

# 發展一利用非結構性網格之可壓縮/不可壓縮黏性流計算方法

## A Method Development for Compressible/Incompressible Viscous flow Using Unstructured Grids

計劃編號：NSC 91-2212-E-009-051

執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日

主持人：崔燕勇 國立交通大學機械系教授

一、中文摘要（ 關鍵詞： 非結構性網格，  
不可壓縮黏性流，有限體積法）

在數值計算中為應付不規則幾何形狀，最好的方法是採用非結構性網格，過去最常用的是有限元素法。本計劃則將發展一套適用於非結構性網格之有限體積計算法則，此方法較之有限元素法更進一步允許混用任何形狀之格子，同時並保有有限差分法之稀疏性（sparse），因而可使用較有效率的疊代方法求解。本計劃預計分成數年進行，在此第一年本計劃主要係針對低速不可壓縮黏性流場，建立並測試一完整的適用於任意形狀非結構性網格解析程序，此程序以採用解壓力修正方程式為基礎。

英文摘要：（ Keywords：unstructured grids, incompressible viscous flow, finite volume method）

To cope with irregular geometry, the best way is to employ the unstructured grids. In the past, the finite element method is the most popular tool. In this study, we will develop a finite volume method, suitable for the unstructured grids. This method allows the use of grids with arbitrary polygons. Besides, comparing with the finite element method, it possesses the sparse characteristics of the finite difference method. Thus, iterative methods can

be adopted as the equation solvers. This project will be completed in several years. In this first year a methodology dealing with incompressible viscous flow and suitable for polygonal unstructured grids will be developed and tested to validate its utility and efficiency. This methodology is based on a pressure-correction method.

二、計劃緣由目的

計算流力經過數十年的發展已達到成熟的階段，可針對層流解完整的 Navier-Stokes 方程式，即便是紊流場也可利用現有發展的紊流模式得到相當可靠的結果，因此已成為不論是學術研究、或是工程應用上不可或缺的工具。在計算流力的發展中主要可分成有限元素及有限差分／有限體積兩種離散方式。有限元素法最大的優點在於其可採用非結構性多邊形的格子，尤其是三角形（或在三維計算中為四面體）格點的應用，在一極度複雜的幾何形狀中，此三角形格點較之四邊形容易建立。有限差分或是有限體積法在早期使用卡式座標或圓柱座標，因而網格必須正交，其後利用座標轉換可使用與邊界吻合的非正交網格，但其仍屬結構性四邊形網格，因此對複雜的流場外形仍有相當的限制。近年來，尤其是在有限體積法方面，已發展出可應用如有限元素法般的非結構性非

四邊形的網格，如此一來大大提昇了有限體積法的應用性，此外較之有限元素法此法更具下列優點：(一)有限體積法以高斯的散度定理為理論基礎，因此符合物理上的守衡律。(二)相較於有限元素法，此法保有疏落性 (sparse)，因此不須如有限元素法般須用直接解法求解 (direct method)，而可採較經濟且較有效率的疊代方法 (iterative method)。(三)在有限元素法中通常格子的幾何形狀為一致的，但在本計劃所使用的方法中格子形狀允許任意變化，即網格中允許三邊形、四邊形、五邊形等的格子同時存在，如此能允許格子在所須要的地方加密 (local grid refinement)，同時對複雜的幾何形狀有更大的適應性。

### 三、研究方法

一通用傳輸方程式可簡化成下式：

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi$$

在有限體積法中，首先將上述式子對控制容積積分，再利用高斯的散度定理 (divergence theorem) 將對流及擴散項轉化為面積分：

$$\int_s (\rho \vec{V} \phi) \cdot d\vec{s} = \int_s (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\vec{s} + \int_{\Delta v} S_\phi dv$$

此處之有限體積可為任意形狀之多邊形 (見圖一)。利用均值定理 (mean-value theorem) 上式之面積分可轉為差分形式：

$$\int_s (\rho \vec{V} \phi) \cdot d\vec{s} = \sum_{f=1}^n F_f^c = \sum_{f=1}^n (\rho \vec{V} \cdot \vec{s})_f \phi_f$$

$$\int_s (\Gamma \nabla \phi) \cdot d\vec{s} = \sum_{f=1}^n F_f^d = \sum_{f=1}^n (\Gamma \nabla \phi \cdot \vec{s})_f \phi_f$$

對某一面 "e" 對流項的計算採用下列的混合差分計算：

$$F_e^c = F_e^{UD} + \gamma (F_e^{HD} + F_e^{UD})$$

此處上標 UD 代表上風差分法，另一上標 HD 代表一高階差分法， $\gamma$  乃是一介於 0 與 1 之間的數值。

擴散項的表示可有許多表示法，但這些方法多半在從二維問題擴展至三維時須重新推導，且其差分方程式變的複雜許多，下列所用的方法卻完全不須考慮其為二維或三

維。如圖二所示， $\vec{\delta}_{PE}$  為一從 P 至 E 之向量，

$\vec{s}$  是所考慮之定容面 "e" 的表面向量， $\vec{d}$  是

一在  $\vec{\delta}_{PE}$  方向的向量。

$$F_e^d = (\Gamma \nabla \phi \cdot \vec{s})_e = \Gamma_e \nabla \phi_e \cdot \vec{d} + \Gamma_e \nabla \phi_e \cdot (\vec{s} - \vec{d})$$

