

TBM 辨識與追蹤法則之研究

成果報告

委託機關與單位：中科院電子系統所相列雷達組

執行機關與單位：國立交通大學電機與控制工程學系

計畫編號：NSC 91-2623-7-009-011

執行期間：91年01月01日至91年12月31日

計畫主持人：楊谷洋

共同主持人：廖德誠

中華民國 92 年 2 月 26 日

# 國防科技學術合作協調小組研究計畫成果報告

## TBM 辨識與追蹤法則之研究

計畫編號：NSC 91-2623-7-009-011

執行期間：91 年 01 月 01 日 至 91 年 12 月 31 日

計畫主持人：楊谷洋

共同主持人：廖德誠

執行單位：國立交通大學電機與控制工程學系

中華民國 92 年 2 月 26 日

# 目 錄

1. 前言	1
2. 飛彈動態軌跡方程式	2
2.1. 狀況一：平面地球上無空氣阻力之質點運動軌跡	2
2.2. 狀況二：平面地球上空氣阻力之質點運動軌跡	4
2.3. 狀況三：球形地球上無空氣阻力之質點運動軌跡	7
2.3.1. 慣性座標分析	8
2.3.2. 極座標分析	10
2.3.3. Closed-form 解	13
2.3.4. 定點攻擊方程式	17
2.4. 狀況四：圓球形地球自轉且在無空氣阻力下之質點運動軌跡	19
2.5. 狀況五：旋轉之扁圓地球且在空氣阻力作用下之質點運動軌跡	20
3. 彈道飛彈軌跡探討	21
3.1. 動力飛行階段	21
3.1.1. 火箭發動器及飛彈彈體參數	21
3.1.2. 飛行軌跡動態方程式	23
3.1.3. 垂直上升(Vertical Ascent)	25
3.1.4. 俯仰程式	26
3.1.5. 多節火箭	27
3.2. 真空飛行階段	29
3.2.1. 動態方程式	29
3.2.2. 大氣層上之重返點	31

3.3. 重返大氣階段	32
3.3.1. 動態方程式	32
4. 終端導引律設計	34
4.1. 飛彈攔截相對運動方程式	34
4.2. 飛彈攔截之終端導引律	35
5. 飛彈攔截軌跡 3D 動畫呈現方法	36
5.1. 模擬場景介紹	36
5.2. 模擬程式使用說明	39
5.3. 程式說明	41
6. 飛彈軌跡辨識	45
6.1. 地面雷達系統	45
6.2. 智慧型雷達預估器	47
6.3. 自我組織特徵映射網路	48
6.3.1. SOM 用於追蹤目標及運動狀態估測	50
6.3.2. SOM 參數的選擇	53
6.4. 數值模擬結果	55
6.4.1. 彈道軌跡模擬	55
6.4.2. 多目標彈道軌跡追蹤模擬	56
6.4.3. 彈道軌跡追蹤模擬與 Kalman filter 比較	66
7. 結論	92
參考資料	93
附錄 A. 數值模擬方法	95

# 圖 目 錄

圖 2-1 平面地球中的飛彈受力圖(無空氣阻力).....	2
圖 2-2 不同發射角之軌跡模擬圖.....	3
圖 2-3 平面地球中的飛彈受力圖(有空氣阻力).....	4
圖 2-4 不同的 $\beta$ 值與無空氣阻力時的比較.....	6
圖 2-5 飛彈發射有初始高度時.....	6
圖 2-6 球形地球中的飛彈相對位置圖.....	7
圖 2-7 飛彈飛行距離投影在地球表面上.....	9
圖 2-8 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(I).....	9
圖 2-9 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(II).....	10
圖 2-10 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(III).....	10
圖 2-11 飛彈在重立場中的極座標圖.....	11
圖 2-12 固定座標系與移動座標系間的關係圖.....	11
圖 2-13 極座標系與Cartesian座標系中的飛彈軌跡.....	13
圖 2-14 飛彈軌跡為圓形運動軌跡( $\lambda=1$ ).....	16
圖 2-15 飛彈軌跡為橢圓運動軌跡( $\lambda=0.6$ ).....	16
圖 2-16 飛彈軌跡為橢圓運動軌跡( $\lambda=1.3$ ).....	17
圖 2-17 飛彈軌跡為拋物線運動軌跡( $\lambda=2$ ).....	17
圖 2-18 飛彈攻擊 8000 海里外的目標.....	18
圖 2-19 飛彈攻擊 8000 海里外的目標.....	18
圖 2-20 飛彈在圓球型地球受力圖.....	19
圖 2-21 飛彈在旋轉扁圓地球中之受力圖.....	20
圖 3-1 飛彈彈體受力圖.....	23
圖 3-2 彈道飛彈不同飛行階段示意圖.....	29
圖 3-3 地球旋轉之座標系.....	32
圖 3-4 彈道飛彈在重返大氣階段中受力圖.....	33
圖 4-1 我方飛彈與目標飛彈間之相對運動.....	35
圖 5-1 飛彈導引模擬場景說明圖.....	36
圖 5-2 我方飛彈與目標飛彈相對座標圖.....	37
圖 5-3 飛彈攔截相對座標圖.....	38
圖 5-4 我方飛彈追擊目標飛彈之軌跡說明圖.....	38
圖 5-5 Matlab 使用畫面.....	39
圖 5-6 UITBM2 程式執行畫面.....	39
圖 5-7 飛彈參數設定說明圖.....	40
圖 5-8 模擬程式執行說明圖.....	40

圖 5-9 改變觀察視角說明圖	41
圖 5-10 模擬程式流程圖	42
圖 5-11 TBM3DG 程式流程圖	43
圖 5-12 MISODE 程式流程圖	43
圖 5-13 ODE45 SOLVER 程式流程圖	44
圖 6-1 飛彈防禦系統之中途導引與終端導引示意圖	46
圖 6-2 智慧型雷達預估器的系統架構	48
圖 6-3 二維矩陣之自我組織特徵映射	49
圖 6-4 SOM 的架構與運算單元	50
圖 6-5 鄰近區域函數:正方形	54
圖 6-6 鄰近區域函數:六邊形	54
圖 6-7 飛彈軌跡模擬與智慧型雷達預估器的系統架構	56
圖 6-8 球形地球中地心與飛彈的相對位置圖	58
圖 6-9 飛彈軌跡預測結果	60
圖 6-10 局部放大圖 6-9 之飛彈軌跡預測結果	60
圖 6-11 鍵結值改變的情形	61
圖 6-12 飛彈軌跡預測結果	61
圖 6-13 局部放大圖 6-12 之飛彈軌跡預測結果	62
圖 6-14 鍵結值改變的情形	62
圖 6-15 飛彈軌跡預測結果	63
圖 6-16 局部放大圖 6-15 之飛彈軌跡預測結果	63
圖 6-17 鍵結值改變的情形	64
圖 6-18 飛彈軌跡預測結果	64
圖 6-19 局部放大圖 6-18 之飛彈軌跡預測結果	65
圖 6-20 鍵結值改變的情形	65
圖 6-21 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	69
圖 6-22 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	69
圖 6-23 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	70
圖 6-24 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	70
圖 6-25 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	71
圖 6-26 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置 的估測值與理想值之間誤差變化情形	71
圖 6-27 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	

的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	72
圖 6-28 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	72
圖 6-29 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	73
圖 6-30 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	73
圖 6-31 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	74
圖 6-32 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	74
圖 6-33 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	77
圖 6-34 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	77
圖 6-35 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	78
圖 6-36 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	78
圖 6-37 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	79
圖 6-38 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	79
圖 6-39 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	80
圖 6-40 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	80
圖 6-41 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	81
圖 6-42 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	81
圖 6-43 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	82
圖 6-44 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	82
圖 6-45 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	85
圖 6-46 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 x 座標位置	

的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	85
圖 6-47 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	86
圖 6-48 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 y 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	86
圖 6-49 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	87
圖 6-50 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	87
圖 6-51 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	88
圖 6-52 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 r	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	88
圖 6-53 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	89
圖 6-54 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\alpha$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	89
圖 6-55 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	90
圖 6-56 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標 $\beta$	
的估測值與理想值之間誤差變化情形·····	90



# 表 目 錄

表(一) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值.....	75
表(二) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值.....	83
表(三) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值.....	91

# 1. 前言

本計畫主要在建立不同彈道飛彈軌跡模式，以利雷達在初期即可對 TBM 的種類、彈道軌跡彈著點與彈道軌跡發射點等做精確預測，再配合反彈道飛彈於第一時間內攔截來襲飛彈，並發射飛彈摧毀敵人彈道飛彈發射陣地，即可達到預期攔截效果，並避免敵人的持續攻擊。

由於，彈道飛彈軌跡方程式通常沒有 closed-form 的解，因此，必須利用數值積分方法去解這些方程式，在附錄 A 我們提出了一種適合處理這個問題的數值積分方法。為了確立飛彈軌跡方程式，我們參考文獻資料，在第二章將飛彈軌跡方程式依不同的假設條件整理出來，並以數值模擬比較其中的差異，如此，對往後彈道軌跡的判別會很有助益；第三章主要在描述彈道飛彈的三種不同飛行軌跡階段，包括：動力飛行階段、自由飛行階段及重返階段；第四章主要在描述飛彈之終端導引律，並在第五章提出了我們所設計的飛彈攔截軌跡 3D 動畫呈現模擬程式。

有了飛彈軌跡的動態方程式之後，我們在第六章中提出了飛彈軌跡的辨識方法，利用 Kalman filter 與類神經網路可以有效的辨識出飛彈的軌跡。最後，對本計畫執行成果作個總結，並為未來的執行方式作說明。

## 2. 飛彈動態軌跡方程式

本章主要目的在探討不同假設狀況下之飛彈動態方程式，並提供相關的數值模擬圖形以茲驗證，而模擬程式所使用的二階數值積分方法，詳如附錄 A 所示。

### 2.1. 狀況一：平面地球上無空氣阻力之質點運動軌跡

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球表面為平面，
- 3) 設重力加速度  $g$  為一作用方向不變、大小不變的常數，其值與高度無關，
- 4) 設無空氣阻力作用。

設飛彈初始速度  $v_0$  且飛行角度為  $\gamma_0$ ，如圖 2-1 所示，則飛彈在直角座標系飛行時，其動態方程式為：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \quad (2-1)$$

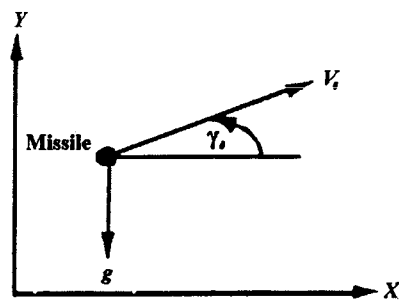


圖 2-1 平面地球中的飛彈受力圖(無空氣阻力)

將式(2-1)積分兩次，可得飛彈之飛行軌跡為：

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \gamma_0)t \\ y = (v_0 \sin \gamma_0)t - 0.5gt^2 \end{cases} \quad (2-2)$$

將上式整理消去時間變數  $t$ ，可得軌跡方程式為一拋物線方程式：

$$y = (\tan r_0)t - \frac{g}{2v_0^2 \cos r_0} x^2 \quad (2-3)$$

當飛彈擊中目標時，即高度為零，令式(2-2)中之  $y=0$ ，則全部飛行時間  $T$  為：

$$T = \frac{2v_0 \sin r_0}{g} \quad (2-4a)$$

將式(2-4a)帶入式(2-2)中的  $x$ ，可得飛彈射程  $R$  為：

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2r_0}{g} \quad (2-4b)$$

由式(2-4b)可發現，當初始速度  $v_0$  固定時，飛彈最大射程發生在初始飛行角度  $\gamma_0 = 45^\circ$  時。當  $y=0$  時，飛彈可達到其最大高度，此時的飛行時間與高度分別為：

$$\begin{cases} t = \frac{v_0 \sin r_0}{g} \\ H = \frac{v_0 \sin^2 r_0}{2g} \end{cases} \quad (2-5)$$

圖 2-1 為在此種假設狀況下，不同初始發射角的飛彈軌跡，可發現當  $\gamma_0 = 45^\circ$  時，飛彈有最遠的射程。

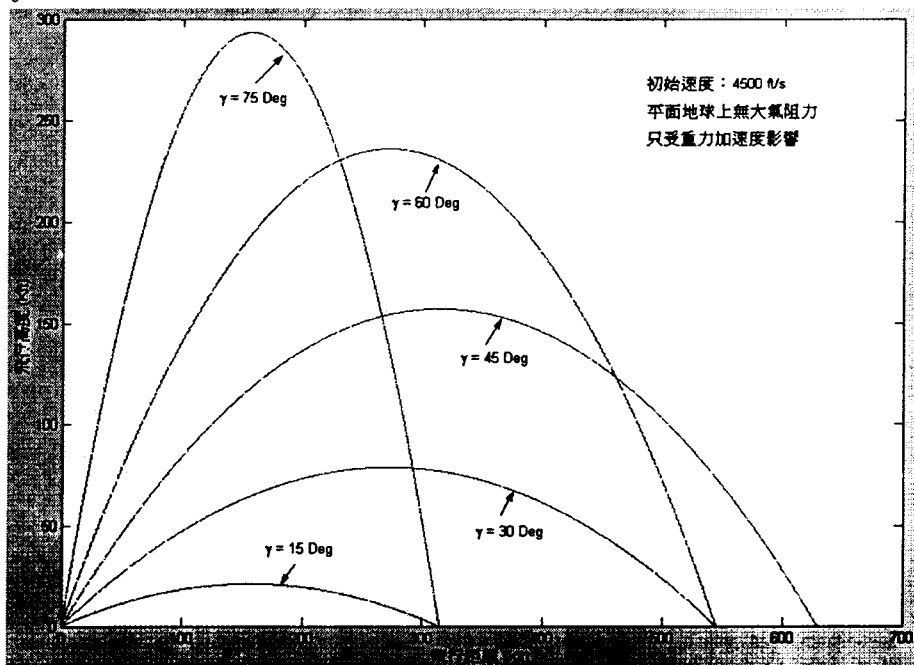


圖 2-2 不同發射角之軌跡模擬圖

## 2.2. 況狀二：平面地球上有空氣阻力之質點運動軌跡

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球表面為平面，
- 3) 設重力加速度  $g$  為一作用方向不變、大小不變的常數，其值與高度無關，
- 4) 設空氣阻力作用方向與質點運動方向相反。

作用在地球空間中任一質點上的力如圖 2-3 所示：

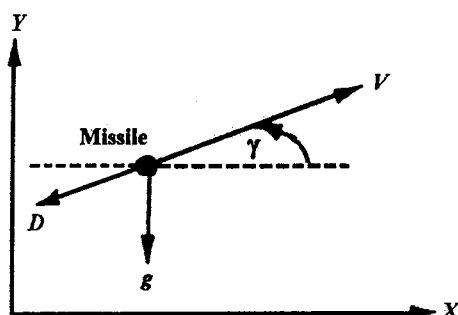


圖 2-3 平面地球中的飛彈受力圖(有空氣阻力)

飛彈在大氣層中飛行時，由於氣體運動所產生的阻力影響會使飛行速度變慢，此阻力  $D$  為：

$$D = QS_{ref}C_{D0} \quad (2-6)$$

其中， $Q$  表動壓， $S_{ref}$  表飛彈參考截面積， $C_{D0}$  為零升力時的阻力。而

動壓與氣體密度  $\rho$  ( $\text{slug}/\text{ft}^3$ ) 和彈體速度  $V$  有關：

$$Q = \frac{\rho \cdot V^2}{2} \quad (2-7)$$

零升力阻力為飛彈速度和氣動力模型的函數。因為氣體密度會隨著高度而遞減，所以氣體阻力在高度越低時影響越大，其近似方程式為：

$$\begin{cases} \rho = 0.002378e^{-h/30000} & (h < 30000 \text{ ft}) \\ \rho = 0.0034e^{-h/22000} & (h \geq 30000 \text{ ft}) \end{cases} \quad (2-8)$$

其中， $h$  的單位為英尺。忽略其他阻力因素，阻力  $D$  可以牛頓第二運動定律來表示：

$$F = ma = -D = m \frac{dV}{dt} \quad (2-9)$$

因此速度改變率可寫成：

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-D}{m} = \frac{-QS_{ref}C_{D0}}{m} = \frac{-0.5\rho V^2 S_{ref}C_{D0}}{m} \quad (2-10)$$

兩邊取積分，可得：

$$\int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^2} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{-0.5\rho S_{ref}C_{D0}}{m} dt \quad (2-11)$$

假設  $\rho$  在同高度時不變，且  $C_{D0}$  為常數，則：

$$\frac{1}{V_1} = \frac{\rho S_{ref}C_{D0}\Delta t}{2m} + \frac{1}{V_0} \quad (2-12)$$

其中， $V_0$  表初速度， $V_1$  表經過  $\Delta t$  秒後的速度，而  $\Delta t$  為：

$$\Delta t = t_1 - t_0 \quad (2-13)$$

為方便起見，將彈體重量、參考截面積與零升力阻力表為一參數，此參數為彈道係數  $\beta$  ( $\text{lb}/\text{ft}^2$ )，定義為：

$$\beta = \frac{W}{C_{D0}S_{ref}} \quad (2-14)$$

故速度改變率可改寫成：

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\rho S_{ref}C_{D0}V^2}{2m} = \frac{QS_{ref}C_{D0}}{W/g} = \frac{Qg}{\beta} \quad (2-15)$$

因此，飛彈在直角座標系飛行時的動態方程式為：

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{D}{m} \cos \gamma = -\frac{Qg}{\beta} \cos \gamma \\ \ddot{y} = -\frac{D}{m} \sin \gamma - g = -\frac{Qg}{\beta} \sin \gamma - g \end{cases} \quad (2-16)$$

圖 2-4 顯示不同的  $\beta$  值與無空氣阻力時的飛彈軌跡圖形，可發現  $\beta$  值越小時，飛彈飛行高度越低且飛行距離越短。圖 2-5 為有初始高度時的飛彈飛行軌跡。

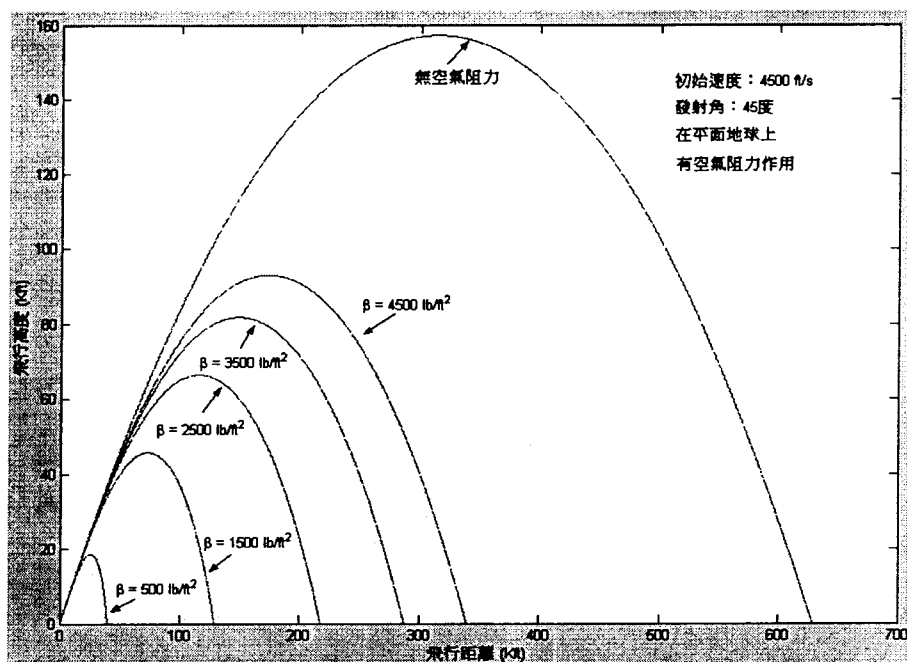


圖 2-4 不同的  $\beta$  值與無空氣阻力時的比較

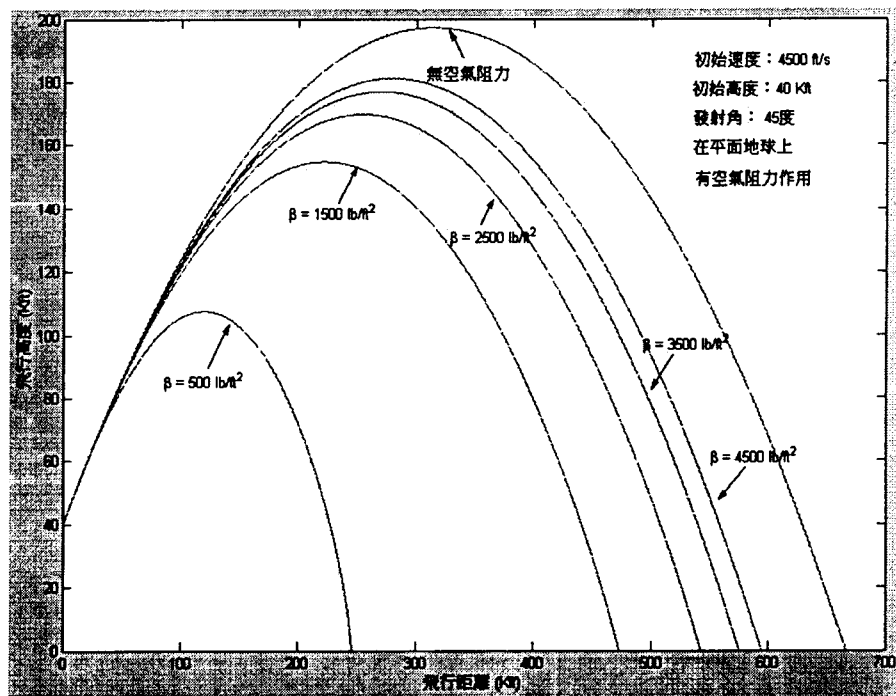


圖 2-5 飛彈發射有初始高度時

## 2.3. 狀況三：球形地球上無空氣阻力之質點運動軌跡

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球為一半徑  $a$ 、質量  $M$  之均勻分佈球體，
- 3) 由牛頓萬有引力定律可得：質量分別為  $m$  與  $M$  之兩物體，其距離為  $r$ ，則作用在兩者之間的引力為大小相同、方向相反之力，其大小與兩物體相乘成正比，而與兩物體間的距離平方成反比，若其中一物體為地球，而另一物體的質量與地球相比可忽略不計，則牛頓萬有引力定律可被改寫成向量型式：

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-gM\vec{r}}{r^3} \quad (2-17)$$

其中， $\vec{r}$  表從地球中心到另一物體的向量， $gM$  為重力常數：

$$gM = 1.4077 \times 10^{16} \text{ ft}^3 / \text{s}^2 \quad (2-18)$$

- 4) 設地球之自轉速率為零，
- 5) 設無空氣阻力作用。

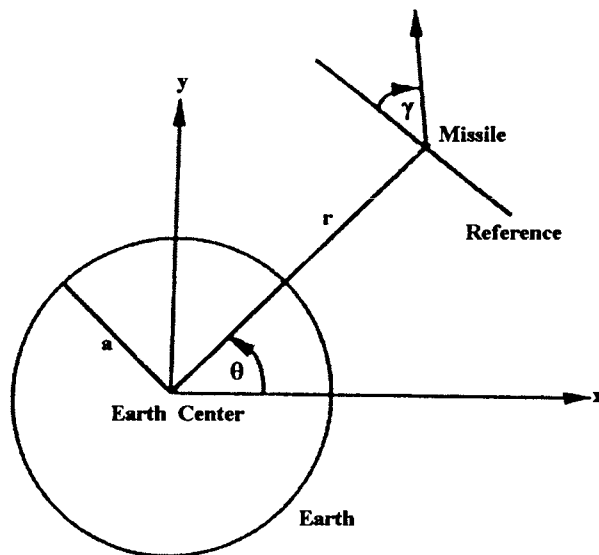


圖 2-6 球形地球中的飛彈相對位置圖



### 2.3.1. 慣性座標分析

在重立場中的物體可被描述成在以地球中心為中心點的座標系中(如圖 2-6)，此系統中地球不旋轉，且作用在飛彈上的重力加速度指向地心，在飛彈的參考座標系上有一速度  $V$ ，此參考座標系與地球正切並垂直於地心到飛彈的連線。將  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  帶入式(2-17)中，則牛頓萬有引力定律可被表示在以地球中心為中心點的慣性座標系中：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-gMx}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \\ \ddot{y} = \frac{-gMy}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \end{cases} \quad (2-19)$$

其中， $x$  和  $y$  為從地心到飛彈間的距離分量。由圖 2-6 可得式(2-19)的初始條件為：

$$\begin{cases} x(0) = (a + a_{m_0}) \cdot \cos \theta_0 \\ y(0) = (a + a_{m_0}) \cdot \sin \theta_0 \\ \dot{x}(0) = V \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \theta_0\right) \\ \dot{y}(0) = V \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \theta_0\right) \end{cases} \quad (2-20)$$

其中， $a_{m_0}$  表飛彈相對地球表面的初始高度， $\gamma$  表相對參考座標系的速度向量夾角， $\theta_0$  表飛彈位置與  $x$  軸的初始角度。由初始值與式(2-19)可利用疊代法求出飛彈的軌跡，其中飛彈飛行高度為：

$$a_m = \sqrt{x^2 + y^2} - a \quad (2-21)$$

飛彈沿著地球表面的飛行距離可由圖 2-7 求出。設飛彈的初始向量位置為：

$$\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \quad (2-22)$$

而飛行某一時間後的位置為：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2-23)$$

則兩向量  $\vec{r}_0$  與  $\vec{r}$  的夾角  $\theta$  可由向量內積求出：

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_0| |\vec{r}|} \quad (2-24)$$

因此，飛彈投影在圓形地球表面的飛行距離為：

$$r_m = a \cdot \theta \quad (2-25)$$

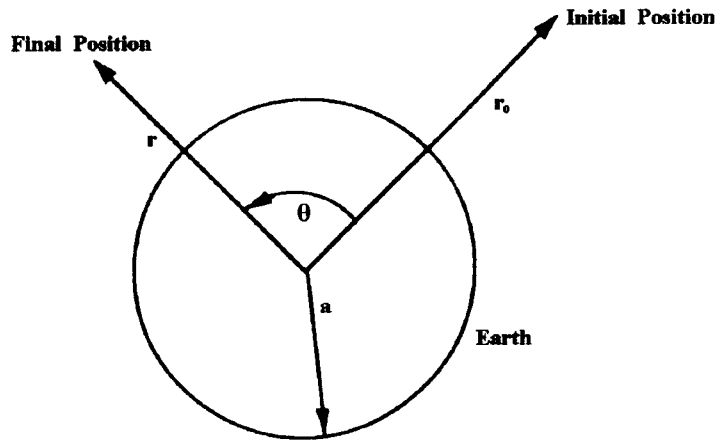


圖 2-7 飛彈飛行距離投影在地球表面上

圖 2-8 至 2-10 為在平面地球座標系和球心座標系之飛彈軌跡比較圖，當飛彈初始速度很小時，兩座標系之飛彈軌跡非常接近，但當飛彈初始速度越來越大時，兩座標系的飛彈軌跡有很明顯的差別出現，這是由於對地球重力加速度作用方向假設不同所引起的現象。

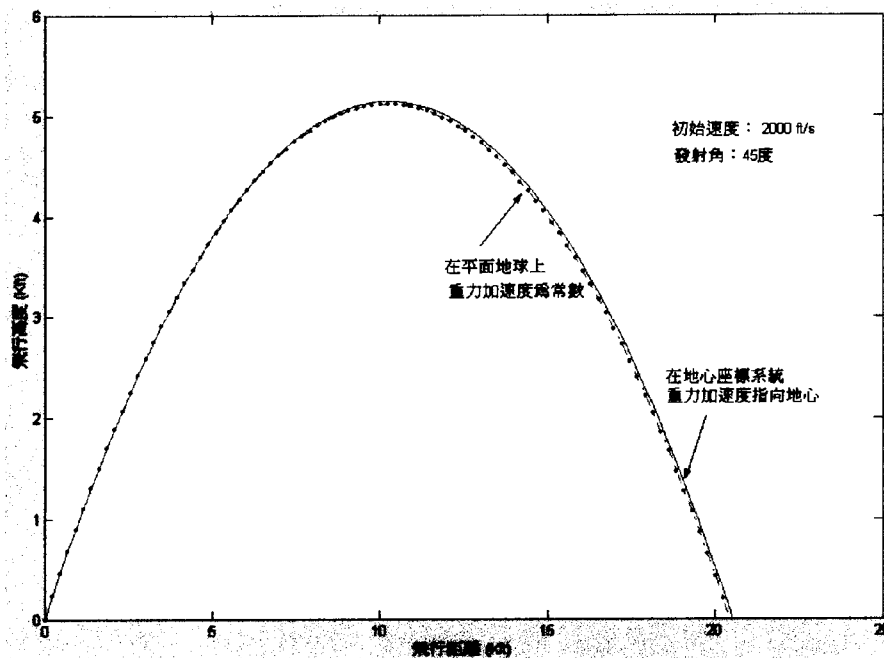


圖 2-8 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(I)

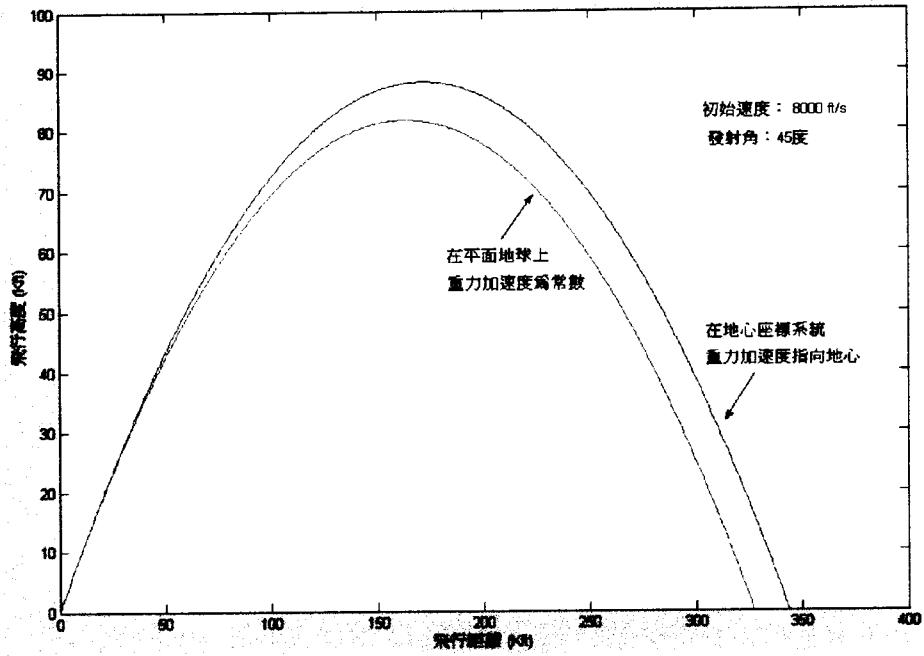


圖 2-9 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(II)

