

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

總計畫

計畫類別：整合型計畫

計畫編號：NSC91-2212-E-009-019-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：國立交通大學機械工程學系

計畫主持人：金大仁

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 27 日

桁架式三明治複合材料構件的研製 -總計畫

計畫編號：NSC 91-2212-E-009-019

執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日

主持人：金大仁 教授

國立交通大學機械工程學系

一、中文摘要

本計畫將應用理論和實驗的方法來研究桁架式複合材料三明治板件的力學行為。在本年的研究中，將以 Lagrange's 理論為基礎配合 Ritz 方法來求撓性支承複合材料積層板之動態行為，並與實驗結果比較。

關鍵字：複合材料、三明治板、結構力學、振動、自然頻率。

Abstract

In this project, the mechanical behaviors of truss-type laminated composite sandwich plates are studied via both theoretical and experimental approaches. The equations of the flexibly supported laminated composite plates are formulated on the basis of Lagrange's theorem and the responses are approximated using the Ritz method. Vibration experiments are performed and the results used to validate the proposed method.

Keywords : Composite materials, sandwich plate, structural mechanics, vibration, natural frequency.

二、緣由與目的

桁架式複合材料三明治板有重量輕、剛性大和強度高的優點，並具有廣泛的用途。本研究將用 Ritz 方法，選用三種合適的變形函數，並根據 Lagrange's 理論推導撓性支承複合材料板的控制方程式。另外，進行撓性

支承複合材料板的振動實驗，並比較實驗與理論結果之差異。

三、複合材料板的振動分析

3.1 形狀函數

在本研究中利用 Ritz 方法，使用了三種不同的形狀函數，分別是樑之撓度方程、三角函數及契比希夫多項式。

(i) 樑之撓度方程

由材料力學，樑受外力 $P(x)$ 作用下，其撓度滿足以下微分方程式：

$$EI \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = P(x), 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

其中 L 為樑之總長， EI 為撓曲剛度。

由樑之兩端四個邊界條件即可得到樑之撓度方程。此形狀函數是唯一需要根據邊界條件加以推導而得到，因此其收斂性最佳，但邊界不連續時將不適用。

(ii) 三角函數

此變形函數並非是完全之三角函數，其分為兩部分，前四項是典型有限元素法中樑元素之三次多項式：

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \end{aligned} \quad , -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2)$$

$$\phi_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_4(\xi) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3$$

之後才是三角函數：

$$\phi_n(\xi) = \sin(A_n \xi + A_n) \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi + \frac{\pi}{2}\right), n \geq 4 \quad (3)$$

其中 $A_n = \frac{\pi}{2}(n-4)$ 。

(iii) 契比希夫多項式

契比希夫多項式為一傅立葉級數

$$T_n(\xi) = \cos n\theta, -1 \leq \xi \leq 1 \quad (4)$$

其中 $\theta = \cos^{-1} \xi$ ，所以多項式可改寫為

$$\begin{aligned} T_1(\xi) &= \xi \\ T_2(\xi) &= 2\xi^2 - 1 \\ &\text{M} \\ T_{n+1}(\xi) &= 2\xi T_n(\xi) - T_{n-1}(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

3.2 板之振動分析

考慮一撓性支承複合材料板，其幾何示意圖如圖(1)所示。振動板之周圍以彈性懸邊支承，所以複合材料振動板之應變能可表示為

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [\sigma] dV \quad (6)$$

振動板之周圍以彈性懸邊加以支承，彈性懸邊以橫向彈簧 k_L^* 及旋轉彈簧 k_R^* 加以模擬，所以其所產生之應變能為

$$U_B = \frac{k_L^*}{2} \int w^2 dl + \int \frac{k_R^*}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 dl \quad (7)$$

為了考慮彈性懸邊之阻尼所以 k_L^* 及 k_R^* 以複數形式表示，表示如下：

$$k_L^* = k_L(1 + i\eta_L), \quad k_R^* = k_R(1 + i\eta_R) \quad (8)$$

其中 η_L 和 η_R 分別是橫向彈簧及旋轉彈簧之損失因子。

而振動板之動能為

$$T = \frac{\bar{m}}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dy dx \quad (9)$$

