

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

三維 Timoshenko 梁在等角速度下的非線性穩態變形及自由  
振動分析 (II)

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-009-024-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程學系

計畫主持人：蕭國模

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 8 月 20 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 三維 Timoshenko 梁在等角速度下的非線性穩態變形

### 及自由振動分析(II)

#### The nonlinear steady state deformation and free vibration analysis of three Dimensional Timoshenko Beam under constant angular velocity(II)

計畫編號：NSC 91-2212-E009-024

執行期限：91 年 08 月 1 日至 92 年 07 月 31 日

主持人：蕭國模 國立交通大學機械工程學系

計畫參與人員：黃于哲

#### 中文摘要

本研究主要是利用共旋轉法來推導雙對稱三維 Timoshenko 旋轉梁的運動方程式，並探討三維旋轉梁振動的自然頻率。旋轉梁存在一個穩態，本文中的振動是指基於穩態的微小振動。本文利用非線性梁理論的一致線性化、d'Alembert 原理和虛功原理在旋轉元素座標上推導梁元素的節點變形力和節點慣性力。在推導過程中保留穩態變形的節點參數和其微分到二次項以及扭率的三次項，而振動部份保留節點參數和其微分到一次項。本文最後以數值例題探討不同斷面、不同長度、不同轉速及不同設定角對旋轉梁自然頻率的影響。

**關鍵詞：**Timoshenko 梁、穩態解、自然頻率

#### Abstract

The equations of motion for the doubly symmetric three dimensional rotating Timoshenko beam is derived using a co-rotational total Lagrangian finite element formulation combined with rotating frame method. The natural frequency of the infinitesimal free vibration of the rotating beam measured from the position of the steady-state deformation of rotating beam is investigated.

Both the element deformation nodal forces and inertia nodal forces are systematically derived by consistent linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle

in the current rotating element coordinates. The terms up to the second order of nodal parameters, their spatial derivatives, and the third order term of twist rate corresponding to the steady-state deformations are all retained. However, only the terms up to the first order of nodal parameters, and their spatial derivatives and time derivatives corresponding to the free vibration are retained.

Numerical examples are studied to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method and to investigate the effect of angular velocities, setting angles, cross sections and slenderness ratios of the beam on the natural frequency of the rotating beams.

**Keywords :** Timoshenko beam, steady state, natural frequency

## 1. 緒論

對於旋轉梁的振動分析已有很多的研究[1-5]。文獻[7]中將旋轉梁的運動方程式的時間函數去掉求得旋轉梁的穩態平衡方程式，再利用 Galerkin Method 及牛頓法求得旋轉梁在穩態時，軸向變形與扭轉變形的數值穩態解。

本文擬將[7]中提出的方法作適當的修改，採用有限元素法來探討三維 Timoshenko 旋轉梁的振動行為。本文採用文獻[7]中提出的共旋轉法及三維 Timoshenko 旋轉梁元素的變形機制，再以虛功原理和有限元素法配合非線性梁理論的一致線性化推導梁元素節點慣性力和節點變形力，再將其組合成系統的非線性運動方程式。本研究擬將穩態解代入運動方程式，以求得旋轉梁的振動方程式，進而分析旋轉梁振動的自然頻率和振動模態，並探討旋轉速度和扭轉剛度對自然頻率的影響。

## 2. 理論推導

### 2.1 問題的描述

如圖. 1.所示，考慮一具均勻斷面且雙軸對稱之三維的 Timoshenko 梁，支承端以設定角  $S_0$  剛接在一圓柱上，該圓柱以等角速率  $\Omega$  繞其軸心旋轉。本文中考慮梁的軸向位移及旋轉，和兩個側方向的位移及旋轉。