而  $\vec{d}$  可定義為下列形式：

$$\vec{d} = \frac{s^2}{\vec{\delta}_{PE} \cdot \vec{s}} \vec{\delta}_{PE}$$

擴散通量可由下式近似之：

$$F_e^d = \frac{\Gamma_e s^2}{\vec{\delta}_{PE} \cdot \vec{s}} (\phi_E - \phi_P) + \Gamma_e \nabla \phi_e \cdot (\vec{s} - \vec{d})$$

上式中，面上之梯度可由其相鄰格點近似之：

在本計劃中網格位置排成非交錯式，所有變數儲存在控容中心，在上述對流項及在後面所推導的壓力修正方程式中，需要計算通過控容面上的質量流率，此質通量可由下面方式推估。先計算面上之速度：

$$\vec{V}_e = \overline{\vec{V}_e} - (D_e \nabla p_e - D_e \overline{\nabla p_e})$$

上式中加有上標 "—" 者代表由共用此面相鄰兩點 P 和 E 內插得之，如此面上的質通量可由下式近似求得：

$$\dot{m}_e = \overline{\rho}_e \overline{\vec{V}_e} \cdot \vec{s} - A_E^p [(p_E - p_P) - \overline{\nabla p_e} \cdot \vec{\delta}_{PE}]$$

推導壓力修正方程式時質通量的修正量可表示為：

$$\dot{m}_e^{**} - \dot{m}_e^* = -\overline{\rho}_e D_e \nabla p_e' \cdot \vec{s}$$

$$= -\bar{\rho}_e D_e \nabla p_e' \cdot \bar{d} - \bar{\rho}_e D_e \nabla p_e' \cdot (\bar{s} - \bar{d})$$

$$= A_E^p (p_E' - p_P') - \bar{\rho}_e D_e \overline{\nabla p_e'} \cdot (\bar{s} - \bar{d})$$

令所有流過一控容面上的質通量滿足質量守衡，可得壓力修正方程式：

$$A_P p_P' = \sum_{C=1}^n A_C p_C' + S_{p1} + S_{p2}$$

$$\text{其中 } S_{p1} = \sum_{f=1}^n m_f^*$$

$$S_{p2} = \sum_{f=1}^n \bar{\rho}_f D_f \overline{\nabla p_f'} \cdot (\bar{s} - \bar{d})$$

上式  $S_{p2}$  相當於在使用非正交網格時由於座

標轉換產生之 cross derivative 項，此代表角落格子點的影響，在現今非結構性網格計算中幾乎皆被忽略，但從過去對結構性網格的計算經驗得知，在極為扭曲的網格中忽視此影響將大大減低收斂速率，嚴重時可能造成發散，因此我們將利用 prediction-correction 方法處理此項。

在結構性網格中通常以  $i, j, k$  代表在  $x, y, z$  方向的格點，其前後的格點可以 index +1 或 -1 表示。但在非結構性網格中所有的定容中心點、格子交點及格子面皆須用一系列數字預先定出，另外必須用數個序列列出形成每一定容的格子交點、格面及其周遭的定容點，邊界的格面及格子必須特別列出（見圖三），一般最常見的邊界形態有進口、出口、壁面、對稱面及週期性邊界等，都須特別指明。

#### 四、結果與討論

(1) 首先考慮的是一菱形狀的空穴流 (skew cavity flow)，其上壁面以一等速運動，側壁面與  $y$  軸夾一  $\alpha$  角。圖三所示為  $\alpha=45^\circ$  及  $60^\circ$  時其垂直及水平中心線上速度分佈，計算分別採用四邊形及三角形格點，結果顯示與 benchmark solution 相吻合。由於網格不成

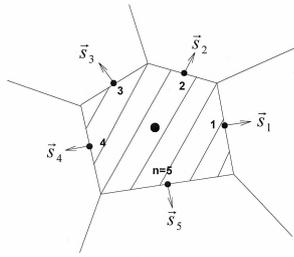
正交時，前述壓力修正方程式中的  $S_{p1}$  項需要

以連續修正的方法處理，圖四顯示於連續修正次數  $k=1, 2, 3$ ，當分別改變壓力及速度鬆弛因子對收斂速度的影響，很明顯的二次修正 ( $k=2$ ) 可得最佳收斂效果。