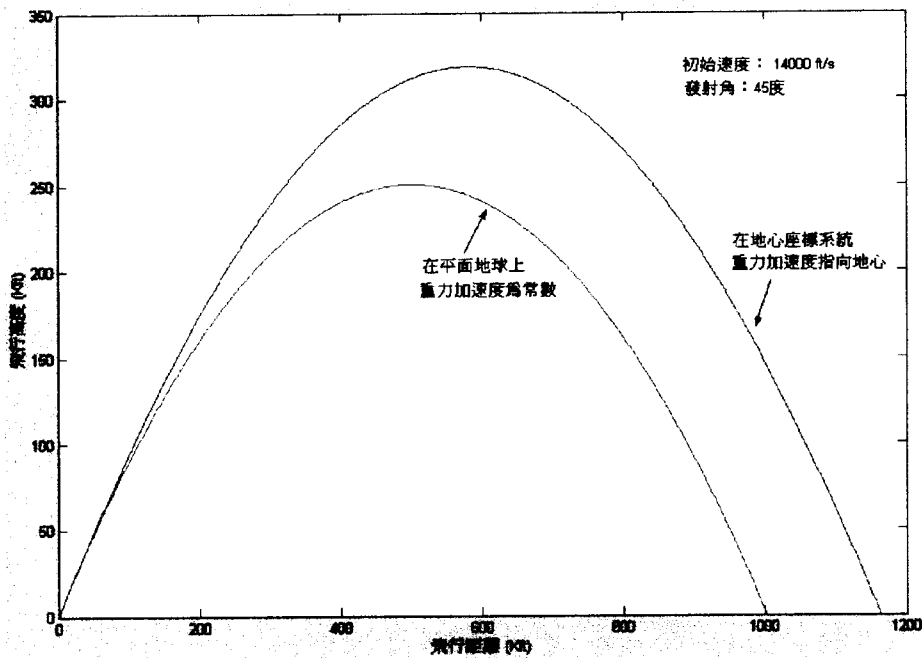


圖 2-10 平面地球座標系和球心座標系的飛彈軌跡比較圖(III)

### 2.3.2. 極座標分析

雖然在模擬飛彈軌跡上，地球中心座標系統已經非常好用，因其在慣性座標系中可直接積分，大大簡化了計算的困難度，然而，為了觀察在重立場中的自然彈道軌跡與獲得 closed-form 解，利用極座標系統來做分析會更方便，此極座標系統的原點在地球圓心上，如圖

2-11 所示。在此圖中，有一移動的座標系統以飛彈為圓點，此一新的座標系有一沿著距離向量的分量  $\vec{i}'$  和垂直  $r$  的分量  $\vec{j}'$ ，慣性地球中心座標系統與移動座標系統間的關係如圖 2-12 所示。

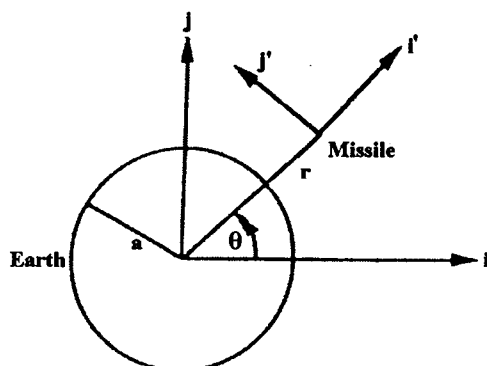


圖 2-11 飛彈在重立場中的極座標圖

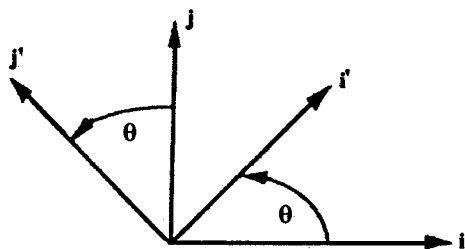


圖 2-12 固定座標系與移動座標系間的關係圖

由圖 2-12 可得固定座標系與移動座標系間的關係：

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{j}' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases} \quad (2-26)$$

由於新座標系統會移動，可表示其對  $\theta$  的改變率為：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}'}{d\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{j}' \\ \frac{d\vec{j}'}{d\theta} = -\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j} = -\vec{i}' \end{cases} \quad (2-27)$$

而新座標系對時間函數的改變率為：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{i}'}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{j}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{j}'}{d\theta} = -\dot{\theta} \vec{i}' \end{cases} \quad (2-28)$$

距離向量  $\vec{r}$  可以移動座標系統表示：

$$\vec{r} = r\vec{i}' \quad (2-29)$$

將上式微分可得：

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\vec{i}}' + \dot{r}\vec{i}' \quad (2-30)$$

整理式(2-28)和(2-30)可得：

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\vec{j}' + \dot{r}\vec{i}' \quad (2-31)$$

再將上式微分：

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{i}' + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}' \quad (2-32)$$

由於重力加速度沿著  $\vec{i}'$ ，而在  $\vec{j}'$  上沒有加速度，因此，上式的向量微分方程式可被表示成下列微分方程式：

$$\begin{cases} \frac{-gM}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \quad (2-33)$$

由於

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (2-34)$$

積分上式可得：

$$r^2\dot{\theta} = (a + a_m) \cdot V \cos \gamma \quad (2-35)$$

因此，利用極座標系統所描述的飛彈在重立場中的微分方程式如下所示：

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{gM}{r^2} = 0 \\ r^2\dot{\theta} = (a + a_m) \cdot V \cos \gamma \end{cases} \quad (2-36)$$

圖 2-13 顯示在極座標系與 Cartesian 座標系中的飛彈軌跡，可發現用不同座標系表示的飛彈軌跡圖形是相同的。

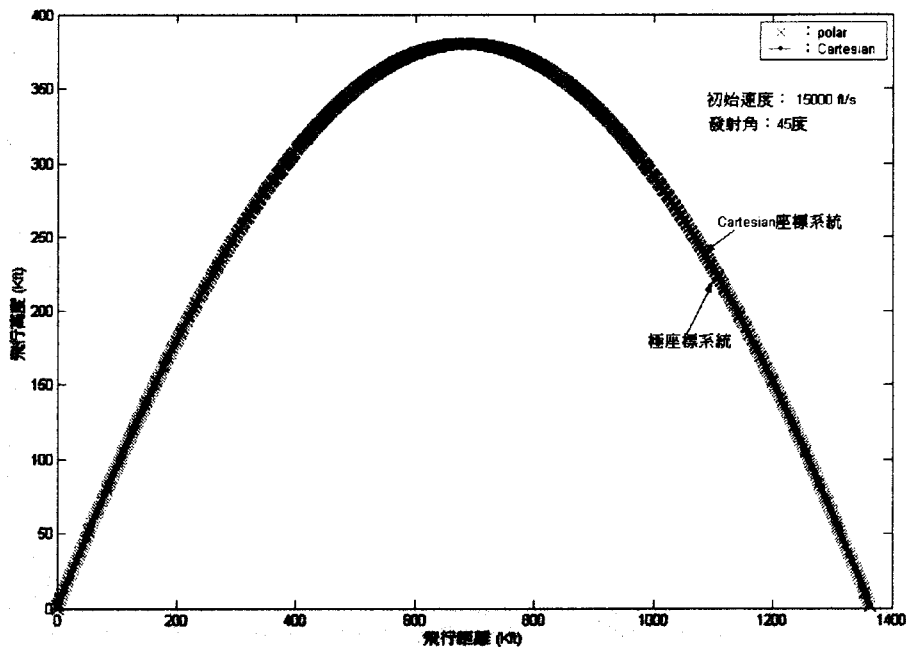


圖 2-13 極座標系與 Cartesian 座標系中的飛彈軌跡

### 2.3.3. Closed-form 解

設常數項  $r_0$  和  $p$  分別為：

$$\begin{cases} r_0 = a + a_m \\ p = (a + a_m) \cdot V \cos \gamma \end{cases} \quad (2-37)$$

此外，為了將式(2-36)的兩個極座標微分方程式轉成一個二階微分方程式，故另設一變數  $u$  為：

$$u = \frac{1}{r} \quad (2-38)$$

將上式對  $t$  微分可得下面兩個方程式：

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = \frac{p}{r^2} \frac{du}{d\theta} \quad (2-39)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{dt} \quad (2-40)$$

整理式(2-39)和(2-40)可得：

$$\frac{dr}{dt} = -p \frac{du}{d\theta} \quad (2-41)$$

定義  $z = \frac{dr}{dt}$ ，將  $z$  對時間  $t$  微分可得：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dz}{d\theta} = \frac{p}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{dr}{dt} \right] = \frac{p}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -p \frac{du}{dt} \right] \quad (2-42)$$

所以，

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-p^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (2-43)$$

將上式帶入式(2-36)可得：

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{gM}{r^2} = 0 = \frac{-p^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - r \frac{p^2}{r^4} + gMu^2 \quad (2-44)$$

簡化上式可得：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{gM}{p^2} \quad (2-45)$$

為了分析方便，定義新常數：

$$\lambda = \frac{r_0 V^2}{gM} \quad (2-46)$$

因此，式(2-45)變成：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\lambda \cdot r_0 \cos^2 \gamma} \quad (2-47)$$

又

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{p} \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{r_0 \cdot V \cos \gamma} \frac{dr}{dt} \quad (2-48)$$

經過複雜的計算，二階微分方程式的解為：

$$u = \frac{1 - \cos\theta}{\lambda \cdot r_0 \cos^2 \gamma} + \frac{1 \cos(\theta + \gamma)}{r_0 \cos \gamma} \quad (2-49)$$

其中，初始條件為：

$$\begin{cases} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = V \cdot \sin \gamma \\ \frac{du}{d\theta}(0) = \frac{-\tan \gamma}{r_0} \\ u(0) = \frac{1}{r_0} \end{cases} \quad (2-50)$$

將式(2-38)帶入式(2-49)，可得：

$$r = \frac{r_0 \lambda \cos^2 \gamma}{1 - \lambda \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \gamma - \cos \theta (1 - \lambda \cos^2 \gamma)} \quad (2-51)$$

而極座標系統中的橢圓方程式為：

$$r = \frac{a_1(1 - e^2)}{1 - e \cdot \sin \theta \cdot \sin \omega - e \cdot \cos \theta \cdot \cos \omega} \quad (2-52)$$

其中， $a_1$  為橢圓半軸， $e$  為橢圓偏心率， $\omega$  為頂點的幅角。因此，當式(2-51)與(2-52)相等時，closed-form 的解也是橢圓方程式，即下列兩式成立時：

$$\begin{cases} e \cdot \sin \omega = \lambda \cdot \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ e \cdot \cos \omega = 1 - \lambda \cdot \cos^2 \gamma \end{cases} \quad (2-53)$$

整理式(2-53)可得：

$$e = \sqrt{1 + \lambda(\lambda - 2)\cos^2 \gamma} \quad (2-54)$$

當  $e=0$  時，軌跡方程式為圓形，當  $0 < e < 1$  時，軌跡方程式為橢圓，當  $e=1$  時，軌跡方程式為拋物線，當  $e > 1$  時，軌跡方程式為雙曲線；由式(2-43)中可得出，如果飛行路徑角  $\gamma=0$  時，當  $\lambda=1$  時，



可得圓形運動軌跡(如圖 2-14)，當  $0 < \lambda < 2$  時，可得橢圓運動軌跡(如圖 2-15、2-16)，當  $\lambda = 2$  時，可得拋物線運動軌跡(如圖 2-17)，當  $\lambda > 2$  時，可得雙曲線運動軌跡；而初始速度也可以  $\lambda$  項來表示：

$$V = \sqrt{\frac{\lambda gM}{r_0}} \quad (2-55)$$

因此，可以由初始速度的大小來決定飛彈軌跡的形狀。

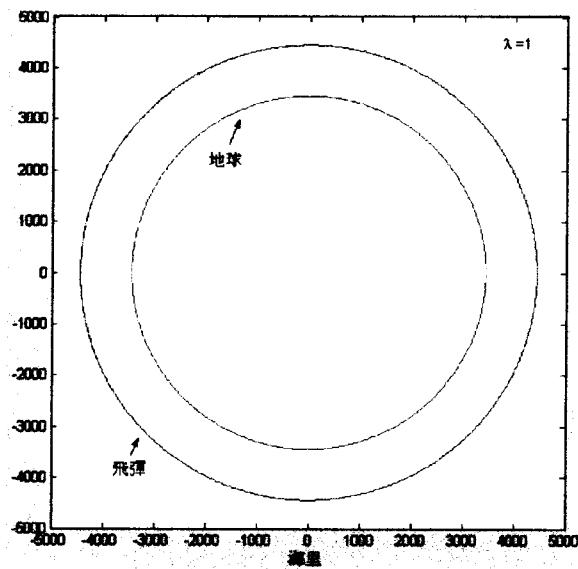


圖 2-14 飛彈軌跡為圓形運動軌跡( $\lambda=1$ )

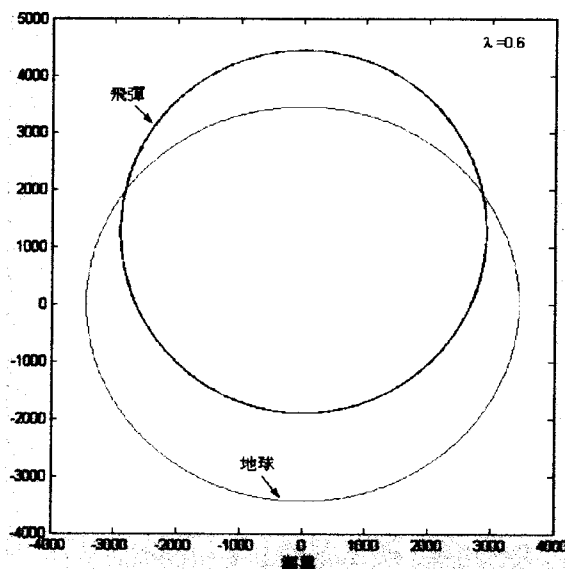


圖 2-15 飛彈軌跡為橢圓運動軌跡( $\lambda=0.6$ )

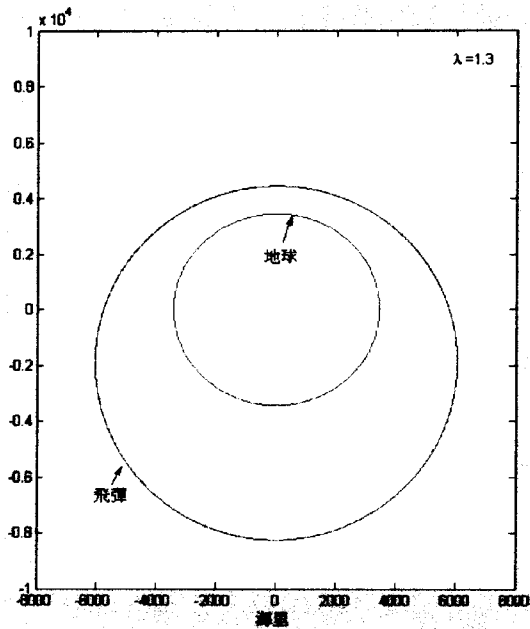


圖 2-16 飛彈軌跡為橢圓運動軌跡( $\lambda=1.3$ )

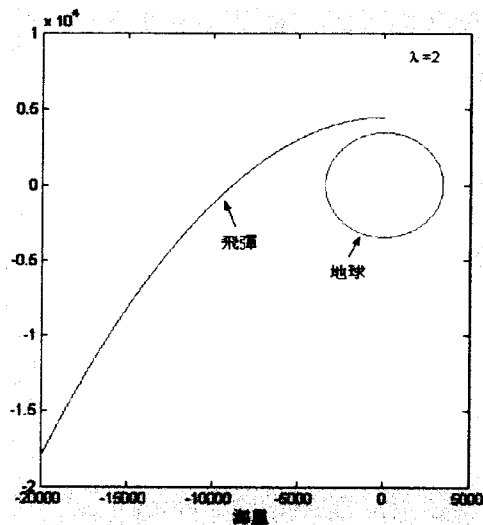


圖 2-17 飛彈軌跡為拋物線運動軌跡( $\lambda=2$ )

### 2.3.4. 定點攻擊方程式

當希望飛彈飛行  $r_m$  的距離時，則飛彈繞地心的角度  $\phi$  為：

$$\phi = \frac{r_m}{a} \quad (2-56)$$

其中， $a$  為地球半徑。當  $r=a$  時，飛彈會擊中地球上的目標，因此，將  $r=a$ 、 $\theta=\phi$  和式(2-46)帶入式(2-51)的軌跡方程式可得初始速度：

$$V = \sqrt{\frac{gM \cdot (1 - \cos \phi)}{r_0 \cdot \cos \gamma \left[ \frac{r_0 \cdot \cos \gamma}{a} - \cos(\phi + \gamma) \right]}} \quad (2-57)$$

圖 2-18 為欲攻擊 8000 海里外的目標，使用式(2-57)推測飛彈初始速度後，所得到的彈道軌跡模擬圖，雖然，初始速度方程式是由極座標系統推導出來的，但我們是利用 Cartesian 座標系來模擬。圖 2-19 顯示相同的彈道軌跡資訊，但包含了地球表面的曲線。

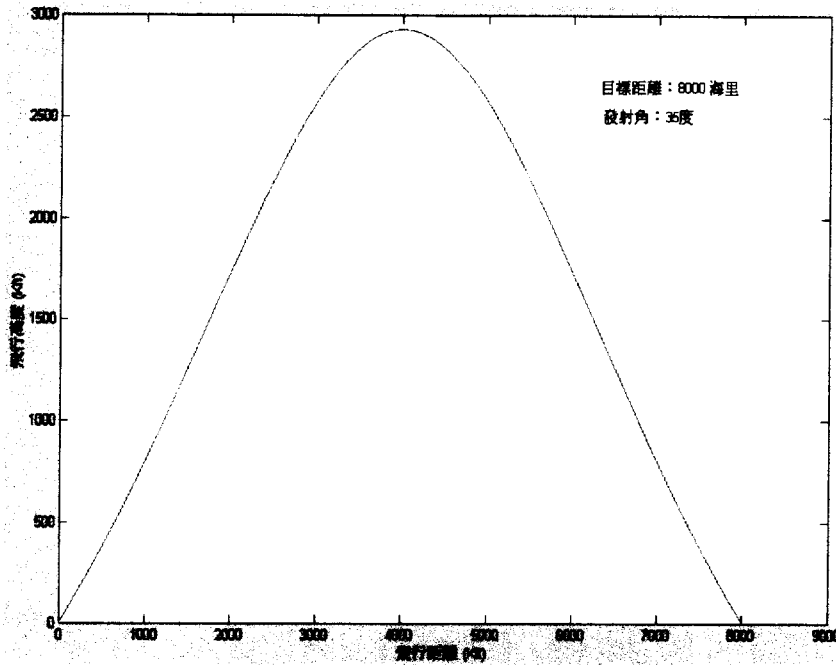


圖 2-18 飛彈攻擊 8000 海里外的目標

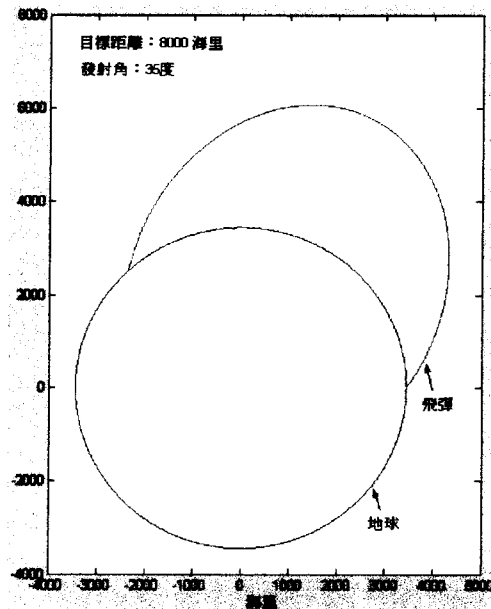


圖 2-19 飛彈攻擊 8000 海里外的目標

## 2.4. 狀況四：圓球形地球自轉且在無空氣阻力下之質點運動軌跡

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球為一半徑  $R_e$  之均勻分佈球體，
- 3) 設地球對質點之引力如式(2-17)所示，
- 4) 設地球以一固定之角速度  $\omega$  對  $Z$  軸旋轉，如圖 2-20 所示。

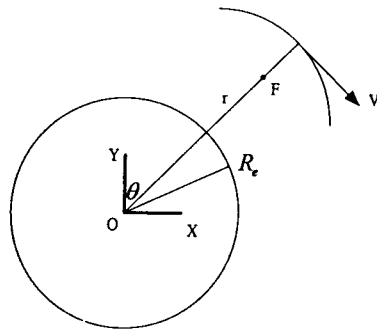


圖 2-20 飛彈在圓球型地球受力圖

在直角座標系中，飛彈之動態方程式為：

$$\ddot{x} = \frac{-GR_e^2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + 2\omega \dot{y} + \omega^2 x \quad (2-58a)$$

$$\ddot{y} = \frac{-GR_e^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + 2\omega \dot{x} + \omega^2 y \quad (2-58b)$$

$$\ddot{z} = \frac{-GR_e^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2-58c)$$

在式(2-58a)與(2-58b)中，右邊第一項表引力作用，而後兩項是由地球對  $Z$  軸自轉所產生的，最後一項表離心力(centrifugal force)，另一項表科氏力(coriolis force)。

## 2.5. 狀況五：旋轉之扁圓地球且在空氣阻力作用下之質點運動軌跡

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球為一扁圓均勻分佈球體，
- 3) 設地球對質點之引力如式(2-59a)右邊第一、二項及式(2-59b)右邊第一項所示，
- 4) 設地球以一固定之角速度  $\omega$  對  $Z$  軸旋轉，
- 5) 設空氣阻力作用方向與質點運動方向相反，其大小如式(2-6)所示，
- 6) 設在無風狀態下。

如圖 2-21 所示， $O$  表地球球心， $Z$  軸為其旋轉軸，則飛彈動態方程式為：

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r(\dot{\theta} - \omega)^2 \sin^2 \phi = \frac{-GR_e^2}{r^2} - \frac{3JGR_e^2}{r^2} \left( \frac{1}{3} - \cos^2 \phi \right) - \frac{\rho AC_D vr}{2m} \quad (2-59a)$$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} (r^2 \dot{\phi}) - r^2 (\dot{\theta} - \omega)^2 \sin \phi \cos \phi \right] = \frac{2JGR_e^4}{r^3} \sin \phi \cos \phi - \frac{1}{2} \rho AC_D vr \dot{\theta} \sin \phi / m \quad (2-59b)$$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} r^2 (\dot{\theta} - \omega)^2 \sin^2 \phi \right] = -\frac{1}{2} \rho AC_D vr \dot{\phi} / m \quad (2-59c)$$

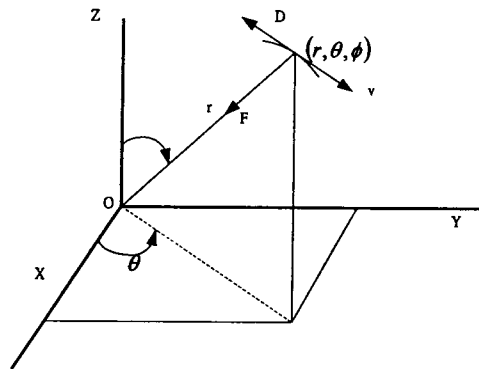


圖 2-21 飛彈在旋轉扁圓地球中之受力圖

而飛彈速度大小為：

$$v = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (2-60)$$

式(2-59a)與(2-59b)之常數  $J$  是由於地球之扁圓而來 ( $J \approx 1.637 \times 10^{-3}$ )。

### 3. 彈道飛彈軌跡探討

上一章主要在探討基本之飛彈軌跡動態方程式，本章將進一步探討可能之彈道飛彈軌跡方程式。彈道飛彈軌跡通常可分成三個階段：

- 1) 動力飛行(power flight)階段：由飛彈發射點至燃料燃畢或推力終了為止，在此一階段通常包括推力及導引控制飛行；
- 2) 自由飛行(free-flight)階段：通常為在大氣層外之真空飛行階段；
- 3) 重返(re-entry)階段：為飛彈重返大氣層起至落地點為止，通常為自由飛行，但為了增加飛彈擊中目標之準確性，可加入導引控制。

在搜尋與比較一些資料後，本章整理其他研究人員之相關研究成果([2]-[8])，茲說明如下述。

#### 3.1. 動力飛行階段

一般彈道飛彈發射方式可分為固定基地發射或移動式基地發射，不管發射之方式為何，飛彈由發射時至燃料燃畢或推力終了時之軌跡稱為動力飛行軌跡，不管發射方式為何，為了計算此階段的飛行軌跡，必須知道飛彈發射時之位置、方位、仰角及速度等初始值。

彈道飛彈在動力飛行過程中，為了使飛彈接近某一特定之飛行軌跡，飛彈之導引及控制系統須依據一組稱為“俯仰程式”(pitch programs) 的指令以達成各種需求，例如，使飛彈在推力終止時得到最大的準確度或在動力飛行過程中有最大的射程與最小的側向加速度等需求，這些需求將影響到俯仰程式的設計。為了設計出最適合的動力飛行軌跡須考慮許多的影響因素，包括導引系統之需求、火箭發動器之特性、結構、穩定性等影響因素，以下將介紹在此飛行階段所需考慮的一般設計。

##### 3.1.1. 火箭發動器及飛彈彈體參數

為了能計算出更精確之飛彈軌跡及其性能，以下將先介紹火箭推

進系統、推進劑、飛彈結構及酬載之部分特性：

- 1)  $t_b$ ：燃畢時間，火箭推進劑由發射至燃畢或推力終止之時間，
- 2)  $M_0$ ：飛彈初始總質量，包括推進劑、推進引擎、結構、導引控制裝備及酬載等，
- 3)  $M_p$ ：火箭推進劑之質量，
- 4)  $m$ ：彈體瞬時之總重量，
- 5)  $\zeta$ ：推進劑質量比，為推進劑質量  $M_p$  與彈體初始質量  $M_0$  之比，

$$\zeta = \frac{M_p}{M_0} \quad (3-1)$$

- 6)  $\lambda$ ：彈體質量比，為飛彈初始質量與推進劑燃盡後之質量比，

$$\lambda = \frac{M_0}{M_0 - M_p} = \frac{1}{1 - \zeta} \quad (3-2)$$

- 7)  $\dot{m}$ ：飛彈彈體質量變化率或推進劑質量流動率，

$$\dot{m} = \frac{-dM_p}{dt} = \frac{\dot{\omega}}{g} \quad (3-3)$$

其中， $\dot{\omega}$  為推進劑重量改變率，在大部分實例中， $\dot{m}$  與  $\dot{\omega}$  皆為時間之線性函數，設火箭推進劑耗損量為常數，則

$$\dot{m} = \frac{\zeta M_0}{t_b} \quad (3-4)$$

及

$$m = M_0 - \dot{m}t = M_0 \left(1 - \frac{\zeta \cdot t}{t_b}\right) \quad (3-5)$$

- 8)  $V_e$ ：氣流排出噴嘴之速度；而  $V_j$  或  $c$  為有效排出速度，
- 9)  $F$ ：為火箭推進系統作用於彈體上之推力(thrust)，

$$F = \dot{m}c \quad (3-6)$$

10)  $I_s$  : 比衝(specific impulse), 為推力與推進劑重量流動率之比值(單位為秒)

$$I_s = \frac{F}{\dot{w}} \quad (3-7)$$

由式(3-6)、(3-7)及(3-3)可得

$$I_s = \frac{c}{g} \quad (3-8)$$

### 3.1.2. 飛行軌跡動態方程式

由於彈道飛彈在動力飛行階段中的飛行距離僅佔全部射程之一小部份, 故可假設飛彈在平面地球上飛行且地球之重力場亦為常數。設飛彈彈體所受之力如圖 3-1 所示, 茲將彈體相關受力說明如下:

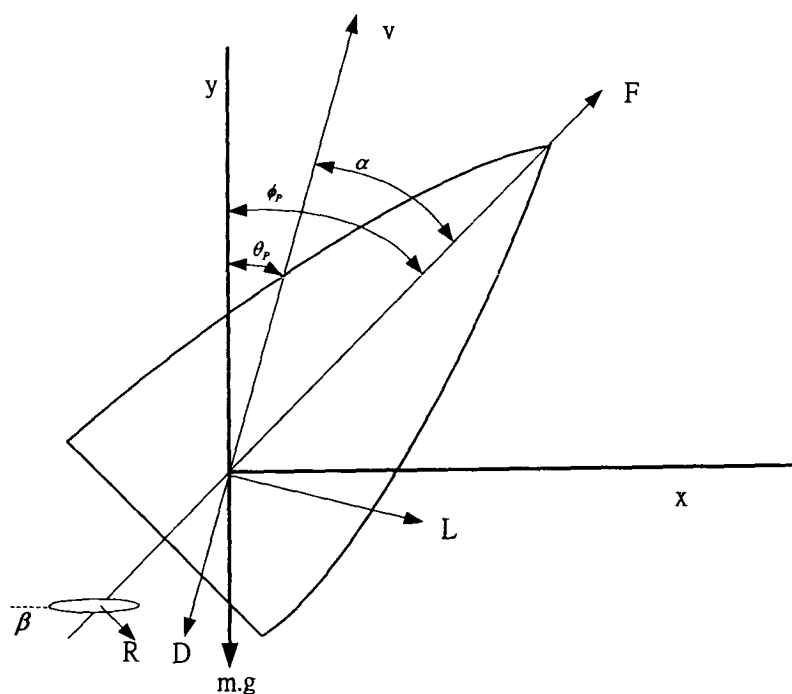


圖 3-1 飛彈彈體受力圖

- 1) 阻力(drag force)  $D$ : 作用於彈體上之力, 其作用方向與飛彈速度向量相反,



$$D = \frac{1}{2} \rho A C_D v^2 \quad (3-9)$$

2) 升力(lift force)  $L$ ：作用方向垂直於飛彈速度向量，

$$L = \frac{1}{2} \rho A C_L v^2 \quad (3-10)$$

3) 控制面力(vane force)  $R$ ：作用方向垂直於推力或垂直於速度向量，

$$R = f(\beta) \quad (3-11)$$

4) 旋轉力(cross-spin force)  $F_s$ ：作用於質心且垂直於彈體縱向軸，

$$F_s = k_0 \rho A^{\frac{3}{2}} v \dot{\phi}_p \quad (3-12)$$

5) 回復力矩(restoring moment)  $M_1$ ：作用於與俯仰面垂直之法線，主要功能在減小彈體之攻角，

$$M_1 = k_1 \rho A^{\frac{3}{2}} v^2 \sin \alpha \quad (3-13)$$

6) 俯仰力矩(pitching moment)  $M_2$ ：作用於與俯仰面垂直之法線，主要功能在減小彈體之擺動，

$$M_2 = k_2 \rho A^2 v \dot{\phi}_p \quad (3-14)$$

其中，式(3-9)至(3-14)及圖 3-1 之參數定義如下：

$\rho$  = 大氣密度，

$A$  = 彈體最大橫截面積，

$v$  = 速率，

$C_D$  = 阻力係數，

$C_L$  = 升力係數，

$\beta$  = 控制面角度，

$\phi_p$  = 彈體軸與垂直面之夾角，

$\alpha$  = 攻角，

$\theta_p = \phi_p - \alpha$  速度向量與垂直面之夾角，

$k_0, k_1, k_2$  = 係數。

推導飛彈運動方程式時，除了作用在飛彈上之氣動力外，作用在飛彈垂直方向的瞬時彈體重量  $mg$  及作用在彈體縱軸方向的推力  $F$  也必須加以考慮。假設上述力皆作用在同一平面上，則沿著切線及垂直於飛行路徑方向之運動方程式為：

$$m\dot{v} = F \cos \alpha - D - R \sin \alpha - mg \cos \theta_p \quad (3-15a)$$

$$mv\dot{\theta} = F \sin \alpha + L - R \cos \alpha + mg \sin \theta_p \quad (3-15b)$$

在直角座標系中，上述之運動方程式可改寫成：

$$m\ddot{x} = F \sin \phi_p - D \sin \theta_p + R \cos \phi_p + L \cos \theta_p \quad (3-16a)$$

$$m\ddot{y} = F \cos \phi_p - D \cos \theta_p - R \sin \phi_p - L \sin \theta_p - mg \quad (3-16b)$$