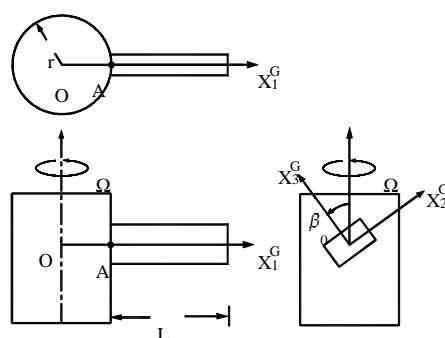


圖. 1. 旋轉梁之三視圖

## 2.2 基本假設

- (1) 梁為等斷面、雙對稱的 Timoshenko 梁。
- (2) 梁變形後，其斷面形狀不變，且斷面平面內的應變可以忽略。
- (3) 斷面之軸向翹曲位移量(Warping Displacement)為扭轉率與該斷面之 Saint Venant 翹曲函數之乘積。

## 2.3 座標系統

本研究採用共旋轉法(co-rotational formulation)，為了描述梁元素及整個系統的運動，本文用了三個座標系統：

- (1) 總體旋轉座標系統， $X_i^G$  ( $i=1, 2, 3$ ) (如圖. 2).
- (2) 梁斷面座標系統， $x_i^S$  ( $i=1, 2, 3$ ) (如圖. 2).
- (3) 旋轉元素座標系統： $x_i^E$  ( $i=1, 2, 3$ ) (如圖. 2).

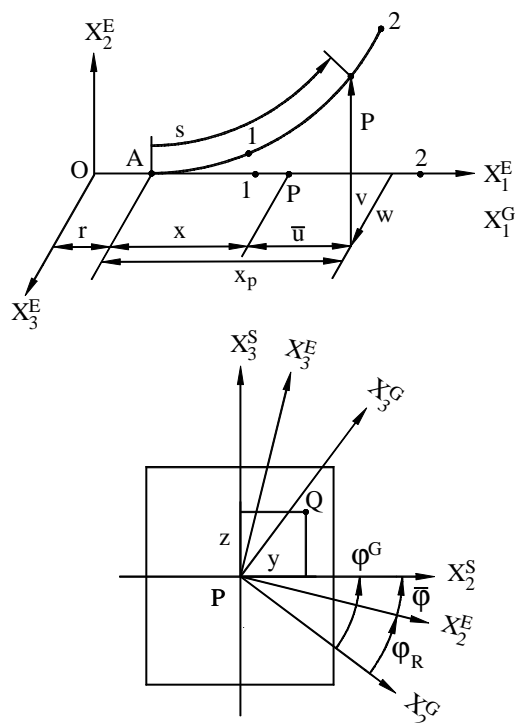


圖. 2. 座標系統

## 2.4 Timoshenko 梁的變形描述

令Q點(如圖. 2)為梁元素中的任意點，P點為Q點在形心軸上的對應點，即P點與Q點位於梁的同一斷面上。在旋轉座標上，Q點在變形前後的位置向量可以分別表示如下：

$$\mathbf{r}_0 = (r+x)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r+x+\bar{u})\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 \\ &+ y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S + \bar{\zeta}_{1,x}\check{S}(y,z)\mathbf{e}_1^S = r_i\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{u} = u_s(x) + u(x,t) \quad (3)$$

$$\bar{\zeta}_1 = \zeta_s(x) + \zeta_1(x,t) \quad (4)$$

其中  $t$  為時間， $r$  為旋轉圓柱的半徑， $x$  為梁的固定端(A 點)到 P 點在梁變形前的距離， $x_1 \leq x \leq x_2$ ， $x_j$  為元素節點  $j(j=1, 2)$  變形前的  $X_1^E$  或  $X_1^G$  座標， $u_s(x)$ 、 $\zeta_s(x)$  分別為穩態的軸向位移與軸向扭轉角。因  $u_s(x)$  及  $\zeta_s(x)$  為有限量(Finite quantity)故在本文中  $\bar{u}$  及  $\bar{\zeta}_1$  不視為一擾動量， $u, v, w$  是 P 點分別在  $X_1^E$ 、 $X_2^E$ 、 $X_3^E$  軸方向上的微小位移， $\bar{\zeta}_{1,x}$  為梁的扭轉率， $\check{S}(y,z)$  為 Saint Venant 翹曲函數(warping function)， $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$  為在  $X_i^E$  軸方向的單位向量， $\mathbf{e}_i^S (i=1, 2, 3)$  為在  $X_i^S$  軸方向的單位向量， $\mathbf{e}_i^S$  在變形前和  $\mathbf{e}_i$  的方向一致。 $\mathbf{e}_i$  及  $\mathbf{e}_i^S (i=1, 2, 3)$  在旋轉座標系統中的關係可表示如下