其中 \bar{m} 為振動板單位面積之質量。

由 Ritz 方法，以無因次表示，令振動板之撓度方程為

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J C_{ij}(t) \phi_i(\xi) \psi_j(\eta) \\ &= \{C_{ij}(t)\}^T \{\phi_i(\xi) \psi_j(\eta)\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中 C_{ij} 為未定係數， ξ 、 η 為無因次參數， ϕ_i 、 ψ_j 為變形函數，可套用前面所介紹的三種變形函數。根據 Lagrange's 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{C}_{ij}} \right) - \frac{\partial U}{\partial C_{ij}} = 0 \quad (11)$$

其中 $U = U_p + U_B$ ，將可得到典型之模態方程式

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{C}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (12)$$

假設 $\{C_{ij}(t)\} = \{C_{ij}\} e^{i\lambda t}$

所以方程式(12)可改寫成常見之特徵方程

$$(-\lambda^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{C}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (13)$$

其中 $\lambda = \sqrt{\rho h a^4 \bar{\omega}^2 / D_0}$ ，因此即可得到振動板之自然頻率 $\bar{\omega}_i$ 與模態 $\{C\}_i$ 。

四、振動試驗

在振動試驗上使用的設備包括頻譜分析儀(3560C)、激振器、加速規，在實驗前先在試片上繪出適當的激振位置及加速度量測位置，將試片固定於夾具中，試驗簡圖如圖(2)所示。實驗進行時先由頻譜分析儀產生一掃頻(Sweep Sine)訊號，送入激振器以激振試片，並以加速規量測試片之振動訊號傳給頻譜分析儀，分析儀利用快速傅立葉轉換求得複合材料三明治層板的頻率域響應。

本研究中我們所使用之振動板為四層 $[90^\circ/0^\circ]_s$ 及 $[30^\circ/-30^\circ]_s$ 的 Carbon/Epoxy (C/E) 複合材料積層板來進行實驗。其中，部分模態因激振器與加速度規置於該模態的節線

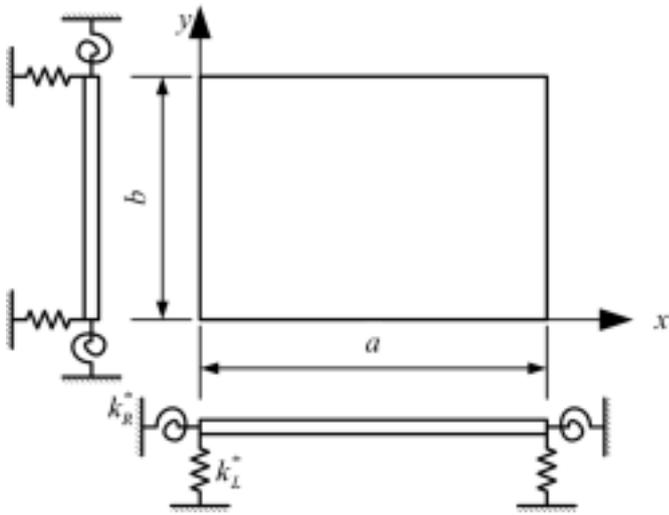
上，所以無法測出。若要量測全部的模態則必須將激振器更換不同位置。

五、結果與討論

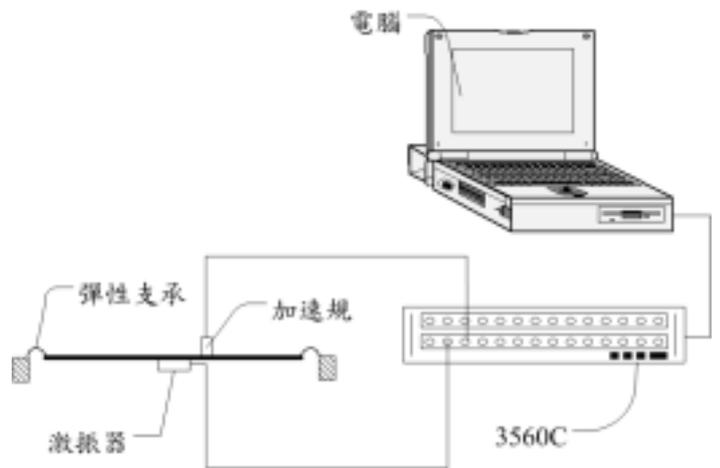
本研究以 Ritz 法來分析複合材料積層板的自然頻率，並與實驗結果比較其差異。表(1)-(6)為各種不同大小、不同疊層、不同懸邊（但四邊懸邊接連續）之振動板自然頻率的理論、實驗與有限元素分析軟體 ANSYS

