行政院國家科學委員會專題研究計畫　期中進度報告

監控製程變異之 SPC 方法(1/2)

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2118-M-009-007-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：國立交通大學統計學研究所

計畫主持人：洪志真

計畫參與人員：江俊達、黃立芬、徐雅甄、薛瑛萱

報告類型：精簡報告
報告附件：出席國際會議研究心得報告及發表論文
處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 5 月 29 日

行政院國家科學委員會專題研究計畫期中報告

監控製程變異之 SPC 方法(1/2)

計畫編號：NSC 91-2118-M-009-007-

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：洪志真　交大統計所

共同主持人：

計畫參與人員：江俊達、黃立芬、徐雅甄、薛瑛萱 交大統計所

一、中文摘要

本研究主要探討如何監控多變量製程變異增加的問題。我們利用多變量單邊檢定建構偵測製程變異增加的控制圖。考慮 $H_0:\Sigma=\Sigma_0$ *vs.* $H_1:\Sigma\geq\Sigma_0$ 且 $\Sigma\neq\Sigma_0$，其中 Σ 為所監控品質特性的共變異矩陣及 Σ_0 為在控制狀態下的製程變異，並且分 Σ_0 已知或未知兩種情形來討論。我們導出二者之概似比檢定統計量，並用靴環法得出管制界限。針對此控制圖之績效問題，我們經統計模擬對幾種 Σ 的變化比較平均連串長度，並以一個實例和模擬例子，證實所提出的單邊檢定方法對多變量製程變異增加的問題在偵測能力上有相當不錯的效率，且與允許多變量製程變異性可增加或減少之雙邊檢定方法作比較，也有較佳的偵測效率。

關鍵詞：多變量控制圖、製程變異、單邊概似比檢定、靴環法、平均連串長度

Abstract

In this work, a control chart for detecting increases in multivariate process variation is proposed. The control chart is constructed based on the one-sided likelihood ratio test (LRT) for testing $H_0:\Sigma=\Sigma_0$ versus $H_1:\Sigma\geq\Sigma_0$ and $\Sigma\neq\Sigma_0$, where Σ is the covariance matrix of the quality characteristic vector of interest and Σ_0 is the in-control process covariance matrix. For each case of Σ_0

known and unknown, we derive the LRT statistic and then obtain the control limit of the LRT-based control chart by the Monte Carlo method. A comparative simulation study further shows that the proposed control chart outperforms the control chart based on the two-sided LRT in terms of the average run length. The applicability and effectiveness of the proposed control chart are demonstrated through a real example and two simulated examples.

Keywords: Multivariate control chart、Process variation、One-sided likelihood ratio test、bootstrap、Average run length

二、緣由與目的

統計製程管制(Statistical Process Control, 簡稱 SPC)乃是一些使製程穩定和經由降低變異性以改善製程能力的統計工具。管制圖(control charts)是統計製程管制的其中一種工具，可以用來偵測製程的改變，它是最廣泛被使用的 SPC 工具。

在許多實際狀況下，製程可能需要監控的品質特性有兩個或兩個以上，此時需考慮利用多變量 SPC 的方法來管制此一多變量製程。考慮有 p 個相關的品質特性之多變量製程，從線上作業中隨機抽取一組合理子群(rational subgroups)的樣本，假設此樣本的每一觀察值均為多變量常態分配 $N_p(«,\Sigma)$ ，其中平均值向量 μ 和共變異矩陣 Σ 是未知的。

在以往大部分的多變量品質管制研究中，多是致力於製程平均數向量 μ 的控制，很少把焦點放在監控共變異矩陣 Σ，這是由於 Σ 所牽涉到的分布理論很複雜及監控 Σ 的重要性較不受到重視，但近年來已有較多的研究在監控多變量製程變異上。

Alt (1985)提供一個監控多變量製程變異的方法，重點放在

$$H_0:\Sigma=\Sigma_0 \quad vs. \quad H_1:\Sigma\neq\Sigma_0$$

的雙邊檢定，其中 Σ 為所監控品質特性的共變異矩陣及 Σ_0 為在控制狀態下已知的製程變異。Alt and Bedewi (1986)提出兩個監控 Σ 之管制圖，一種管制圖是以概似比準則為基礎，利用概似比檢定統計量；另一種管制圖是利用樣本的廣義變異數來當成多變量製程變異性的測度，即是使用樣本共變異矩陣 S 的行列式 $|S|$ ，稱之為 $|S|$ 管制圖。