$$\mathbf{e}_i^S = \mathbf{R}\mathbf{e}_i \quad (5)$$

其中  $\mathbf{R}$  為旋轉矩陣。

## 2.5 旋轉梁的運動方程式

系統在總體座標中定義的非線性運動方程式可以表示為

$$\mathbf{\emptyset} = \mathbf{F} = \mathbf{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}) + \mathbf{F}^I(\Omega, \bar{\mathbf{Q}}, \dot{\bar{\mathbf{Q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{Q}}}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{\emptyset}$  為系統不平衡力(unbalanced force)， $\mathbf{F}$  為系統節點內力， $\mathbf{F}^D$  為與變形力有關的節點內力， $\mathbf{F}^I$  為與慣性力有關的節點內力。 $\bar{\mathbf{Q}}$  為系統位移向量，其包含穩態位移及振動：

$$\bar{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}(t) \quad (7)$$

其中  $\mathbf{Q}_s$  為和時間無關的穩態位移， $\mathbf{Q}(t)$  為振動位移。

## 2.6 旋轉梁的穩態平衡方程式

旋轉梁在穩態時的位移不是時間函數，所以(7)式中的節點位移  $\mathbf{Q}$  可以表示成

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_s \quad (8)$$

將(7)式代入(6)可以得到

$$\mathbf{\emptyset} = \mathbf{F}_s^D(\mathbf{Q}_s) + \mathbf{F}_s^I(\mathbf{Q}_s, \Omega) = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中  $\mathbf{F}_s^D$ 、 $\mathbf{F}_s^I$  為元素節點力的組合。

## 2.7 旋轉梁的振動方程式

本研究中旋轉梁的振動是以穩態為平衡點的振動，將(7)式代入(6)式並消去穩態解可以得到如下的旋轉梁振動方程式

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \Omega) = \mathbf{0} \quad (10)$$

(10)式即為三維旋轉 Timoshenko 梁以穩態為平衡點的線性振動方程式，其中  $\mathbf{F}$  是由元素內力組合而成。

若振動方程式(10)式有自然頻率存在，則其解的形式可表示如下[9]：

$$\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{E}} \cdot e^{i\lambda t} \quad (11)$$

其中  $i$  為虛數  $\sqrt{-1}$ ， $\lambda$  為自然頻率， $\dot{\mathbf{E}}$  為對應於  $\lambda$  的振態。

將(11)代入(10)式可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(\lambda, \Omega) &= (\mathbf{K} + \Omega\lambda\mathbf{C} + \lambda^2\mathbf{M} + \Omega^2\mathbf{M}_\Omega) \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{K}$ 、 $\Omega\lambda\mathbf{C}$ 、 $\lambda^2\mathbf{M}$ 、 $\Omega^2\mathbf{M}_\Omega$  是由梁元素的剛度矩陣  $\mathbf{k}$  和質量矩陣  $\mathbf{m}$  經座轉換後對應組合而成。在某一轉速下， $\mathbf{H}$  為振動頻率  $\lambda$  的函數，所以滿足  $\det|\mathbf{H}(\lambda)| = 0$  之  $\lambda$  即為(10)式的自然振動頻率。

## 3. 數值例題與結果

在本研究中梁的長度  $L$  與斷面高度比，在橢圓斷面指的是  $L/a$ ，其中  $a$  為橢圓的半長軸。本研究中假設固定端為抑制翹曲(Warping restraint)。