由於旋轉力  $F_s$  非常的小，因此，在式(3-15)及(3-16)中並不包括此項。除此之外，在式(3-15)及(3-16)中某些項次並不存在確切的公式解，故這些項次的值必須由實驗數據提供或經由數值積分方法得到近似的解。

### 3.1.3. 垂直上升(Vertical Ascent)

以飛彈發射觀點來討論，垂直發射可能是最簡單且可行之一種方式，此時不需要滑軌也不必考慮到彈體摩擦力，飛彈只要脫離其支撐物並以足夠之推力將其脫離發射點即可。如飛彈以垂直上升方式發射，則飛彈在大氣層內可能會有較短路徑，且空氣阻力的影響也將最小，此外，垂直上升發射也是一種最容易分析的動力飛行軌跡，經由分析在動力飛行階段的飛彈運動可了解到飛彈設計特性對飛彈性能的影響。

當飛彈以垂直方式發射，假設飛彈推力大小不變、推進劑燃率不變、零升力、零攻角及控制面所產生之力為零，則式(3-15)可減化為：

$$\dot{v} = \frac{F - D}{m} - g \quad (3-17)$$

$$\dot{\theta}_p = 0 \quad (3-18)$$

由式(3-17)、(3-6)及(3-5)可得

$$\dot{v} = \frac{\dot{m}c}{M_o \left(1 - \zeta \frac{t}{t_b}\right)} - g - \frac{D}{m} \quad (3-19)$$

將上式從發射時間至燃畢時間做積分，假設初始速率為零且重力場大小不變，可得飛彈燃畢時的速率為：

$$v_b = -c \ln(1 - \zeta) - gt_b - \int_0^{t_b} \frac{D}{m} dt \quad (3-20)$$

假設初始高度為零，對上式再積分一次，可得燃畢之高度為：

$$H_b = ct_b \left[ 1 + \frac{1 - \zeta}{\zeta} \ln(1 - \zeta) \right] - \frac{g}{2} t_b^2 - \int_0^{t_b} \int_0^{t_b} \frac{D}{m} dt^2 \quad (3-21)$$

設式(3-21)中之阻力項為零，則無阻力之燃畢高度為：

$$H_b = ct_b \left[ 1 + \frac{1 - \zeta}{\zeta} \ln(1 - \zeta) \right] - \frac{g}{2} t_b^2 \quad (3-22)$$

設推力的值相對於阻力及重力非常大，則式(3-20)之後兩項可以略去，此時燃畢時之速度為：

$$v_b = -c \ln(1 - \zeta) = gI_s \ln \left( \frac{1}{1 - \zeta} \right) \quad (3-23)$$

觀察式(3-23)可發現，增加排出速度、比衝或增加推進劑質量比可增加燃畢時之速度 $v_b$ 。

### 3.1.4. 俯仰程式

一般而言，大型彈道飛彈大都採用垂直方式發射，為了使飛彈在推力終了時能具有所需之燃畢速度以達成預計之飛行軌跡，飛彈在發射後，即根據一組預設之俯仰程式，使飛彈循著或接近預定之軌跡飛行，在設計俯仰程式時須考慮的因素包括導引元件之限制、彈體結構之限制、控制系統之簡化、推力終止之精度、系統穩定性、火箭引擎

之性能、最大射程之要求及最小阻力要求等因素。

在不考慮阻力的影響下，飛彈如能迅速傾斜至所需之燃畢飛行路徑角時，則除了可達較大之射程與速度外，彈體還有較多的時間衰減其震盪以達到較精確之燃畢飛行路徑角，然而，飛彈快速的傾斜也會導致較低的切斷高度和較大的阻力，而當阻力增加時會減少飛彈的全部射程。

如圖 3-1 所示，俯仰程式一般是以  $\theta_p$  來表示，不同的  $\theta_p$  可藉由推進系統或氣動力的改變來達到，推力方向的改變除了可藉由在噴射引擎之噴流中插入偏流板(deflection)或葉片(vane)、改變彈體引擎之噴嘴方向或在彈體側向增加一小推力來達成外，也可利用水平舵或翼片改變氣動力方向所產生的力矩耦合來達成推力方向的改變。為了簡化分析的目的，考慮改變葉片夾角來達成推力方向的改變，設葉片與彈體所產生的夾角為  $\beta$ ，此葉片夾角為俯仰角  $\theta_p$ 、角速度  $\dot{\theta}_p$ 、側向加速度及導引誤差指令之函數。當  $\beta$  為已知時，則  $R$  即可被決定，選擇  $\theta_p$  為時間函數，則式(3-15)或(3-16)即可利用數值方法解出。

### 3.1.5. 多節火箭

為了使彈道飛彈能達到所需之飛行軌跡，飛彈需酬載許多的燃料，然而在飛行過程中，由於燃料的消耗會使的飛彈浪費能量在推進空發動機外殼，多節火箭設計的產生即在解決此一問題。多節火箭是由一系列單一火箭所組成之個體，第一節火箭在發射時點燃，此節火箭在燃燒完畢後隨即被丟棄，並點燃第二節火箭繼續推進飛彈前進，此過程一直持續到最後一節火箭被點燃。

假設一  $n$  節火箭，其中， $M_i$  表第  $i$  節火箭的總重量， $m_i$  表第  $i$  節火箭扣掉火藥的重量，則每一節火箭的特行如下：

1) 第  $i$  節火箭的載比(payload ratio)  $\lambda_i$  可被表示如下：

$$\lambda_i = \frac{\sum_{s=i+1}^n M_s}{\sum_{s=i}^n M_s} \quad (3-24)$$

2)第  $i$  節火箭的結構係數(structural factor)  $\varepsilon_i$  可被表示如下：

$$\varepsilon_i = \frac{m_i}{M_i} \quad (3-25)$$

3)第  $i$  節火箭的推進劑質量比(propellant mass ratio)  $\zeta_i$  可被表示如下：

$$\zeta_i = \frac{M_i - m_i}{\sum_{s=i}^n M_s} \quad (3-26)$$

4)第  $i$  節火箭的彈體質量比(vehicle mass ratio)  $\Lambda_i$  可被表示如下：

$$\Lambda_i = \frac{\sum_{s=i}^n M_s}{\sum_{s=i+1}^n M_s + m_i} \quad (3-27)$$

5)第  $i$  節火箭之有效排出速度(effective exhaust velocity)為  $c_i$

6)第  $i$  節火箭之飛行時間(flight time)為  $t_i$

7)第  $i$  節火箭之燃畢速度為  $v_i$ ，如不考慮飛彈阻力，則第  $i$  節火箭所能增加飛彈的最大速度為：

$$v_i - v_{i-1} = -c_i \ln(1 - \zeta_i) - gt_i \quad (3-28)$$

假設不考慮重力的影響，則第  $n$  節火箭所能達到的最大速度為：

$$\sum_{i=1}^n v_i = -\sum_{i=1}^n c_i \ln(1 - \zeta_i) \quad (3-29)$$

觀察式(3-28)可得，當推進劑質量  $\zeta_i$  越大或彈體質量比  $\Lambda_i$  越大時，飛彈所能達到的飛行速度也越大。多節火箭之彈道軌跡計算公式與單節火箭相同，僅將動力飛行階段的飛彈推力分割為各節火箭所推動，且前一節火箭燃畢時的條件為下一節火箭的初始狀態。

## 3.2. 真空飛行階段

### 3.2.1. 動態方程式

由於地球表面外有大氣層圍繞，因此，可假設在地球外圍有一較大之同心圓包含著地球表面(如圖 3-2 所示)，在此兩圓之間的部分為大氣層。設彈道飛彈穿出大氣層表面的點  $Q$  為進入真空飛行階段之初始點，此時的燃畢速度為  $v_0$ ，其與水平方向之夾角稱為燃畢角  $\gamma_0$ ，而飛彈再穿入大氣層之重返點為  $Q'$ ，聯接圓心、點  $Q$  與  $Q'$ ，則其與地球相交兩點點之距離稱為真空飛行階段之射程。

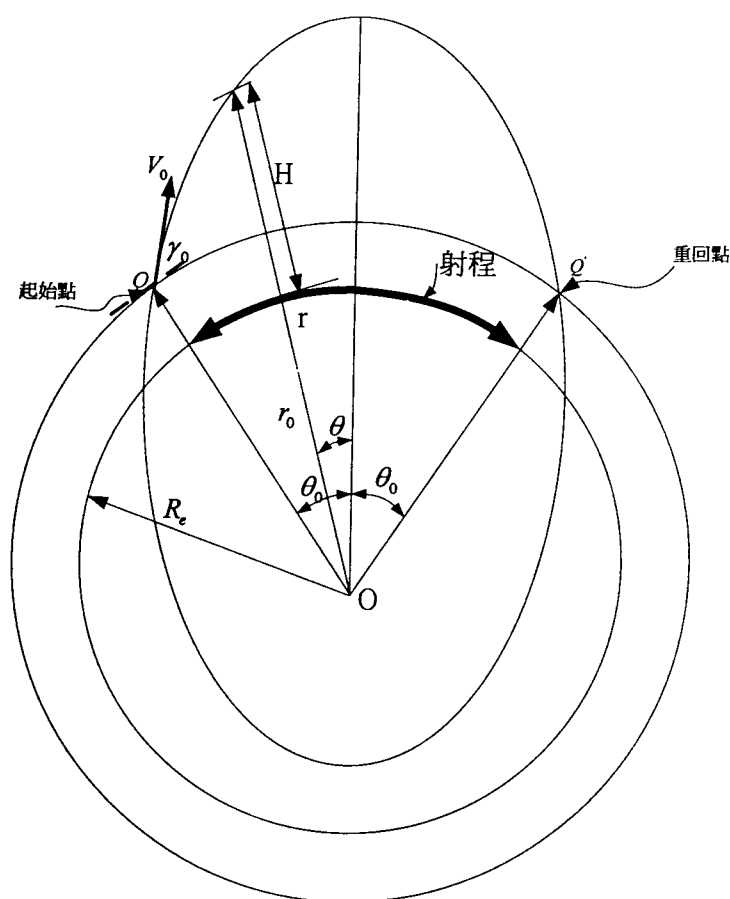


圖 3-2 彈道飛彈不同飛行階段示意圖

假設條件：

- 1) 設分析真空飛行階段時採用慣性座標系，彈道飛彈初始速度為由推力產生之速度與由地球自轉產生之速度的和，此情況相當於考慮地球為一非旋轉體，

- 2) 初始點至圓心的距離  $r_0$  通常比  $R_e$  大 50 至 100 海哩，  
 3) 在真空飛行時，飛彈只受地球之重力場作用。

由於一般彈道飛彈之初始速度小於脫離速度，可知其飛行軌跡為一橢圓形，以極座標表示此橢圓為：

$$\frac{h^2}{GR_e^2} \frac{1}{r} = 1 - e \cos \theta \quad (3-30)$$

其中， $h$  為單位質量之角動量：

$$h = r_0 v_0 \cos \gamma_0 \quad (3-31)$$

而  $e$  為圓錐截面之偏心率：

$$e = \frac{1}{\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cot \gamma_0} \quad (3-32)$$

上式中的  $\theta_0$  為  $\frac{1}{2} \angle QOQ'$ ：

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left[ \frac{\tan \gamma_0}{1 - \frac{GR_e^2}{r_0 v_0^2} \sec^2 \gamma_0} \right] \quad (3-33)$$

在真空飛行階段時，飛彈之射程為：

$$R = R_e 2|\theta_e| \quad (3-34)$$

在一已知燃畢速度下，飛彈可達最遠射程之發射仰角為：

$$\gamma_0 = \tan^{-1} \sqrt{1 - \frac{r_0 v_0^2}{GR_e^2}} \quad (3-35)$$

在飛行軌跡上之任何一點  $(r, \theta)$  之飛行速度  $v$ 、飛行高度  $H$  及飛行時間  $t$  分別為：

$$v = \sqrt{\frac{2GR_e^2}{r} - \frac{G^2 R_e^4}{h^2} (1 - e^2)} \quad (3-36)$$

$$H = r - R_e = \frac{h^2}{GR_e^2(1 - e \cos \theta)} - R_e \quad (3-37)$$

$$t = \frac{h^3}{G^2 R_e^2} \left[ \frac{e \sin \theta}{(1 - e^2)(1 - e \cos \theta)} + \frac{2}{(1 - e^2)^{3/2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_0}^{\theta} \quad (3-38)$$

由式(3-36)可觀察出，飛行速度之大小只與  $r$  有關係，因此，在重回點  $Q'$  之速度與初始點  $Q$  之速度相同。不考慮空氣阻力，則飛彈之脫離速度為：

$$v_e = \sqrt{\frac{2GR_e^2}{r}} \quad (3-39)$$

### 3.2.2. 大氣層上之重返點

利用隨地球旋轉之座標系來決定大氣層上之重回點，在隨地球旋轉之座標系中，只考慮由推力所增加之速度。設彈道飛彈在真空中飛行之軌跡初始條件為：

- 1) 初始點位置  $Q$  之緯度為  $\kappa$ 、經度為  $\lambda$  且離球心之距離為  $r_0$
- 2) 初始速度之大小為  $v_0$ ，其方向角為  $\delta$  且與水平方向之夾角為  $\xi$

由於大氣層與地球具有相同之角速度  $\omega$ ，因此會產生一向東之速度方向：

$$E = \omega r_0 \cos \kappa \quad (3-40)$$

此質點之合速度  $V$ 、仰角  $\Gamma$  與方向角  $Z$  分別為

$$V = \sqrt{E^2 + 2Ev_0 \cos \xi \sin \delta + v_0^2} \quad (3-41)$$

$$\Gamma = \tan^{-1} \frac{v_0 \sin \xi}{\sqrt{E^2 + 2Ev_0 \sin \delta \cos \xi + v_0^2 \cos^2 \xi}} \quad (3-42)$$

$$Z = 90 - \tan^{-1} \frac{v_0 \sin \xi}{\sqrt{E^2 + 2Ev_0 \sin \delta \cos \xi + v_0^2 \cos^2 \xi}} \quad (3-43)$$

設大氣層為一不旋轉之參考圓，由圖 3-3 可知  $NQQ'$  為一球面三角形，



因此：

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos Z \quad (3-44)$$

$$\sin v = \frac{\sin Z \sin a}{\sin c} \quad (3-45)$$

解上面兩式可得在非旋轉參考圓上之餘緯度及經度。在此同時，實際之參考圓已旋轉了  $\omega t$  角，因此，最後重返點的緯度  $\kappa'$  與經度  $\lambda'$  分別為：

$$\kappa' = 90 - c \quad (3-46)$$

$$\lambda' = v - \omega t + \lambda \quad (3-47)$$

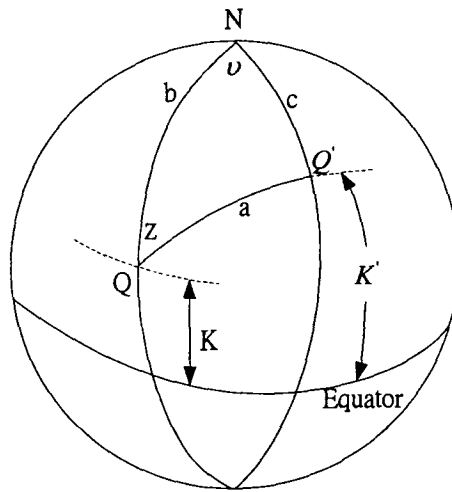


圖 3-3 地球旋轉之座標系

### 3.3. 重返大氣階段

#### 3.3.1. 動態方程式

彈道飛彈在重回大氣階段時的射程約為 100 英哩左右，由於在此距離之內，重力場變異與地球曲線之影響比阻力的影響小得多，因此，通常假設此階段的重力場為常數且地球表面為平面。設大氣模式為標準大氣模式且考慮飛彈在無風狀況下飛行。

圖 3-4 表示在重返大氣階段中，不同的力作用於飛彈上的關係圖。其中  $g'$  表實際之重力大小及方向，而  $g$  與  $g'$  有相同之大小但垂直於假設之平面地球上，由於此為平面地球，因此，其所造成之誤差

可以忽略，故利用  $g$  來替代  $g'$ ，而原點  $O$  為地球之球心。此時彈道飛彈之動態軌跡方程式為：

$$m\ddot{x} = -D + mg \sin r \quad (3-48a)$$

$$mvr\dot{r} = mg \cos r \quad (3-48b)$$

若考慮重力場隨著高度而變化，則在極座標系中之動態軌跡方程式為：

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-gR_e^2}{r^2} - \frac{1}{2m} \rho AC_D \dot{r} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} \quad (3-49a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -\frac{1}{2m} \rho AC_D r \dot{\theta} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)^{1/2} \quad (3-49b)$$

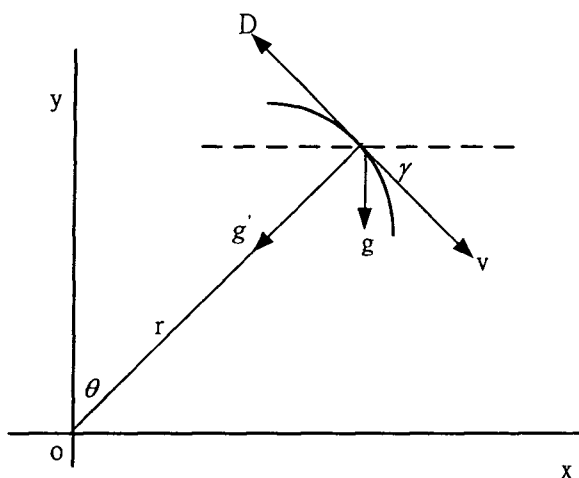


圖 3-4 彈道飛彈在重返大氣階段中受力圖

## 4. 終端導引律設計

在探討了不同的飛彈軌跡方程式後，我們將研究我方飛彈攔截敵方飛彈之相關問題，首先將提出我方飛彈與其目標之間的相對運動，接著再探討飛彈攔截之終端導引律。

### 4.1. 飛彈攔截相對運動方程式

設我方飛彈與其目標之間的相對運動如圖 4-1 所示，此球型座標系統的原點固定在我方飛彈上，其中， $e_r$ 、 $e_\theta$  及  $e_\phi$  為在球型座標系統上的三個單位向量。為了設計飛彈導引律，我們假設飛彈與目標是以質點的方式作相對運動且只考慮系統的動力學部份，則系統動態方程式可以下式表示，

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi = a_{T_r} - a_{M_r} \quad (4-1)$$

$$r\ddot{\theta} \cos \phi + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \phi = a_{T_\theta} - a_{M_\theta} \quad (4-2)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\theta}^2 \cos \phi \sin \phi = a_{T_\phi} - a_{M_\phi} \quad (4-3)$$

其中：

$r$ : 飛彈與目標之間的相對距離，

$\theta$ : LOS(Light of sight)之方向角(azimuth angle)，

$\phi$ : LOS 之傾斜角(pitch angle)，

$a_{T_r}$ : 目標飛彈在 LOS 上的  $e_r$  方向加速度，

$a_{T_\theta}$ : 目標飛彈在 LOS 上的  $e_\theta$  方向加速度，

$a_{T_\phi}$ : 目標飛彈在 LOS 上的  $e_\phi$  方向加速度，

$a_{M_r}$ : 我方飛彈在 LOS 上的  $e_r$  方向加速度，

$a_{M_\theta}$ : 我方飛彈在 LOS 上的  $e_\theta$  方向加速度，

$a_{M_\phi}$ : 我方飛彈在 LOS 上的  $e_\phi$  方向加速度。

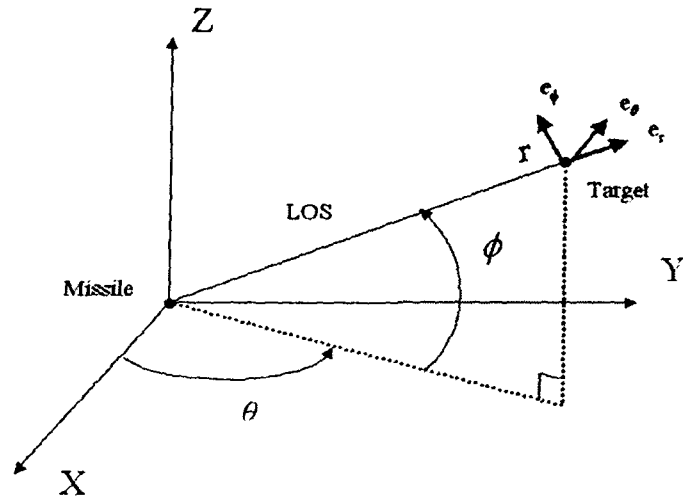


圖 4-1 我方飛彈與目標飛彈間之相對運動

## 4.2. 飛彈攔截之終端導引律

參考 Yang, C.-D. 和 Yang, C.-C. 在 1996 年所提出的 RTPN (realistic true proportional navigation) 導引律[9]，傳統的彈置尋標器無法量測  $e_r$  方向的加速度，因此，假設飛彈的導引加速度只需作用在  $e_\theta$  及  $e_\phi$  兩個方向，如下式所示：

$$a_M = -\lambda_n \dot{r} (\dot{\theta} \cos \phi e_\theta + \dot{\phi} e_\phi) \quad (4-4)$$

其中， $\lambda_n$  表比例導引常數。所以在  $e_\theta$  及  $e_\phi$  兩個方向的加速度分別為：

$$a_{M_\theta} = -\lambda_n \dot{r} \dot{\theta} \cos \phi \quad (4-5)$$

$$a_{M_\phi} = -\lambda_n \dot{r} \dot{\phi} \quad (4-6)$$

如下列不等式成立時，飛彈在式(4-4)的條件下可成功的擊中目標，

$$\frac{|\dot{r}_0|}{h_0/r_0} > \frac{1}{\sqrt{\lambda_n - 1}} \quad (4-7)$$

所以

$$\lambda_n > \left( \frac{h_0}{|\dot{r}_0| \times r_0} \right)^2 + 1 \quad (4-8)$$

其中，

$$h_0 = r_0^2 \sqrt{\dot{\phi}_0^2 + \dot{\theta}_0^2 \cos^2 \phi_0} \quad (4-9)$$

## 5. 飛彈攔截軌跡 3D 動畫呈現方法

### 5.1. 模擬場景介紹

飛彈攔截軌跡之場景設計如下

- 1.) 假設目標飛彈進入我方雷達偵測範圍內時，我方飛彈發射。
- 2.) 我方飛彈發射後，當遠離基地 20 英哩或高度高於 15 英哩後，尋標器開始動作追蹤目標飛彈。此時我方飛彈依照 RTPN 導引律逐漸靠近目標飛彈。
- 3.) 當兩者距離小於 0.005 哩時判定飛彈追擊到目標。

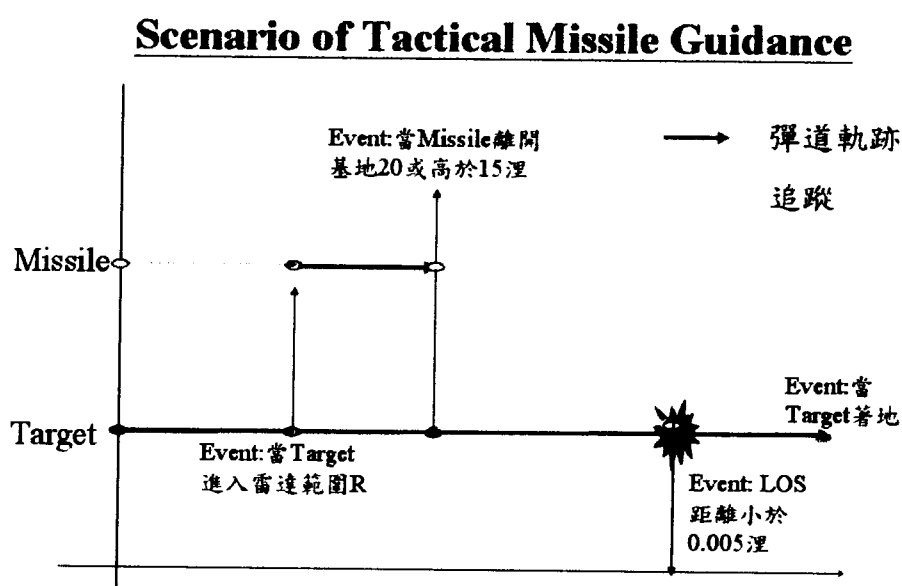


圖 5-1 飛彈導引模擬場景說明圖

由於此模擬場景所模擬的範圍相對地球來說所佔範圍很小，因此，可以假設目標飛彈是飛行在平面地球上且受空氣阻力影響(參考 2.2 節)。所以，給予目標飛彈初始速度  $V_r$ 、發射方位角  $\theta$ 、發射仰角  $\phi$  及飛彈彈道係數  $\beta$  後，目標飛彈於時間軸上的零點開始動作，當目標飛彈著地時軌跡終止。

依模擬場景的設計，我方飛彈之軌跡分成兩階段，當我方雷達偵測到目標飛彈進入雷達範圍後開始發射，此第一階段之飛行條件如同目標飛彈一樣是飛行在平面地球上且受空氣阻力影響之質點運動軌跡。在我方飛彈離開基地 20 哩或飛行高度達 15 哩後進入第二階段，此時我方飛彈依照所設定之導引律追擊目標飛彈。

由於雷達所能得到的資料只有目標飛彈的軌跡而無法量測其加速度，因此，我們可以利用目標飛彈的軌跡配合我方飛彈與目標飛彈之間的相對運動來求得我方飛彈的下一點位置。將式(4-5)、(4-6)帶入式(4-1)至(4-3)可得到一組二階的微分方程式

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 + r\dot{\theta}^2 \cos^2 \phi \quad (5-1)$$

$$\ddot{\theta} = (-2\dot{r}\dot{\theta} \cos \phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \phi + \lambda_n \dot{r}\dot{\theta} \cos \phi) / r \cos \phi \quad (5-2)$$

$$\ddot{\phi} = (-2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2 \cos \phi \sin \phi + \lambda_n \dot{r}\dot{\phi}) / r \quad (5-3)$$

可利用 MATLAB 之 ODE SET 來求解上式之微分方程式以計算出下一個時間點的 LOS( $r, \theta, \phi$ )之參數值。為求解，必須知道( $r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ )之初始值。參考圖 5-2，將已知之目標飛彈速度  $V_T$  與我方飛彈速度  $V_M$  分解成在 LOS 上之  $e_r$ 、 $e_\theta$  及  $e_\phi$  三個方向向量，可得到下列式子：

$$\dot{r} = v_T \cos \phi_{LT} \cos \theta_{LT} - v_M \cos \phi_{LM} \cos \theta_{LM} \quad (5-4)$$

$$\dot{\theta} = (v_T \cos \phi_{LT} \sin \theta_{LT} - v_M \cos \phi_{LM} \sin \theta_{LM}) / (r \cos \phi_L) \quad (5-5)$$

$$\dot{\phi} = (v_T \sin \phi_{LT} - v_M \sin \phi_{LM}) / r \quad (5-6)$$

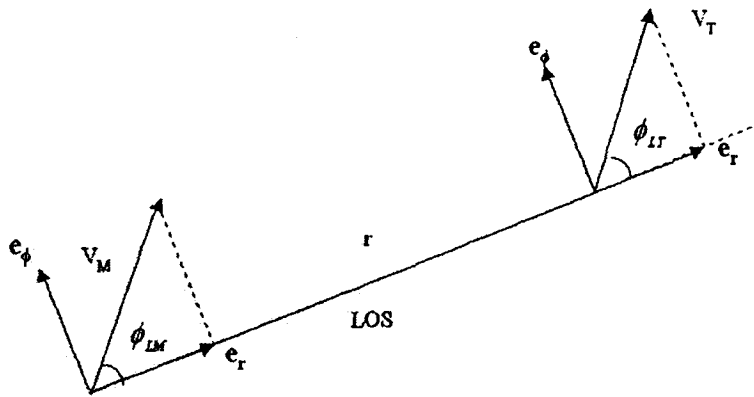


圖 5-2 我方飛彈與目標飛彈相對座標圖

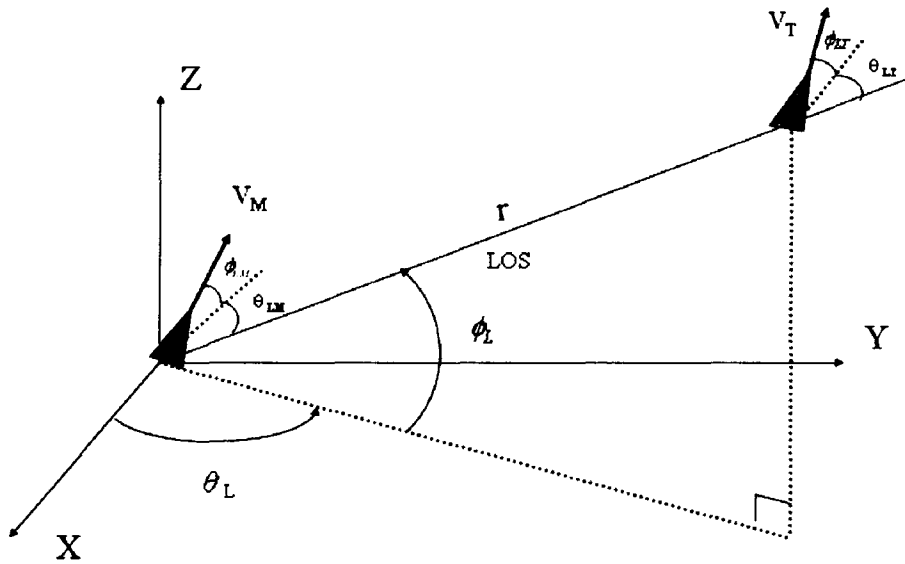


圖 5-3 飛彈攔截相對座標圖

引此，第二階段我方飛彈追擊目標飛彈之軌跡可參考圖 5-4，在時間點  $i$  時，利用已知的目標飛彈與我方飛彈之位置、速度計算出 LOS 之  $(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$  值，將此值帶入相對運動之動態微分方程式計算下一時間點  $i+1$  之 LOS  $(r, \theta, \phi)$  值，再計算我方位置之下一點位置。我方飛彈在適當的導引模式下，LOS 之距離  $r$  在最後會趨近於零。實際上因數值計算之關係，將擊中的條件設定為  $r < 0.005$  哩。