Tang and Barnett (1996a,1996b)在考慮合理子群及管制值 Σ_0 是已知或未知兩種情形下，提出對多變量製程變異的監控方法。在雙邊檢定中，對 Σ_0 為已知或未知兩種情形分別提出各自的檢定統計量，並且以模擬方法去比較他們所提方法的檢定力比現存的其他方法好。

Yeh, Huwang, and Wu (2002)引進一新的管制圖—指數加權移動概似比管制圖(Exponentially Weighted Moving Likelihood Ratio Control Chart)來偵測多變量製程變異性的變化。此法乃是利用檢定兩個獨立母體的共變異矩陣是否相等的概似比檢定統計量，取自然對數後所建構的指數加權移動平均管制圖。文中經由實際例子和統計模擬證實所提出的管制圖對多變量製程變異性的變化有相當不錯的偵測效率。

上述文獻均是利用雙邊檢定來偵測多變量製程變異性的變化，Σ的增加或減少均是偵測的對象；然而在大部分的製程中，我們比較擔心的是Σ的增加而不是減少。在此情形下共變異矩陣的單邊檢定對監控製程失控(out of control)狀態應該會比雙邊檢定來得敏感。所以本研究將探討如何來監控多變量製程之變異是否在統計管制(in statistical control)狀態的問題，但我們的焦點是放在製程的變異是否有增加。

考慮單邊檢定

$$H_0:\Sigma=\Sigma_0 \quad vs. \quad H_1:\Sigma\geq\Sigma_0 \text{ 且 } \Sigma\neq\Sigma_0 \text{ ，} \tag{2.1}$$

其中$\Sigma\geq\Sigma_0$代表$\Sigma-\Sigma_0$為半正定矩陣。以下是有關共變異矩陣Σ的單邊檢定的文獻。

Calvin (1994)討論Σ_0已知的情形。他將單邊檢定

$H_0:\Sigma=\Sigma_0 \quad vS. \quad H_1:\Sigma\geq\Sigma_0$ ？ $\Sigma\neq\Sigma_0$

分成兩個步驟的檢定：

(1) $H_0:\Sigma=\Sigma_0 \quad vs. \quad H_1:\Sigma\geq\Sigma_0$

(2) $H_1:\Sigma\geq\Sigma_0 \quad vs. \quad H_2:\Sigma\neq\Sigma_0$

此結果與(2.1)之單邊檢定是同義的。但對這種兩步驟的方法，我們必須做兩個管制圖來監控；若第一步的管制圖及第二步的管制圖全部在控制外，我們才說製程變異增加，所以 Calvin 的方法在製程監控上比只做一個管制圖來得複雜，因此我們不考慮使用此法。

Sakata (1987)中有討論管制值Σ_0未知的情形，文中對兩個多維常態母體導出檢定(2.1)之概似比檢定統計量且在兩個母體樣本數相等的情況下，導出檢定統計量的近似分布，但檢定統計量的分布與近似分布很複雜，所以在管制值Σ_0為未知時我們亦不考慮此方法。

另外，要提出四篇文獻是與我們要檢定(2.1)所得到的概似比檢定統計量結果很相似，主要差別在於他們所用的模型與我們不相同。Anderson, Anderson, and Olkin (1986)中，是針對有隨機效應的多變量單因子模型且在有重覆(replication)的平衡(balanced)情形中，當效應及誤差為多變量常態分布且效應的共變異矩陣Θ為半正定及Θ具有最大秩($rank$)的條件下，找Θ的最大概似估計量$\hat{\Theta}$，假設$rank(\Theta)=k$，其假設檢定為

$$H_0:k\leq k_0 \quad vs. \quad H_1:k_0<k\leq k_1 \text{ ，} \tag{2.2}$$

其中k_0,k_1為給定的數。Anderson, Anderson, and Olkin (1986)給(2.2)的概似比檢定

統計量 a 及 $\hat{\Theta}$。Anderson (1989) 針對 (2.2)導出當 $p=2$ 時 $T=-2\log a$ 的近似分布 Y。若檢定是否有隨機效應，也就是當 $k_0=0$ 和 $k_1=p$時，即是檢定