本研究的參數中， $S_o$  為設定角， $k$  為旋轉梁的無因次轉速。 $N$  為該例題所使用的元素數目， $K_i$  ( $i=1,2,3\dots$ ) 指轉速為零時該頻率依大小為第  $i$  個無因次自然頻率。本研究中將自然頻率分為 AI、BI、CI、DI ( $I=1, 2, 3\dots$ ) 四種類：

AI- 轉速為零時，第 I 個軸向振動

BI- 轉速為零時，第 I 個斷面主軸 y 方向的側向振動

CI- 轉速為零時，第 I 個斷面主軸 z 方向的側向振動

DI- 轉速為零時，第 I 個扭轉振動

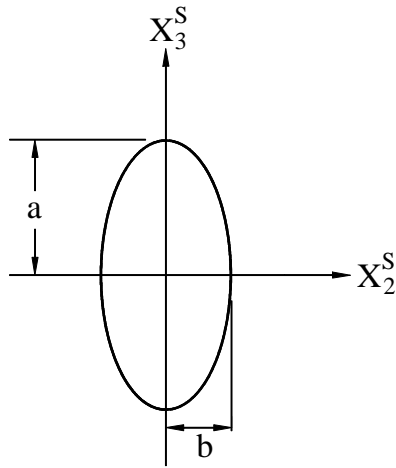


圖. 3. 梁的斷面圖

如圖. 3.所示，本例題為橢圓斷面， $a/b=20$ ， $L/a=50$ 。圖. 4.為設定角 $s_o=45^\circ$ 、 $k=0.1$ 的穩態位移分佈圖。

圖. 5.為橢圓斷面在不同轉速下的自然頻率曲線圖。而 $s_o=45^\circ, 90^\circ$ 之XI(  $X=A, B, C, D$  ;  $I=1, 2, 3, \dots$ )曲線和 $s_o=0^\circ$ 的對應XI曲線在 $k=0$ 時有共同的起點。由圖. 5.可以看出當斷面為橢圓斷面時BI的頻率隨轉速增加而明顯的增加，CI的頻率增加較小，扭轉振動DI的頻率則隨轉速變動不大。如圖. 5.中的A點所示，依照圖. 6.的模態可以判斷設定角 $45^\circ$ 時B3頻率的大小在 $k$ 等於0和0.01之間超越了C1頻率的大小。

圖. 7.在設定角為 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 下的自然頻率。隨著轉速的增加，設定角的影響越大，其中BI的自然頻率隨著角度增加而上升，CI的自然頻率隨著角度增加而下降。