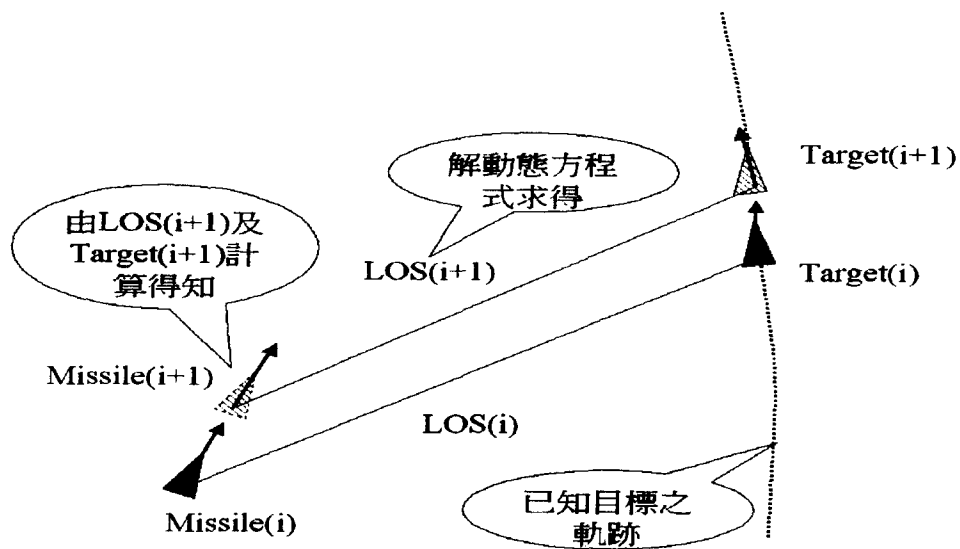


圖 5-4 我方飛彈追擊目標飛彈之軌跡說明圖

## 5.2. 模擬程式使用說明

1) 開啟 MATLAB 並在 Command window 鍵入 UITBM2

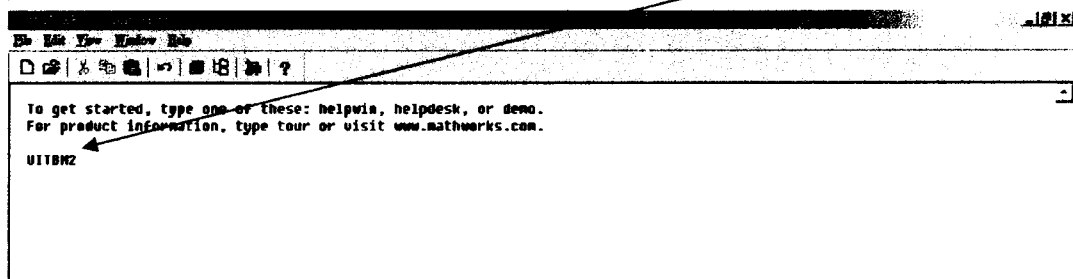


圖 5-5 Matlab 使用畫面

2) 執行 UITBM2 程式後會出現執行畫面如下

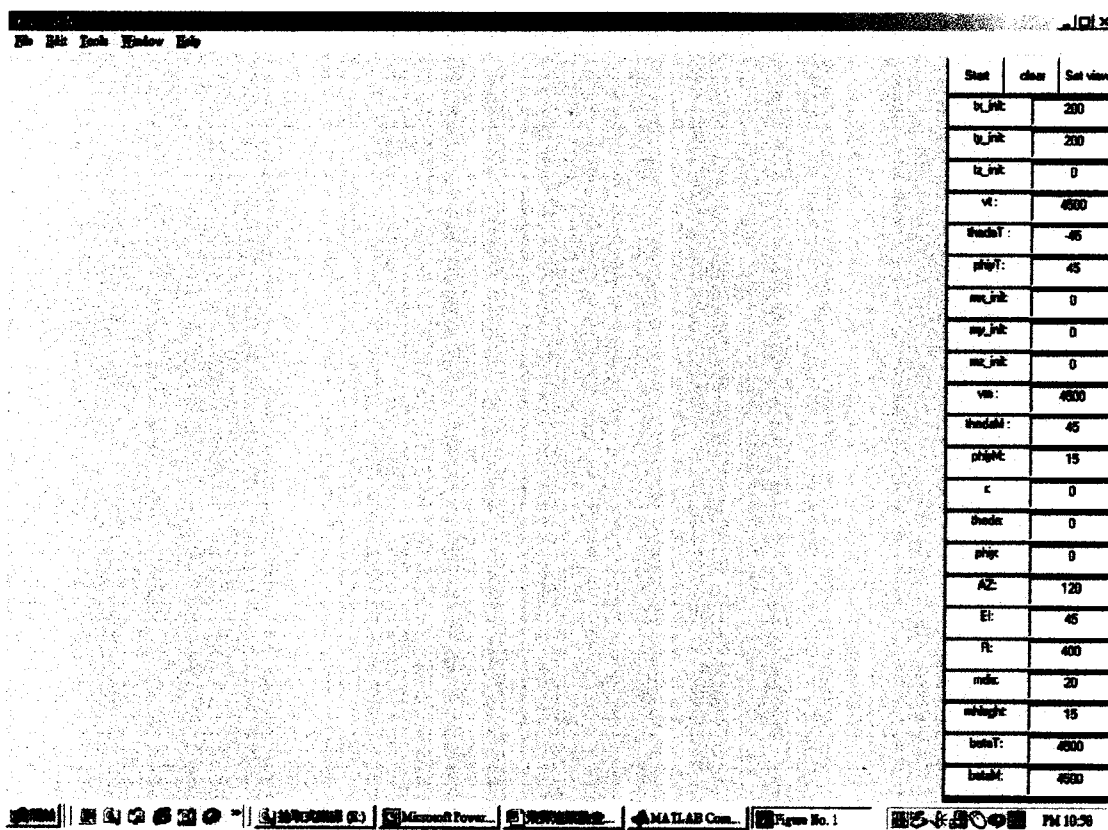


圖 5-6 UITBM2 程式執行畫面

畫面的右側提供目標與飛彈之初始值、觀測視角、彈道係數、雷達偵測範圍與飛彈開始追蹤條件(註)之參數設定。

註:mdis 我方飛彈離開基地之距離，mheight 我方飛彈之高度。



### 3) 設定飛彈之參數

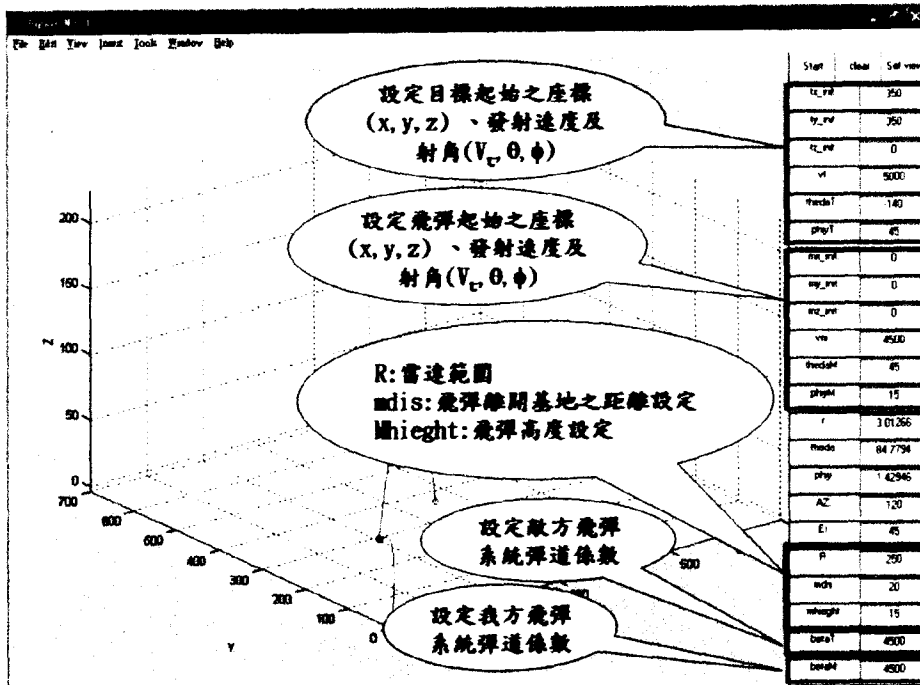


圖 5-7 飛彈參數設定說明圖

4) 按 **START** BUTTON 後開始計算兩者之軌跡後開始以動畫方式呈現，藍色為目標軌跡，紅色為飛彈軌跡。

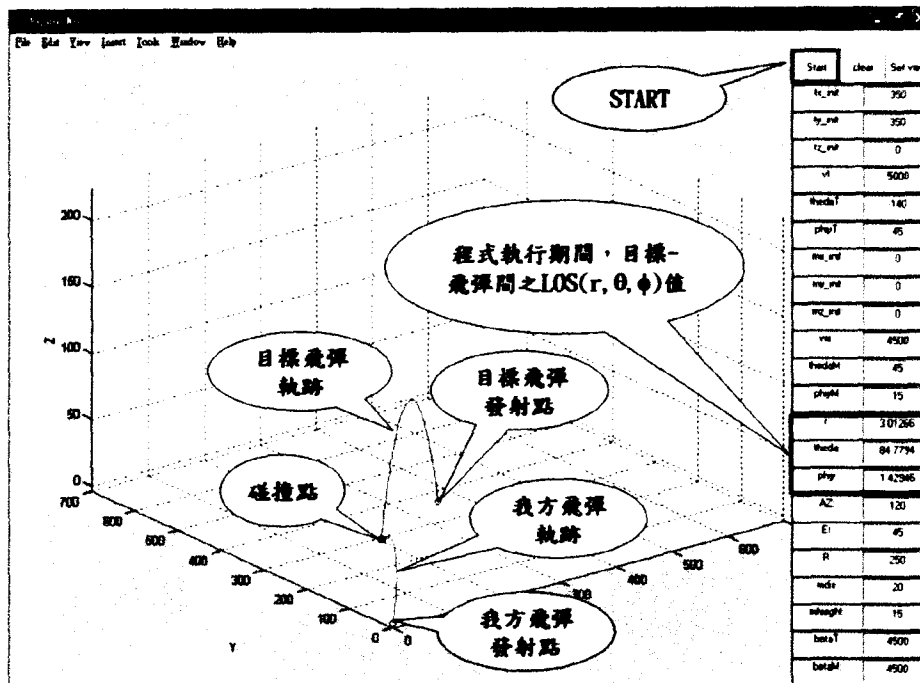


圖 5-8 模擬程式執行說明圖

- 5) 觀測角度設定後可按 **Set view** BUTTON 設定以不同角度觀測軌跡進行

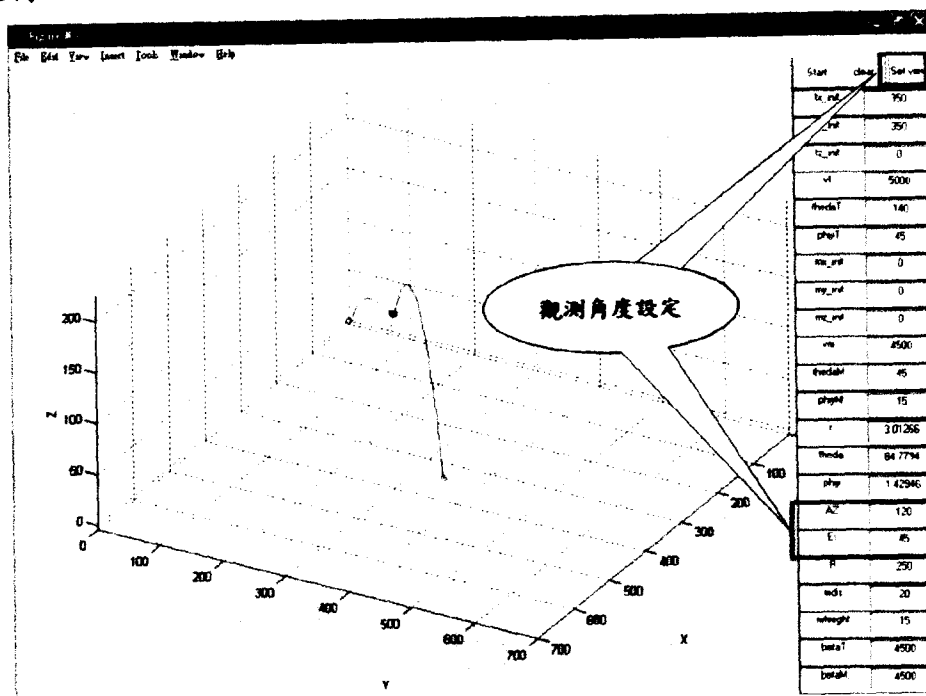


圖 5-9 改變觀察視角說明圖

### 5.3. 程式說明

本模擬程式是利用 MATLAB 5.3 版撰寫，主要分成下列四個程式：

- 1) 副程式 UITBM2：為目標飛彈與我方飛彈軌跡之 3D 動畫呈現，同時提供參數設定。
- 2) 副程式 TBM3DG：為目標飛彈與我方飛彈第一階段之彈道軌跡之計算，給予初始速度、位置、發射方位角、仰角及彈道係數，利用數值運算出每一秒之位置。
- 3) 副程式 MISODE：為我方飛彈軌跡之計算，同樣給予初始速度、位置、發射方位角、仰角及彈道係數，計算相對運動之微分方程式之初值及導引律  $\lambda_n$ ，並利用 ODE45 求解兩者間下一秒之相對位置，依次疊代計算每一秒之位置。
- 4) 副程式 MTHRI：為式 5-1 至 5-3 之二階微分方程式，提供 ODE45 SOLVER 使用。

整體程式流程圖如下所示：

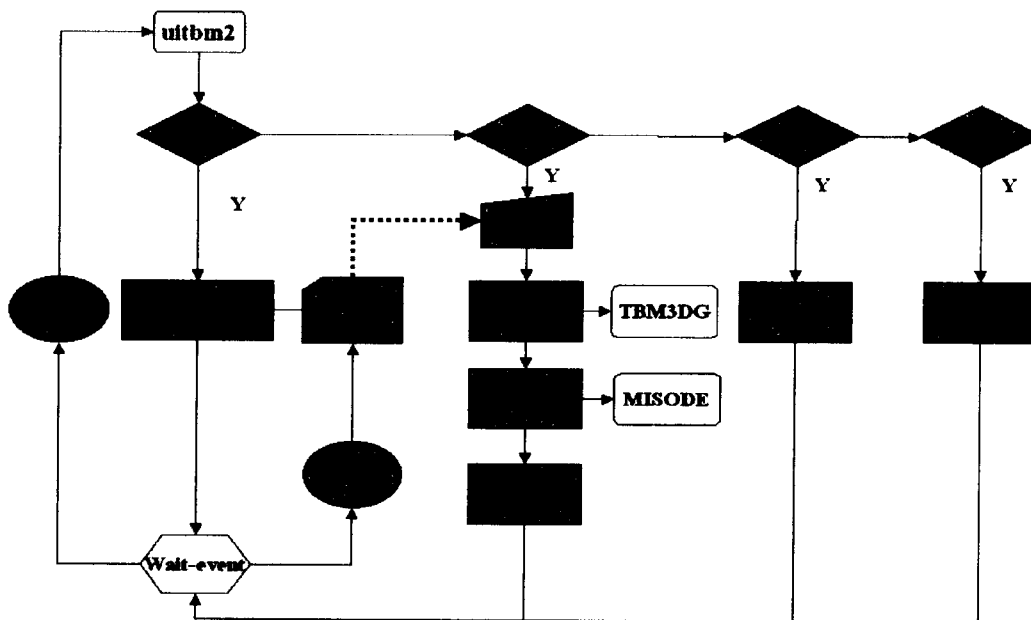


圖 5-10 模擬程式流程圖

Nargin :表示 Number of Argument Input 程式引數之數目

說明：

- 1) 當程式由 MATLAB Command Window 鍵入 uitbm2 後，因為引數個數為 0 所以先初始 uicontrol 物件，包括 TEXT、EDIT 與 PUSHBUTTON 等物件。
- 2) 當使用者按下 START 按鈕時，因設定的回應動作(Callback)為 uitbm2 ('start')，程式讀取 uicontrol 物件上之參數資料將之傳遞給 TBM3DG 與 MISODE 計算後得到軌跡資料，最後利用 Plot 3D 的方式以動畫呈現。
- 3) 因 Plot 3D 需要兩組參數，所以可以因應不同的飛行條件很彈性的修改 TBM3DG 演算法則給予目標軌跡，或是以不同的追蹤法則修改 MISODE 給予飛彈軌跡呈現動畫。
- 4) 在場景的設計上，有四個觸發事件：(a)當目標飛彈進入雷達範圍我方飛彈發射，(b)當我方飛彈離開基地 20 哩或高度 15 哩，依照追蹤法則追擊目標，(c)兩者距離小於 0.005 哩及(d)目標飛彈著地。

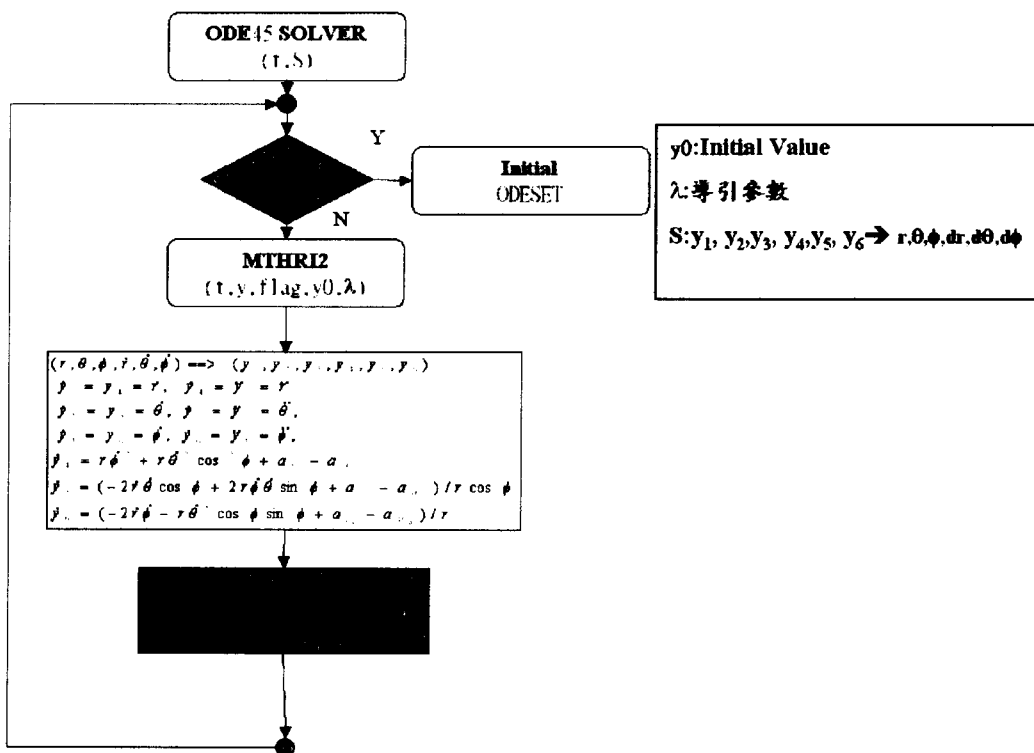


圖 5-13 ODE45 SOLVER 程式流程圖

## 6. 飛彈軌跡辨識

現今戰術彈道飛彈 (Tactical Ballistic Missiles, TBM) 的速度可以達到 3-7 馬赫，為了有效攔截來襲飛彈，則飛彈防禦系統必須具有飛彈軌跡估測的能力。由於時間嚴格的限制，只有少量的雷達資料能夠進行飛彈軌跡預測，且軌跡預測必須是即時性的，所以雷達必須能夠處理以上這些限制與雜訊的影響。

### 6.1. 地面雷達系統

對於高速運動目標追蹤，以一個攔截飛彈系統為例，如圖 6-1 所示，A、B 兩點的座標為不同的攔截飛彈發射位置，C、D 兩點的座標分別為來襲飛彈的彈著點與發射點位置，由圖中可以看出，當攔截飛彈的發射位置不同時，其飛行的軌跡也不同。一般反飛彈的導引分為兩階段，當反飛彈在發射後，由地面雷達導引其飛行路徑時，稱為中途導引階段；當反飛彈接近來襲目標時，由反飛彈本身的主動雷達(尋標器)來做導引，此時稱為終端導引階段；而在中途導引階段，地面雷達如果能精確的預估目標的運動軌跡，則反飛彈在中途導引階段就不用去追一極快的運動目標，只要將反飛彈導引至目標的運動軌跡裡面即可，進而在終端導引階段有良好的初始狀態，面對具有逃逸能力的目標，也就擁有較好的追蹤效果，也能提高反飛彈的攔截率；在中途導引階段時，我們希望雷達同時也能預測飛彈的彈著點，可以提供攔截飛彈發射的最佳位置，所以當我們利用雷達來進行這些工作時，雷達必須能夠估測高速運動目標的運動狀態，且必須能對多目標軌跡的追蹤。

目前 Kalman filter 廣泛地利用在衛星、飛機、飛彈、船等的軌跡追蹤，也都有不錯的效果。為了要達到精確地追蹤運動目標的位置，並且可以做長時距的軌跡預測，我們必須事先知道目標的動態模型，傳統的 Kalman filter 就是在事先知道目標的動態模型下運作，它可以估測出目標的運動狀態，不僅能夠進行目標的追蹤，也能做長時距的軌跡預測，而 Extended Kalman Filter 可以追蹤非線性運動目標，但 Kalman filter 的演算過程，必須清楚的知道雜訊的變化大小，即必須計算雜訊的統計特性，而且也必須要有好的初始條件，才能達到最佳效果。如果以傳統的數學模式來改善這些缺點，將是非常

的繁雜且受到許多的限制，而類神經網路的發展，提供了另一種可能的模型，所以有一些方法加入類神經網路來解決 Kalman filter 這些缺點，增加追蹤的精確性。而對於多運動目標追蹤，這些方法無法以即時的方式進行多運動目標追蹤，所以我們提出利用類神經網路達到估測多目標與非線性的運動狀態，利用事先已知的目標運動方程式，所以不需運用大量的訓練集，類神經網路的輸入是由目前以及之前雷達所量測到的資料，訓練方式是以非監督式的學習方式，來估測動態模型的狀態。由於我們希望網路的輸出是跟目前的輸入及以前的輸入有關，所以我們選用自我組織特徵映射網路，當雷達所量測到的資料輸入網路時，  
 延遲記憶 連串 ，然後再輸入自我組織特徵映射網路來找出最接近的估測運動狀態，我們以模擬驗證此計畫所提出方法的可行性。

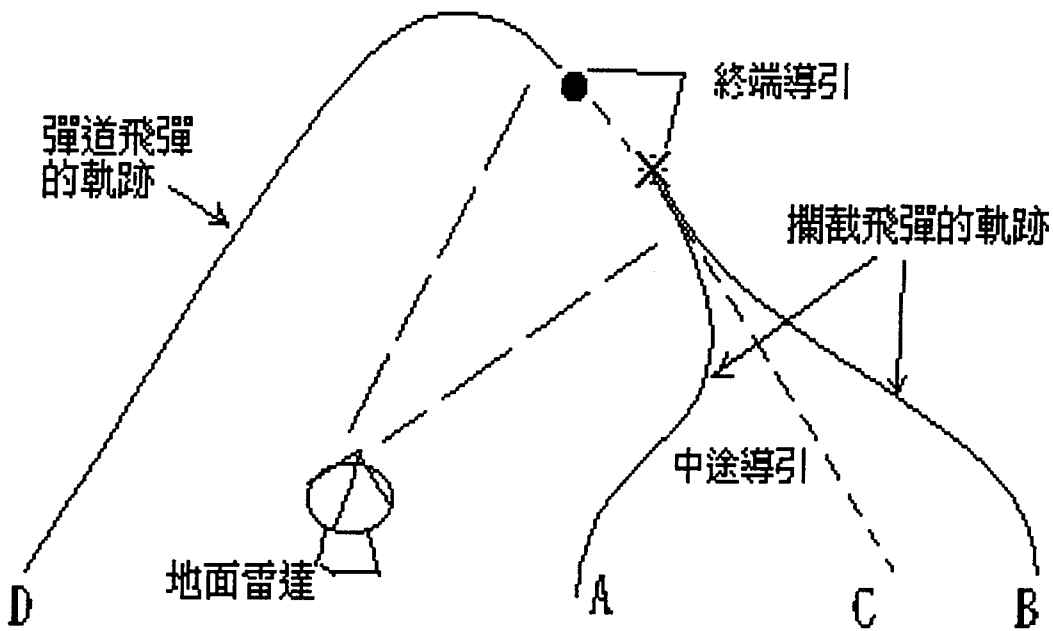


圖 6-1 飛彈防禦系統之中途導引與終端導引示意圖

## 6.2. 智慧型雷達預估器

在類神經網路的發展過程中，監督式學習一直扮演著重要的角色，由它所衍生出來的神經網路架構，可分為順向網路(feedforward networks)與回授網路(feedback networks)兩種。順向網路的輸出只和當時的輸入有關，故有人將輸入資料的時序關係加入網路輸出層，這種方法的主要缺點為待測系統的階數無法得知，故網路輸入層所需的時間延遲個數也無法確定；為解決此順向網路識別未知動態系統所遭遇的困難，有學者提出回授類神經網路，其中提出一遞迴式網路，稱為記憶性類神經網路，來判別非線性動態系統，這些網路增加了一些時間元素(內部記憶)於順向網路中，此記憶性類神經網路可以直接識別動態系統而無須事先知道此動態系統的階數，但適當的內部記憶大小卻不容易決定。

如果利用非監督式的學習方式來追蹤運動的目標，則不會有像監督式學習的缺點，因網路的訓練集資料不是輸入／輸出對，而僅是雷達所提供的資料，所以利用非監督式學習網路來做目標的追蹤的可行性比較高。為了讓類神經網路的功能像 Kalman filter 一樣來估測目標運動的狀態，我們所提出的方法必須事先知道目標的動態模型，就如同使用 Kalman filter 時一般，然後我們再利用非監督式的學習方式來估測目標的運動狀態。

如圖 6-2 為智慧型雷達預估器的系統架構，我們將雷達即時量測到的目標位置當作網路輸入訓練集資料，我們選擇自我組織特徵映射網路(SOM)以 on-line 的學習方式來估測目標的運動狀態，在 SOM 網路中，每一個神經元儲存了兩個資訊，第一個資訊為目標可能的初始運動狀態，第二資訊為將之前的運動狀態經過運動方程式產生的一小段軌跡，然後跟雷達所量測的目標移動軌跡做競爭式學習，然後將得勝的神經元所儲存的運動狀態透過運動方程式就可以得到估測的飛彈軌跡。由於傳統 SOM 學習網路，只能輸入空間性的資料，如果要處理時空性 (spatio-temporal) 的輸入資料時，例如目標物的追蹤，則我們必須將雷達資料經過時間延遲記憶再輸入網路。SOM 的學習過程本身是機率導向，也就是說特徵映射圖的準確度和演算法的學習次數有關，而輸入的資料也跟時間有關，時間越長，輸入的資料就越多，

所以特徵映射圖的準確度也跟時間有關。SOM 網路常用來解決許多工面問題，如機器人手臂控制，群聚分析，及向量量化等。在下一節我們將會詳細的介紹 SOM 如何用於追蹤目標及運動狀態估測。

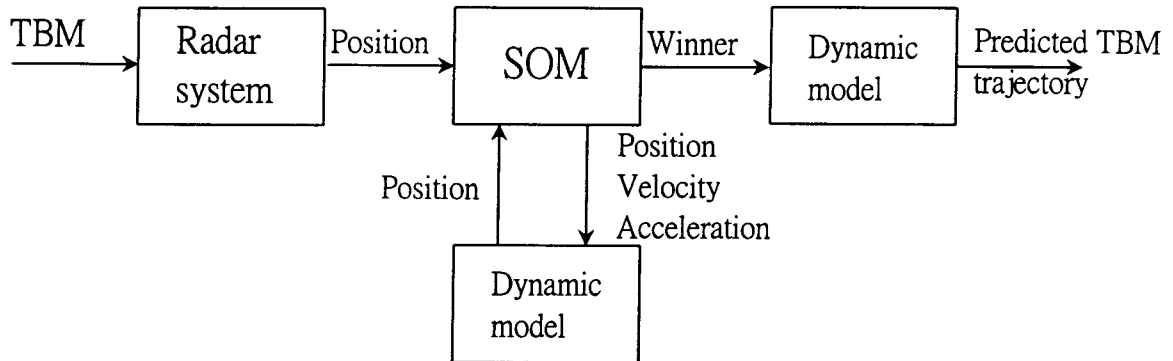


圖 6-2 智慧型雷達預估器的系統架構

### 6.3 自我組織特徵映射網路

自我組織特徵映射網路(Self-Organizing Feature Map Network, 簡稱 SOM 網路)是由 Kohonen 提出，如圖 6-3 所示，是基於"競爭式學習"的一種網路，也就是說輸出層的類神經元們彼此競爭，以爭取被活化的機會，而這全靠輸出層類神經元間的"側向抑制聯結"來實現。然而，它與一般競爭式學習不同，如果以"贏者全拿"的競爭式學習法，只調整得勝者的鍵結值，是無法將拓樸關係表現於類神經元的鄰近關係，自我組織特徵映射網路的競爭方式而是採"有福同享"的方式，也就是說，它的類神經元在競爭之後，不只獲勝的類神經元有資格學習，它周圍的類神經元也能夠學習，這種學習方式，基本上就是側向交互作用的情形。



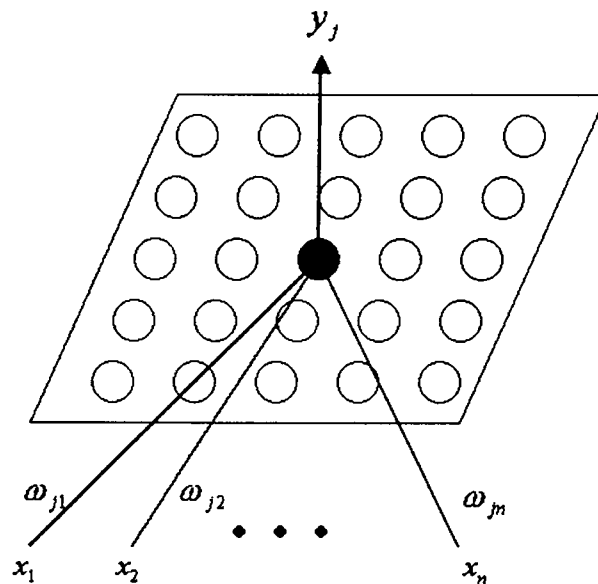


圖 6-3 二維矩陣之自我組織特徵映射

在自我組織特徵映射網路中，輸出層的類神經元是以特徵映射的方式，將任意維度的輸入向量，以矩陣方式排列映射於一維或二維的空間中。特徵映射是依據目前的輸入向量彼此競爭，以爭取到調整鍵結值向量的機會，而網路最後輸出層的類神經元會依據輸入向量的"特徵"以有意義的"拓樸結構"(topological structure)展現在輸出空間中，換句話說，當圖樣特徵之間，存在著某一種量測或拓樸上的順序關係時，我們希望透過類神經元鍵結值的學習，使得輸出神經元之間也能夠保持著某種拓樸結構上的關係，而這種陣列的拓樸關係，簡單地說，就是類神經元之間的鄰域關係，由於所產生的拓樸圖可以反應出輸入向量本身的特徵，因此種網路稱之為自我組織特徵映射網路。

SOM 主要的構成要素如下：

1. 由類神經元所構成的一維或二維的矩陣中，網路的輸出值可以顯示出，目前的輸入向量對那一個類神經元最有反應。
2. 尋找出反應最強烈的類神經元，亦即所謂的得勝者(winner)。
3. 調整得勝者及其鄰域的鍵結值，以使調整過的類神經元對此輸入向量，能較調整前更有反應。