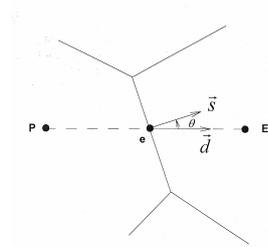
(2) 其次考慮擴張管流，此擴張管與中心線成一夾角，當此夾角為  $90^\circ$  時即為突張管，圖五為在  $Re=56$  及  $114$  時突張管內軸向速度的分佈比較，在低雷諾數 ( $Re=56$ ) 背階後的迴流對稱於中心線並與實驗相符，在下游完全發展流的範圍內，由於實驗速度不滿足 overall mass conservation，因而造成一些差距，在高雷諾數 ( $Re=114$ )，流場成不對稱狀，由與此時流場已出現三維流動的狀況，因此與實驗有較大的差別。圖六為擴張角  $45^\circ$  之擴張管，測試對擴散項及壓力修正方程式採用 over-relaxed approach 及 orthogonal approach，其顯示本文所採用之 over-relaxed approach 較為穩定且有效率。

#### 五、參考文獻

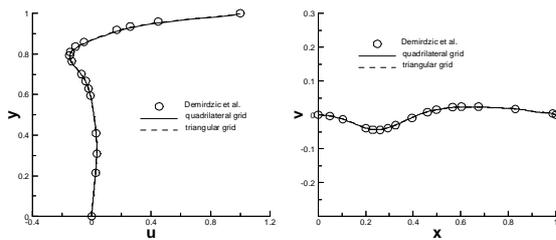
1. Mathur, S. R., and Murthy, J. Y., "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 31, 1997, pp. 195-215.
2. Lai, Y. G., "An Unstructured Grid Method for a Pressure-Based Flow and Heat Transfer Solver," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 32, 1997, pp. 267-281.
3. Thomadakis M., and Leschziner, M., "A Pressure-Correction Method for the Solution of Incompressible Viscous Flows on Unstructured Grids," International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 22, 1996, pp. 581-601.



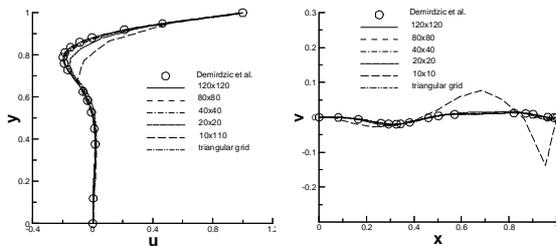
圖一 一任意形狀網格。



圖二 闡釋向量  $\vec{s}$  及  $\vec{d}$ 。

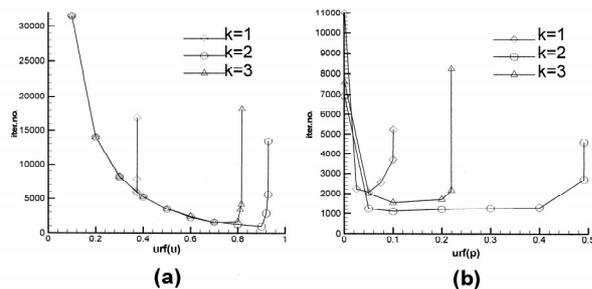


(a)  $\alpha=45^\circ$



(b)  $\alpha=60^\circ$

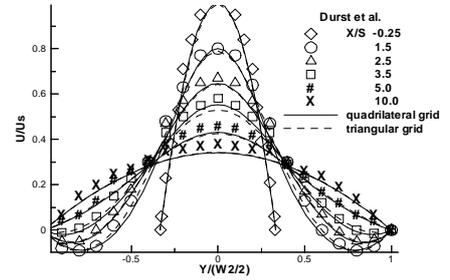
圖三 Skew cavity flow 於  $Re=1000$  中心線上速度分佈比較。



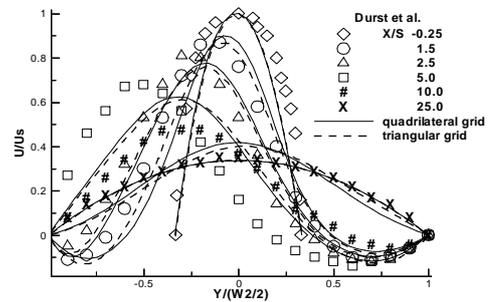
(a)

(b)

圖四 Skew cavity flow 於  $\alpha=60^\circ$  在三種壓力修正次數下改變(a)速度及(b)壓力鬆弛應因子所需疊代次數。

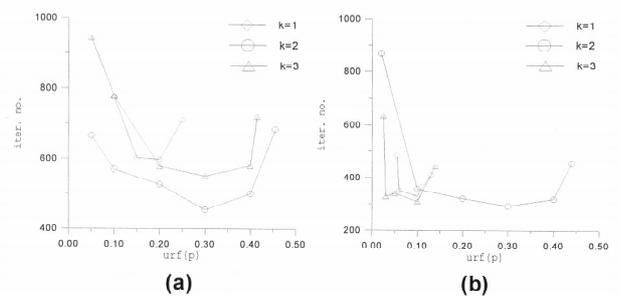


(a)  $Re=56$



(b)  $Re=114$

圖五  $90^\circ$  突張管流中於數個管流位置之速度分佈。



(a)

(b)

圖六  $45^\circ$  擴張管流於  $Re=114$  及三種壓力修正次數下改變速度鬆弛應因子所需疊代次數: (a) over-relaxed approach; (b) orthogonal approach。