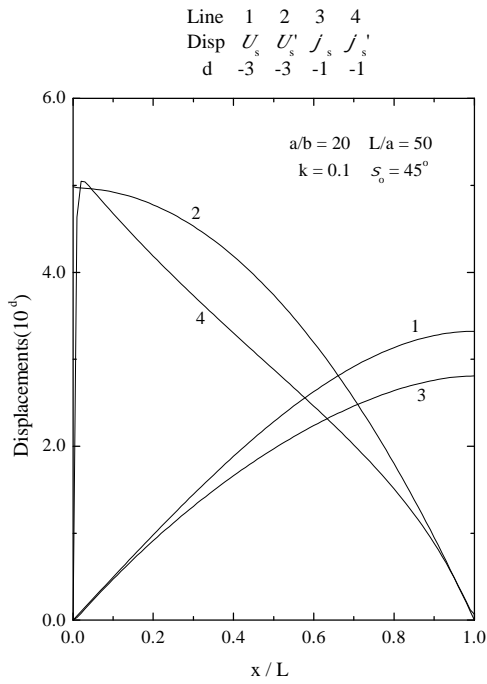


圖. 4. 位移分佈圖

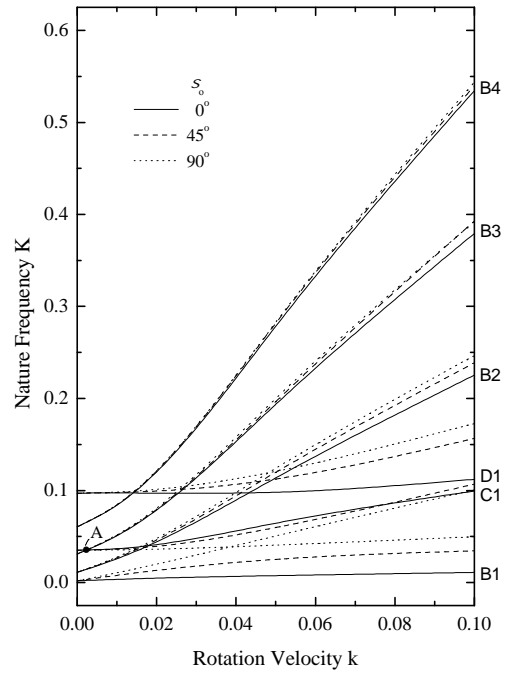


圖. 5. 轉速—自然頻率曲線圖

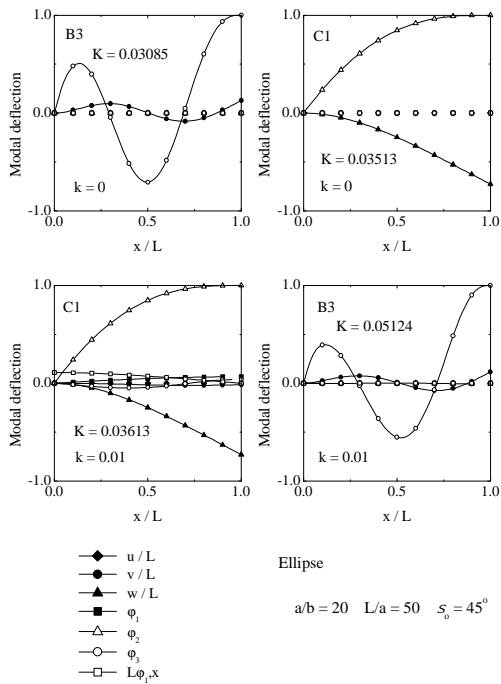


圖. 6. 在不同轉速下的振態

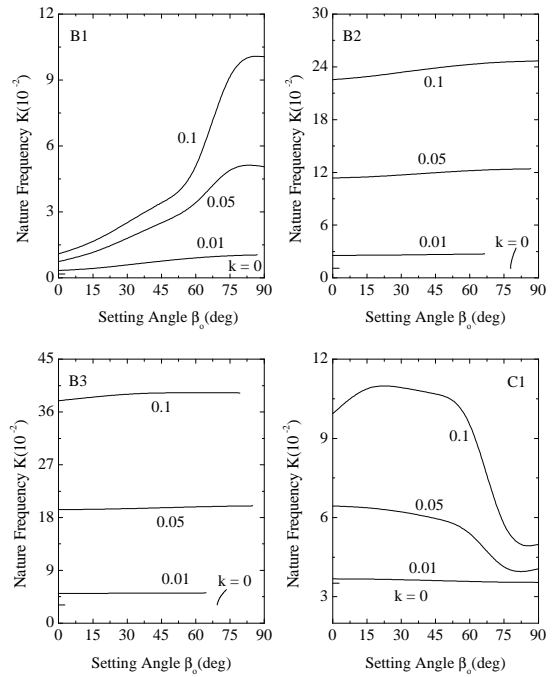


圖. 7. 設定角—自然頻率曲線圖



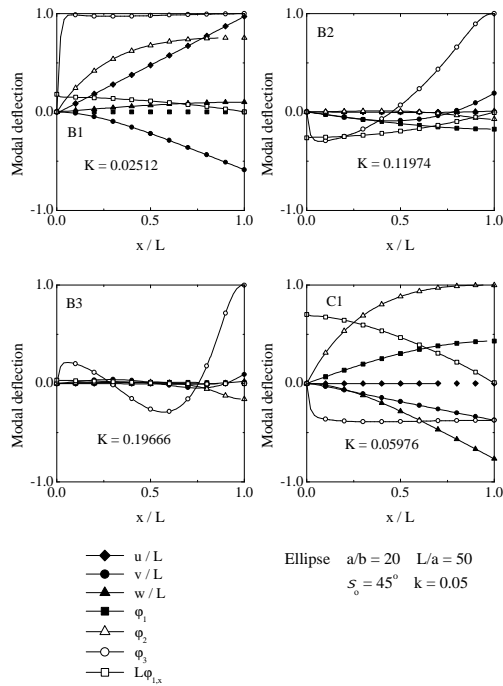


圖. 8. 振動模態圖

當轉速  $k=0$  時，各組的振動是互相獨立的，但是當轉速增加時，耦合的現象會越來越明顯。如圖. 8. 在設定角  $45^\circ$ 、 $k=0.05$  時，兩個側方向會有明顯的耦合發生。

#### 4. 結論

本文利用共旋轉法，非線性梁理論的一致線性化，虛功原理，d'Alembert 原理及有限元素法，在旋轉元素座標上推導出三維 Timoshenko 梁元素的運動方程式，再將其組合成系統的非線性運動方程式。由本文的推導可以看出在旋轉梁的振動問題中，即使是線性振動，仍然需由完整的非線性梁理論，才能推導出正確的運動方程式。本文在分析旋轉梁的自然振動時，考慮梁的軸向位移及旋轉，和兩個側方向的位移及旋轉。

由數值結果我們可以觀察到以下的結論：

- (1) 當  $I_y \neq I_z$  且設定角不為  $0$  度或  $90$  度時，會有扭轉變形的產生，且這個扭轉變形會與軸向變形產耦合作用。當  $I_y$  和  $I_z$  的值差距越大，所產生的扭轉變形也越大。
- (2) 旋轉梁的振態會相互的耦合，當細長比超過一定值時，在低頻的自然頻率上三維梁和二維梁會出現明顯的差異。因此要達到可靠的結果，三維梁的分析是必須的。
- (3) 當轉速  $k=0$  時，各組的振動是互相獨立的，但是當轉速增加時，耦合的現象會越來越明顯。

## 5 參考文獻

- [1] Schilhansl M. J. , “Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam,” ASME Journal of Applied Mechanics= 25, pp. 28-30, 1958.