$$H_0:\Theta=0 \quad versus \quad H_1:\Theta\neq 0 \text{。} \tag{2.3}$$

Anderson (1989)也寫出(2.3)的概似比檢定統計量，與我們所要導出的概似比檢定統計量表現型態很相似。Amemiya, Anderson, and Lewis (1990)中利用蒙第卡羅模擬方法對 $p\geq 3$，找出(2.2)之檢定統計量的近似分布之分位數(quantile)估計值的表。而在 Kuriki (1993)中則對一般性的 p，導出(2.2)之檢定統計量之近似分布，並且給 $p=2$ 到 $p=14$ 之近似分布分位數的表。

三、結果與討論

當製程在管制中，我們考慮製程的平均數向量 μ 的管制值 $«_0$ 為未知，而共變異矩陣 Σ 的管制值為 Σ_0。我們利用概似比檢定做為決策法則，分別導出當管制值 Σ_0 為已知及未知情形時(2.1)的檢定統計量。

假設在控制之下之共變異矩陣為 Σ_0 且為已知。我們在時間 t 時，從線上作業中隨機抽取的一組個數為 n 之合理子群，$\{X_{tj}, j=1,\cdots,n\}$ 為一組取自 p 維常態分配 $N_p(«,\Sigma)$ 的隨機樣本，其中 μ 、Σ 為未知，我們利用此樣本來檢定製程變異是否有增加。首先定義：

$$\overline{X}_t=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{tj} \quad , \quad B_t=\sum_{j=1}^{n}(X_{tj}-\overline{X}_t)(X_{tj}-\overline{X}_t)' \text{，} t=1,2,\cdots \text{，}$$

則 B_t 具有自由度為 $n-1$，尺度矩陣(scale matrix)為 Σ 之 Wishart 分布，我們記為 $B_t\sim W_p(n-1,\Sigma)$。亦即 $\overline{X}_t$ 和 $S_t=B_t/n$ 為時間 t 線上作業中 n 個觀察值的樣本平均數和樣本共變異矩陣。此處 S_t 除以 n 而不是除以 $n-1$ 的原因是要避免後面證明的複雜性。為簡單計，假設 S_t 為正定矩陣。經過相當複雜的推導，我們導出此檢定的概似比統計量為

$$a=\begin{cases}\prod_{i=1}^{p^*}[\,d_i\exp\{-(d_i-1)\}\,]^{\frac{n}{2}} & \text{, 若 } p^*>0\\ 1 & \text{, 若 } p^*=0\end{cases}$$

其中 $d_1\geq\cdots\geq d_p>0$ 為 $|\,S_t-d\Sigma_0|=0$ 的根，p^* 為 $d_i>1$ 的個數。令檢定統計量為 $T=-2\log a$

$$= \begin{cases} n\sum_{i=1}^{p^*}\left[\,(d_i-1)-\log d_i\,\right] & ,\text{若 } p^*>0 \\ 0 & ,\text{若 } p^*=0 \end{cases}$$

(3.1)

假設 μ_0 和 Σ_0 為未知。因此我們必須在製程為管制中時，從製程中取得 m 組樣本大小為 n 的訓練樣本(training sample)來估計 μ_0 和 Σ_0。假設訓練樣本 X_{ij}，i=1,2,…,m, j=1,2,…,n，是 m 組取自常態分配 $N_p(\mu_0\,,\Sigma_0)$ 的隨機樣本。定義：

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{mn}\ ,\quad A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\bar{\bar{X}})(X_{ij}-\bar{\bar{X}})'$$ 其中 $\bar{\bar{X}}$ 和 $S_0 = A/(mn)$ 為訓練樣本中 mn 個觀察值的樣本平均數和樣本共變異矩陣。則 A 具有 Wishart 分布，$A \sim W_p(mn-1\,,\Sigma_0)$。$S_0$ 除以 mn 的原因與前同。為簡單計，假設 S_0 為正定矩陣。經過相當複雜的推導，我們導出一個新的概似比檢定統計量

$$a = \begin{cases} \prod_{i=1}^{p^*}\left[\dfrac{w\ \ _i}{(w\ \ _i+1-w)}\right]^{\frac{mn+n}{2}} & ,\text{若 } p^*>0 \\ 1 & ,\text{若 } p^*=0 \end{cases}$$

