

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

計畫編號：NSC 91-2115-M-009-008-

執行期限：91年8月1日至92年7月31日

主持人：翁志文 國立交通大學應用數學系  
weng@math.nctu.edu.tw

92年8月18日

## 一、中文摘要

對於給定的一個簡單圖  $G$ ，我們已知在圖  $G$  為森林的情況下，圖  $G$  的配對多項式恰等於特徵多項式。但這性質不適用於任意圖。這個計畫的一個主要結果是給出一個公式，讓圖  $G$  的特徵多項式可以由一些圖  $G$  的子圖  $H$  的配對多項式做加減運算得到。

關鍵詞：特徵多項式; 配對多項式。

**Abstract** Let  $G$  be a simple graph. It is known that when the graph  $G$  is a forest, the matching polynomial  $\mu(G, x)$  is equal to the characteristic polynomial  $\varphi(G, x)$ . But this is not true in general. In this project, we give a formula for  $\varphi(G, x)$  in terms of  $\mu(H, x)$  for some subgraphs  $H$  of  $G$ .

Keywords: characteristic polynomial; matching polynomial.

## 二、緣由與目的

令  $G$  是一個  $n$  點的圖。  $G$  上的  $r$ -配對是一組個數為  $r$  的邊集且無任何兩個此集合中的邊共點。我們用  $p(G, r)$  來代表此邊集的元素個數。  $p(G, 0)$  規定為 1。  $G$  的配對多項式定義為

$$\mu(G, x) := \sum_{r \geq 0} (-1)^r p(G, r) x^{n-2r}.$$

另一方面圖  $G$  的特徵多項式是

$$\varphi(G, x) := \det(xI - A(G)),$$

此處  $A(G)$  是圖  $G$  的 adjacency matrix。研究配對多項式是一個組合性質的探討，而研究特徵多項式比較接近代數性質的鑽研，兩者交替的運用是代數組合學研究的旨趣與特色。前人研究已知在圖  $G$  為森林的情況下，圖  $G$  的配對多項式恰等於特徵多項式[1, p21]。我們建立載此基礎下寄望得到更進一步的結果。

## 三、結果與討論

如果  $G$  上有一個邊  $e = \{i, j\}$  而且只有唯一一個 cycle  $C$  包含  $e$ ，我們得到

$$\varphi(G, x) = \varphi(G \setminus e, x) - \varphi(G \setminus ij, x) - 2\varphi(G \setminus C, x).$$

一個特別情形是當  $G$  上就只有一個 cycle  $C$  且  $e = \{i, j\}$  是  $C$  上的某邊，我們得到

$$\varphi(G, x) = \mu(G \setminus e, x) - \mu(G \setminus ij, x) - 2\mu(G \setminus C, x).$$

這個式子是將與代數相關  $G$  的特徵多項式完全用組合相關  $G$  的子圖的配對多項式來表示。我們期望將來對  $G$  的條件能更放鬆也能得到好的結果。

## 四、計劃成果自評

此計畫雖得到一具體結論，可惜對圖  $G$  的條件限制太過強，顯得有一點人為而不自然，應該再努力改進。此計畫的部分內容是交通大學碩士生林鼎鈞的碩士論文。

## 五、參考文獻

- 1 D. Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman & Hall, Inc. 1993