- [2] Eick C. D. and Mignolet M. P., “Vibration and Buckling of Flexible Rotating Beams,” AIAA Journal, 33, No. 3, pp. 528-538, 1995.
- [3] Yokoyama T. , “Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beam,” International Journal of Mechanical Science, 30, No. 10, pp. 743-755, 1988.
- [4] 洪船島, “旋轉梁結構之振動分析 ,” 國立交通大學機械工程研究所, 碩士論文, 臺灣, 新竹, 1997.
- [5] 周志芳, “旋轉梁之自由振動的級數解法 ,” 國立交通大學機械工程研究所, 碩士論文, 臺灣, 新竹, 1998.
- [6] Hsiao K. M., “Corotational Total Lagrangian Formulation for Three-Dimensional Beam Element,” AIAA Journal, 30, No. 3, pp. 797-804, 1992.
- [7] 黃建志, “旋轉三維Timoshenko梁之運動方程式及穩態解 ,” 國立交通大學機械工程研究所, 碩士論文, 臺灣, 新竹, 2000.
- [8] Hsiao K. M., Lin J. Y., “A Consistant Co-rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams”, Comput. Method Appl. Mech. Engng. 169, pp. 1-18, 1999.
- [9] Meirovitch L., “A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems,” AIAA Journal, Vol. 12