比較。表(7)-(10)則為懸邊不連續之比較，懸邊分佈則如圖(3)所示。

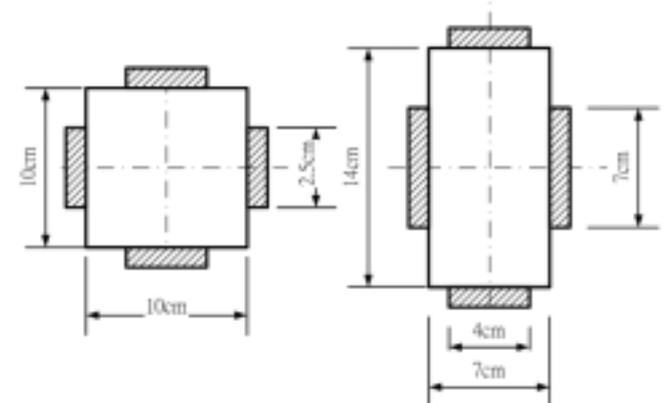
由表中我們可以發現理論分析與實驗結果相比，最大誤差為 9.42%，但多數之誤差在 5%以內，與有限元素分析軟體 ANSYS 之誤差甚至小於 1%，所以可驗證此一分析模型及方法，確可用於預測桁架式複合材料振動板的頻譜響應。



圖(1) 撓性支承複合材料板幾何示意圖



圖(2) 試驗簡圖



圖(3) 不連續懸邊懸邊分佈圖

表(1)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
	[0°/90°] _x ; a = b = 10cm; k _L = 6.5 × 10 ³ N/m ² , η _L = 0.1, k _R = η _R = 0					
分析(i)	63.296	81.405	81.448	143.758	270.297	377.199
分析(ii)	63.299	81.413	81.453	144.016	270.298	377.511
分析(iii)	63.297	81.408	81.453	143.985	270.296	377.411
ANSYS	63.295	84.402	81.445	143.887	270.266	377.176
實驗	63.44	84.38		143.1	273.8	389.1
(誤差)	(0.23%)	(3.66%)		(0.55%)	(1.31%)	(3.16%)

表(2)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[90°/0°] _s ; a = 7 cm, b = 14 cm; k _L = 4.4×10 ³ N/m ² , η _L = 0.1, k _R = η _R = 0						
分析(i)	63.211	99.301	118.235	188.520	304.432	417.520
分析(ii)	75.201	99.310	118.262	188.864	304.440	417.589
分析(iii)	75.198	99.306	118.258	188.827	304.439	417.488
ANSYS	75.200	99.297	118.222	188.689	304.368	417.145
實驗	72.5	100.3		128.1	206.6	323.8
(誤差)	(3.59%)	(1.01%)		(8.23%)	(9.43%)	(6.33%)

表(3)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[30°/-30°] _s ; a = b = 10 cm; k _L = 6.5×10 ³ N/m ² , η _L = 0.1; k _R = η _R = 0						
分析(i)	63.093	80.733	81.852	192.850	225.119	427.889
分析(ii)	63.098	80.741	81.854	192.902	225.211	428.263
分析(iii)	63.095	80.732	81.852	192.839	225.154	427.847
ANSYS	63.092	80.723	81.843	192.740	225.063	427.436
實驗	63.44	84.38		189.2	212.8	430.3
(誤差)	(0.55%)	(4.53%)		(1.84%)	(5.45%)	(0.67%)