其中 $\ _1 \geq \cdots \geq \ _p > 0$ 為 $\left|\,S_t - \ \ S_0\right| = 0$ 的根，$w=\dfrac{1}{m+1}$，p^* 為 $\ _i > 1$ 的個數。如前，令檢定統計量

$$T = -2\log a = \begin{cases} (mn+n)\sum_{i=1}^{p^*}[\log(w\ \ _i+1-w) - w\log\ \ _i] & ,\text{若 } p^*>0 \\ 0 & ,\text{若 } p^*\leq 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

現利用上述(概似比)檢定統計量來建構單邊檢定管制圖。因為管制統計量 T 是非負的，所以我們只考慮管制上限(upper control limit, UCL)，令管制下限(lower control limit, LCL)等於 0。因此若管制統計量 T 大於管制界限，即表示製程失控。至於如何求得管制界限，因為管制統計量 T 的分布不好求，我們利用模擬的方法來求得管制界限。

若製程在穩定狀態下，控制變異的管制界限之產生是跟 p,n 及 $S_t\Sigma_0^{-1}$ 的特徵值(eigenvalues) $d_1,\cdots,d_p$ 有關(或 p,n,m 及 $S_tS_0^{-1}$ 的特徵值 $\ _1,\cdots,\ _p$ 有關)，但我們可以證明，不論多變量製程的共變異矩陣是為何，所產生的管制界限皆會相等，因此我們可藉由 $N_p(0\,,I_p)$ 的多變量常態製程來產生控制變異的管制界限。證明

如下：

簡 單 計 S_t, Σ_0 均為正定。令 $d_1 \geq \cdot$設$\geq d_p > 0$ 為 $\left| S_t -\right.$假$\left.\Sigma_0 \right| = 0$ 的根。

因為 Σ_0 為對稱正定矩陣，所以唯一存在一個對稱正定矩陣 $\Sigma_0^{1/2}$ 使得 $\Sigma_0 = (\Sigma_0^{1/2})(\Sigma_0^{1/2})$，我們將 $(\Sigma_0^{1/2})^{-1}$ 記為 $\Sigma_0^{-1/2}$。令 $Z_{tj} = \Sigma_0^{-1/2} X_{tj}$，則 Z_{tj}，j=1,2,…,n，是一組取自常態分配 $N_p(0, I_p)$ 的隨機樣本，且

$$\overline{Z}_t = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{tj} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\Sigma_0^{-1/2} X_{tj}) = \Sigma_0^{-1/2}\overline{X}_t ,$$

$$S_t^{(z)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Z_{tj} - \overline{Z}_t)(Z_{tj} - \overline{Z}_t)' = \Sigma_0^{-1/2} S_t \Sigma_0^{-1/2}$$ 分別為 n 個觀察值的樣本平均數和樣本共變異矩陣，則 $\overline{X}_t = \Sigma_0^{1/2}\overline{Z}_t$ 和 $S_t = \Sigma_0^{1/2} S_t^{(z)} \Sigma_0^{1/2}$。令 $a_1 \geq \cdots \geq a_p > 0$ 為 $\left| S_t^{(z)} - aI_p \right| = 0$ 的根，而由 $\left| S_t - d\Sigma_0 \right| = \left| \Sigma_0^{1/2} S_t^{(z)} \Sigma_0^{1/2} - d\Sigma_0^{1/2}\Sigma_0^{1/2} \right|$

$$= \left| \Sigma_0^{1/2}(S_t^{(z)} - dI_p)\Sigma_0^{1/2} \right| = \left|\Sigma_0\right| \left| S_t^{(z)} - dI_p \right|$$

可知 $\left| S_t - d\Sigma_0 \right| = 0$ 與 $\left| S_t^{(z)} - aI_p \right| = 0$ 有相同的根，亦即 $d_i = a_i$，$i = 1,2,\cdots p$，也就是 $S_t\Sigma_0^{-1}$ 的 p 個特徵值與 $S_t^{(z)}$ 的 p 個特徵值是相同的。所以，製程在控制下，由 $S_t\Sigma_0^{-1}$ 的特徵值與 $S_t^{(z)}$ 的特徵值分別所產生的 T 分布是相同的，故 T 分布是不隨多變量製程共變異矩陣不同而有所改變。

