins, M. S. (1986) “Eulerian and Lagrangian Aspects of Surface Waves,” *J. Fluid Mech.* Vol. 173, pp. 683-707.

[9] Stokes, G. G. (1847) “On the Theory of Oscillatory Waves,” *Trans. Cambridge Philos. Soc.* Vol. 8, pp. 441-473.