表(4)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[30°/-30°] _s ; a = 7 cm, b = 14 cm; k _L = 4.4×10 ³ N/m ² , η _L = 0.1; k _R = η _R = 0						
分析(i)	71.233	97.010	118.651	145.232	245.300	278.800
分析(ii)	71.328	97.032	118.661	145.260	245.508	279.015
分析(iii)	71.324	97.008	118.660	145.238	245.406	278.961
ANSYS	71.325	97.002	118.621	145.196	245.140	278.782
實驗	68.32	95.94		120.3	135.8	240.7
(誤差)	(4.21%)	(1.09%)		(1.42%)	(6.47%)	(1.81%)

表(5)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[0°/90°] _s ; a = b = 10 cm; k _L = 1.11×10 ⁵ N/m ² , η _L = 0.05, k _R = η _R = 0						
分析(i)	236.500	422.618	471.393	595.045	657.470	800.397
分析(ii)	236.374	421.461	471.361	594.315	654.988	799.995
分析(iii)	236.437	421.876	471.542	594.724	655.836	800.925
ANSYS	236.373	421.495	471.326	594.294	654.867	799.687
實驗	235.9	417.2		462.5	594.1	653.1
(誤差)	(0.20%)	(1.02%)		(1.87%)	(0.03%)	(0.27%)

表(6)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[0°/90°] _s ; a = 7 cm, b = 14 cm; k _L = 0.95 × 10 ⁵ N/m ² , η _L = 0.05, k _R = η _R = 0						
分析(i)	235.62	382.472	495.290	584.275	585.713	761.621
分析(ii)	235.451	382.621	494.807	584.443	588.491	761.635
分析(iii)	235.384	382.384	494.552	584.109	585.132	761.096
ANSYS	235.389	382.399	494.512	584.018	585.058	760.795
實驗	236.6	373.3		494.1	588.3	774.1
(誤差)	(0.51%)	(2.38%)		(0.28%)	(0.74%)	(1.75%)

表(7)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[0°/90°] _s ; a = b = 10 cm; k _L = 6.5 × 10 ³ N/m ² , η _L = 0.1, k _R = η _R = 0						
分析(ii)	63.299	81.413	81.453	144.016	270.298	377.511
分析(iii)	63.297	81.408	81.453	143.985	270.296	377.411
ANSYS	63.295	84.402	81.445	143.887	270.266	377.176
實驗	63.44	84.38		143.1	273.8	389.1
(誤差)	(0.23%)	(3.66%)		(0.55%)	(1.31%)	(3.16%)

表(8)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[90°/0°] _s ; a = 7 cm, b = 14 cm; k _L = 6.5 × 10 ³ N/m ² , η _L = 0.1, k _R = η _R = 0						
分析(ii)	67.215	76.120	95.821	149.487	299.725	406.610
分析(iii)	67.213	76.116	95.820	149.457	299.724	406.517
ANSYS	67.211	76.113	95.806	149.343	299.704	406.300
實驗	67.50		71.5	90.94	147.5	300.3
(誤差)	(0.43%)		(6.06%)	(5.08%)	(1.23%)	(0.20%)

表(9)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[30°/-30°] _s ; a = b = 10 cm; k _L = 6.5 × 10 ³ N/m ² , η _L = 0.1; k _R = η _R = 0						
分析(ii)	63.098	80.741	81.854	192.902	225.211	428.263
分析(iii)	63.095	80.732	81.852	192.839	225.154	427.847
ANSYS	63.092	80.723	81.843	192.740	225.063	427.436
實驗	63.44		84.38	189.2	212.8	430.3
(誤差)	(0.55%)		(4.53%)	(1.84%)	(5.45%)	(0.67%)

表(10)

自然頻率	模態					
	1	2	3	4	5	6
[30°/-30°] _s ; a = 7 cm, b = 14 cm; k _L = 4.4 × 10 ³ N/m ² , η _L = 0.1; k _R = η _R = 0						
分析(ii)	55.814	61.757	79.743	121.533	217.553	269.063
分析(iii)	55.811	61.745	79.745	121.524	217.655	268.992
ANSYS	55.688	61.609	79.561	121.249	216.955	268.300
實驗	55.31		60.0	82.5	121.9	217.2
(誤差)	(0.68%)		(2.61%)	(3.69%)	(0.54%)	(0.11%)