以下我們分別以 Σ_0 為已知及未知情形來討論如何求得管制界限。令第一型誤差機率為 ~。

我們利用靴環法來找管制界限，其模擬的步驟如下：

1. 給定 $p, n, \sim$ 的值
2. 生成一組大小為 n 的新樣本，且這 n 個觀察值皆服從 $N_p(0, I_p)$，並由(3.1)計算統計量 T。
3. 重覆步驟 2 共 N 次，然後找出這 N 個 T 值的第$(1-\sim)$樣本分位數。
4. 重覆步驟 3 共 b 次，然後求此 b 個第$(1-\sim)$樣本分位數的平均值。此平均值即定為在步驟 1 狀況下所模擬估計的管制界限 $CL_{p,n,\sim}$。

對 $p = 2,3,4,5$ 個品質特性及樣本大小 $n = 5, 10, 15, 20, 25$ 和 $\sim = 0.05,\ 0.01,\ 0.0027$

之組合下，各模擬 N=1,000,000 次及 b=100 次，算出在不同 $p, n, \sim$ 組合下的管制界限及管制界限的標準差。從結果可以觀察到：

- 對相同的 p、$\sim$，當 n 愈大時，管制界限 $CL_{p,n,\sim}$ 愈大，這是因為檢定統計量 T 與 n 成正比。
- 對相同的 n、$\sim$，當 p 愈大時，管制界限 $CL_{p,n,\sim}$ 愈大。
- $(1-\sim)$愈大，管制界限的標準差會愈大。

當 Σ_0 為未知時，與前所述相同，在製程控制下，T 之分布是不隨多變量製程共變異矩陣的不同而有所改變，因此，在不失一般性下，我們可以藉由 $S_t^{(z)}(S_0^{(z)})^{-1}$ 的特徵值所產生之 T 分布來決定某特定切點，當成管制界限。同樣的，我們可利用靴環法來找管制界限，其模擬的步驟類似，只有在步驟 1 多給定 m 值、步驟 2 從 $N_p(0, I_p)$ 生成 m 組樣本大小為 n 的 mn 個訓練樣本，並由(3.2)計算統計量 T，如此即可求得管制界限 $CL_{p,m,n,\sim}$。

對 $p=2,3,4,5$ 個品質特性、訓練樣本組數 m=25, 30, 35, 40, 45, 50,55, 60, 65, 70, 80, 90, 100、樣本大小 $n=5$ 和 $\sim=0.05, 0.01, 0.0027$ 之組合下，各模擬 N=1,000,000 次及 b=100 次，算出在不同 $p, m, n, \sim$ 組合下的管制界限及管制界限的標準差。從結果可以觀察到一些與 Σ_0 已知情形之類似結果：

- 對相同的 p、n、$\sim$，當 m 愈大時，管制界限 $CL_{p,m,n,\sim}$ 愈小，會收斂至一個值。
- 對相同的 m、n、$\sim$，當 p 愈大時，管制界限 $CL_{p,m,n,\sim}$ 愈大。
- $(1-\sim)$愈大，管制界限的標準差會愈大。

接著，我們利用模擬實驗來比較單邊與雙邊管制圖的平均連串長度表現。考慮一 2 維的雙變量常態製程。若 Σ_0 已知，考慮觀察值個數 $n=5$、10；若 Σ_0 未知，則考慮訓練樣本組數 $m=25$、50、樣本大小 $n=5$。兩者 $\sim$ 均為 0.0027，也就是在製程穩定下 $ARL_0 \approx 370$。我們重覆的次數 $K=50{,}000$ 次。依前述，在不失一般性下，可假設 $\Sigma_0 = I_p$，因此在失控狀態下的共變異矩陣為 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Delta_1 & {}^\circ\sqrt{\Delta_1\Delta_2} \\ {}^\circ\sqrt{\Delta_1\Delta_2} & \Delta_2 \end{bmatrix}$，其中 Δ_i，$i=1,2$ 為第 i 個品質特性其變異數所增加的倍數及 $^\circ$ 為兩個品質特性的相關係數。由模擬結果，我們觀察到：