### 6.3.1 SOM 用於追蹤目標及運動狀態估測

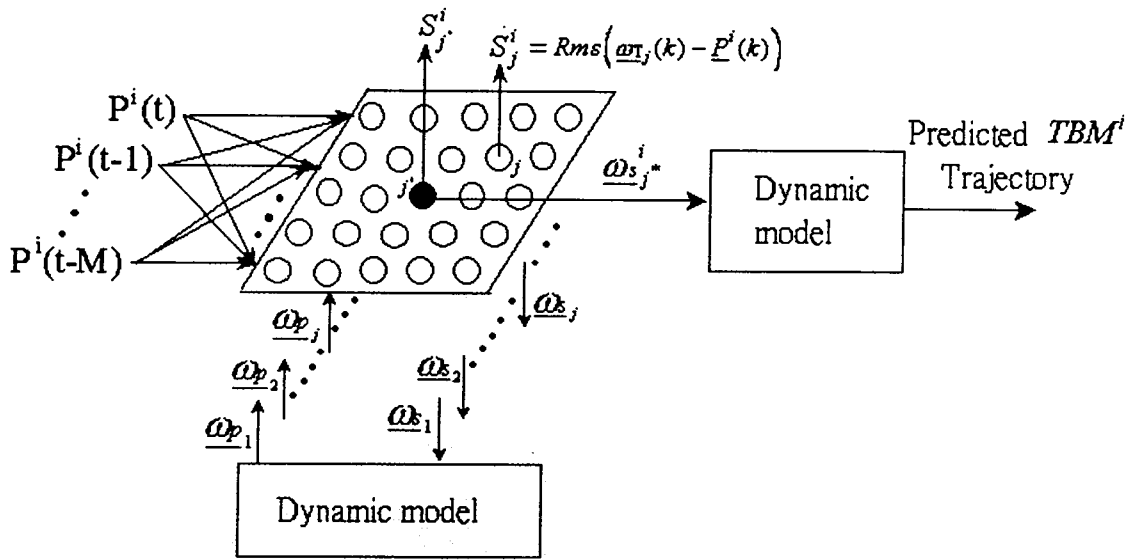


圖 6-4 SOM 的架構與運算單元

圖 6-4 為 SOM 網路架構圖，SOM 主要用於追蹤目標及運動狀態估測，它的特色在於可以處理時空性資料的特徵映射，以估測目標的運動狀態為例，所以 SOM 的輸入為雷達即時量測到的資料，假設雷達估測到  $U$  個目標的運動軌跡，則我們定義  $\underline{P}^i(k) = [p^i(k) \ p^i(k-1) \ \dots \ p^i(k-M)]$ ,  $i=1, \dots, U$ ,  $\underline{P}^i(k)$  為第  $i$  個目標長度為  $M+1$  的運動軌跡，網路鍵結值向量定義為  $\omega_j(k) = [\omega_{s_j}(k) \ \omega_{r_j}(k)]$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ ,  $N$  為所有神經元的數目， $\omega_{s_j}(k)$  為目標可能的初始運動狀態， $\omega_{r_j}(k)$  為將  $\omega_{s_j}(k)$  經過運動方程式產生長度為  $M+1$  的運動軌跡。當  $\underline{P}^i(k)$  輸入網路時，計算  $S_j^i(k) = \|\omega_{r_j}(k) - \underline{P}^i(k)\|$ ，並以競爭式學習法則找出對於第  $i$  個目標較為可能的運動狀態，即找出反應較強烈的類神經元，然後重新調整鍵結值，即尋找更精確的運動狀態，然後再將雷達估測到的第  $i+1$  目標的運動軌跡  $\underline{P}^{i+1}(k)$  輸入網路學習，依此學習過程，雷達持續提供資料給網路學習。最後 SOM 的鍵結值會收斂在最佳狀態，而達到多目標追蹤及狀態估測的任務。SOM 是基於"競爭式學習"的一種網路，利用有限個神經元彼此之間的競爭，去找出最佳目標運動的狀態，所以能夠對三度空間上任意目標(位置, 速度, 加速度)做追蹤，且不受不同雜訊大小的限制。

SOM 用於追蹤目標及運動狀態的估測所需要的條件跟 Kalman filter 一樣，我們必須事先知道動態模型，在解微分方程式上，我們選擇利用二階 Runge-Kutta 數值積分方法來做數值模擬，這是因為其簡單且程式容易設計，所以我們就可以利用此方法來計算出  $\omega_{r_j}(k)$  的值。

SOM 用於追蹤目標及運動狀態的估測，須事先知道動態模型，所以我們考慮一個動態模型如下所示：

$$\begin{cases} X_{k+1} = f_k(X_k) + H_k(X_k)\underline{\xi}_k \\ V_k = g_k(X_k) + \underline{\eta}_k \end{cases} \quad (6-1)$$

假設  $W(k)$  與  $V(k)$  為 white Gaussian noise 並滿足下面條件：

$$E(\underline{\xi}_k \underline{\xi}_\ell^T) = Q_k \delta_{k\ell}, \quad E(\underline{\eta}_k \underline{\eta}_\ell^T) = R_k \delta_{k\ell}$$

$$E(\underline{\xi}_k \underline{\eta}_\ell^T) = 0, \quad E(\underline{\xi}_k X_o^T) = 0, \quad E(\underline{\eta}_k X_o^T) = 0$$

其中， $Q$  表示  $\underline{\xi}_k$  的 covariance matrix， $R$  表示的  $\underline{\eta}_k$  covariance matrix， $\delta_{k\ell}$  表示 delta function。

在 Kalman filter 的演算法中，初始狀態  $\hat{x}_0$  和 error covariance  $P_0$  必須事先給定一個值，但一般而言，在一個未知的環境中，我們沒辦法知道其正確的值，所以，大部分都是用猜測的。另外， $Q$  和  $R$  的值必須在演算前事先知道，如果在一個很雜亂的環境裡， $Q$  和  $R$  值通常不會是固定值，基於以上這些原因，使得 Kalman filter 在有些場合就不適用，而 SOM 並沒有以上這些缺點

接下來我們詳細地介紹 SOM 用於追蹤目標及運動狀態估測的學習方式：

Step 1)  $k=0, i=1$ ，初始設定在 0th stage 時，初始化設定可能的  $\omega_{s_j}(0)$ ，

$$j=1,2,\dots,N; \text{ 假設 } D^i(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_{s_j}(0) \text{ 為第 } i \text{ 個目標的期望最佳的}$$

運動狀態， $N$  為所有神經元數目， $N$  越大學習效果越好，並設

定  $\underline{\omega}_{s_j^*}(0) = \underline{D}^i(0)$ ， $j^*$  表示得勝神經元。

Step 2) 將  $\underline{\omega}_{s_j}(k)$  調整在期望最佳的位置，如下所示：

$$\underline{\omega}_{s_j}(k) = \underline{\omega}_{s_j}(k) + (\underline{\omega}_{s_j^*}(k) - \underline{D}^i(k)) \quad (6-2)$$

將  $\underline{\omega}_{s_j}(k)$  透過動態方程式可得

$$\underline{\omega}_{r_j}(k) = \begin{bmatrix} \omega_{r_{j_1}}(k), \omega_{r_{j_1}}(k-1), \dots, \omega_{r_{j_1}}(k-M) \\ \omega_{r_{j_2}}(k), \omega_{r_{j_2}}(k-1), \dots, \omega_{r_{j_2}}(k-M) \\ \vdots \\ \omega_{r_n}(k), \omega_{r_n}(k-1), \dots, \omega_{r_n}(k-M) \end{bmatrix}^T \quad (6-3)$$

$$ex. \quad \underline{\omega}_{r_j}(k) = [x \quad y \quad z \quad r \quad \alpha \quad \beta \quad \dots]$$

Step 3) 將  $\underline{P}^i(k)$  輸入網路並對每一個神經元，計算輸出  $S_j^i(k)$ ：

$$S_j^i(k) = [s_{j_1}^i \quad s_{j_2}^i \quad \dots \quad s_{j_n}^i]$$

$$s_{j_1}^i = Rms(\underline{\omega}_{r_{j_1}}(k) - \underline{P}_1^i(k))$$

$$s_{j_2}^i = Rms(\underline{\omega}_{r_{j_2}}(k) - \underline{P}_2^i(k))$$

$$s_{j_n}^i = Rms(\underline{\omega}_{r_{j_n}}(k) - \underline{P}_n^i(k))$$

Step 4) 接著找出得勝神經元  $j^*$ ：

$$\Lambda_{j^*} = \min_j \left\{ \frac{s_{j_1}^i}{\sum_{h=1}^N s_{h_1}^i} + \frac{s_{j_2}^i}{\sum_{h=1}^N s_{h_2}^i} + \dots + \frac{s_{j_n}^i}{\sum_{h=1}^N s_{h_n}^i} \right\} \quad (6-4)$$

$$\underline{D}^i(k+1) = \underline{\omega}_{s_{j^*}}(k)$$

當  $i=U$ (總目標數) 則到 Step 5 不然  $i=i+1$  到 Step 2。

Step 5) 重新調整  $\underline{\omega}_{s_j}(k)$  與  $\underline{D}^i(k)$

$$(i) \text{ 如 } \underline{D}^i(k) \neq \underline{D}^i(k+1) \text{ 則 } \underline{\omega}_{s_j}(k+1) = \underline{\omega}_{s_j}(k) + \eta(k)h_j^i(k)(\underline{D}^i(k+1) - \underline{D}^i(k)) \quad (6-5)$$

$$(ii) \text{ 如 } \underline{D}'(k) = \underline{D}'(k+1) \text{ 則 } \underline{\omega}_{s_j}(k+1) = \underline{\omega}_{s_j}(k) + \eta(k)h_{j^*}(k)(\underline{D}'(k) - \underline{\omega}_{s_j}(k)) \quad (6-6)$$

其中  $\eta(k)$  為學習率， $h_{j^*}(k)$  為臨域函數。

$$\text{Step 6) 如 } \max_j \|\underline{\omega}_{s_j}(k) - \underline{\omega}_{s_{j^*}}(k)\| < \varepsilon, j \in h_{j^*}(k) \quad (6-7)$$

則將網路的輸出最佳初始運動狀態經過運動方程式後，可得 TBM 的估測軌跡。

不然  $k = k+1$  到 Step 2

基本上  $N$  與  $M$  值越大，學習效果會更精確效果越好。

我們將以上演算步驟跟 Kalman filter 演算步驟比較，可以發現我們所提出的方法，不用知道系統的  $o$  cov  $c$   $x$   $Q$  及量測的 noise covariance matrix  $R$ ，也可以做系統狀態的估測，所以 SOM 適用於任何不同大小雜訊的環境，而 Kalman filter 在不同雜訊的環境下， $Q$  和  $R$  也會不同，所以不容易應用於不同環境。

### 6.3.2 SOM 參數的選擇

特徵映射的學習過程，參數的選擇與最後的學習結果有很密切的關係，以下我們就討論其參數的設定方式：

1. 學習率參數  $\eta(k)$ ：乃學習率參數用來調整鍵結值向量的學習速率，在 SOM-TDNN 的演算步驟四中，當  $j^* \neq \hat{j}^*$  則  $\eta(k)$  應相當接近 1，也就是所謂的粗調階段，因為網路的輸出不是我們所假設的最佳狀態，為了加快學習，所以  $\eta(k)$  的選擇比較大；當  $j^* = \hat{j}^*$  則隨著時間增加  $\eta(k)$  慢慢的遞減，也就是所謂的細調階段，也稱為收斂階段，因為網路的輸出跟我們假設的最佳狀態一樣，但我們不知道真正的最佳狀態，所以做細部的調整鍵結值，增加精確度。一般學習率參數  $\eta(k)$  的形式，可以是線性的遞減  $\eta(k) = \eta_0(1 - \frac{k}{\tau})$ 、指數遞減  $\eta(k) = \eta_0 \cdot e^{-k}$ 、或是和時間  $k$  成反比的函數  $\eta(k) = \eta_0 / (k+1)$  等都可以用來作為學習率函數的形式。
2. 鄰域函數  $h_{j^*}(k)$ ：鄰近區域函數通常採用包圍著得勝者類神經元  $j^*$  的正方形的形式，如圖 6-5 所示，而鄰近區域函數也可以採用其它的形式，例如六邊形的形式，如圖 6-6 所示；然而不管採用何

種形式，鄰近區域函數的設定，應於一開始時包括全部的類神經元，然後隨著時間的增加而慢慢縮減鄰近區域的大小。

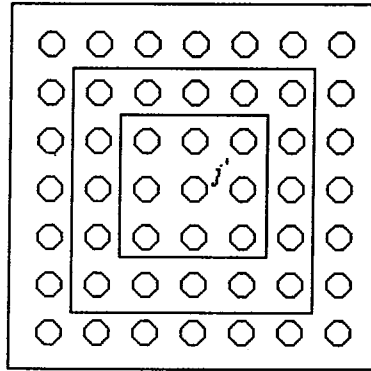


圖 6-5 鄰近區域函數：正方形

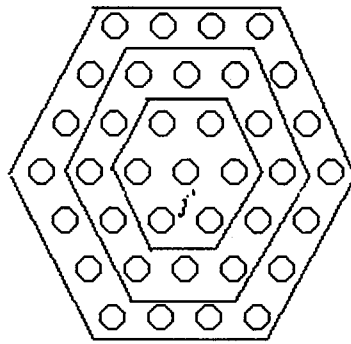


圖 6-6 鄰近區域函數：六邊形

3. 學習次數  $C$ ：表示第  $k$  個時間的學習次數，如果  $C$  比較大時，收斂速度快，但是震盪效應會比較大， $C$  比較小時收斂比較慢，但是比較平滑，通常  $C$  值的設定一開始為比較大的值，隨著時間慢慢遞減，但不管如何設定，程式在執行時，必須在每個階段的時間內執行完畢。
  4. 時間延遲個數  $M$ ： $M$  值的大小決定每次的學習中，有多少個輸入資料要輸入網路接受訓練， $M$  值越大表示提供的訊息較多，所以對鍵結值的調整效果會比較好，但所需處理的時間會比較多，所以必須跟學習次數  $C$  配合，程式必須在每個階段的時間內執行完畢。
- 以上所討論的參數設定方式只是一般參考的選擇，並不是最佳的選

擇，如果要使 SOM 的演算法達到最佳化的話，可以利用其它方法來調整這些學習的參數。

## 6.4. 數值模擬結果

我們利用電腦模擬的方式產生彈道軌跡，然後經由座標轉換方式，轉換到雷達的座標系統，然後在雷達的座標參數加入雜訊，最後才傳送到雷達預估器裡面，進行飛彈的軌跡追蹤。我們利用模擬的方式來表現出我們所提出方法的效果，並展現出此方法可以應用在多目標的追蹤，另外我們也將結果與 Kalman filter 做性能的比較。

### 6.4.1 彈道軌跡模擬

彈道軌跡模擬的流程如圖 6-7 所示，在圖 6-7 中，我們必須先給定飛彈的發射位置、發射角與飛彈的彈著點，然後經過座標轉換，轉換到二維的平面，藉由飛彈的飛行模式我們可以很容易的得到飛彈的軌跡，再經由一次座標轉換到三維的地球座標系統，然後我們再轉換到雷達的座標系統  $(r, \alpha, \beta)$ ，加入雜訊在  $(r, \alpha, \beta)$  中，最後我們就可以模擬出雷達量測到目標的資訊了。因為我們所設計的預估器是在慣性座標下運作，所以我們必須將雷達的資訊轉換到慣性座標中，然後經過雷達預估器之後，我們就可以將預估之後的結果經過飛彈的動態模型還原整個飛彈的軌跡，也可以將預估後的資訊傳給雷達和攔截飛彈，以達到精確的目標追蹤。

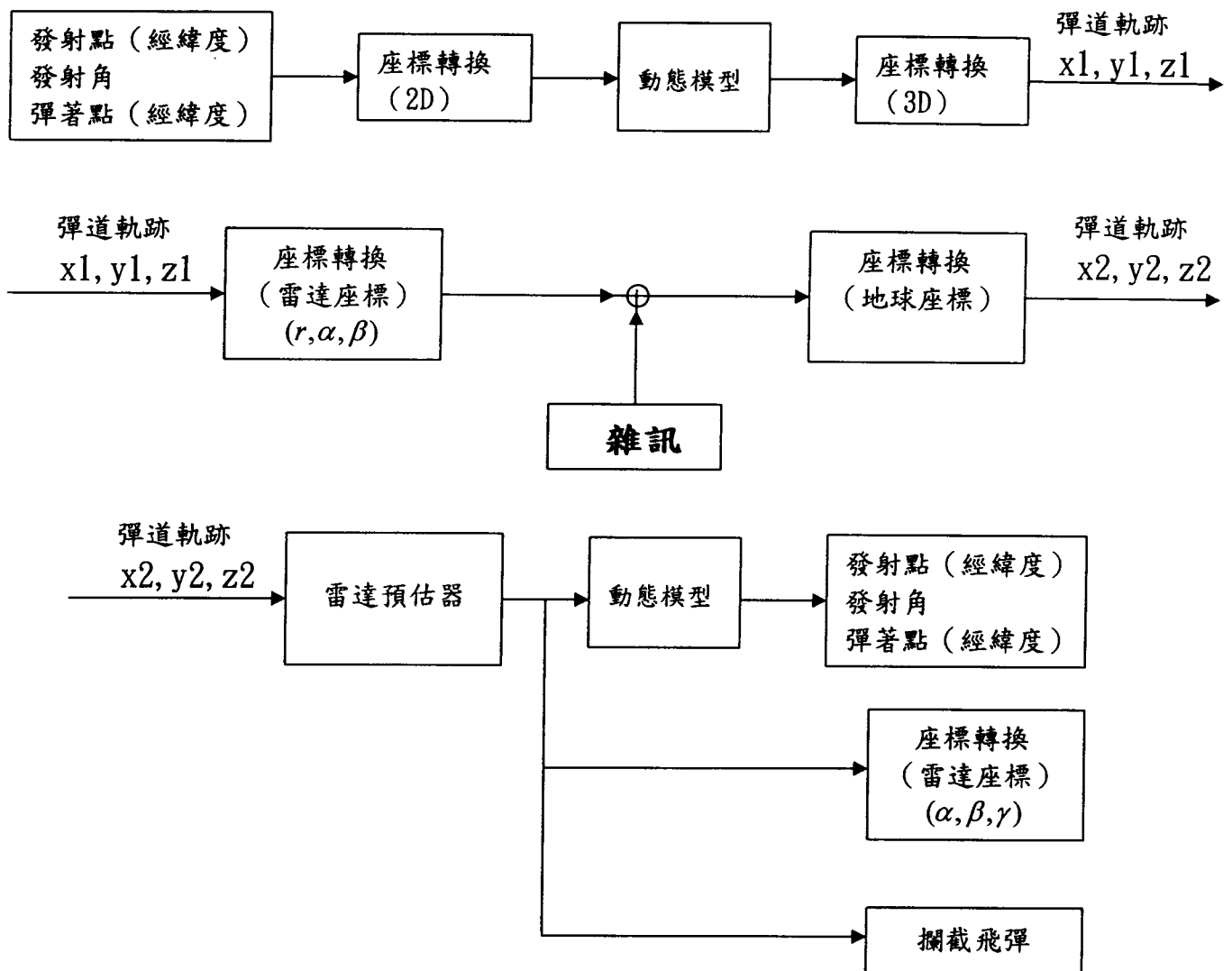


圖 6-7 飛彈軌跡模擬與智慧型雷達預估器的系統架構

### 6.4.2 多目標彈道軌跡追蹤模擬

考慮運動目標以地球中心為中心點的二維座標系統，則目標的運動方程式可表示如下。

假設條件：

- 1) 設飛彈為一具有質量  $m$  的質點，
- 2) 設地球為一半徑  $a$ 、質量  $M$  之均勻分佈球體，
- 3) 由牛頓萬有引力定律可得：質量分別為  $m$  與  $M$  之兩物體，其距



離為  $r$ ，則作用在兩者之間的引力為大小相同、方向相反之力，其大小與兩物體相乘成正比，而與兩物體間的距離平方成反比，若其中一物體為地球，而另一物體的質量與地球相比可忽略不計，則牛頓萬有引力定律可被改寫成向量型式：

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-gM\vec{r}}{r^3} \quad (6-8)$$

其中， $\vec{r}$  表從地球中心到另一物體的向量， $gM$  為已知的重力常數：

$$gM = 1.4077 \times 10^{16} \text{ ft}^3/\text{s}^2 \quad (6-9)$$

4) 設地球之自轉速率為零，

5) 設無空氣阻力作用。

在重力場中的物體可被描述成在以地球中心為中心點的座標系中，如圖 6-8 所示，此系統中地球不旋轉，且作用在飛彈上的重力加速度指向地心，在飛彈的參考座標系統上有一速度  $V$ ，此參考座標系與地球正切並垂直於地心到飛彈的連線。則牛頓萬有引力定律可被表示在以地球中心為中心點的慣性座標系中：

$$\ddot{x} = \frac{-gMx}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \quad (6-10)$$

$$\ddot{y} = \frac{-gMy}{(x^2 + y^2)^{1.5}} \quad (6-11)$$

其中， $x$  和  $y$  為從地心到飛彈間的距離分量。

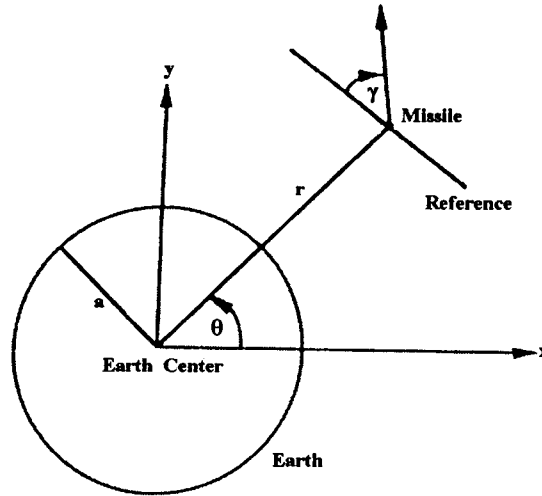


圖 6-8 球形地球中地心與飛彈的相對位置圖

其初始條件為：

$$x(0) = (a + a_{m0}) \cdot \cos \theta_0 \quad (6-12)$$

$$y(0) = (a + a_{m0}) \cdot \sin \theta_0 \quad (6-13)$$

$$\dot{x}(0) = V \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \theta_0\right) \quad (6-14)$$

$$\dot{y}(0) = V \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \theta_0\right) \quad (6-15)$$

其中， $a_{m0}$  表飛彈相對地球表面的初始高度， $\gamma$  表相對參考座標系的速度向量夾角， $\theta_0$  表飛彈位置與  $x$  軸的初始角度。

由(6-10)-(6-15)式，我們可以模擬出飛彈的運動軌跡，藉由雷達在每個取樣時間  $T=1s$  可量測到飛彈的位置。我們利用模擬來驗證本篇論文所提出方法的可行性，在選擇不佳的初始條件及雜訊干擾程度不同的環境下，討論模擬的效果為何。

SOM 初始化設定如下所示：

初始設定  $\omega_{s_j}(0)$ ，為了方便觀察鍵結值向量移動情形，我們使用均勻

的設定  $\omega_{s_j}(0) = [\omega_{s_{j1}}(0) \quad \omega_{s_{j2}}(0) \quad \omega_{s_{j3}}(0) \quad \omega_{s_{j4}}(0)]$ 。

$x$  方向的位置： $\omega_{s_{j1}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$

x 方向的速度： $\omega_{s,j_2}(0) \in \{-2000, -1000, 0, 1000, 2000\} ft/s$

y 方向的位置： $\omega_{s,j_3}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$

y 方向的速度： $\omega_{s,j_4}(0) \in \{-2000, -1000, 0, 1000, 2000\} ft/s$

其中  $j = 1, \dots, N$ ， $N = 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ，M 值設定為 100。

模擬結果：

- (1) 對於兩個飛彈的軌跡追蹤，其實際發射角度為  $\gamma^1 = 40$  度與  $\gamma^2 = 45$  度，飛彈發射位置與 x 軸的夾角為  $\theta_0^1 = 30$  度與  $\theta_0^2 = 40$  度，飛彈的初始發射速度為  $v^1 = 24275$  ft/s 與  $v^2 = 23088$  ft/s，經過 (6-10)-(6-15) 式運算，經由以上的資訊我們可以得到 TBM 的實際飛行軌跡，其中並且假設雷達估測目標有  $[-10, 10]$  ft 的誤差。圖 6-9 為模擬後的結果，由圖中可以看出飛彈的飛行軌跡與預測的軌跡非常接近。局部放大的顯示結果如圖 6-10 所示，可以更明顯的看出軌跡的預測有不錯的效果。圖 6-11 為鍵結值在 x-y 方向位置移動的情形，由圖中可以發現，鍵結值會收斂在兩個極小的區間。
- (2) 對於三個飛彈的軌跡追蹤，其實際發射角度為  $\gamma^1 = 40$  度， $\gamma^2 = 45$  度與  $\gamma^3 = 140$  度，飛彈發射位置與 x 軸的夾角為  $\theta_0^1 = 5$  度， $\theta_0^2 = 0$  與  $\theta_0^3 = 140$  度，飛彈的初始發射速度為  $v^1 = 28824$  ft/s， $v^2 = 27465$  ft/s 與  $v^3 = 27465$  ft/s，經過 (6-10)-(6-15) 式運算，經由以上的資訊我們可以得到 TBM 的實際飛行軌跡，其中假設雷達估測目標有  $[-10, 10]$  ft 的誤差。圖 6-12 為模擬後的結果，由圖中可以看出飛彈的飛行軌跡與預測的軌跡非常接近。局部放大的顯示結果如圖 6-13 所示，可以更明顯的看出軌跡的預測有不錯的效果。圖 6-14 為鍵結值在 x-y 方向位置移動的情形，由圖中可以發現，鍵結值會收斂在三個極小的區間。
- (3) 增加雷達估測目標的誤差至  $[-20, 20]$  ft，重複(1)-(2)模擬結果，如圖(6-15)至圖(6-20)所示，當環境雜訊的干擾增加時，對於模擬的結果不會有很大的影響。

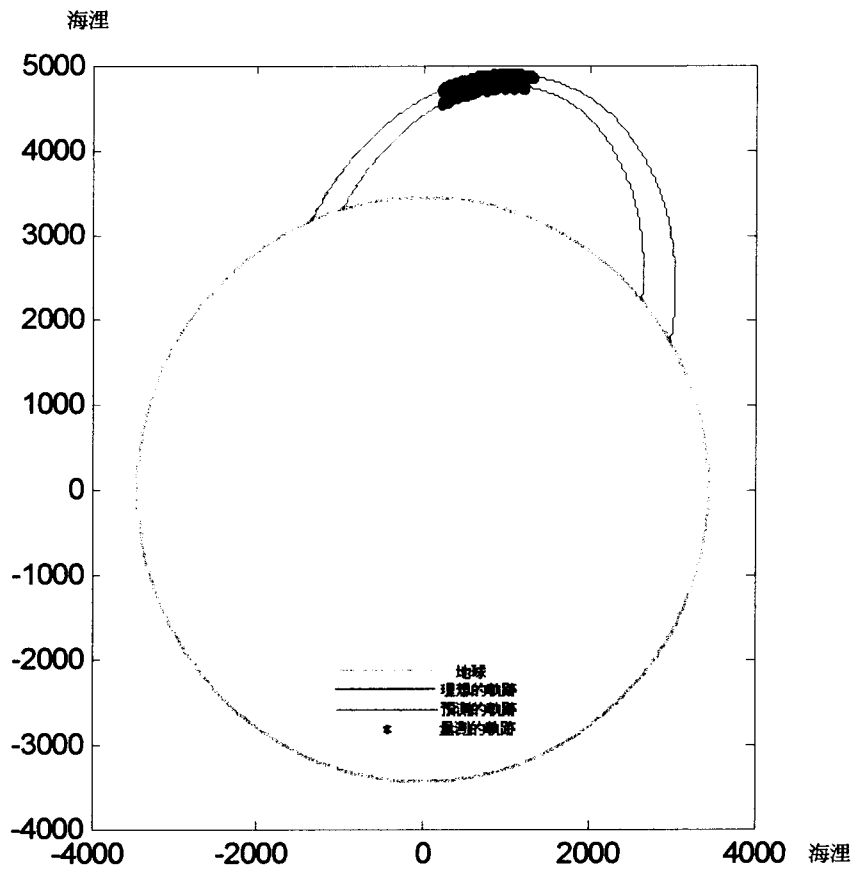


圖 6-9 飛彈軌跡預測結果

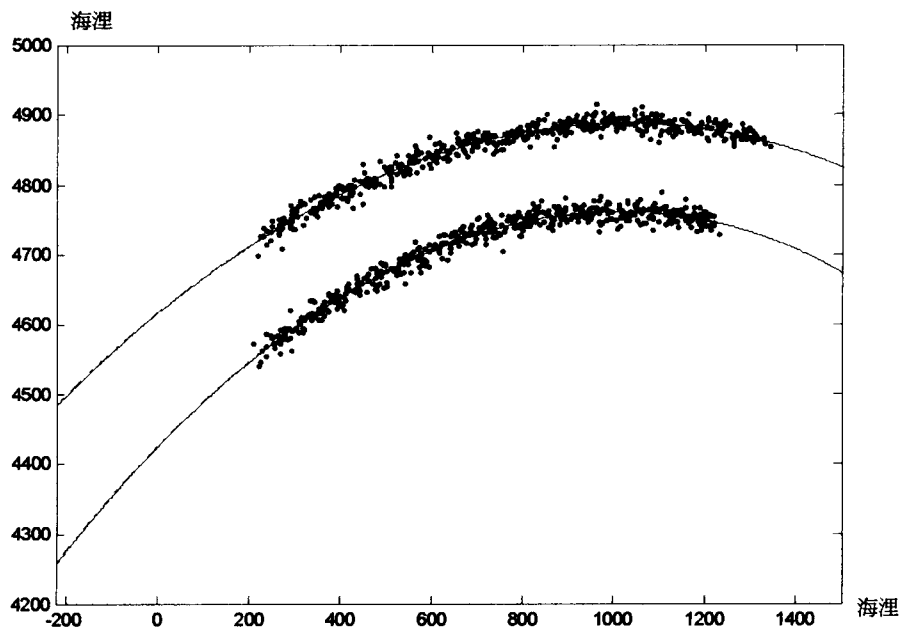


圖 6-10 局部放大圖 6-9 之飛彈軌跡預測結果

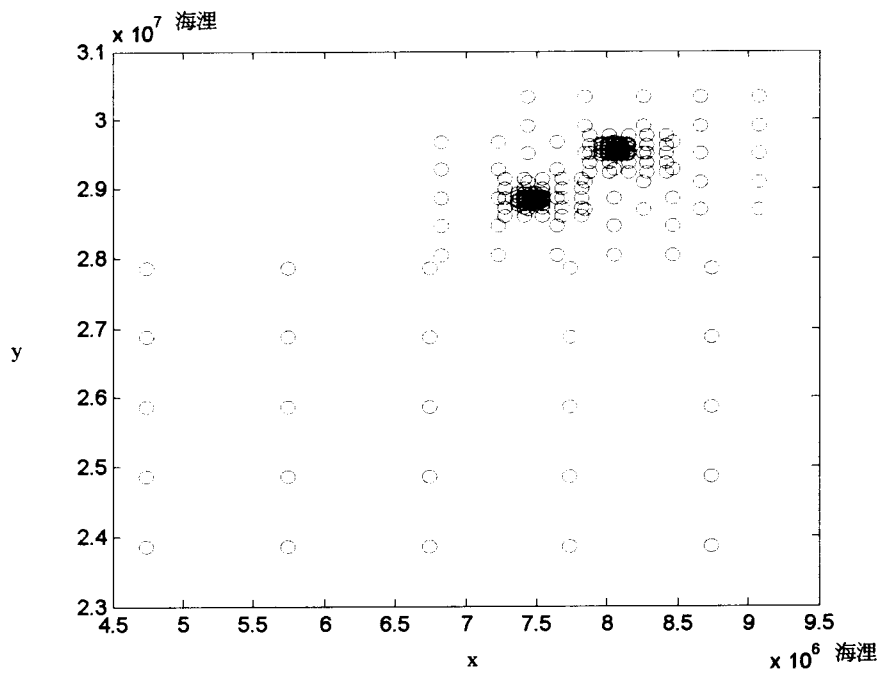


圖 6-11 鍵結值改變的情形

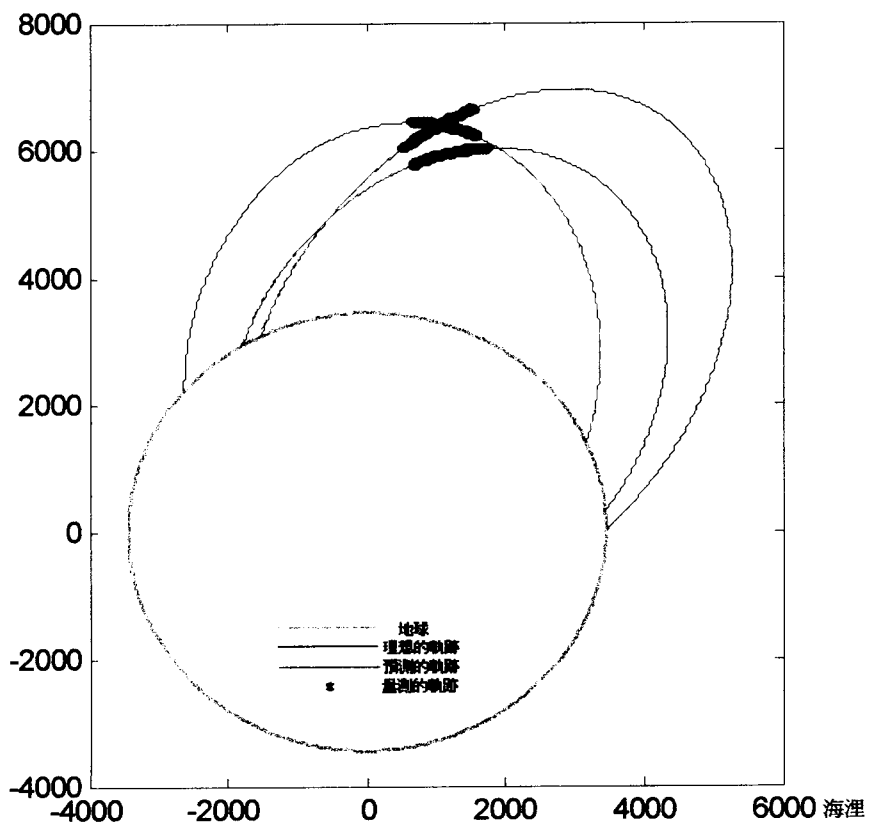


圖 6-12 飛彈軌跡預測結果

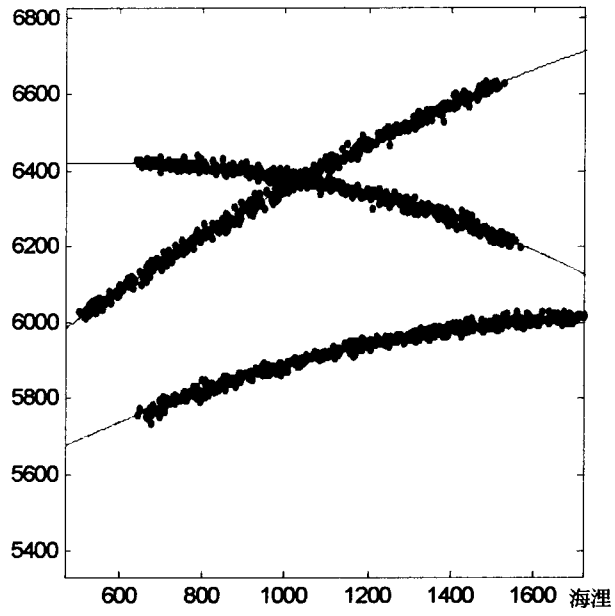


圖 6-13 局部放大圖 6-12 之飛彈軌跡預測結果

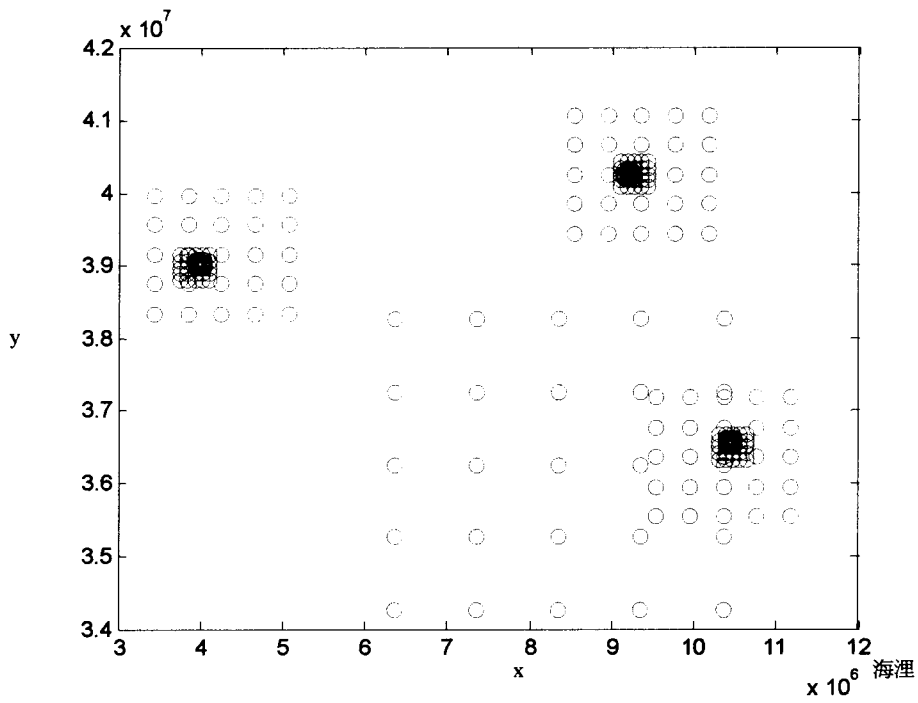


圖 6-14 鍵結值改變的情形

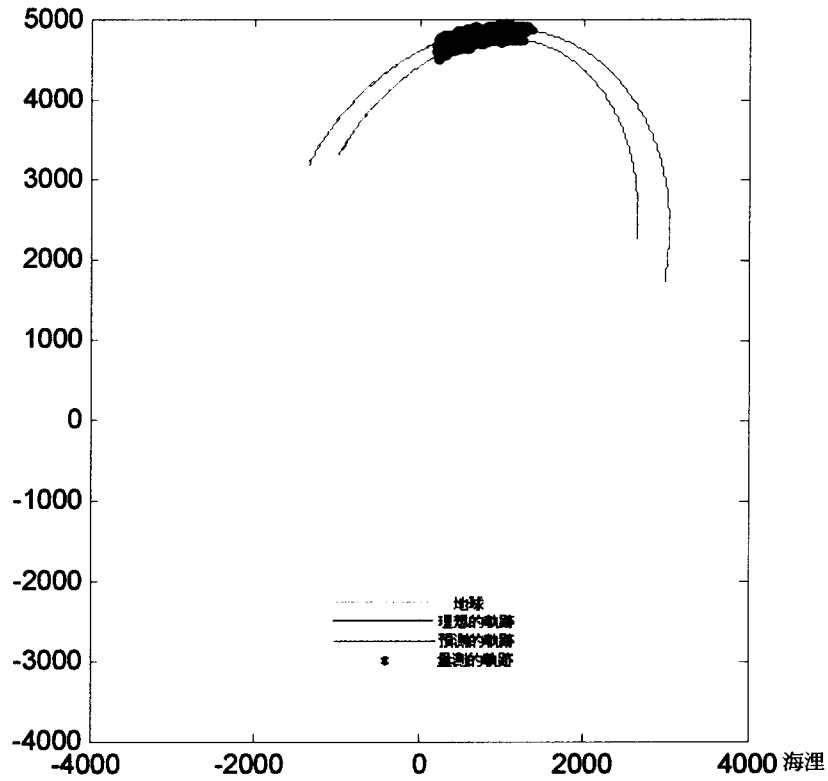


圖 6-15 飛彈軌跡預測結果

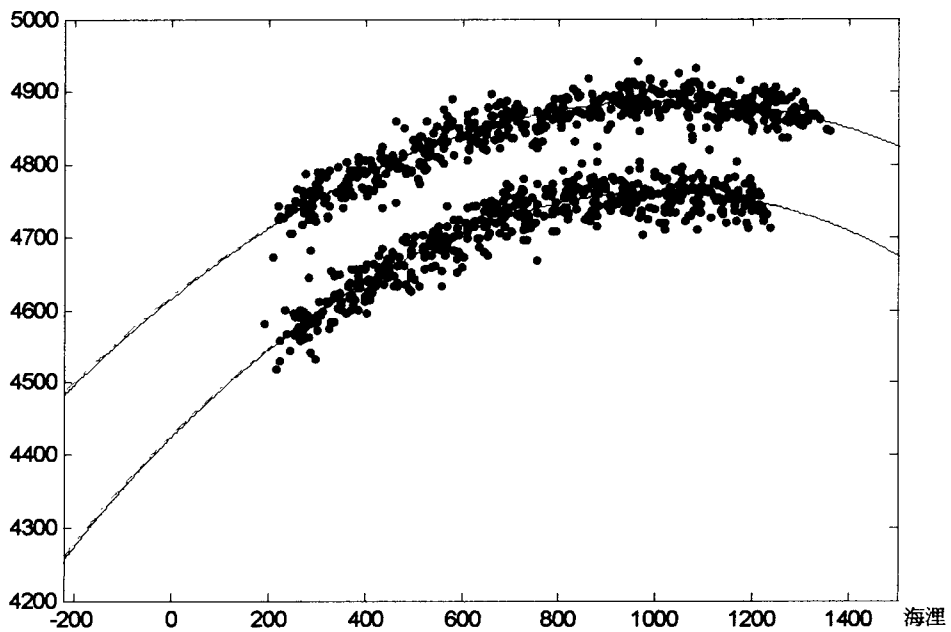


圖 6-16 局部放大圖 6-15 之飛彈軌跡預測結果

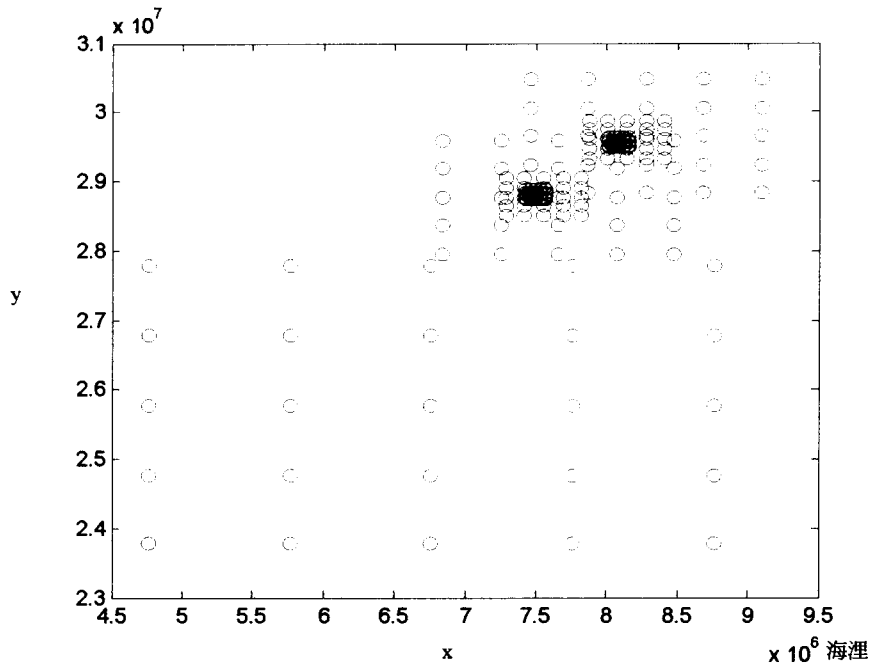


圖 6-17 鍵結值改變的情形

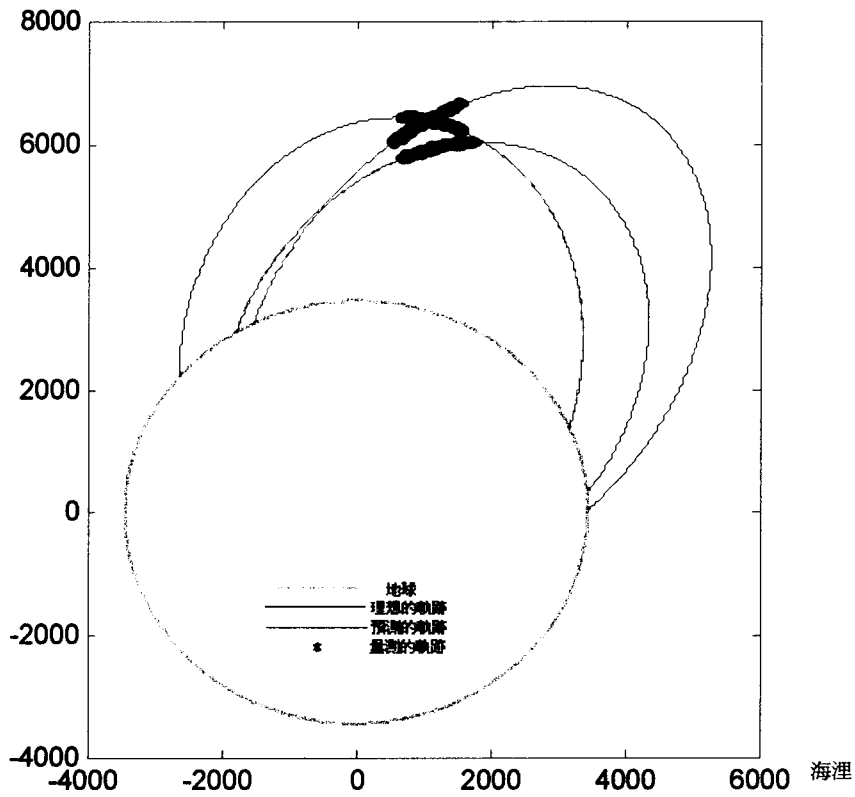


圖 6-18 飛彈軌跡預測結果



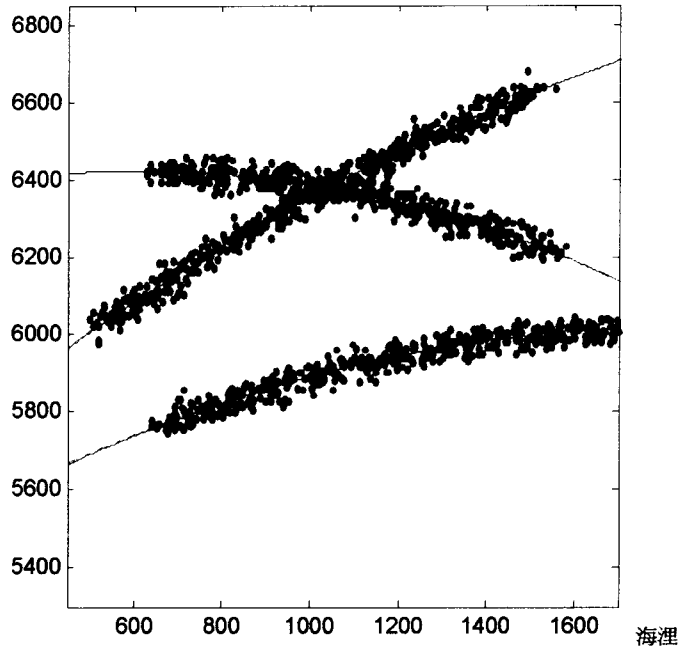


圖 6-19 局部放大圖 6-18 之飛彈軌跡預測結果

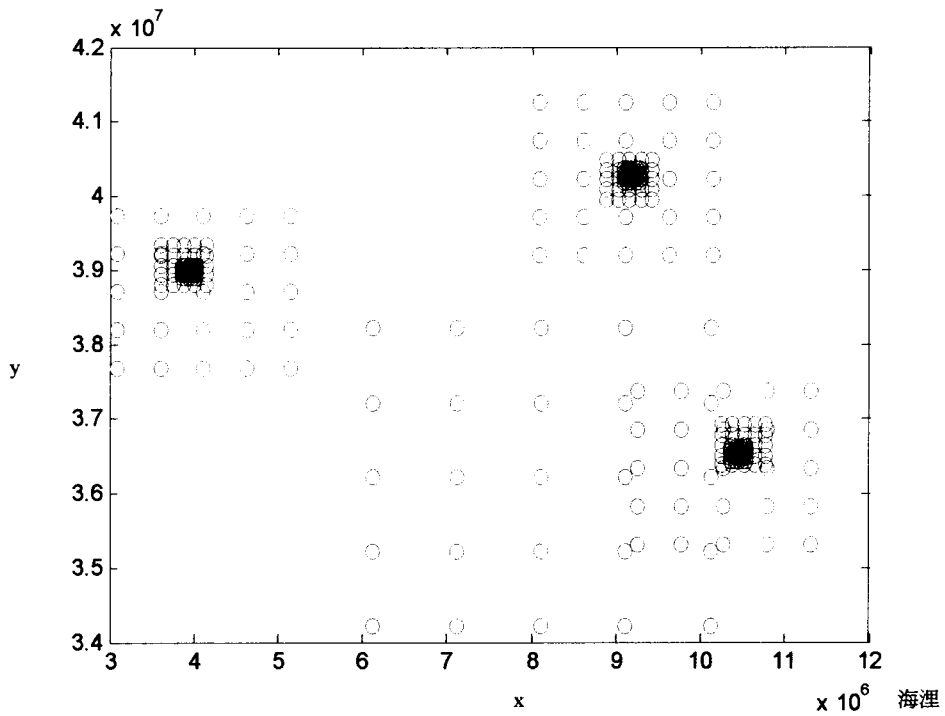


圖 6-20 鍵結值改變的情形

### 6.4.3 彈道軌跡追蹤模擬與 Kalman filter 比較

在模擬中我們選擇效果不同的初始條件與雜訊大小的情形來跟 Kalman filter 做比較。

考慮運動目標以地球中心為中心點的三維座標系統。

則目標的運動方程式可表示如下：

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-gMx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ \ddot{y} &= \frac{-gMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}} \\ \ddot{z} &= \frac{-gMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1.5}}\end{aligned}\quad (6-16)$$

重新寫成矩陣的形式如下：

$$X = [x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad z \quad \dot{z}]^T = [x[1] \quad x[2] \quad x[3] \quad x[4] \quad x[5] \quad x[6]]^T \quad (6-17)$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} x[2] \\ -GR_e^2 x[1]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2} \\ x[4] \\ -GR_e^2 x[3]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2} \\ x[6] \\ -GR_e^2 x[5]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \xi_z \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

$$X_{k+1} = f(X_k) + H(X_k)\underline{\xi}_k \quad (6-19)$$

$$f(X_k) = \begin{bmatrix} x[1] + tx[2] \\ x[2] + t(-GR_e^2 x[1]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2}) \\ x[3] + tx[4] \\ x[4] + t(-GR_e^2 x[3]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2}) \\ x[5] + tx[6] \\ x[6] + t(-GR_e^2 x[5]/(x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{3/2}) \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

$$H(X_k) = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial f}{\partial X_{k-1}} (\hat{X}_{k-1}) \right] \\
& = \begin{bmatrix} 1 & tG \operatorname{Re}^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-3/2} (3x[1]^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-1} - 1) \\ t & 1 \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[1]x[3](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[1]x[5](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[1]x[3](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ 1 & tG \operatorname{Re}^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-3/2} (3x[3]^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-1} - 1) \\ t & 1 \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[3]x[5](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[5]x[1](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 3tG \operatorname{Re}^2 x[5]x[3](x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-5/2} \\ 0 & 0 \\ 1 & tG \operatorname{Re}^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-3/2} (3x[5]^2 (x[1]^2 + x[3]^2 + x[5]^2)^{-1} - 1) \\ t & 1 \end{bmatrix}^T \quad (6-22)
\end{aligned}$$

$$v_k = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] X_k + \eta_k \quad (6-23)$$

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial X_k} (\hat{X}_{k|k-1}) \right] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

選擇飛彈的初始設定：

發射點（北京）：(東經116.4°,北緯39.9°)

彈著點（台北）：(東經121.5°,北緯25.5°)

雷達位置設定在(東經122.5°,北緯26.5°)

雷達受雜訊干擾的範圍：

$r:\{0,5m\}$

$\alpha:\{0,0.002^\circ\}$

$\beta:\{0,0.002^\circ\}$

## (I)較差的初始條件

選擇較小的初始設定 $\underline{\omega}_{s_j}(0)$ ，即理想的初始運動狀態不在此範圍裡

面，為了方便觀察鍵結值向量移動情形，我們使用均勻的設定。

$$\underline{\omega}_{s_j}(0)=[\underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j6}}(0)]$$

x 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \in \{-100000, -50000, 0, 50000, 100000\} ft$

x 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \in \{-100, -50, 0, 50, 100\} ft/s$

y 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \in \{-100000, -50000, 0, 50000, 100000\} ft$

y 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \in \{-100, -50, 0, 50, 100\} ft/s$

z 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \in \{-100000, -50000, 0, 50000, 100000\} ft$

z 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j6}}(0) \in \{-100, -50, 0, 50, 100\} ft/s$

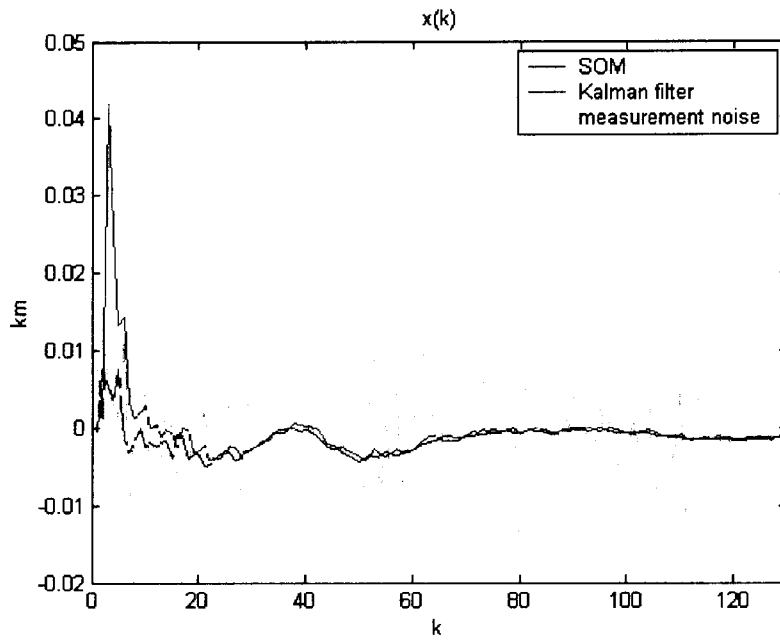


圖 6-21 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

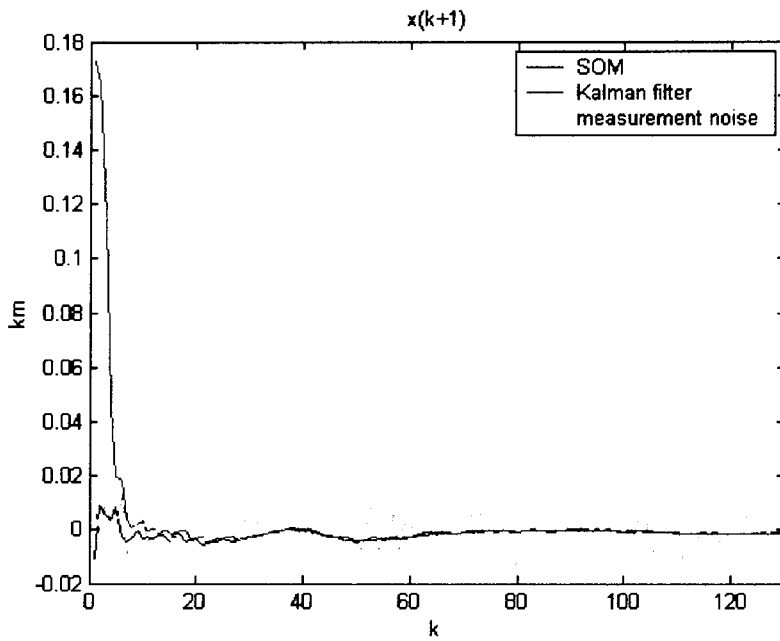


圖 6-22 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

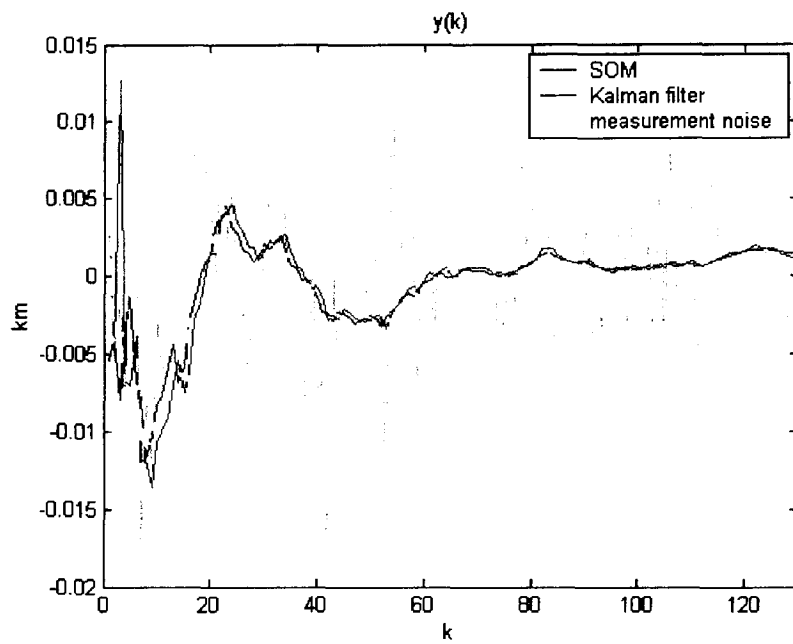


圖 6-23 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

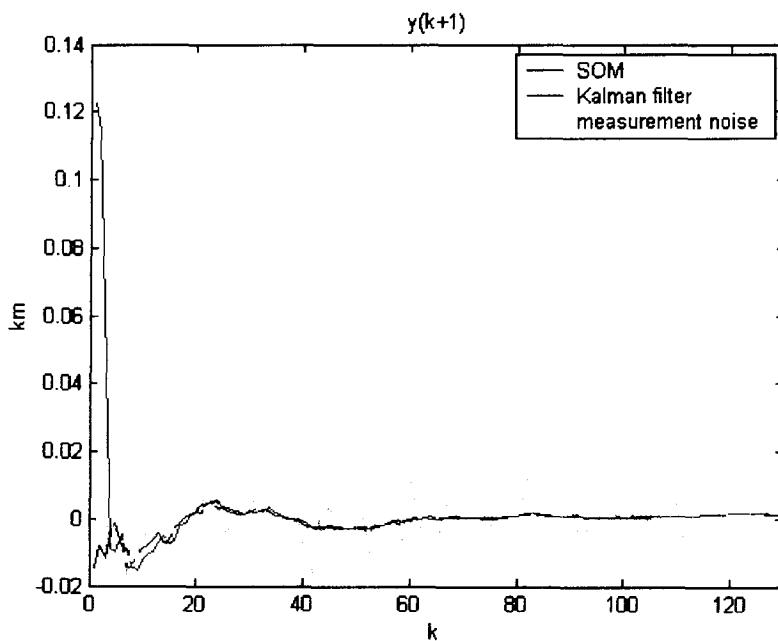


圖 6-24 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

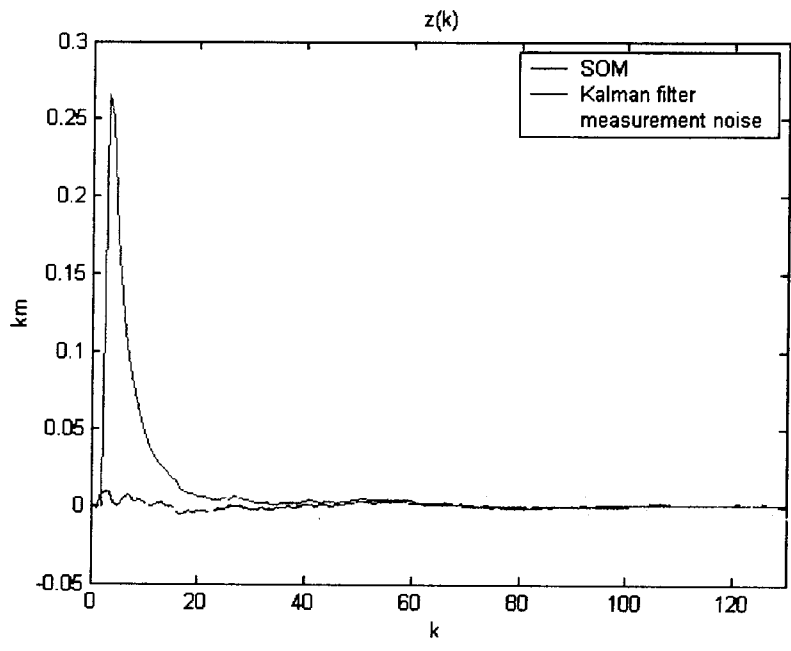


圖 6-25 第 k 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

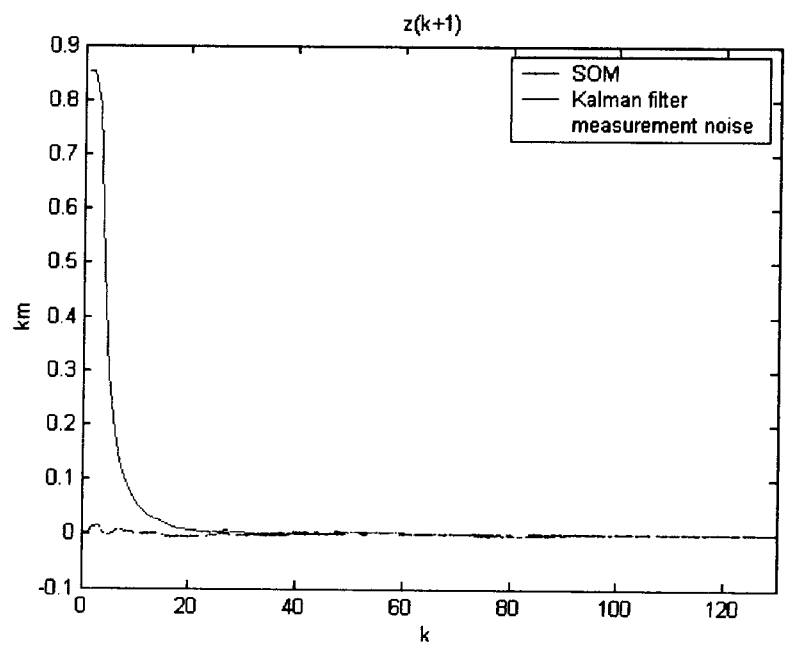


圖 6-26 第 k+1 時間 Kalman filter 與 SOM 在 z 座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

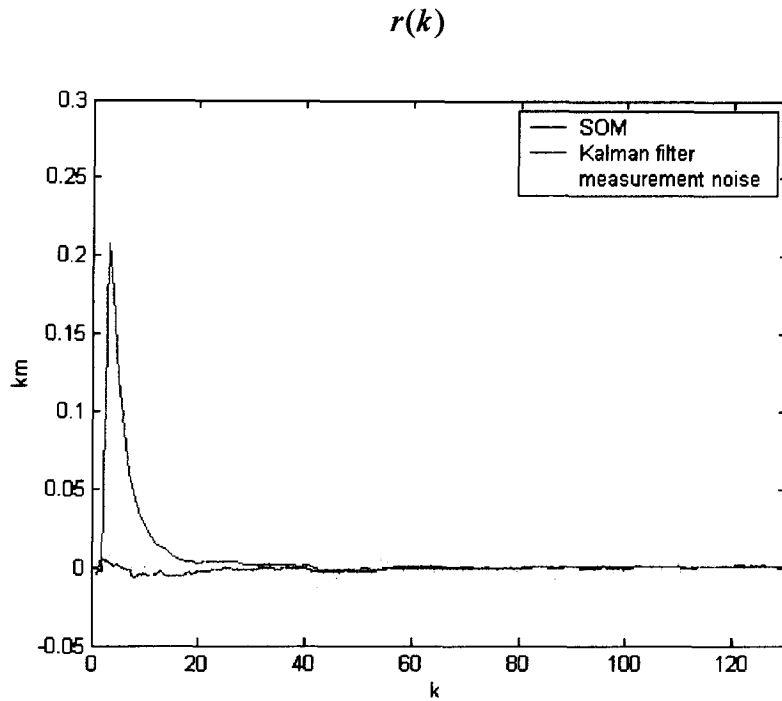


圖 6-27 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

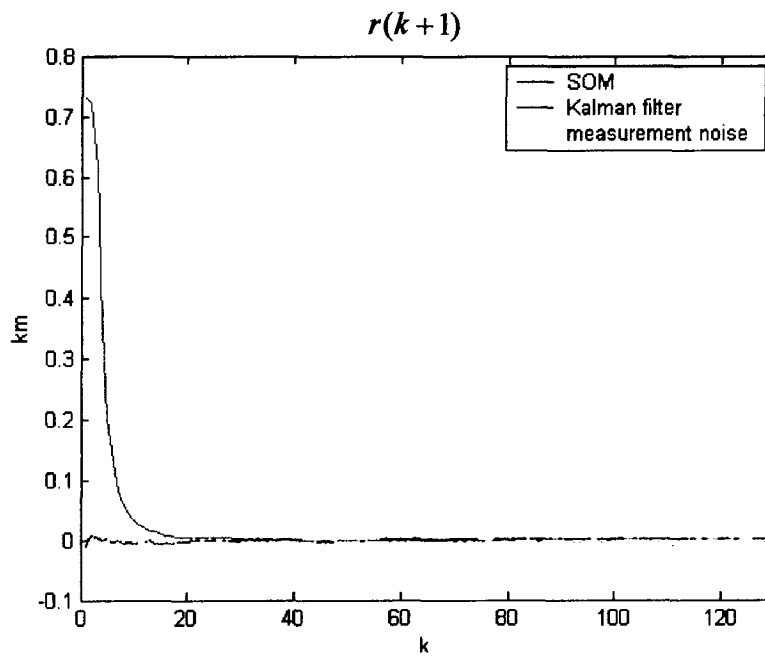


圖 6-28 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。



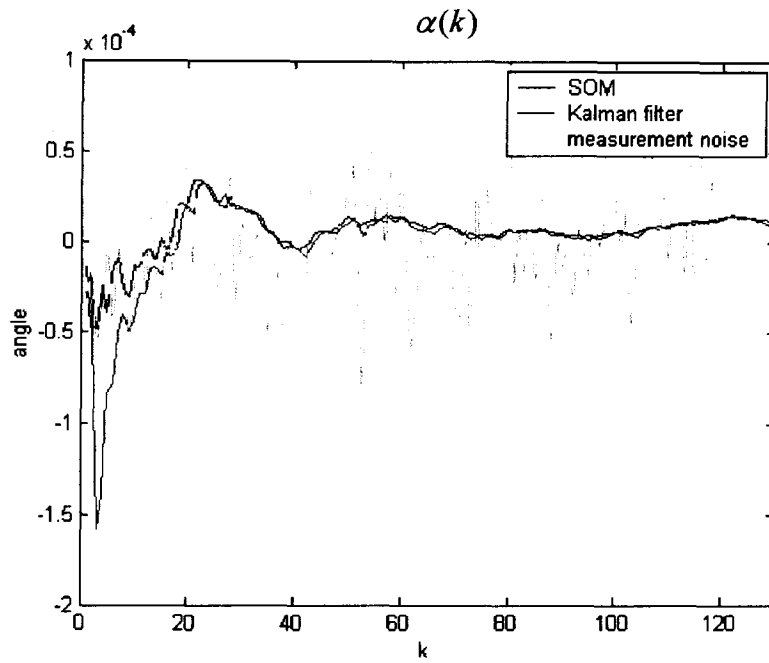


圖 6-29 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

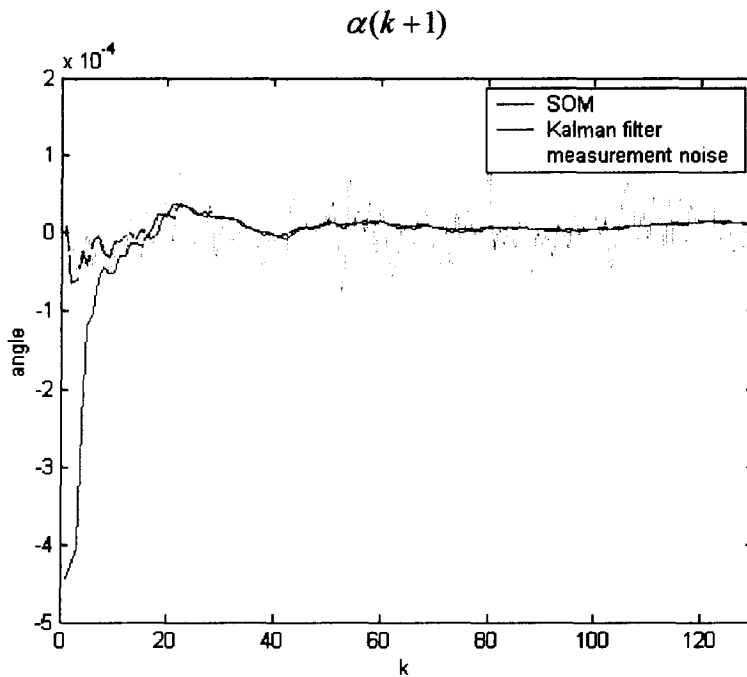


圖 6-30 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

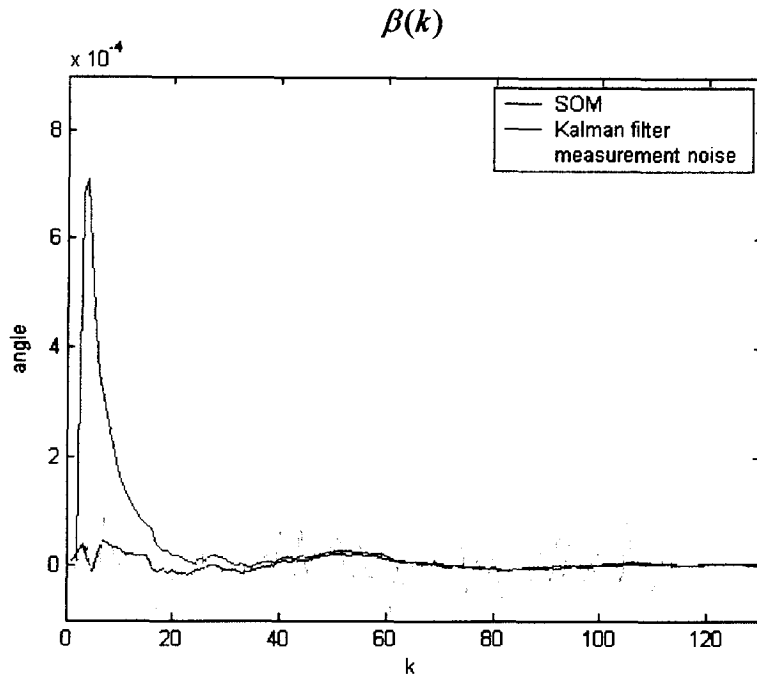


圖 6-31 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

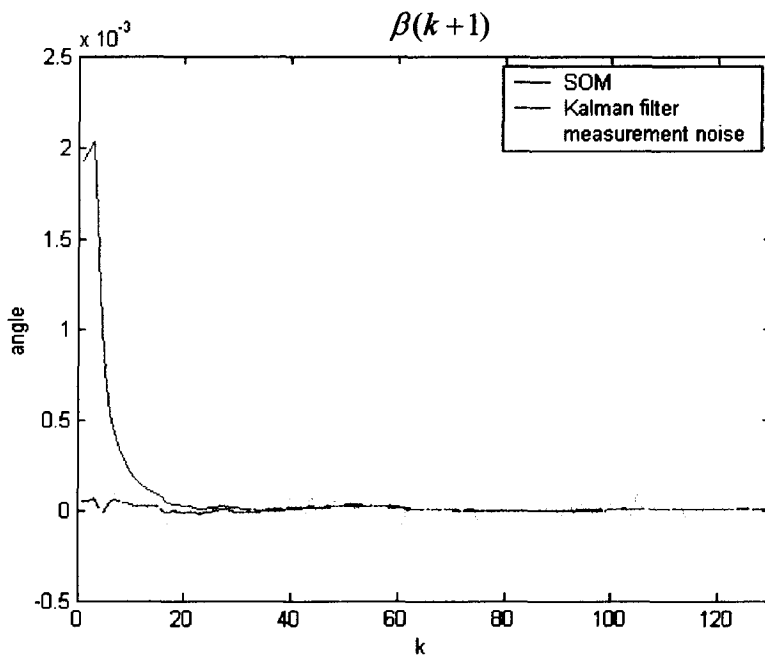


圖 6-32 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

表(一) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值

	$rms(\Delta x(k))$	$rms(\Delta y(k))$	$rms(\Delta z(k))$
SOM:	0.0011	0.0014	0.0010
Kalman:	0.0025	0.0017	0.0198
	$rms(\Delta \alpha(k))$	$rms(\Delta \beta(k))$	$rms(\Delta \gamma(k))$
SOM:	0.00001	0.00001	0.00096
Kalman:	0.00002	0.00010	0.01428
	$rms(\Delta x(k+1))$	$rms(\Delta y(k+1))$	$rms(\Delta z(k+1))$
SOM:	0.001375	0.001714	0.001297
Kalman:	0.011902	0.007844	0.069256
	$rms(\Delta \alpha(k+1))$	$rms(\Delta \beta(k+1))$	$rms(\Delta \gamma(k+1))$
SOM:	0.000014	0.000013	0.001203
Kalman:	0.000066	0.000317	0.056149

由模擬的結果如圖 6-21 至圖 6-32 所示，我們可以看出在選擇不佳的初始條件下，SOM 的收斂速度比 Kalman filter 還快，由表（一）中 Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值的比較，顯現出 SOM 的效能比 Kalman filter 好。

## (II) 良好的初始條件

初始設定  $\underline{\omega}_{s_j}(0)$  良好的範圍，即理想的初始運動狀態在此範圍裡面。

$$\underline{\omega}_{s_j}(0) = [\underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j6}}(0)]$$

x 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$

x 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$

y 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$

y 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$

z 方向的位置： $\underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$

z 方向的速度： $\underline{\omega}_{s_{j6}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$

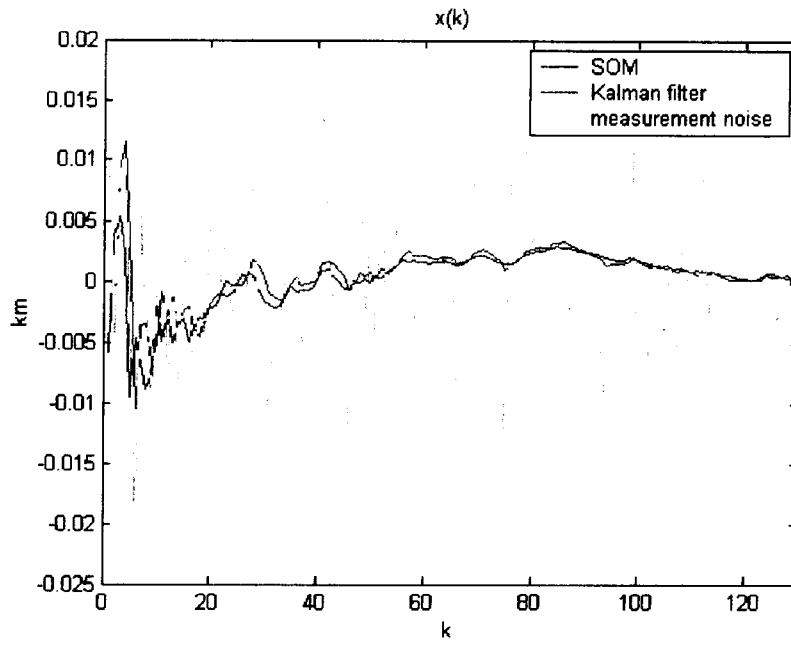


圖 6-33 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

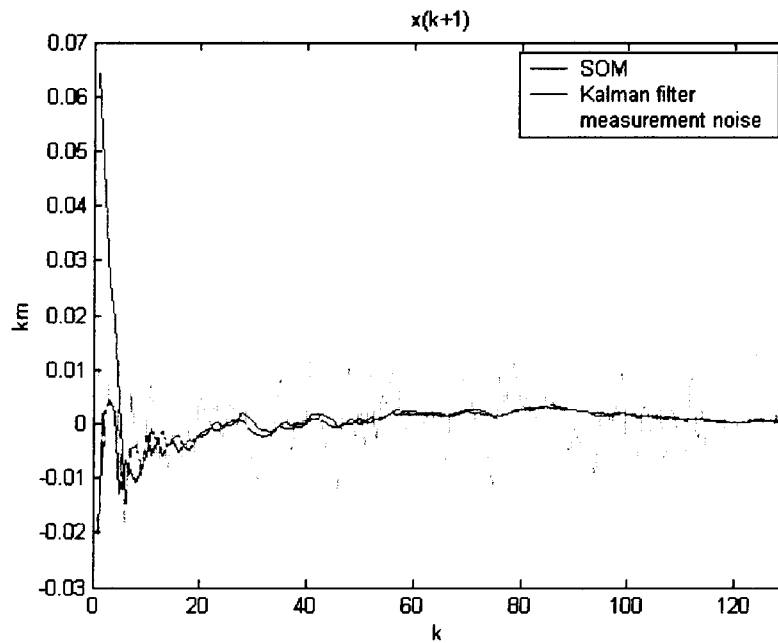


圖 6-34 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

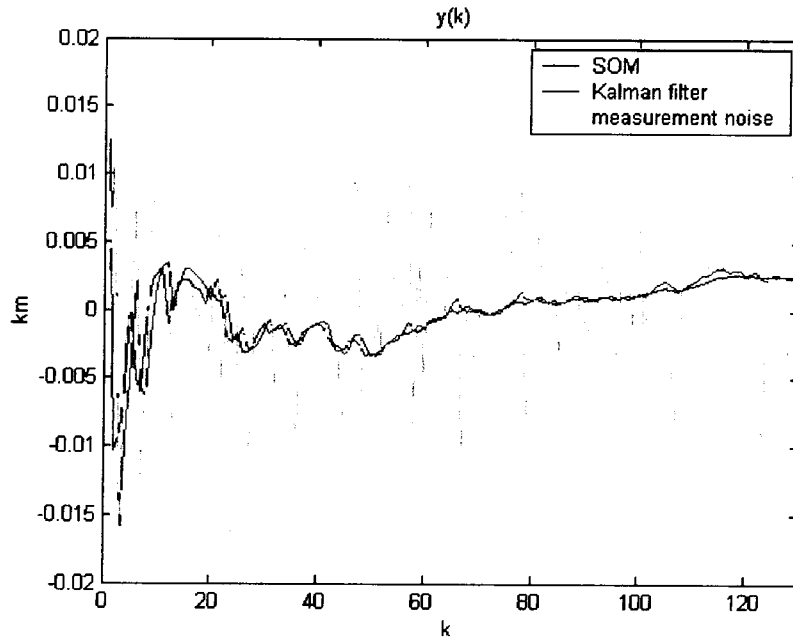


圖 6-35 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

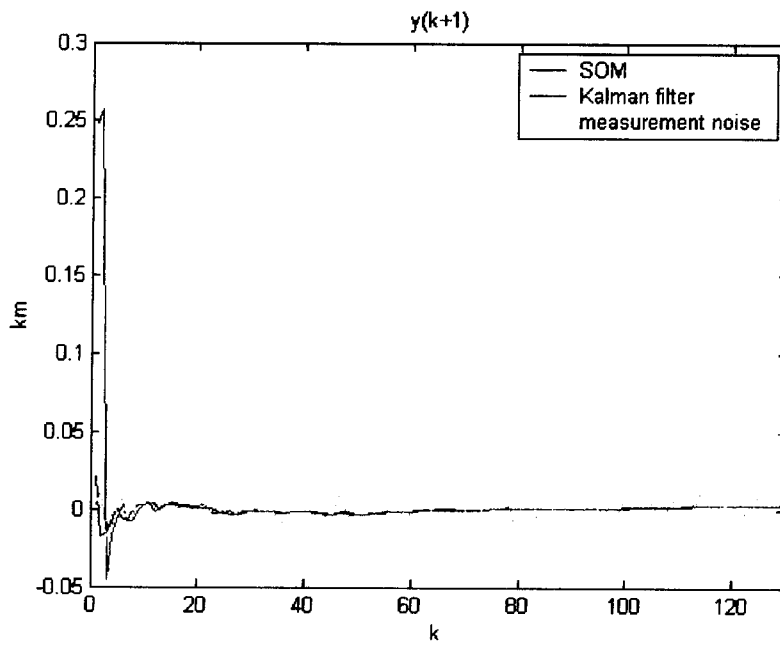


圖 6-36 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

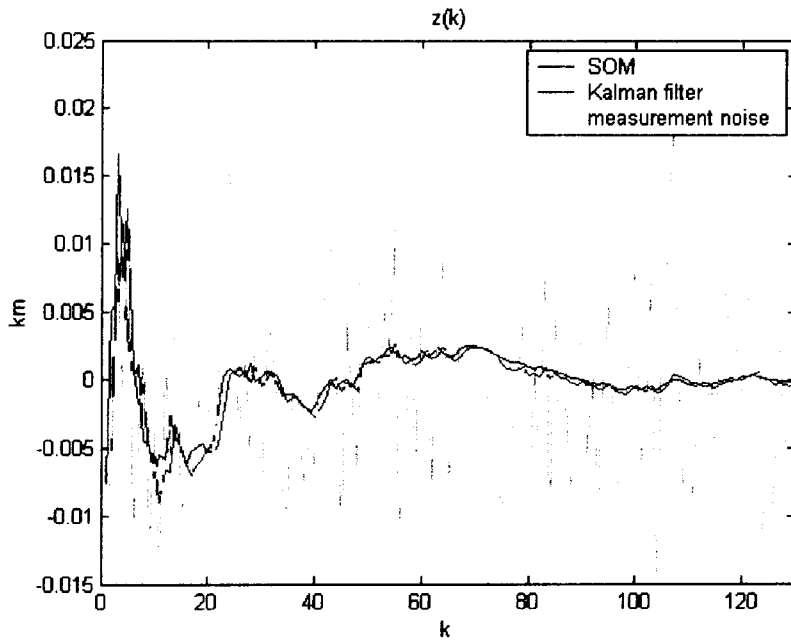


圖 6-37 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $z$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

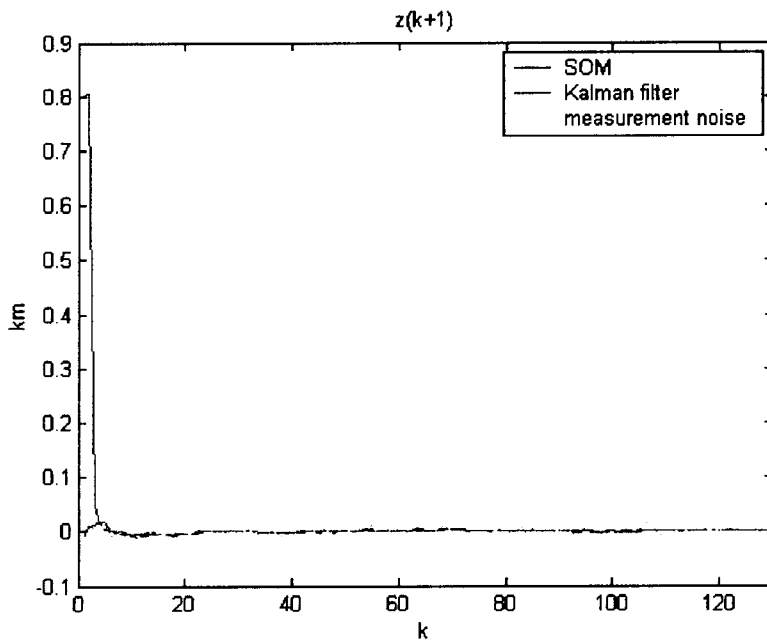


圖 6-38 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $z$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

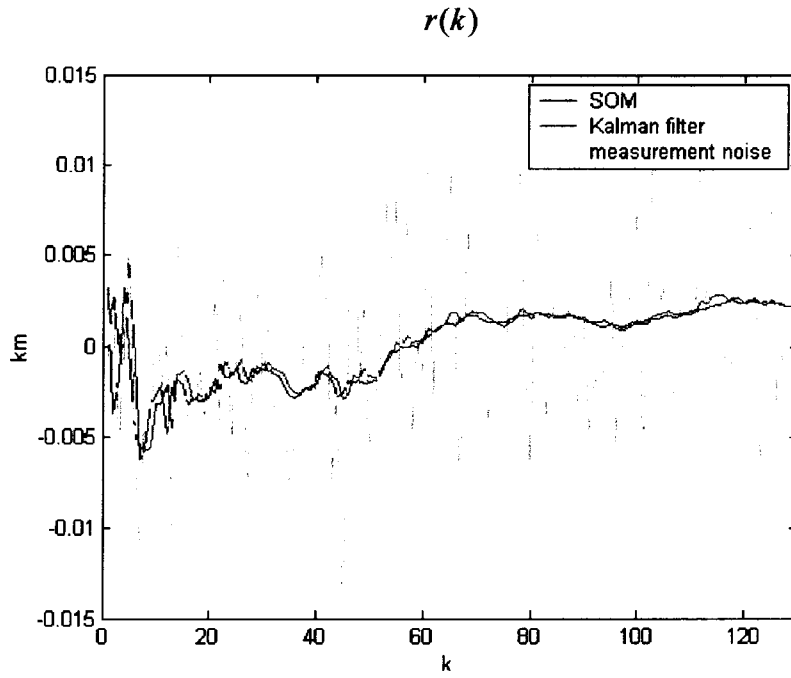


圖 6-39 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

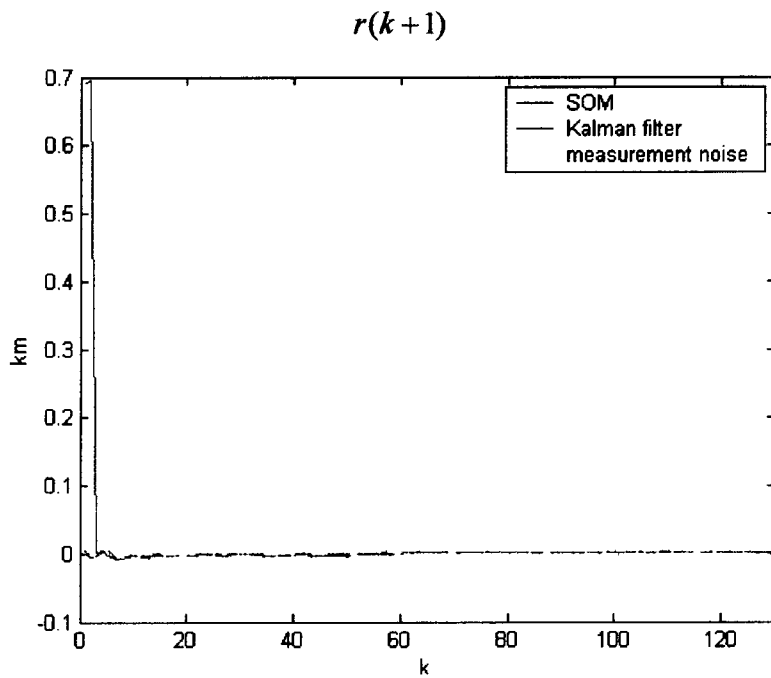


圖 6-40 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。



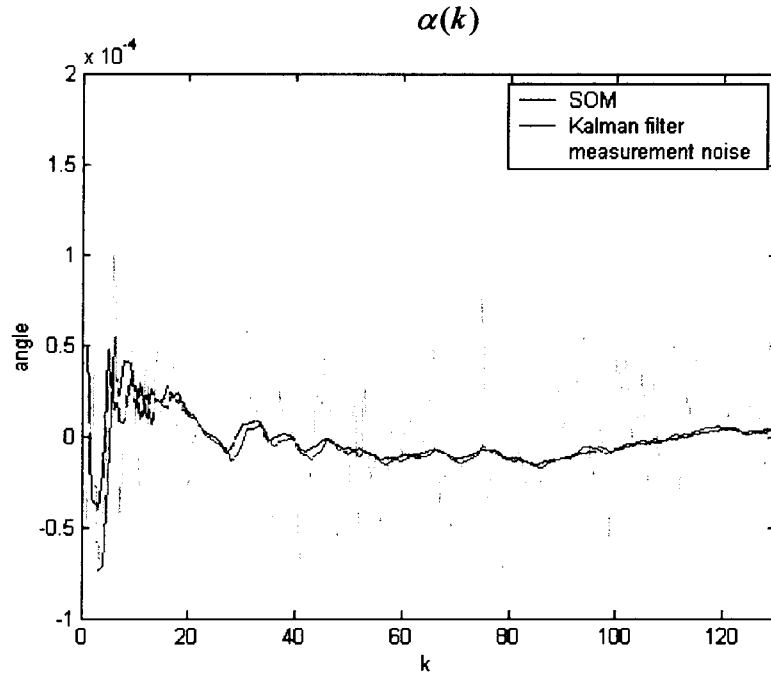


圖 6-41 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

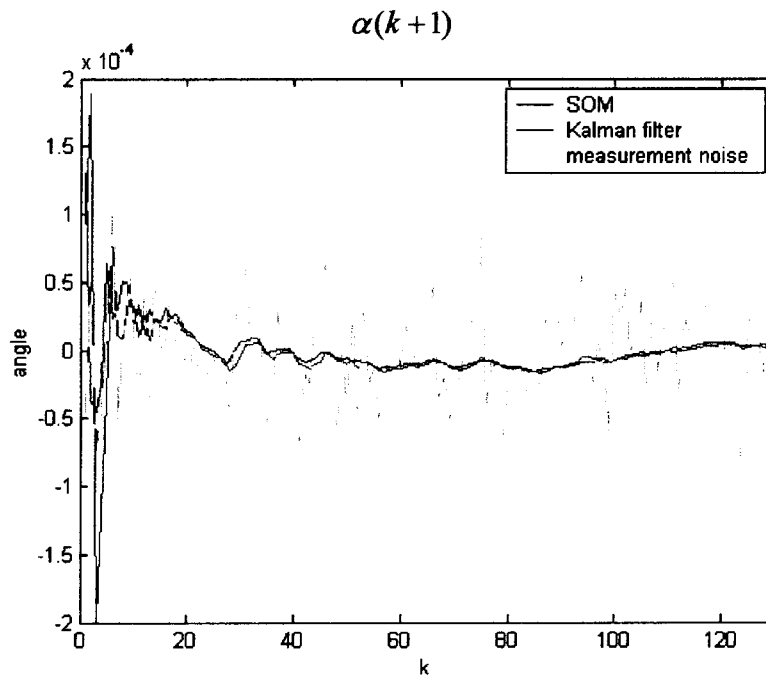


圖 6-42 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

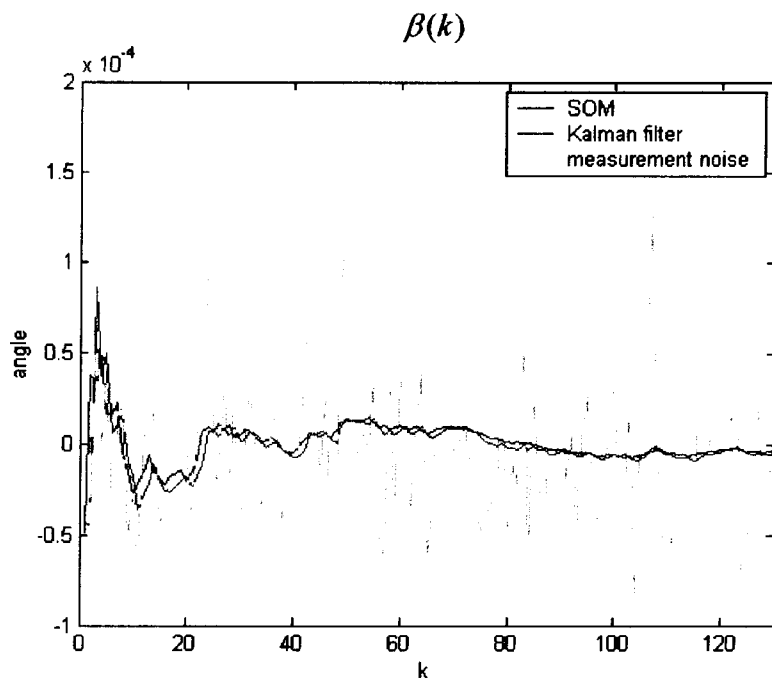


圖 6-43 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

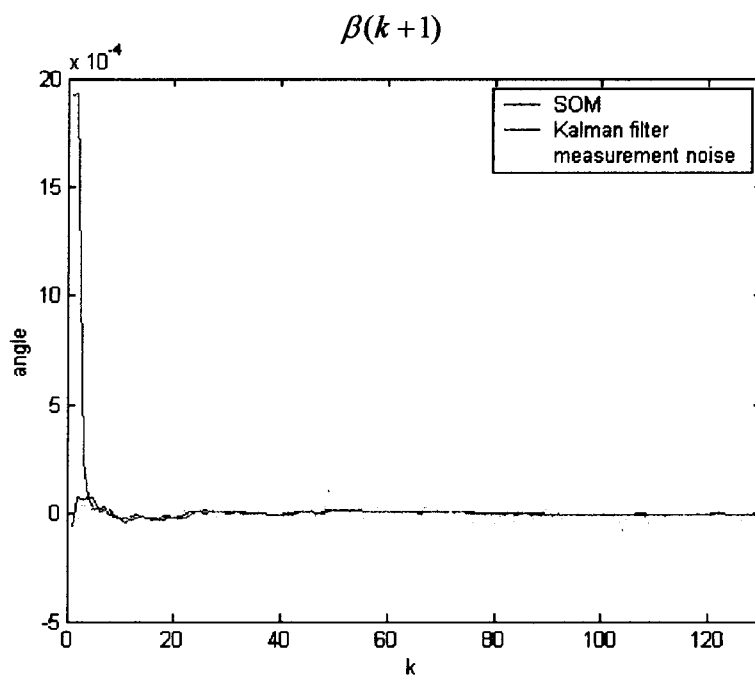


圖 6-44 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

表(二) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值

	$rms(\Delta x(k))$	$rms(\Delta y(k))$	$rms(\Delta z(k))$
SOM:	0.00131	0.00136	0.00130
Kalman:	0.00144	0.00154	0.00166
	$rms(\Delta \alpha(k))$	$rms(\Delta \beta(k))$	$rms(\Delta \gamma(k))$
SOM:	0.000013	0.000011	0.001135
Kalman:	0.000015	0.000014	0.001135
	$rms(\Delta x(k+1))$	$rms(\Delta y(k+1))$	$rms(\Delta z(k+1))$
SOM:	0.001745	0.001850	0.001642
Kalman:	0.004240	0.016919	0.053256
	$rms(\Delta \alpha(k+1))$	$rms(\Delta \beta(k+1))$	$rms(\Delta \gamma(k+1))$
SOM:	0.000018	0.000015	0.001240
Kalman:	0.000030	0.000237	0.045924

由模擬的結果如圖 6-33 至圖 6-44 所示，我們可以看出在選擇良好的初始條件下，SOM 與 Kalman filter 的收斂速度比選擇不好的初始條件下還快，但 SOM 的收斂速度還是比 Kalman filter 還快，由表(二)中 Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值的比較，也顯現出 SOM 的效能比 Kalman filter 好。

### (III) 增加雜訊

初始設定  $\omega_{s_j}(0)$  良好的範圍，使理想的初始運動狀態在此範圍裡面。

$$\underline{\omega}_{s_j}(0) = [\underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \quad \underline{\omega}_{s_{j6}}(0)]$$

$$x \text{ 方向的位置: } \underline{\omega}_{s_{j1}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$$

$$x \text{ 方向的速度: } \underline{\omega}_{s_{j2}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$$

$$y \text{ 方向的位置: } \underline{\omega}_{s_{j3}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$$

$$y \text{ 方向的速度: } \underline{\omega}_{s_{j4}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$$

$$z \text{ 方向的位置: } \underline{\omega}_{s_{j5}}(0) \in \{-1000000, -500000, 0, 500000, 1000000\} ft$$

$$z \text{ 方向的速度: } \underline{\omega}_{s_{j6}}(0) \in \{-1000, -500, 0, 500, 1000\} ft/s$$

但增加雷達受雜訊干擾的範圍：

$$r: \{0, 500m\}$$

$$\alpha: \{0, 0.02^\circ\}$$

$$\beta: \{0, 0.02^\circ\}$$

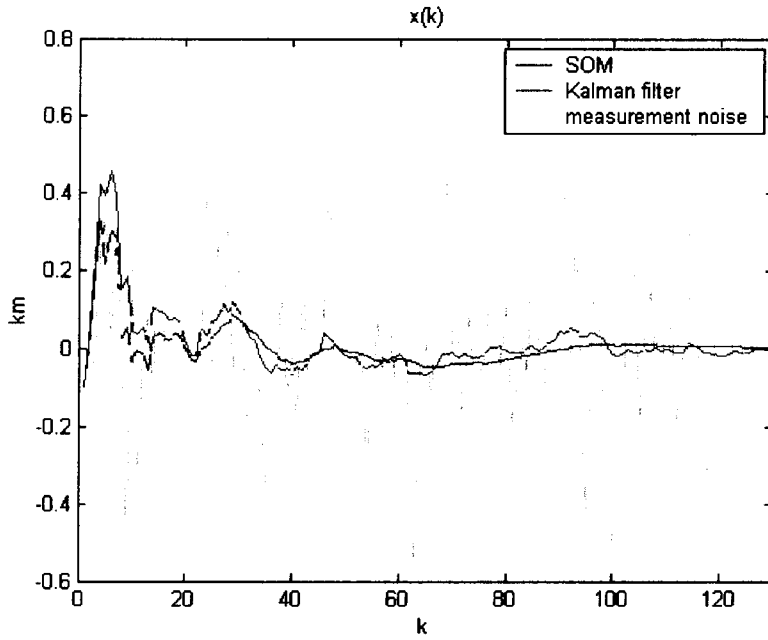


圖 6-45 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

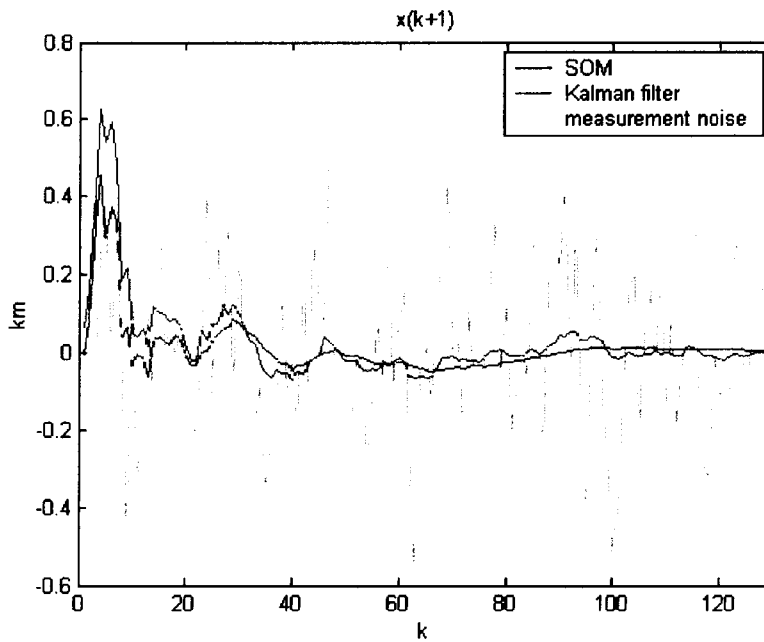


圖 6-46 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $x$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

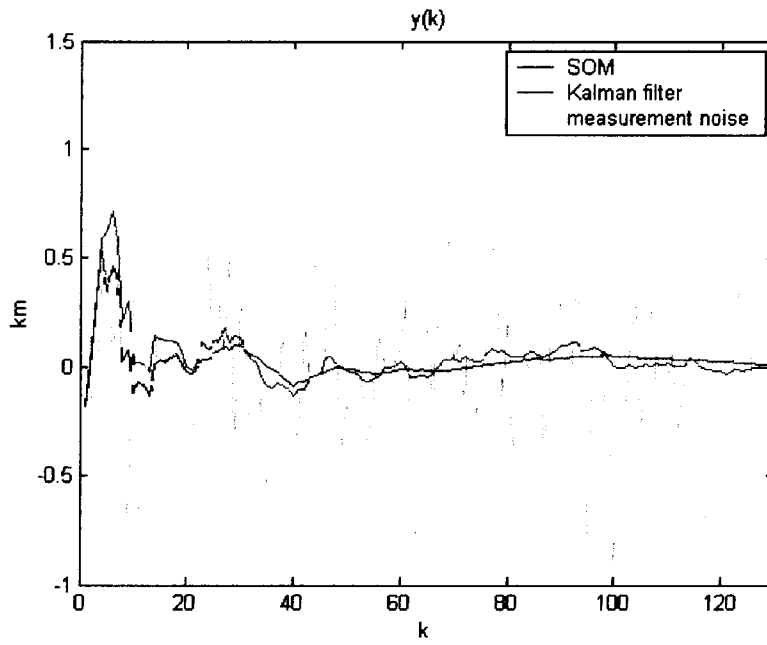


圖 6-47 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

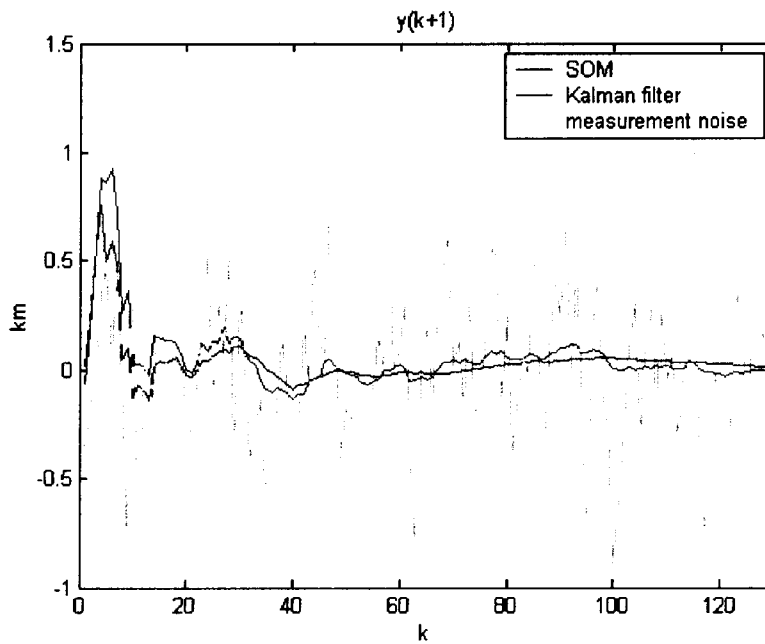


圖 6-48 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $y$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

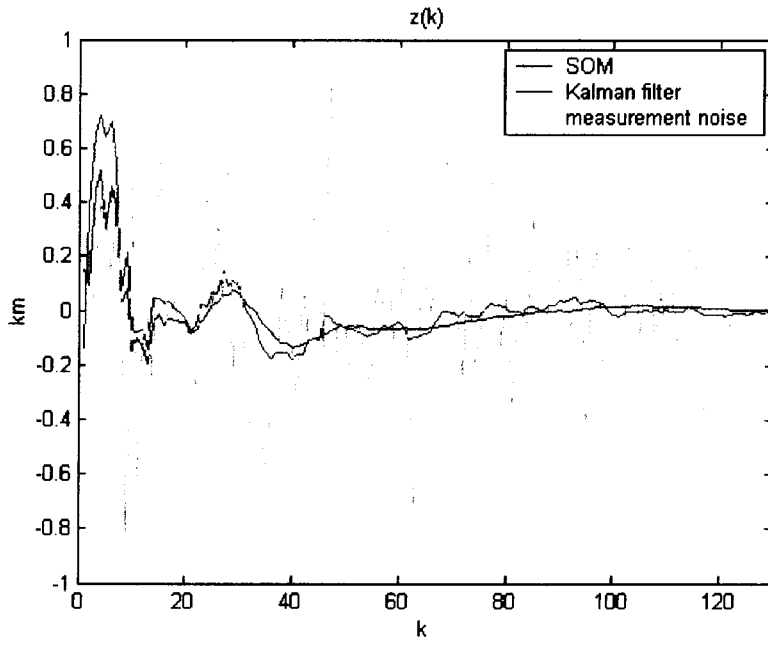


圖 6-49 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $z$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

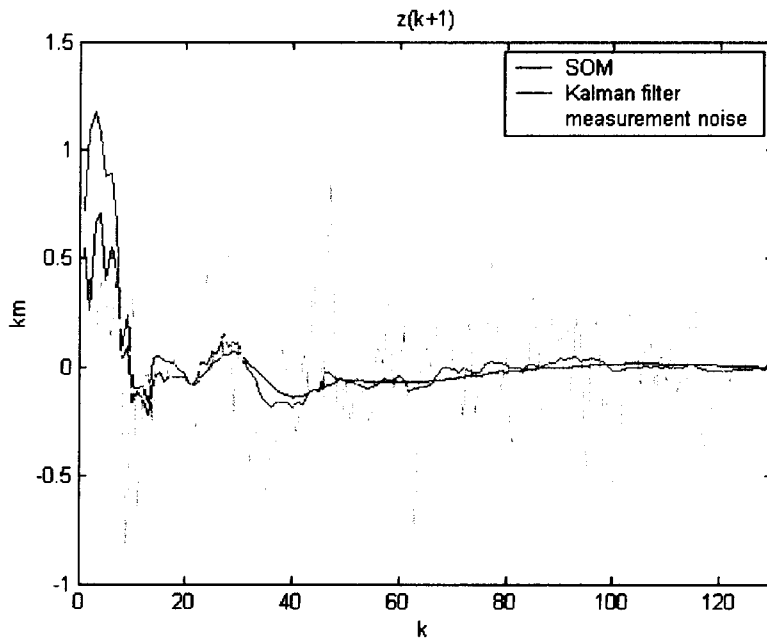


圖 6-50 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在  $z$  座標位置的估測值與理想值之間誤差變化情形。

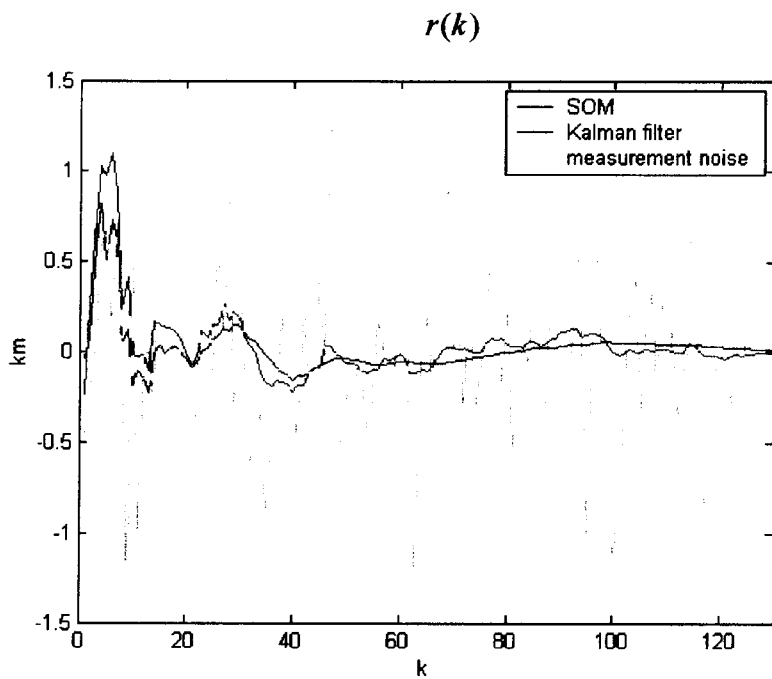


圖 6-51 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

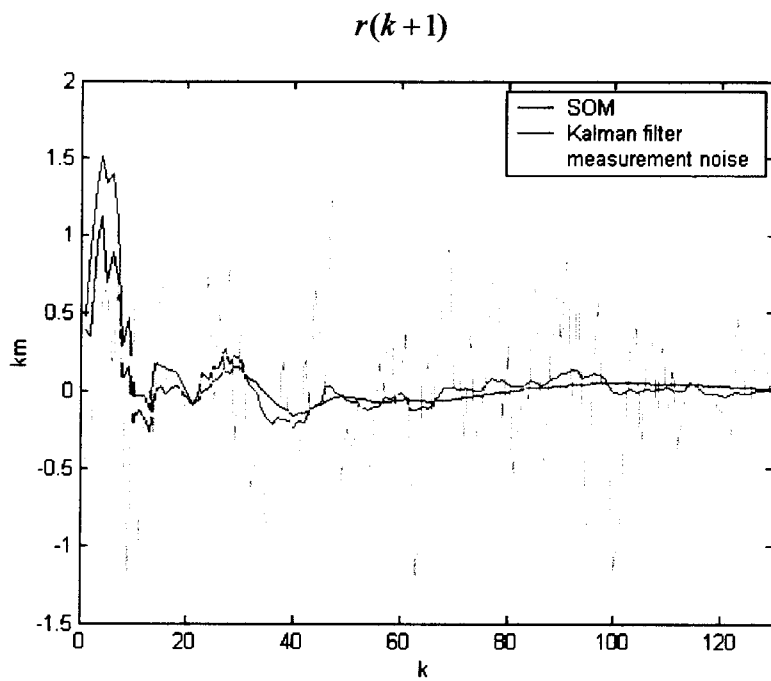


圖 6-52 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $r$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。



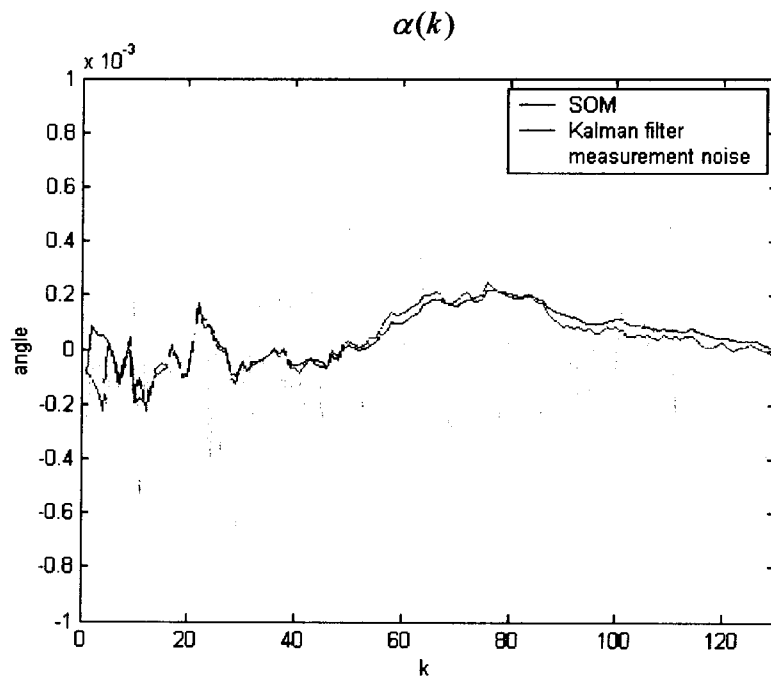


圖 6-53 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

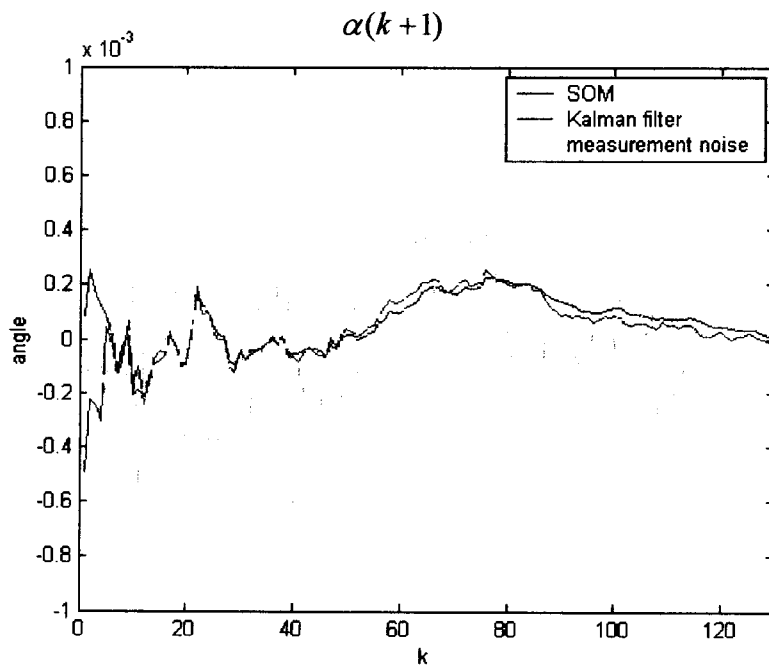


圖 6-54 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\alpha$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

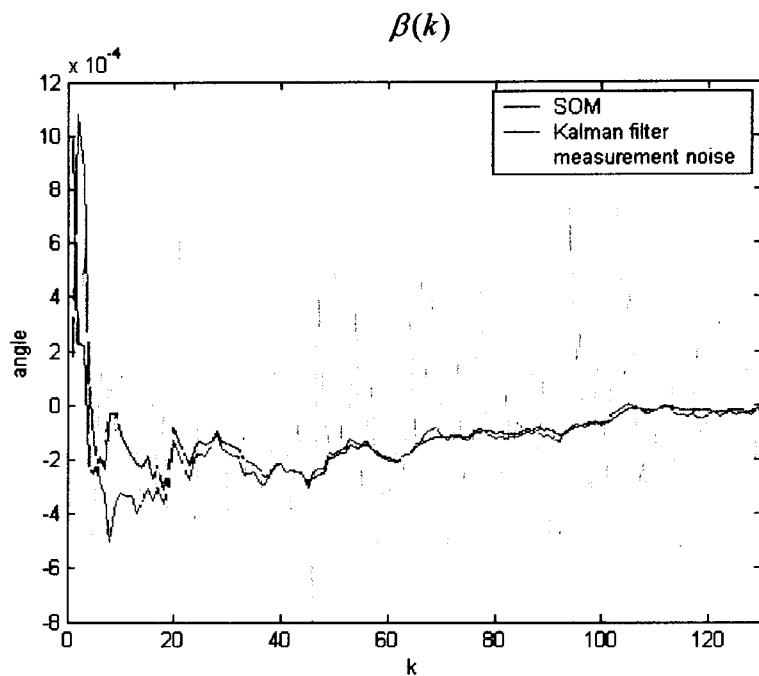


圖 6-55 第  $k$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

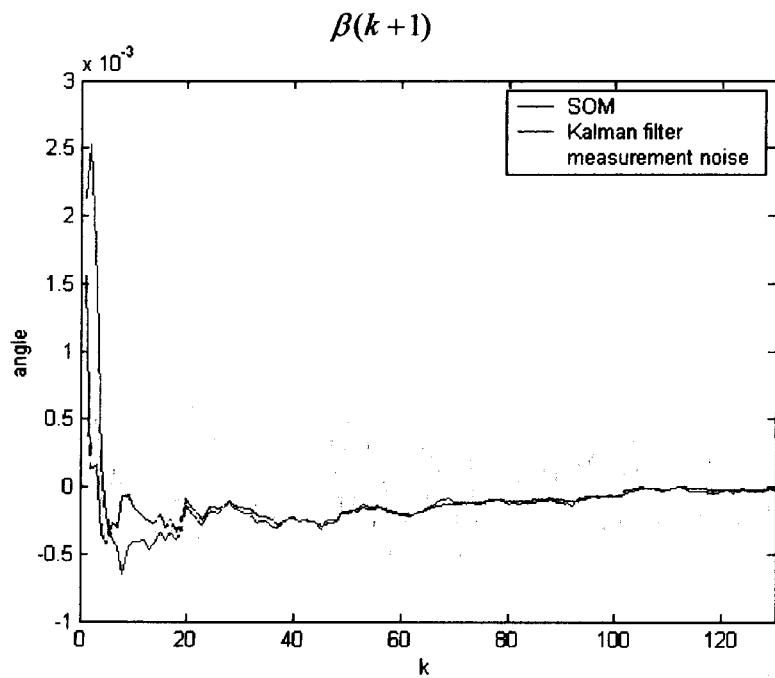


圖 6-56 第  $k+1$  時間 Kalman filter 與 SOM 在雷達座標  $\beta$  的估測值與理想值之間誤差變化情形。

表(三) Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值

	$rms(\Delta x(k))$	$rms(\Delta y(k))$	$rms(\Delta z(k))$
SOM:	0.0300	0.0473	0.0509
Kalman:	0.0358	0.0548	0.0594
	$rms(\Delta \alpha(k))$	$rms(\Delta \beta(k))$	$rms(\Delta \gamma(k))$
SOM:	0.00010	0.0001621	0.072549
Kalman:	0.00008	0.0001629	0.085786
	$rms(\Delta x(k+1))$	$rms(\Delta y(k+1))$	$rms(\Delta z(k+1))$
SOM:	0.038343	0.062551	0.068745
Kalman:	0.046991	0.071180	0.092100
	$rms(\Delta \alpha(k+1))$	$rms(\Delta \beta(k+1))$	$rms(\Delta \gamma(k+1))$
SOM:	0.000107	0.000198	0.096865
Kalman:	0.000094	0.000281	0.119701

由模擬的結果如圖 6-45 至圖 6-56 所示，我們可以看出雖然在選擇良好的初始條件，但增加雜訊的干擾情況下，SOM 與 Kalman filter 的收斂速度差不多快，但由表 (三) 中 Kalman filter 與 SOM 的估測值與理想值之間誤差 rms 值的比較，顯現出 SOM 的效能比 Kalman filter 好。

為了詳細知道預估器在電腦上運算時間，因為學習率與鄰域函數的選擇不同，則運算時間也不同，所以我們選擇固定的學習率為 0.8 與鄰域函數選擇固定的值為 1458 個神經元，在第  $k=100$  stage 時，經過 PC(P4/2Ghz, C 語言)的運算時間大約為 0.25s，所以在以上學習率與鄰域函數的選擇下，在第  $k < 100$  stage 電腦的運算時間是小于 0.25s。如果學習率與鄰域函數的選擇，是隨著時間函數遞減的話，則在第  $k=100$  stage 時的運算時間會小于 0.25s，所以我們所提出的雷達預估器，在運算的時間上，應該不是很大的困擾。

## 7. 結論

本計畫主要在建立不同彈道飛彈軌跡模式，以利雷達在初期即可對 TBM 的種類、彈道軌跡彈著點與彈道軌跡發射點等做精確預測，在本計畫中也將飛彈軌跡方程式依不同的假設條件整理出來，並以數值模擬比較其中的差異，如此，對往後彈道軌跡的判別會很有助益。我們也描述出彈道飛彈的三種不同飛行軌跡階段，包括：動力飛行階段、自由飛行階段及重返階段；並且提出了我們所設計的飛彈攔截軌跡 3D 動畫呈現模擬程式。在彈道軌跡辨識方面，我們提出利用非監督式自我組織的學習網路配合非線性的運動模型，應用在高速多目標運動軌跡的追蹤，模擬結果展現了所提方法的成效，對於飛彈高速運動，在一個未知的環境中，雜訊干擾的大小無法精確得知，且無法選擇良好的初始條件時，我們所提出的方法不須事先知道這些條件的情況下，也可以達到良好的目標運動軌跡追蹤效果。

## 參考資料

- [1] K. Arbenz, "Proportional Navigation of Nonstationary Targets," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-6, No. 4, pp. 455-457, 1970.
- [2] E. Z. Axelband, and F. W. Hardy, "Quasi Optimal Proportional Navigation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, No. 6, pp. 620-626, 1970.
- [3] A. T. Alouani, P. Xia, T. R. Rice, and W. D. Blair, "A two-stage Kalman estimator for state estimation in the presence of random bias and for tracking maneuvering targets," Proc. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2059-2062, 1991.
- [4] K. Becker, "Closed-form Solution of Pure Proportional Navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 26, No. 3, pp. 526-532, 1990.
- [5] J. O. Cappellari, C. E. Velez and A. J. Fuchs, "Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System," *Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland*, April, 1976.
- [6] L. Chin, "Application of neural networks in target tracking data fusion," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 30, no. 1, pp. 281-287, 1994.
- [7] S. A. Harp and T. Samad, "Genetic optimization of self-organizing feature maps," Proc. International Joint Conference on Neural Networks, pp. 341-346, 1991.
- [8] F. J. Hale, "Introduction to Space Flight," *Prentice Hall*.
- [9] Y. Kashiwagi, "Prediction of Ballistic Missile Trajectories," *Stanford Research Institute Menlo Park, California*, June, 1968.
- [10] T. Kohonen, "The self-organizing map," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 78, no. 9, pp. 1464-1480, 1990.
- [11] Y. S. Kim, H. S. Cho, and Z. Bien, "A New Guidance Law for Homing Missile," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 3, pp. 402-404, 1985.
- [12] T. Kohonen, E. Oja, O. Simula, A. Visa, and J. Kangas, "Engineering applications of the self-organizing map," *Proceedings of the IEEE*, Vol. 84, no. 10, pp. 1358-1384, 1996.
- [13] S.-C. Lee and C.-Y. Liu, "Trajectory Estimation of Reentry Vehicles Using on-Line Input Estimator," *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 808-815, 1999.
- [14] H.-J. Lin, "A Study of Missile Interception And Spacecraft Landing on an Asteroid," *A Thesis for the Degree of Master in Control Engineering, National Chiao Tung University*, June, 1995.
- [15] D. M. Ma, "Introduction to Ballistic Missiles," *Technical Report, System Development Research Laboratory, Department of Aerospace Engineering, Tamkang University*, Sept., 1996.
- [16] J. L. Meriam, *Dynamics*, 2nd Ed., SI version, Wiley, New York, 1975.
- [17] T. M. Martinez, H. J. Ritter, and K. J. Schulten, "Three-dimensional neural net for learning visuomotor coordination of a robot arm," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 1, no. 1, pp. 131-136, 1990.

- [18] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical system using neural network," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 1, no. 1, pp. 4-27, 1990.
- [19] D. H. Platus, "Ballistic Re-entry Vehicle Flight Dynamics," *J. of Guidance and Control*, Vol. 5, pp. 4-16, Feb. 1982.
- [20] Z. Paul, "Tactical and Strategic Missile Guidance Second Edition," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*.
- [21] G. V. Puskorius and L. A. Feldkamp, "Neurocontrol of nonlinear dynamical systems with Kalman filter trained recurrent networks," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 5, no. 2, pp. 279-297, 1994.
- [22] K. V. Ramachandra, "A Kalman tracking filter for estimating position, velocity and acceleration from noisy measurements of a 3-D Radar," *Electro Technology*, Vol. 33, pp. 66-76, 1989.
- [23] P. S. Sastry, G. Santharam, and K. P. Unnikrishnan, "Memory neuron networks for identification and control of dynamical systems," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 5, no.2, pp. 306-319, 1994.
- [24] J. J. E. Slotine, and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Inc., Jew Jersey, 1991.
- [25] J. L. Speyer, and K. D. Kim, "A Passive Homing Missile Guidance Law Based on New Target Maneuver Model," *AIAA-90-3378-CP*, pp. 561-570, 1990.
- [26] M. C. Su and H. T. Chang, "Fast self-organizing feature map algorithm," *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 11, no. 3, pp. 721-733, 2000.
- [27] S. Vathsal, and M. N. Rao, "Analysis of Generalized Guidance Laws for Homing Missile," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 31, No. 2, pp. 514-521, 1995.
- [28] V. Vaidehi, N. Chitra, C. N. Krishnan, and M. Chokkalingam, "Neural network aided Kalman filtering for multitarget tracking applications", *Radar Conference, 1999. The Record of the 1999 IEEE*, 1999, Page(s): 160-165
- [29] C. D. Yang, and C. C. Yang, "Analytical Solution of Three-Dimensional Realistic True Proportional Navigation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 3, pp. 569-577, 1996.
- [30] C. D. Yang, and F. B. Yeh, "General Guidance Law for Homing Missile," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 25, No. 2, pp. 197-211, 1989.
- [31] P. J. Yuan, and J. S. Chern, "Solutions of True Proportional Navigation for Maneuvering and Nonmaneuvering Targets," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vo. 15, No. 1, pp. 268-271, 1992a.
- [32] P. J. Yuan, and J. S. Chern, "Ideal Proportional Navigation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vo. 15, No. 5, pp. 1161-1165, 1992b.
- [33] P. Zarchan, "Proportional Navigation and Weaving Targets," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 5, pp. 969-974, 1995.
- [34] J. Zhongliang, X. Hong, and Z. Xueqin, "Information fusion and tracking of maneuvering targets with artificial neural network," *Proc. IEEE International Conference on Neural Networks*, pp. 3403-3408, 1994.

## 附錄 A. 數值模擬方法

為了能比較不同的飛彈軌跡方程式之間的差異，我們必須對線性與非線性常微分方程式做數值模擬，由於，這些微分方程式通常沒有 closed-form 的解，因此，必須利用數值積分方法去解這些方程式。目前，有許多的數值積分方法使用在解微分方程式上，我們選擇利用二階 Runge-Kutta 數值積分方法來做數值模擬，這是因為其簡單易懂且可使程式容易設計，更重要的是它可提供精確的解以供模擬之需。現在，簡單的介紹此數值積分方法。

設一階微分方程如下所示：

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A-1})$$

其中， $t$  表時間。利用二階 Runge-Kutta 數值積分方法，下一積分區間( $h$ )時的  $x$  值可以下式表示：

$$x_{K+1} = x_K + \frac{h \cdot f(x, t)}{2} + \frac{h \cdot f(x, t+h)}{2} \quad (\text{A-2})$$

其中，下標  $K$  表目前的區間， $K+1$  表新的區間。由上式可發現，新的  $x$  值是由上一個  $x$  值加上在時間  $t$  的微分項和在時間  $t+h$  的微分項成比例的項，如此，可利用此  $x$  的遞迴關係式來解所有的  $x$  值。