- 單邊的 ARL_1 都比雙邊的 ARL_1 小，表示單邊偵測製程變異增加的能力比雙邊

偵測製程變異增加的能力好。

- n或m愈大，偵測變異增加能力愈好。
- 當n或m固定時，變異愈大愈容易被偵測出來。
- 當Δ_1,Δ_2,n固定時，$^{\circ}$增加，而ARL_1愈小，表示相關係數增加時偵測變異增加能力愈好。

我們也應用本研究所提出的方法去監控一個晶圓資料實例及兩個模擬例子，表現結果都證明我們的方法對偵測製程變異增加的能力有相當不錯的表現。

一般而言，EWMA 管制圖對製程變異性有小變動較敏感。若應用 EWMA 的想法於本文中之管制統計量 T，應該可以用來偵測製程變異的較小變動。目前我們正在研究 EWMA 單邊製程變異管制圖之建構與表現。兩個管制圖建構完成後，對多變量製程變異性作管制，可考慮同時使用我們所提之管制圖和其相對應之 EWMA 管制圖來偵測製程變異性增加，此將可發展成一有價值的管制機制。

四、計劃成果自評

This is a two-year project. So far, the project has been well executed. Three graduate students have been well trained in this area of research. The research result described above has been written up in a technical report (in English) and will be submitted for publication to a well-known international journal fairly soon. The control chart developed under this project is useful in practice. The continuing research is on going. The schedule of the proposed research has been met, even is ahead.

Currently, we are working on an extension of this research, studying the EWMA version of the proposed control chart. The preliminary results show that the EWMA control chart is more effective when the process variation shift is small. With both charts available, more range of the variation shifts can be covered by the proposed monitoring technique.

五、參考文獻

1. Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (2nd Edition). Wiley, New York.
2. Alt, F. (1985). Multivariate Quality Control, *Encyclopedia of Statistical Sciences* **6**, pp.110-122, S. Kotz and N. L. Johnson, eds. Wiley, New York.
3. Alt, F. B. and Bedewi, G. E. (1986). SPC of Dispersion for Multivariate Data. *American Society for Quality Control,* pp.248-254.
4. Anderson, B. M., Anderson, T. W., and Olkin, I. (1986). Maximum Likelihood
5. Estimators and Likelihood Ratio Criteria in Multivariate Components of

Variance. *The Annals of Statistics* **14**, pp.405-417.

6. Anderson, T. W. (1989). The Asymptotic Distribution of the Likelihood Ratio Criterion for Testing Rank in Multivariate Components of Variance. *Journal of multivariate Analysis* **30**, pp.72-79.
7. Amemiya, Y., Anderson, T. W., and Lewis, P. A. (1990). Percentage Points for a Test of Rank in Multivariate Components of Variance. *Biometrika* **77**, pp.637-641.
8. Calvin, J. A. (1994). One-Sided Test of Covariance Matrix with a Known Null Value. *Communications in Statistics－Theory and Methods* **23**, pp. 3121-3140.
9. Kuriki, S. (1993). One-Sided Test for Equality of Two Covariance Matrices. *The Annals of Statistics* **21**, pp. 1379-1384.
10. Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory.* Wiley, New York.
11. Sakata, T. (1987). Likelihood Ratio Test for One-Sided Hypothesis of Covariance Matrices of Two Normal Populations. *Communications in Statistics －Theory and Methods* **16**, pp. 3157-3168.
12. Tang, P. F. and Barnett. N. S. (1996a). Dispersion Control for Multivariate Processes.*Australian Journal of Statistics* **38**, pp. 235-251.
13. Tang, P. F. and Barnett. N. S. (1996b). Dispersion Control for Multivariate Processes－Some Comparisons. *Australian Journal of Statistics* **38**, pp. 253-273.
14. Yeh, B., Huwang, L. and Wu, Y. F. (2002). A Likelihood Ratio Based EWMA Control Chart for Monitoring Multivariate Process Variability. Technical Report, Department of Applied Statistics and Operations Research, Bowling Green State University and Institute of Statistics, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan.